

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Квазилинейная теория турбулентности плазмы. Истоки, идеи и эволюция метода

О.Г. Бакунин

Квазилинейный метод описания слабой плазменной турбулентности, безусловно, является важнейшим элементом современной физики плазмы. Сейчас это не только инструмент, позволяющий решать отдельные задачи, но и полноценная теория, представляющая большой общезначимый интерес. Задачей автора было показать, как эволюционировали ранние идеи описания взаимодействия волн и частиц в плазме в связи с быстрым расширением круга научных интересов теоретиков, работающих в области исследования турбулентности и турбулентного переноса.

Ключевые слова: квазилинейная теория, турбулентный перенос, коэффициенты диффузии, стохастическое магнитное поле, плазма

PACS numbers: 05.40. – a, 47.27.tb, 47.53. + n

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038096>

Содержание

1. Введение (55).
 2. Влияние плазменных колебаний на перенос (56).
 3. Кинетическое уравнение для волн и теплопроводность плазмы (59).
 4. Феноменологическое уравнение для потенциала (61).
 5. Коэффициент диффузии в приближении хаотических фаз волн (62).
 6. Квазилинейный метод и образование "плато" (64).
 7. Стохастичность в пакете волн и корреляционные масштабы (66).
 8. Автомоделность и "фронты" в пространстве скоростей (68).
 9. Эффекты рассеяния волн и секторальное плато (69).
 10. Баланс инкрементов и надтепловые частицы (72).
 11. Диффузия силовых линий и "островные" структуры (73).
 12. Перенос примеси и корреляционные эффекты (75).
 13. Фазовое перемешивание и перенормировка (77).
 14. Стохастическое магнитное поле и сильная турбулентность (79).
 15. Дрейфовая турбулентность и вихревые структуры (80).
 16. Перенос в конвективных ячейках (82).
 17. Заключение (83).
- Список литературы (85).

1. Введение

Квазилинейная теория слабой плазменной турбулентности, безусловно, является важнейшим элементом современной физики плазмы [1–7]. Чтобы охватить все её аспекты, не хватит и увесистой книги. Некоторым вопросам квазилинейного подхода уже посвящены обзоры и

книги, в то время как другие фактически забыты или находятся в тени на фоне экспоненциально растущего числа публикаций по плазменной турбулентности.

Принципиальные для создания квазилинейной теории идеи появились не спонтанно. Их рождение связано с работами конкретных учёных, и, что особенно интересно, это в основном были советские учёные: А.А. Власов, Л.Д. Ландау, И.А. Ахиезер, Я.Б. Файнберг, Б.И. Давыдов, А.Б. Мигдал, В.М. Галицкий, Б.В. Чириков, Ю.Л. Климонтович и, конечно, Ю.А. Романов и Г.Ф. Филиппов. Поскольку дискуссия о работах Власова и Ландау уже велась неоднократно, здесь мы сосредоточимся на достаточно узком круге предшественников и кратко обсудим, как формировались теоретические представления, позволившие А.А. Веленову, Е.П. Велихову и Р.З. Сагдееву разработать квазилинейный метод не только как инструмент, позволяющий решать отдельные задачи, но и как полноценную теорию, представляющую общезначимый интерес.

Так, например, представления об образовании квазилинейного "плато" сразу привлекли внимание теоретиков. Это видно из препринта В.Д. Шаfranова [8], опубликованного в 1960 г., ещё до выхода журнальных статей [2–5], всего через два с небольшим месяца после обсуждения квазилинейной теории на семинаре в ЛИПАН¹. В этой работе механизм образования плато представлен уже в форме "мнемонического" правила, позволяющего предсказать, в какое состояние перейдёт система в результате развития неустойчивости черенковского типа.

О.Г. Бакунин, Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
Курчатовский ядерно-технологический комплекс,
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 13 октября 2016 г.

¹ ЛИПАН — Лаборатория измерительных приборов АН СССР, впоследствии преобразованная в Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова, ныне Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт".

Фактически квазилинейная теория на десятилетие стала одним из немногих "очагов понимания" в плазменной турбулентности.

