

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.М. ЛИФШИЦА

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

Статистика редких событий и модулярная инвариантность

С.К. Нечаев, К. Половников

Приведены простые, основанные на построении "сада Евклида", геометрические аргументы, объясняющие тождественность разного рода распределений, возникающих как результат статистики редких событий. В частности, обсуждаются теоретико-числовые свойства спектральной плотности ансамбля экспоненциально взвешенных линейных полимерных цепей. Показано, что статистика собственных значений соответствующих матриц смежности в разреженном режиме имеет специальную иерархическую структуру, описываемую так называемой функцией попкорна (функцией Томе), которая является разрывной на плотном множестве рациональных чисел. Кроме того, на границах спектра распределение плотности имеет хвосты Лифшица, типичные для андерсоновской локализации в одномерном пространстве. Предложена регуляризация функции попкорна, основанная на голоморфной η -функции Дедекинда, и показано, что иерархическая ультраметрическая структура распределений типа попкорна связана с внутренней $SL(2, \mathbb{Z})$ -модулярной симметрией.

Ключевые слова: модулярная форма, функция попкорна, функция Дедекинда, спектр разреженной матрицы, евклидов сад, модулярная группа $SL(2, \mathbb{Z})$, хвосты Лифшица, андерсоновская локализация

PACS numbers: 02.30.-f, 02.50.-r, 05.40.-a

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038106>

Содержание

1. Введение (106).
2. Спектральная статистика ансамбля экспоненциально взвешенных линейных графов (108).
 - 2.1. Спектральная плотность и функция попкорна.
 - 2.2. Огибающие кривые и хвосты спектральной плотности.
3. От функции попкорна к η -функции Дедекинда (110).
 - 3.1. Некоторые факты о η -функции Дедекинда и связанных с ней рядах.
 - 3.2. Связь между функцией попкорна и η -функцией.
4. Заключение (111).

Список литературы (111).

1. Введение

Так называемая функция попкорна [1], $g(x)$, известная также как функция Томе, имеет много других наименований: функция дождевых капель, функция облака, моди-

фицированная функция Дирихле, функция линейки и др. Это одна из простейших теоретико-числовых функций, обладающая нетривиальной фрактальной структурой (другой известный пример — всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция Вейерштрасса). Функция попкорна определяется на открытом интервале $x \in (0, 1)$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q}, p \text{ и } q \text{ — взаимно просты,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases} \quad (1)$$

Функция попкорна g разрывна в каждой рациональной точке, поскольку для любого рационального числа найдутся бесконечно близкие к нему иррациональные числа, а $g(x)$ обращается в нуль при всех иррациональных x . В то же время нетрудно показать, что g непрерывна во всех иррациональных точках.

Одно из самых красивых воплощений функции попкорна возникает в так называемом саде Евклида. Рассмотрим сад деревьев единичной высоты, расположенных в точках (ap, aq) двумерной квадратной решётки, где p и q — неотрицательные целые числа, a — шаг решётки, $a = 1/\sqrt{2}$. Предположим, мы находимся на линии $N = 1 - t$ между точками А(0, a) и В(a , 0) и наблюдаем сад, выращенный в первом квадранте, вдоль лучей, исходящих из начала координат (0, 0) (рис. 1).

Вдоль этих лучей мы видим только первое открытое дерево со взаимно простыми координатами М(ap, aq), а все другие деревья затенены. Введём вспомогательную систему координат (x, y) с осью x вдоль сегмента АВ и осью y , нормальной к плоскости сада (как показано на

С.К. Нечаев. Междисциплинарный научный центр Понселе, Большой Власьевский пер. 11, 119002 Москва, Российская Федерация; Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: sergei.nechaev@gmail.com

К. Половников. Центр энергетических систем, Сколковский институт науки и технологий, ул. Нобеля 3, 143005 Сколково, Москва, Российская Федерация; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119992 Москва, Российская Федерация
E-mail: kipolovnikov@gmail.com

Статья поступила 24 февраля 2017 г.

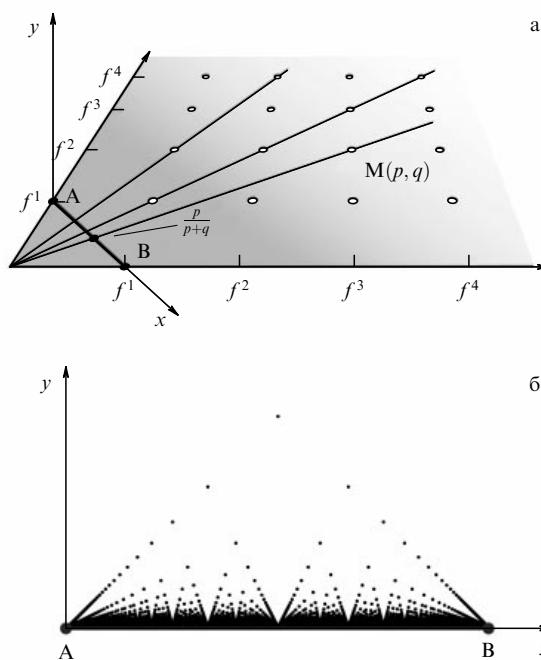


Рис. 1. (а) Построение сада Евклида. (б) Функция попкорна.