Изящность рассмотрения взаимодействия резонансных частиц с пакетом волн в рамках квазилинейного подхода привела к тому, что важные в идейном плане работы предшественников часто упоминаются чисто формально. Сам же квазилинейный метод стал спустя более чем 50 лет выглядеть как почти "буквальное" продолжение работ Власова и Ландау [9–12]. Однако необходимо отметить, что временной разрыв между статьёй Ландау и широко цитируемым циклом работ Вedenова–Велихова–Сагдеева составил 15 лет, причём это было время бурного развития физики плазмы. Важным поэтому при написании настоящей статьи стал вопрос о том, какие именно работы в период с 1947 г. по 1960-е годы сыграли важную подготовительную роль в создании квазилинейной теории.

Рассмотрение вопросов, связанных с предысторией квазилинейной теории, мы начнём с работы Давыдова [13] и диссертации Галицкого [14]. В первую очередь это обусловлено тем, что нас будет интересовать влияние квазилинейного подхода на развитие теории турбулентного переноса. Это несколько искусственное ограничение, поскольку остаются в тени ранние результаты, связанные с началом интенсивного использования уравнения Власова. Действительно, в одной статье охватить весь круг вопросов, исследовавшихся физиками в этот период в связи с развитием теории колебаний и волн в плазме, описанием торможения заряженных частиц и распространения пучков, не представляется возможным.

Заметим, что первая публикация авторов [1] появилась в виде препринта Института атомной энергии в 1960 г. (годом позднее был опубликован одноимённый обзор тех же авторов в журнале *Успехи физических наук (УФН)*), а в 1958 г. был издан первый том четырёхтомника *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, содержащий рассекреченные отчёты первого этапа термоядерных исследований. Именно в этом сборнике и была опубликована важная работа Б.И. Давыдова [13] о роли плазменных колебаний при исследовании диффузии и теплопроводности, выполненная ещё в 1951 г. Фактически в этой статье впервые был поставлен вопрос о влиянии турбулентности на процессы переноса.

С другой стороны, в сборнике воспоминаний [15], посвящённых Вedenову, есть статьи Велихова и Сагдеева, в которых упоминаются работы Галицкого [14] и Романова и Филиппова [2] как важные для инициирования их собственных работ. Отметим, что как в диссертации В.М. Галицкого (во введении) [14], так и в статье Романова и Филиппова [2] есть ссылки на пионерскую работу Давыдова [13]. К сожалению, в связи с квазилинейной теорией редко упоминаются статьи Климонтовича [16] и Чирикова [17], опубликованные в 1958 и 1959 гг. Несмотря на отсутствие прямых ссылок на эти работы, необходимо отметить их идейную и временную близость к публикациям, связанным с квазилинейной теорией. Естественно, список предшественников можно было бы расширить за счёт работ, в которых исследовалась роль резонансных частиц [18, 19] или пучковая неустойчивость [20, 21] и др. Однако для целей настоящей статьи мы в этой части ограничимся несколькими упомянутыми публикациями [2, 13, 14, 16].

Квазилинейный подход к исследованию слабой турбулентности плазмы является одним из самых распространённых инструментов анализа. Достаточно сказать, что стало традицией называть все турбулентные коэффициенты переноса, в которых имеется квадратичная зависимость от амплитуды пульсаций, квазилинейными коэффициентами. Однако сейчас, спустя более чем 50 лет после публикации работ [1–7, 22–24], важно не только суммировать полученные с помощью квазилинейного подхода результаты, но и выделить наиболее важные компоненты самого этого подхода. Уже при первом взгляде становится ясно, что это задача, в которой удалось синтезировать сразу несколько фундаментальных идей: важность учёта черенковских механизмов; выделение быстрой и медленно эволюционирующей компонент функции распределения; необходимость описания эволюции спектра возбуждённых в плазме волн; диффузионный характер эволюции функции распределения частиц в условиях слабой турбулентности; учёт нелинейных эффектов, связанных с "захватом" частиц в потенциальные ямы; возникновение стохастического слоя в окрестностях сепаратрис; декорреляционные механизмы, обусловленные стохастической неустойчивостью.