рис. 1а). Мы установили начало оси x в точке А, тогда точка В имеет координату $x = 1$. Это хорошая школьная геометрическая задачка — установить, что: 1) с фокусом, расположенным в начале координат, дерево в точке $M(ap, aq)$ бросает тень в точке $x = p/(p+q)$; 2) *кажущаяся высота* этого дерева $1/(p+q)$. Другими словами, диаграмма видимости такого решёточного сада — именемо функция попкорна.

Попкорновское отображение $p/q \rightarrow 1/q$ возникает в диаграмме видимости евклидова сада как чисто геометрический результат. Однако та же структура возникает аналитически и/или может быть получена экспериментально в различных физических и биофизических задачах, например, как распределение коротких нуклеотидных последовательностей (ридов) в экспериментах по секвенированию ДНК [2], в задаче о квантовом $1/f$ -шуме и сдвиге Френеля—Ландау [3], взаимодействиях нерелятивистских идеальных анионов с рациональным параметром статистики [4], а также как частота появления конкретных подграфов в белково-белковой сети дрозофилы [5]. Несмотря на то что степень соответствия канонической функции попкорна варьируется, а экспериментальные профили существенно зависят от особенностей физической системы, общая вероятностная схема, приводящая к попкорновскому теоретико-числовому поведению в природе, может быть установлена.

Предположим, что две случайные независимые натуральные величины, ϕ и ψ , имеют экспоненциальное дискретное распределение вероятности, $Q_n = f^n$, где $f = 1 - \varepsilon > 0$ — коэффициент затухания. Если $(p, q) = 1$, то комбинация $v = \phi/(\phi + \psi)$ имеет попкорновское распределение $P(v)$. В асимптотическом пределе $\varepsilon \ll 1$:

$$P\left(v = \frac{p}{p+q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f^n v^{(p+q)} = \frac{(1-\varepsilon)^{p+q}}{1 - (1-\varepsilon)^{p+q}} \sim \frac{1}{\varepsilon(p+q)}. \quad (2)$$

Формальную схему, описанную выше, можно пояснить на основе построения евклидова сада, если рассмотреть направленного $(1+1)$ -блуждателя на решётке (рис. 1а), который делает ϕ направленных шагов вдоль одной оси решётки и ψ шагов вдоль другой. На каждом шагу блуждатель гибнет с вероятностью $\varepsilon = 1 - f$. Таким образом, запуская их из начала координат решётки, мы получаем "сад блуждателей", т.е. в каждой точке y на оси x доля выживших блуждателей $P(v)$ будет в точности описываться функцией попкорна.

Для того чтобы представить соответствующую физическую картину, рассмотрим "игрушечную" модель полимеризации дублок-сополимера. Не придерживаясь какого-либо конкретного механизма полимеризации, рассмотрим ансамбль дублок-сополимеров АВ, полимеризованных независимо с обоих концов в облаке мономеров (здесь мы предполагаем, что могут образовываться только А—А- и В—В-связи). Терминация полимеризации обеспечивается ассоциацией (неспецифичной) радикалов, присутствующих в растворе с малой концентрацией ε : когда радикал присоединяется к растущему концу (А или В), он терминирует полимеризацию блока данного типа. Предполагая бесконечную ёмкость среды, мы имеем вероятность $f = 1 - \varepsilon$ присоединения мономера в каждом элементарном акте полимеризации. Если N_A и N_B — молекулярные веса блоков А и В, то распределение вероятности композиции в нашем ансамбле $P(\varphi = N_A/(N_A + N_B))$ в пределе малого $\varepsilon \ll 1$ является "ультраметрическим" (см. [6] для определения ультраметричности) и задаётся функцией попкорна:

$$P\left(\varphi = \frac{p}{p+q}\right) \sim \frac{1}{\varepsilon(p+q)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} g(\varphi). \quad (3)$$

Поскольку полимеризация блоков сортов ("цветов") А и В происходит независимо с двух концов и с одинаковой вероятностью, данный процесс можно рассматривать как гомополимерный ("бесцветный") рост. В этом процессе нас интересуют статистические характеристики результирующего ансамбля гомополимерных цепей. Что будет играть роль "композиции" в этом случае или, другими словами, как следует понимать долю мономеров, прикреплённых на одном конце? Как мы покажем ниже, соответствующим аналогом является спектральная плотность ансамбля полимеризованных гомополимеров.