Фактически каждый из упомянутых компонентов в той или иной степени уже был исследован предшественниками авторов квазилинейного метода. Тем не менее комплексный учёт всей совокупности имевшихся на тот момент идей являлся, безусловно, прорывом. Сейчас это совершенно очевидно. Достаточно посмотреть на число ссылок или число приложений квазилинейного метода.

К настоящему времени опубликовано большое количество замечательных книг, в которых многие из представленных в настоящей статье вопросов уже обсуждались [25–57]. Проблема состоит в том, что в основном это довольно специальная литература, рассчитанная на физиков, занимающихся плазменными задачами, причём ввиду ограниченности объёма авторы не могли уделить достаточного внимания обсуждению взаимовлияния квазилинейных и общезначимых представлений.

В настоящей статье обсуждаются именно вопросы теории, это оправданно, поскольку авторами как пионерских работ [1–5], так и многих последовавших затем ключевых исследований являлись ведущие советские и зарубежные теоретики. Выбор сюжетов для этой статьи, конечно, не был случайным. Одна из задач состояла в том, чтобы показать, как эволюционировали ранние идеи описания взаимодействия волн и частиц в плазме в связи с быстрым расширением круга научных интересов теоретиков, работающих в области исследования турбулентности и турбулентного переноса.

2. Влияние плазменных колебаний на перенос

Рассматриваемая в этом разделе статья Давыдова [13] называется "О влиянии колебаний плазмы на её электропроводность и теплопроводность". Фактически к моменту выполнения этой работы Давыдова не существовало даже оценок подобных эффектов. Расчёт коэффициентов переноса в плазме строился на основе учёта только столкновительных эффектов с использованием длины свободного пробега частиц как ключевого параметра. Отметив ограниченность подхода, принимающего во внимание только взаимодействие электронов и

ионов на расстояниях, не превышающих дебаевской длины, Давыдов указал на важность учёта эффектов взаимодействия заряженных частиц (электронов и ионов) через плазменные волны. Для этого он, опираясь на стандартную структуру кинетического уравнения, предложил ввести эффективную длину свободного пробега l_{eff} :

$$\frac{1}{l_{\text{eff}}} = \frac{1}{l_{\text{turb}}} + \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_i}, \quad (1)$$

где l_{turb} , l_e , l_i — характерные масштабы пробегов, связанные с турбулентностью, электронными и ионными столкновениями. Тогда квазиклассические коэффициенты переноса в плазме обретут вид

$$D = \frac{1}{3} \langle V \rangle l_{\text{eff}}, \quad \sigma = \frac{e^2 n}{k_B T} D, \quad \chi = 3 \frac{n}{T} D. \quad (2)$$

Здесь D — коэффициент диффузии частиц, σ — электропроводность плазмы, χ — коэффициент теплопроводности плазмы, k_B — постоянная Больцмана. Рассмотрение специфики, связанной с влиянием магнитного поля, в работе [13] не предполагалось, несмотря на то что её автор был одним из первых физиков, привлечённых И.В. Курчатовым к работе над проектом магнитного удержания плазмы в целях осуществления управляемого термоядерного синтеза (УТС) [58]. Так, по воспоминаниям А.Д. Сахарова, Л.А. Арцимович и М.А. Леонович обсуждали предложения И.Е. Тамма и А.Д. Сахарова в конце 1950-го — начале 1951-го года [59].

Заметим, что Давыдов являлся теоретиком "широкого профиля" [60] и ясно видел аналогии между плазменными задачами и базовыми вопросами физики твёрдого тела, в которой взаимодействие электронов с колебаниями решётки является одним из ключевых механизмов [61, 62]. Сопоставив ионные колебания (ионно-звуковые плазменные волны) с акустическими колебаниями ионных кристаллов, а электронные плазменные (ленгмюровские) колебания — с оптическими колебаниями кристаллов, удобно использовать квантово-механическую теорию возмущений для расчёта вероятностей рассеяния. Такие вычисления провели Давыдов и Шмушкевич [63] ещё в 1940 г. для оптических колебаний, а Ландау и Компанец [64] — для акустических.

Так, для ленгмюровских колебаний вероятность перехода электрона из состояния с волновым вектором $\mathbf{k} = m\mathbf{V}$ в состояние $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ при поглощении кванта с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{q}$ даётся формулой

$$W_e^+ = \frac{2ne^4}{m\omega q^2} N_\omega, \quad (3)$$

где m — масса электрона, e — заряд электрона, n — плотность плазмы, N_ω — число квантов в единице объёма. Таким образом, для перехода $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$, соответствующего испусканию кванта, имеем

$$W_e^- = \frac{2ne^4}{m\omega q^2} (N_\omega + 1). \quad (4)$$

Давыдов указал, что ионов, способных взаимодействовать с ленгмюровскими колебаниями, фазовые скорости которых значительно превышают тепловые скорости ионов, обычно в плазме нет. Забегая вперёд, отметим, что приведённые электронные вероятности для испуска-

ния и поглощения волновых квантов позднее использовались Романовым и Филипповым в пионерской работе [2] по вычислению коэффициента квазилинейной диффузии электронов в поле ленгмюровских колебаний, а сам "квантовый" метод стал одним из главных инструментов в плазменной турбулентности. Это неудивительно, поскольку язык квантовой механики активно использовался большинством работавших в то время физиков.

Заметим, что Давыдов не упоминает о связи его квантового подхода с эффектом Вавилова — Черенкова. Однако он явно говорит о схожести рассматриваемых процессов с гидродинамическими представлениями, согласно которым излучение и поглощение волн невозможно для тел, движущихся в жидкости со скоростями, меньшими скорости звука.

Для ионно-звуковых волн, учитывая синфазность колебаний электронов и ионов, соответственно, имеем выражения

$$W_i^+ = \frac{2ne^4}{M\Omega q^2} N_\Omega, \quad W_i^- = \frac{2ne^4}{M\Omega q^2} (N_\Omega + 1), \quad (5)$$

где M — масса иона, Ω — частота ионно-звуковых колебаний, N_Ω — их интенсивность (число квантов в единице объёма).

Обмен заряженных частиц с волновым полем посредством испускания или поглощения квантов предполагает малые изменения импульса и энергии. Это в свою очередь позволяет говорить о диффузионном характере эволюции функции распределения. Поскольку Давыдов являлся крупнейшим специалистом в области физической кинетики [65], для него не представляло труда получить соответствующие сформулированной задаче уравнения Фоккера — Планка. Дополнительным аргументом для использования диффузионного приближения могли послужить работы Бом и Гросса [18, 19, 66–69], опубликованные примерно за один-два года до работы Давыдова. В этих статьях подробно обсуждались вопросы взаимодействия электронов с плазменными волнами с использованием оценок передаваемой в "столкновениях" энергии:

$$\Delta \varepsilon \approx m V_{\text{ph}} (V - V_{\text{ph}}) = m \frac{\omega}{k} \left(V - \frac{\omega}{k} \right). \quad (6)$$

Здесь $V_{\text{ph}} = \omega/k$ — фазовая скорость волны. Важно отметить, что в оригинальной статье Ландау качественная картина обнаруженного им явления бесстолкновительного затухания не обсуждалась. Бом и Гросс фактически использовали хорошо известную в плазменной кинетике модель для описания передачи энергии "от лёгкой компоненты к тяжёлой".

Оценки подобного типа неоднократно использовались Давыдовым в середине 1930-х годов для получения уравнения Фоккера — Планка, описывающего функцию распределения электронов в слабоионизованной плазме, помещённой в электрическое поле (теоретически получено распределение Дрювестейна) [63, 65, 70]. Давыдовым была чётко сформулирована необходимость учёта эффектов диффузии в пространстве скоростей при анализе задач плазменной кинетики. Диффузионным моделям различных явлений были посвящены многие работы Давыдова, кроме того, он отчётливо сознавал важность и "недиффузионного" переноса [71] при описании турбулентной диффузии.