На сегодняшний день функция попкорна практически не находит применения в теоретических работах и остаётся малоизвестной большинству исследователей. В то же время её появление в различных областях и дисциплинах впечатляет. По-видимому, основная трудность связана с разрывом $g(x)$ в каждой рациональной точке, что часто приводит к проблематичному теоретическому рассмотрению и интерпретации результатов для лежащей в основе физической системы. Таким образом, естественная, физически обоснованная, регуляризация функции попкорна необходима.

Ниже мы приводим непрерывное приближение, показывающее общность попкорн-подобных распределений для класса одномерных неупорядоченных систем. Мы показываем, что функция попкорна может быть регуляризована на основе модулярной голоморфной функции Дедекинда $\eta(x + iy)$ в пределе, когда мнимая

часть у модулярного параметра $z = x + iy$ стремится к нулю.

2. Спектральная статистика ансамбля экспоненциально взвешенных линейных графов

2.1. Спектральная плотность и функция попкорна

Рассмотренные в разделе 1 игрушечные модели тесно связаны со спектральной статистикой ансамблей линейных полимеров. В практической постановке рассмотрим ансамбль невзаимодействующих линейных цепей с экспоненциальным распределением по их длине. Мы обращаем внимание на появление фрактальной попкорн-подобной структуры в спектральной плотности соответствующих матриц смежности, описывающих связность элементарных единиц (мономеров) в линейных цепях.

Ансамбль экспоненциально взвешенных однородных цепей описывается $N \times N$ -двудиагональной симметричной смежной матрицей $B = \{b_{ij}\}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

каждый элемент которой $b_{i,i+1} = b_{i+1,i} = x_i$ ($i = 1, \dots, N$) взят из распределения Бернуlli:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } f, \\ 0 & \text{с вероятностью } \varepsilon = 1 - f. \end{cases} \quad (5)$$

Нас интересует спектральная плотность $\rho_\varepsilon(\lambda)$ ансамбля матриц B в пределе $N \rightarrow \infty$. Заметим, что при любом $x_k = 0$ матрица B распадается на независимые блоки, каждый $n \times n$ -блок — это симметричная биdiagональная $n \times n$ -матрица A_n с $x_k = 1$, $k = 1, \dots, n$, что соответствует цепочке длиной n . Спектр матрицы A_n

$$\lambda_{k,n} = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Все собственные значения $\lambda_{k,n}$ для $k = 1, \dots, n-1$ появляются в спектре матрицы (4) с вероятностью $Q_n = f^n$. В асимптотическом пределе $\varepsilon \ll 1$ можно показать эквивалентность распределения композиции в задаче полимеризации, обсуждаемой в разделе 1, и спектральной плотности линейного цепного ансамбля. А именно, вероятность композиции $\varphi = p/(p+q)$ в ансамбле дублок-сополимеров может быть отождествлена с интенсивностью (вырождением) собственного значения $\lambda = \lambda_{p,p+q-1} = 2 \cos [\pi p/(p+q)]$ в спектре матрицы B . Другими словами, целое число k в моде $\lambda_{k,n}$ соответствует числу А-мономеров, $N_A = kz$, а число В-мономеров $N_B = (n+1-k)z$, где $z \in N$, в соответствующем дублок-сополимере.

Спектральная статистика сохранится, если заменить ансамбль бернулевских двудиагональных матриц смежности B , определяемых (4), (5), ансамблем случайных лапласовских матриц. Напомним, что матрица Лапласа $L = \{a_{ij}\}$ может быть построена из матрицы смежности $B = \{b_{ij}\}$ следующим образом: $a_{ij} = -b_{ij}$ при $i \neq j$ и

$a_{ii} = \sum_{j=1}^N b_{ij}$. Поиск собственных значений матрицы Лапласа L для линейной цепочки эквивалентен определению её спектра релаксации. Таким образом, плотность релаксационного спектра ансамбля невзаимодействующих линейных цепей с экспоненциальным распределением по длинам имеет вид функции попкорна.