Базовое кинетическое уравнение было выбрано в [13] в форме Фоккера – Планка,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[V^2 \left(D_V \frac{\partial F}{\partial V} + G_V F \right) \right] + \frac{1}{V^2} D_\vartheta \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

где использованы традиционные для задач плазменной кинетики координаты (V, ϑ, φ) ; D_V и D_ϑ — соответствующие коэффициенты диффузии, G_V — коэффициент трения. В качестве модельного решения естественно использовать выражение

$$F = F_0 \cos \vartheta \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right), \quad (8)$$

где $F_0(V, T)$ — равновесное распределение. В отсутствие внешней силы и пространственной неоднородности мы должны получить уравнение, описывающее равновесие максвелловского типа. В рассматриваемой работе используется дивергентный подход, развитый Давыдовым для задач кинетики слабоионизованной плазмы. Он рассматривает поток частиц в фазовом пространстве S_V :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} (V^2 S_V) = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[V^2 \left(D_V \frac{\partial F_0}{\partial V} + G_V F_0 \right) \right] = 0. \quad (9)$$

Давыдов получил условие связи коэффициентов диффузии D_V и трения G_V исходя из условия отсутствия особенностей в выражении для потока частиц S_V в нуле,

$$S_V = D_V \frac{\partial F_0}{\partial V} + G_V F_0 = 0. \quad (10)$$

Тогда, учитывая, что равновесная функция распределения даётся классической формулой Максвелла

$$F_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mV^2}{2\theta} \right), \quad (11)$$

где использовано обозначение $\theta = k_B T$, получаем условие связи кинетических коэффициентов в виде

$$G_V = -\frac{mV}{\theta} D_V. \quad (12)$$

Теперь задача оценки характерного времени релаксации τ_* и характерного пространственного масштаба l_{turb} сводится к вычислению коэффициента диффузии частиц в фазовом пространстве.

Коэффициенты D_V и D_ϑ даются классическими выражениями Эйнштейна:

$$D_V = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta V \cos \vartheta)^2 \rangle}{\Delta t}, \quad (13)$$

$$D_\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta V \sin \vartheta \cos \varphi)^2 \rangle}{\Delta t}, \quad (14)$$

каждое из которых распадается на два слагаемых, связанных с поглощением (вероятность W_+) и излучением (вероятность W_-) кванта, при этом изменение скорости в обоих случаях $\Delta V = \hbar \mathbf{q}/m$. Фактически, операция усреднения сводится к взятию соответствующих интегралов по q , ϑ и φ .

Так, в случае взаимодействия электронов с ленгмюровскими волнами получаем следующие выражения:

$$D_V(V) \approx 2\pi \frac{ne^4}{m^2 V} \frac{\theta}{mV^2}, \quad (15)$$

$$D_\vartheta(V) \approx 2\pi \frac{ne^4}{m^2 V}. \quad (16)$$

Приняв, что эффективная длина свободного пробега определится оценкой $l_{\text{turb}} \propto V\tau_*$, где

$$\tau_*(V) = \frac{V^2}{2D_\vartheta(V)} \propto \frac{m^2 V^3}{ne^4}, \quad (17)$$

получаем скейлинг Давыдова для длины свободного пробега частиц, обусловленной турбулентными флуктуациями:

$$l_{\text{turb}}(V) \propto \left(\frac{ne^4}{m^2 V^4} \right)^{-1} \propto V^4. \quad (18)$$

Фактически эти результаты совпадают с элементарными кинетическими (флуктуационно-диссипативными) оценками для кулоновских столкновений:

$$D_V D_R = \frac{(k_B T)^2}{m}, \quad (19)$$

где диффузия в конфигурационном пространстве даётся формулой $D_R = l_{\text{coll}} V$. Столкновительная длина пробега l_{coll} получается из размерностных соображений при рассмотрении кулоновских столкновений:

$$\frac{e^2}{r_0} \approx \frac{mV^2}{2}, \quad (20)$$

где $l_{\text{coll}} r_0^2 n \propto 1$. Здесь сечение кулоновских столкновений оценено через характерный пространственный масштаб чисто размерностным образом: $\sigma \propto r_0^2$. Хорошо известно, что в строгой кинетической теории кулоновских столкновений, развитой Ландау, вследствие дальнедействующего характера взаимодействия заряженных частиц в плазме большую роль играют столкновения, приводящие к рассеянию частиц на малые углы. Естественно, это увеличивает эффективное сечение в $\Lambda = \ln(r_D/r_0)$ раз и, соответственно, так же уменьшает длину пробега l_{coll} . Здесь r_D — дебаевский радиус. Обычно в интересующих нас задачах величина кулоновского логарифма $\Lambda \approx 10-20$ [72].

Для взаимодействия электронов с ионно-звуковыми волнами получаются аналогичные результаты:

$$D_V \approx 2\pi \frac{ne^4}{m^2 V} \frac{\theta}{mV^2}, \quad (21)$$

$$D_\vartheta \approx 2\pi \frac{ne^4}{m^2 V}. \quad (22)$$

На основании проведённых вычислений Давыдов делает вывод о том, что вклад взаимодействия частиц плазмы с волнами мал по сравнению со вкладом кулоновских столкновений при уровне шумов порядка тепловой энергии.

Сегодня отчётливо видно, что выбор в качестве интенсивности колебаний плазмы значений N_ω и N_Q , отвечающих тепловому равновесию, не соответствовал реальной роли турбулентности в плазме. Сам Давыдов

чётко указал, что это только нижняя оценка роли колебаний. Отметим, что потребовалось ещё почти 10 лет для того, чтобы построить первую самосогласованную модель эволюции функции распределения в поле ленгмюровских колебаний, учитывающую временную эволюцию их энергии [1–5]. Ключевым моментом здесь стало использование как механизма затухания Ландау, так и диффузионной формы для уравнения, описывающего функцию распределения электронов.

3. Кинетическое уравнение для волн и теплопроводность плазмы

Теоретические исследования плазменной турбулентности, начатые Давыдовым, были продолжены уже в группе А.Б. Мигдала его аспирантом В.М. Галицким. Рассматривалось влияние на перенос ленгмюровских колебаний в ловушках, где плазма помещена в магнитное поле. Только в начале 1980-х годов был опубликован сборник трудов В.М. Галицкого, который, в частности, содержал его рассекреченную диссертацию, выполненную в 1954 году [14]. Давыдов был вынужден прекратить работы в области физики плазмы, поскольку он был уволен из ЛИПАНа по требованию органов, контролирующих режим секретности [60], а его дипломник Т.Ф. Волков и аспирант С.И. Брагинский переключились на задачи гидродинамики и столкновительной кинетики замагниченной плазмы [73, 74].

Последняя глава диссертации Галицкого называется "Кинетическое уравнение для волн и теплопроводность плазмы". Во введении автор прямо указывает на стимулирующую роль работ Давыдова и ставит задачу определить коэффициент теплопроводности, связанный с колебанием электронов. Галицкий осознавал, что в условиях теплового равновесия вклад от волн будет незначительным. Он приводит соответствующие качественные оценки, опираясь на классический метод Рэлея–Джинса подсчёта числа состояний (волн). Галицкий получает, что в состоянии, близком к равновесному, число волн за пределами дебаевской сферы

$$N_W = \frac{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} d^3\mathbf{k}}{\delta k^3} \approx \frac{L_0^3}{(2\pi)^3} \frac{3}{4} \pi k_D^3 = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{L_0}{r_D}\right)^3. \quad (23)$$

Здесь $\delta k \approx 2\pi/L_0$ — минимальное волновое число, L_0^3 — объём плазмы с характерным пространственным масштабом L_0 , $k_{\max} \approx 2\pi/r_D \gg k_{\min}$, где

$$r_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n}}.$$

Заметим, что оценка Галицкого аналогична сделанному Дебаем расчёту для теплоёмкости твёрдого тела. Так, у Дебая максимальное значение волнового числа, позволяющее избежать расходимости интеграла, связано с минимальным характерным масштабом — периодом кристаллической решётки. В случае ленгмюровских колебаний $k_{\max} \propto 2\pi/r_D$, что обусловлено эффектом затухания Ландау на масштабах $r < r_D$.