Чтобы получить $\rho_\varepsilon(\lambda)$ для произвольных значений ε , представим спектральную плотность ансамбля $N \times N$ случайных матриц B с бимодальным распределением элементов в виде резольвенты

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(\lambda) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \delta(\lambda - \lambda_{kn}) \right\rangle_{Q_n} = \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ y \rightarrow +0}} y \operatorname{Im} \langle G_n(\lambda - iy) \rangle_{Q_n} = \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ y \rightarrow +0}} y \sum_{n=1}^N Q_n \operatorname{Im} G_n(\lambda - iy), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\langle \dots \rangle_{Q_n}$ означает усреднение по распределению $Q_n = (1 - \varepsilon)^n$ и используется следующая регуляризация δ -функции Кронекера:

$$\delta(\xi) = \lim_{y \rightarrow +0} \operatorname{Im} \frac{y}{\xi - iy}. \quad (8)$$

Функция G_n связана с каждой матрицей B с n последовательными "1" на субдиагонали:

$$G_n(\lambda - iy) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_{k,n} - iy}. \quad (9)$$

Учитывая (6), (7) и (9), мы находим явное выражение для плотности собственных значений:

$$\rho_\varepsilon(\lambda) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ y \rightarrow +0}} y \sum_{n=1}^N (1 - \varepsilon)^n \sum_{k=1}^n \frac{y}{\{\lambda - 2 \cos [\pi k/(n+1)]\}^2 + y^2}. \quad (10)$$

Поведение внутренней суммы в спектральной плотности в асимптотическом пределе $y \rightarrow 0$ легко понять: она равна $1/y$ при $\lambda = 2 \cos [\pi k/(n+1)]$ и нулю в противном случае. Таким образом, уже можно вывести качественное сходство с функцией попкорна. Оказывается, что соответствие является количественным для $\varepsilon = 1 - f \ll 1$. Чтобы показать это, мы вычислим значения $\rho_\varepsilon(\lambda)$ в пиках, т.е. в рациональных точках $\lambda = 2 \cos [\pi p/(p+q)]$, где $(p, q) = 1$, и получим аналогичную геометрическую прогрессию, как и в задаче о дублок-сополимерах (2):

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon \left(\lambda = 2 \cos \frac{\pi p}{p+q} \right) &= \sum_{s=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^{(p+q)s-1} = \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)^{p+q-1}}{1 - (1 - \varepsilon)^{p+q}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \sim \frac{1}{\varepsilon(p+q)} \stackrel{\text{def}}{=} g \left(\frac{1}{\pi} \arccos \frac{\lambda}{2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Типичная зависимость $\rho_\varepsilon(\lambda)$ для $f = 0.7$, построенная численно по (10) при $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$, показана на рис. 2 для $N = 10^3$.

2.2. Огибающие кривые и хвосты спектральной плотности

В этом разделе мы обратим внимание на некоторые теоретико-числовые свойства спектральной плотности аргумента λ , так как в этом случае аналогия с компо-

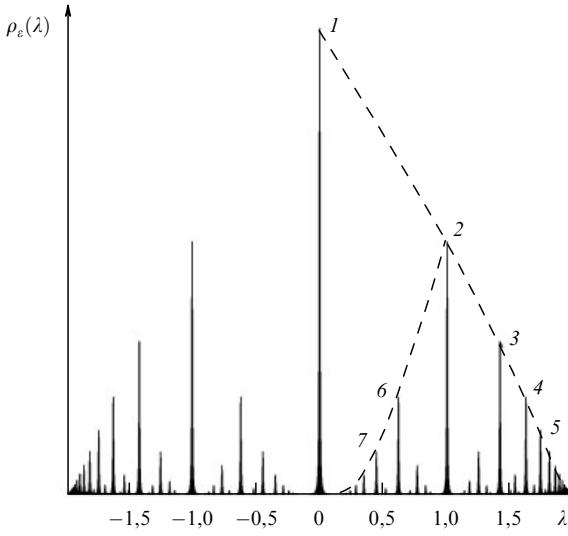


Рис. 2. Спектральная плотность $\rho_e(\lambda)$ для двудиагональных матриц размером $N = 10^3$ для $f = 0.7$. Параметр регуляризации $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$.

зицией является точной. Можно вычислить огибающие кривые для любой монотонной последовательности пиков, как на рис. 2, где показаны две серии последовательных пиков: $S_1 = \{1-2-3-4-5-\dots\}$ и $S_2 = \{2-6-7-\dots\}$. Любая монотонная последовательность пиков соответствует набору собственных значений $\Lambda_{k,n}$, построенному на основе последовательности Фарея [7]. Например, пики серии S_1 расположены в точках

$$\lambda_k = -\lambda_{k,k} = -2 \cos \frac{\pi k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а пики серии S_2 находятся в точках

$$\lambda_{k'} = -\lambda_{k',2k'-2} = -2 \cos \frac{\pi k'}{2k'-1}, \quad k' = 2, 3, \dots$$

Позиции пиков подчиняются следующему правилу: пусть $\{\lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda_{k+1}\}$ — три последовательных пика в серии (например, пики 2–3–4 на рис. 2) и

$$\lambda_{k-1} = -2 \cos \frac{\pi p_{k-1}}{q_{k-1}}, \quad \lambda_{k+1} = -2 \cos \frac{\pi p_{k+1}}{q_{k+1}},$$

где p_k и q_k ($k = 1, \dots, N$) — взаимно простые. Положение промежуточного пика λ_k определяется как

$$\lambda_k = -2 \cos \frac{\pi p_k}{q_k}, \quad q_k = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \oplus \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \equiv \frac{p_{k-1} + p_{k+1}}{q_{k-1} + q_{k+1}}. \quad (12)$$

Последовательности приведённых дробей, построенные с помощью операции \oplus , известны как последовательности Фарея. Простая геометрическая интерпретация последовательности Фарея, известная как конструкция кругов Форда [8], показана на рис. 3а. Конструкция построена следующим образом. Возьмём отрезок $[0, 1]$ и нарисуем два круга, O и O' , радиусом $r = 1/2$, которые касаютсяся друг друга и отрезка в точках 0 и 1. Теперь нарисуем новый круг O_1 , касающийсяся O , O' и отрезка $[0, 1]$. Где окажется положение точки касания нового круга и отрезка? Общий рекурсивный алгоритм представляет собой последовательность Фарея. Обратим внимание на то, что тот же

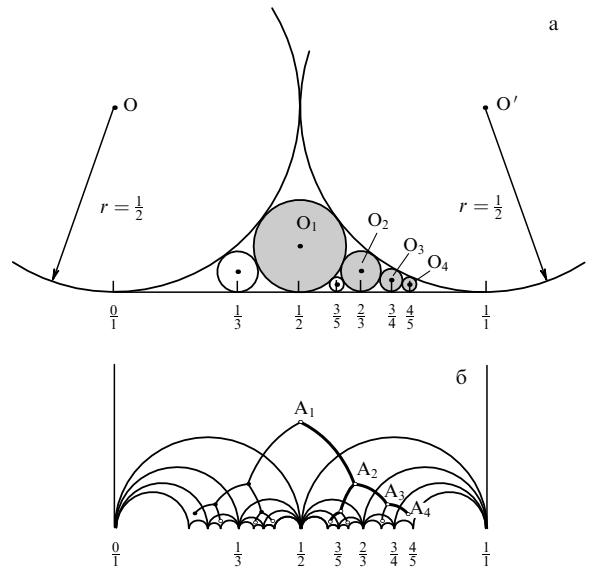


Рис. 3. Круги Форда как иллюстрация к построению последовательности Фарея. (а) Каждый круг касается двух соседей (слева и справа) и отрезка. Положение нового круга определяется операцией \oplus : $p_{k-1}/q_{k-1} \oplus p_{k+1}/q_{k+1} = (p_{k-1} + p_{k+1})/(q_{k-1} + q_{k+1})$. (б) Та же последовательность Фарея, полученная последовательными дробно-линейными отражениями фундаментального домена модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z})$.

ряд Фарея может быть получен последовательными дробно-линейными преобразованиями (отражениями по дугам) фундаментальной области модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z})$ — треугольника, лежащего в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ комплексной плоскости z (рис. 3б).

Рассмотрим главную последовательность пиков, $S_1 = \{1-2-3-4-5-\dots\}$. Явное выражение для положений её пиков следующее:

$$\lambda_k = -2 \cos \frac{\pi k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Можно проанализировать асимптотическое поведение функции попкорна в пределе $k \rightarrow \infty$. Из (11) для любого $f < 1$ имеем набор параметрически заданных уравнений:

$$\begin{cases} \rho_e(\lambda_k) = \frac{f^k}{1-f^{k+1}} \Big|_{k \gg 1} \sim f^k, \\ \lambda_k = -2 \cos \frac{\pi k}{k+1} \Big|_{k \gg 1} \sim 2 - \frac{\pi^2}{k^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Из второго уравнения (14) получаем $k \sim \pi/\sqrt{2-\lambda}$. Подставляя это выражение в первое из уравнений (14), мы получаем следующее асимптотическое поведение спектральной плотности вблизи границы спектра $\lambda \rightarrow 2^-$:

$$\rho_e(\lambda) \sim \exp \left(-\frac{\pi |\log f|}{\sqrt{2-\lambda}} \right), \quad 0 < f < 1. \quad (15)$$

Поведение (14) представляет собой хвост Лифшица, типичный для одномерной андерсоновской локализации:

$$\rho_e(E) \sim \exp(-CE^{-D/2}), \quad (16)$$

где $E = 2 - \lambda$, $D = 1$.

3. От функции попкорна к η -функции Дедекинда

3.1. Некоторые факты о η -функции Дедекинда и связанных с ней рядах

Функция попкорна имеет разрывы в максимумах в рациональных точках и непрерывные впадины в иррациональных. В этом разделе мы покажем, что функция попкорна может быть регуляризована на основе голоморфной в верхней полуплоскости функции Дедекинда $\eta(x + iy)$ в асимптотическом пределе $y \rightarrow 0$.