В условиях равновесия плотности энергии волн и частиц одинаковы и, следовательно, имеем оценку

$$W = \frac{N_W}{L_0^3} k_B T = \frac{k_B T}{4\pi^2 r_D^3} \propto \frac{n k_B T}{N_D}, \quad (24)$$

где учтено, что $N_D = nr_D^3 = n[T/(4\pi e^2 n)]^{3/2}$, n — плотность плазмы. Заметим, что $N_D \gg 1$ и $\ln N_D = A$. Галицкий принял, что скорость передачи энергии волн определяется групповой скоростью $d\omega/dk$ и имеет порядок скорости частиц. Характерное время волны τ_* , введённое Давыдовым, совпадает по порядку величины с временем τ_{ei} свободного пробега электрона до столкновения с ионами плазмы. В итоге, сравнивая волновую теплопроводность с кинетической (столкновительной) теплопроводностью, он сравнивает плотности числа волн N_W/L_0^3 и числа частиц (электронов)

$$\frac{\chi_{\text{turb}}}{\chi_{\text{coll}}} \propto \frac{(6\pi^2 r_D^3)^{-1}}{n} = \frac{e^2/r_D}{k_B T} \ll 1. \quad (25)$$

Выбор вместо коэффициента диффузии коэффициентов теплопроводности для анализа вклада турбулентных пульсаций в перенос был обусловлен желанием избежать дополнительных усложняющих оценки факторов, связанных с учётом эффектов амбиполярности. Видно, что эти расчёты подтвердили известный вывод Давыдова о незначительном влиянии турбулентности при тепловом уровне шумов [13].

Мотивацией дальнейшей работы Галицкого служило то обстоятельство, что в сильном магнитном поле поперечный столкновительный перенос будет подавлен. Действительно, характерным пространственным корреляционным масштабом здесь является ларморовский радиус, который обратно пропорционален амплитуде магнитного поля. В этих типичных для задач магнитного удержания плазмы условиях вклад от взаимодействия частиц с турбулентными флуктуациями станет важным фактором. На начальном этапе работ по управляемому термоядерному синтезу использование стабилизирующей роли сильных магнитных полей считалось одним из главных направлений. Однако теоретики уже тогда задумывались о роли кинетических неустойчивостей.

Новым по сравнению с подходом Давыдова и важным для всего последующего анализа плазменной турбулентности элементом здесь является рассмотрение уравнения для спектральной плотности энергии волн W_k . В этом случае плотность потока энергии даётся формулой

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} W_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (26)$$

Спектральная плотность энергии волн здесь считается зависящей как от волнового вектора $\mathbf{k}$, так и от координаты $\mathbf{r}$. Соответствующее уравнение для эволюции поля Галицкий приводит в виде

$$\frac{\partial W(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial W(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial W(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{dW}{dt}. \quad (27)$$

Здесь использовано приближение геометрической акустики

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}. \quad (29)$$

Давыдов не рассматривал эволюцию волнового поля, предполагая амплитуды шумов заданными. Однако Галицкий не предложил схемы согласования этого уравнения с уравнением Власова для функции распределения частиц. Кинетика фононов была в то время хорошо известна теоретикам, работающим в области физики твёрдого тела, но они имели дело с состояниями, близкими к равновесным. Кинетические уравнения для волн в плазме впоследствии стали важнейшим инструментом анализа нелинейных задач теории турбулентности, и им посвящена обширная литература [26, 34, 36, 37, 40, 47].

Для нас здесь существенно отметить, что Е.П. Велихов в воспоминаниях, посвящённых работе над квазилинейной теорией, упоминает диссертацию Галицкого как вдохновившую его обратиться к новому направлению [15]. "Когда я выбирал тему диссертации, я посоветовался с Я.А. Смородинским, и он мне сказал: "Посмотрите, что делается у Галицкого". Виктор Михайлович Галицкий делал диссертацию. Она была секретной, в ней он впервые рассматривал теорию взаимодействия волн и частиц. Это было в некоторой степени продолжением знаменитой классической работы Ландау. Я эту работу посмотрел, и она на меня произвела огромное впечатление.

Я воспринял картину взаимодействий в плазме. Взаимодействие двух газов: газ-частица и газ-волна. С этого момента я начал советоваться с Сагдеевым и Вedenовым. Мы начали делать квазилинейную теорию турбулентности и закончили к первому Зальцбургскому конгрессу по термоядерному синтезу.