Знаменитая η -функция Дедекинда определяется следующим образом:

$$\eta(z) = \exp\left(\frac{\pi iz}{12}\right) \prod_{n=0}^{\infty} [1 - \exp(2\pi inz)]. \quad (17)$$

Аргумент $z = x + iy$ называется модулярным параметром, а $\eta(z)$ определена только для $\operatorname{Im} z > 0$. Важно, что η -функция инвариантна относительно действия модулярной группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \eta(z+1) &= \exp\left(\frac{\pi iz}{12}\right) \eta(z), \\ \eta\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sqrt{-1} \eta(z). \end{aligned} \quad (18)$$

В общем случае

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \omega(a, b, c, d) \sqrt{cz+d} \eta(z), \quad (19)$$

где $ad - bc = 1$, $\omega(a, b, c, d)$ — один из корней 24-й степени из 1 [10].

Удобно ввести следующую нормированную функцию:

$$h(z) = |\eta(z)|(\operatorname{Im} z)^{1/4}. \quad (20)$$

Вещественно-аналитический ряд Эйзенштейна $E(z, s)$ определяется в верхней полуплоскости $H = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ для $\operatorname{Re} s > 1$ следующим образом:

$$E(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{\{m, n\} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}}, \quad z = x + iy. \quad (21)$$

Эта функция может быть продолжена на всю s -плоскость с единственным простым полюсом в точке $s = 1$. Важно, что она имеет те же свойства инвариантности по z , что и η -функция Дедекинда. Более того, $E(s, z)$ как функция z является $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ -автоморфным решением гиперболического уравнения Лапласа:

$$-y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E(z, s) = s(1-s) E(z, s).$$

Ряд Эйзенштейна тесно связан с ζ -функцией Эпштейна, $\zeta(s, Q)$, а именно:

$$\zeta(s, Q) = \sum_{\{m, n\} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}} \frac{1}{Q(m, n)^s} = \frac{2}{d^{s/2}} E(z, s), \quad (22)$$

где $Q(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2$ — положительно определённая квадратичная форма, $d = ac - b^2 > 0$, $z = (-b + i\sqrt{d})/a$. В конечном счёте логарифм η -функции входит в разложение в ряд Лорана ζ -функции Эпштейна. Остаток в точке $s = 1$, который был рассчитан Дирихле, даётся так называемой первой предельной формулой Кронекера [11–13]. При $s \rightarrow 1$ имеем

$$\begin{aligned} \zeta(s, Q) &= \frac{\pi}{\sqrt{d}} \frac{1}{s-1} + \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \left(\gamma + \ln \sqrt{\frac{a}{4d}} - 2 \ln |\eta(z)| \right) + \\ &\quad + O(s-1). \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (23) устанавливает важную связь между η -функцией Дедекинда и соответствующим рядом, который мы используем в разделе 3.2.

3.2. Связь между функцией попкорна и η -функцией

Рассмотрим произвольную квадратичную форму $Q'_x(m, n)$ с единичным дискриминантом. Поскольку $d = 1$, её можно выразить в новых параметрах $\{a, b, c\} \rightarrow \{x = b/c, \varepsilon = 1/c\}$ следующим образом:

$$Q'_x(m, n) = \frac{1}{\varepsilon} (xm - n)^2 + \varepsilon m^2. \quad (24)$$

Применяя первую формулу Кронекера к функции Эпштейна с (24) и $s = 1 + \tau$, где $\tau \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \zeta(s, Q'_x) &= \frac{\pi}{s-1} + 2\pi \left(\gamma + \ln \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon}} - 2 \ln |\eta(x + i\varepsilon)| \right) + \\ &\quad + O(s-1). \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, можно воспользоваться регуляризацией δ -функции (8) и оценить $\zeta(1 + \tau, Q'_x)$ для малых $\tau \ll 1$:

$$\begin{aligned} \zeta(1 + \tau, Q'_x) &\sim \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\{m, n\} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}} \frac{\varepsilon^2}{(xm - n)^2 + \varepsilon^2 m^2} = \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{m^2} \delta\left(x - \frac{n}{m}\right) \equiv \theta(x), \end{aligned} \quad (26)$$

где $x \in (0, 1)$, множитель 2 отражает наличие двух квадрантов на \mathbb{Z}^2 -решётке, которые дают вклад в сумму в каждой рациональной точке, и θ присваивает 0 всем иррациональным точкам. В рациональных точках можно вычислить $\theta(p/q)$ явно:

$$\theta\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{m: q}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3\varepsilon q^2}, \quad (27)$$

где символ \vdots внизу знака суммы — оператор деления нацело. Сравнивая (27) с определением функции попкорна, мы приходим к следующему выражению в пиках:

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{\pi^2}} \theta\left(\frac{p}{q}\right). \quad (28)$$

В конечном счёте, собирая (25) и (28), мы можем записать регуляризацию функции попкорна функцией Дедекинда $\eta(x + i\varepsilon)|_{\varepsilon \rightarrow 0}$ в интервале $0 < x < 1$:

$$g(x) \sim \sqrt{-\frac{12\varepsilon}{\pi} \ln |\eta(x + i\varepsilon)| - o(\varepsilon \ln \varepsilon)} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad (29)$$

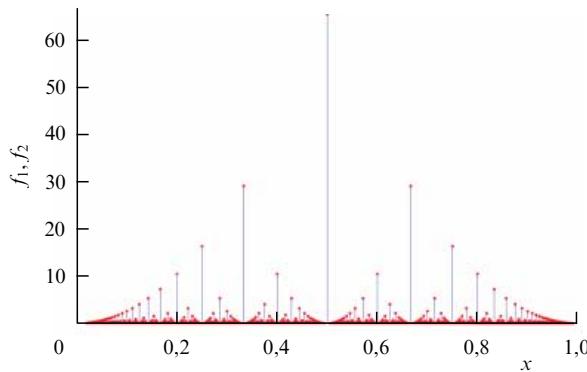


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Графики всюду непрерывной функции $f_1(x) = -\ln|\eta(x + i\varepsilon)|$ (синий цвет) и дискретной функции $f_2(x) = (\pi/12\varepsilon)g^2(x)$ (красный цвет) для $\varepsilon = 10^{-6}$ в рациональных точках в интервале $0 < x < 1$.

или

$$-\ln|\eta(x + i\varepsilon)|_{\varepsilon \rightarrow 0} \sim \frac{\pi}{12\varepsilon} g^2(x). \quad (30)$$

Заметим, что асимптотическое поведение η -функции может быть независимо выведено через соотношения дуальности [6]. Однако такой подход не учитывает лежащую в основе структурную эквивалентность функций попкорна и η и их представление в виде ряда на решётке \mathbb{Z}^2 . На рисунке 4 показаны две дискретные зависимости, левая и правая части (30).

Таким образом, спектральная плотность ансамбля линейных цепей (11) в режиме $\varepsilon \ll 1$ выражается через η -функцию следующим образом:

$$\rho_\varepsilon(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{12}{\pi\varepsilon} \ln \left| \eta\left(\frac{1}{\pi} \arccos \frac{\lambda}{2} + i\varepsilon\right) \right|}. \quad (31)$$

4. Заключение

Мы обсудили теоретико-числовые свойства распределений, возникающих в физических системах, когда наблюдаемое является отношением двух независимых целых экспоненциально взвешенных случайных чисел. Конкретным примером служит спектральная плотность ансамбля линейных полимерных цепей, распределённых по закону f^L ($0 < f < 1$), где L — длина цепи. Для $f \rightarrow 1$ спектральная плотность может быть выражена явно через разрывную и не дифференцируемую во всех рациональных точках функцию Томе (функцию попкорна). Мы предложили регуляризацию функции попкорна, основанную на голоморфной η -функции Дедекинда вблизи вещественной оси.

Анализ спектра вблизи границ обнаруживает хвосты Лифшица, типичные для одномерной локализации Андерсона. Нетривиальная особенность, связанная с асимптотическим поведением формы спектральной плотности матрицы смежности, заключается в следующем. Основная огибающая последовательности пиков $1-2-3-4-5-\dots$ на рис. 2 имеет асимптотическое поведение $\rho(\lambda) \sim q^{\pi/\sqrt{2-\lambda}}$ (при $\lambda \rightarrow 2^-$), типичное для андерсоновской локализации в одномерном пространстве, однако любой внутренней подпоследовательности пиков, например

$2-6-7-\dots$, соответствует огибающая с поведением $\rho'(\lambda) \sim q^{\pi/|\lambda-\lambda_{\text{cr}}|}$ (при $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{cr}}$), характерным для локализации Андерсона в 2D.

Подчеркнём, что ультраметрическая структура спектральной плотности в конечном счёте связана с теоретико-числовыми свойствами модулярных функций. Мы также обращаем внимание на связь η -функции Дедекинда вблизи вещественной оси с инвариантными мерами некоторых цепных дробей, изученных Борвейном и Борвеем [17] в 1993 г.

Понятие "ультраметричность" имеет отношение к концепции иерархической организации энергетических ландшафтов [19, 20]. Предполагается, что сложная система имеет большое количество метастабильных состояний, соответствующих локальным минимумам в потенциальном энергетическом ландшафте. В соответствии с вероятностями перехода минимумы предполагаются сгруппированными в иерархически вложенных бассейнах, т.е. более крупные бассейны состоят из меньших, каждый из которых состоит из ещё меньших и т.д. Бассейны локальных энергетических минимумов разделены иерархически расположенным множеством барьёров: большие бассейны разделены высокими барьёрами, а меньшие бассейны в каждом из более крупных — более низкими барьёрами. Ультраметрическая геометрия устанавливает таксономические (т.е. иерархические) древовидные соотношения между элементами и, вообще говоря, является более близкой к геометрии Лобачевского, чем к евклидовской [21, 22].

Благодарности. Мы выражаем благодарность В. Аветисову, А. Горскому, Ю. Федорову и П. Крапивскому за множество полезных обсуждений по теме статьи. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке грантом IRSES (International Research Staff Exchange Scheme) DIONICOS (Dynamic of and in Complex Systems) и грантом 16-02-00252а Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

1. Beanland K, Roberts J W, Stevenson C *Am. Math. Monthly* **116** 531 (2009)
2. Trifonov V et al. *Sci. Rep.* **1** 191 (2011)
3. Planat M, Eckert C *IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelectrics Frequency Control* **47** 1173 (2000)
4. Lundholm D *Phys. Rev. A* **96** 012116 (2017); arXiv:1608.05067
5. Middendorf M, Ziv E, Wiggins C H *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** 3192 (2005)
6. Avetisov V, Krapivsky P L, Nechaev S J. *Phys. A* **49** 035101 (2016)
7. Hardy G H, Wright E M *An Introduction to the Theory of Numbers* (New York: Oxford Univ. Press, 1979)
8. Ford L R *Am. Math. Monthly* **45** 586 (1938)
9. Coxeter H S M *Am. Math. Monthly* **75** 5 (1968)
10. Chandrasekharan K *Elliptic Functions* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
11. Epstein P *Math. Ann.* **56** 615 (1903)
12. Siegel C L *Lectures on Advanced Analytic Number Theory* (Mumbai: Tata Institute of Fundamental Research, 1961)
13. Motohashi Y *Proc. Jpn. Acad.* **44** 614 (1968)
14. Dyson F J *Phys. Rev.* **92** 1331 (1953)
15. Domb C et al. *Phys. Rev.* **115** 18 (1959)
16. Nieuwenhuizen Th M, Luck J M *J. Stat. Phys.* **41** 745 (1985)
17. Borwein J M, Borwein P B *J. Number Theory* **43** 293 (1993)
18. Comtet A, Nechaev S J. *Phys. A* **31** 5609 (1998)
19. Mezard M, Parisi G, Virasoro M A *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 9) (Singapore: World Scientific, 1987)

20. Frauenfelder H, in *Protein Structure: Molecular and Electronic Reactivity. Proc. of a Conf., April 10–13, 1985, Philadelphia, Pa., USA* (Eds R Austin et al.) (New York: Springer-Verlag, 1987) p. 245
21. Nechaev S, Polovnikov K *Soft Matter* **13** 1420 (2017)
22. Levitov L S *Europhys. Lett.* **14** 533 (1991)

Rare-event statistics and modular invariance

S.K. Nechaev^(1,2), K. Polovnikov^(3,4)

⁽¹⁾ *Interdisciplinary Scientific Center Poncelet (ISCP), Bol'shoi Vlas'evskii per. 11, 119002 Moscow, Russian Federation*

⁽²⁾ *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

⁽³⁾ *Center for Energy Systems, Skolkovo Institute of Science and Technology,
ul. Nobel'ya 3, 143005 Skolkovo, Moscow, Russian Federation*

⁽⁴⁾ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119992 Moscow, Russian Federation*

E-mail: ^(1,2)sergei.nechaev@gmail.com, ^(3,4)kipolovnikov@gmail.com

Simple geometric arguments based on constructing the Euclid orchard are presented that explain the equivalence of various types of distributions that result from rare-event statistics. In particular, the spectral density of the exponentially weighted ensemble of linear polymer chains is examined for its number-theoretic properties. It can be shown that the eigenvalue statistics of the corresponding adjacency matrices in the sparse regime show a peculiar hierarchical structure and are described by the popcorn (Thomae) function discontinuous in the dense set of rational numbers. Moreover, the spectral edge density distribution exhibits Lifshitz tails, reminiscent of 1D Anderson localization. Finally, a continuous approximation for the popcorn function is suggested based on the Dedekind-function, and the hierarchical ultrametric structure of the popcorn-like distributions is demonstrated to be related to hidden $SL(2, \mathbb{Z})$ modular symmetry.

Keywords: modular form, popcorn function, Dedekind function, spectrum of sparse matrix, Euclid's orchard, $SL(2, \mathbb{Z})$ modular group, Lifshitz tails, Anderson localization

PACS numbers: **02.30.-f, 02.50.-r, 05.40.-a**

Bibliography — 22 references

Received 24 February 2017

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **188** (1) 106–112 (2018)

Physics – Uspekhi **61** (1) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038106>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.01.038106>