И мы сделали это очень вовремя потому, что Уильям Драммонд сделал аналогичную вещь, но более топорно. Мы изложили всё гораздо изящней. На конгрессе были доложены обе версии теории. Но восприняли именно нас, и наша теория стала стандартной".

Слова о "газе волн", безусловно, характеризуют понимание теоретиками важности согласования кинетики волн и частиц. В дальнейшем в редуцированной форме, сохраняющей только эффекты, связанные с бесстолкновительным затуханием Ландау, как Романов и Филиппов [2], так и Вedenов, Велихов и Сагдеев [1, 3, 4] использовали уравнение для спектральной плотности энергии волн W_k как одно из основных соотношений квазилинейной теории:

$$\frac{\partial W_k(t)}{\partial t} = 2\gamma_L W_k(t), \quad (30)$$

$$\gamma_L = \frac{\pi\omega_L^3}{2k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial V} \right|_{V=\omega/k}. \quad (31)$$

Здесь принято традиционное обозначение для плотности энергии колебаний $W(t) = \int W(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k}$.

Сделаем несколько замечаний библиографического характера. Во-первых, Галицким во всех "вычислительных" деталях рассматривается интерпретация затухания Ландау, данная Бомом и Гроссом (приведены соответствующие ссылки), однако ссылки на классические работы Ахиезера и Файнберга [20, 21] нет. Это выглядит странным, поскольку дана ссылка на более позднюю работу Ахиезера, Ситенко [75]. В связи с этим приведём характерную цитату из персоналии, опубликованной в журнале *Успехи физических наук* в честь 60-летия А.И. Ахиезера [76]: "В ставшей классической работе А.И. Ахиезера и Я.Б. Файнберга был предсказан эффект

Таблица 1

Тип взаимодействия	Плазменный процесс (продольные волны)	Электромагнитный процесс (поперечные волны)
Взаимодействие одной частицы с волнами	Уменьшение энергии одной частицы и возникновение волн Увеличение энергии одной частицы и уничтожение волн	Черенковское излучение Черенковское поглощение
Взаимодействие двух частиц с волнами	Возникновение волн при столкновении двух частиц Уничтожение волн с передачей энергии двум сталкивающимся частицам	Тормозное излучение Фотоэффект в непрерывном спектре

Рис. 1. Таблица из диссертации В.М. Галицкого на соискание учёной степени доктора физико-математических наук (1954 г.) [14].

пучковой неустойчивости — экспоненциальный рост флуктуаций в плазме, пронизываемой электронным пучком (1949 г.). Эта работа наряду с работами А.А. Власова и Л.Д. Ландау стала основной для исследования коллективных взаимодействий в плазме".

Отметим, что Галицкий в 1954 г. активно использует представление о затухании Ландау как о черенковском эффекте (рис. 1) в контексте описания взаимодействия частиц плазмы с волнами (Нобелевская премия была получена Таммом, Черенковым и Франком только в 1958 г.). Галицкий уделяет внимание и оценкам эффектов, связанных с прохождением пучков заряженных частиц через плазму, повторяя вычисления предшественников несколько другим методом. Так, полученная Власовым [12] в 1945 г. формула для энергетических потерь частиц

$$-\frac{dW}{dl} \approx \frac{\omega_0^2}{V^2} e^2 \ln \frac{k_{\max} V}{\omega_L}, \quad (32)$$

позволяла надеяться на получение качественных оценок эффектов переноса исходя из размерностных соображений, в которых в качестве характерного масштаба времени берётся величина, обратная плазменной частоте $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$,

$$\frac{dW}{dl} \propto \frac{e^2}{r_D} \frac{1}{r_D} \propto e^2 \left(\frac{\omega_L}{V} \right)^2. \quad (33)$$

Здесь используется "единая" оценка для характерного пространственного масштаба, в качестве которого взят радиус Дебая, $r_D \propto V_T/\omega_L$, что позволяет адекватно оценить обратно пропорциональную зависимость потерь энергии частицы от её скорости. Такой подход хорошо согласуется с классическим столкновительным описанием плазмы. Действительно, длина свободного пробега сильно возрастает с увеличением скорости частицы, $l_{\text{coll}} \propto V^4$, т.е. потери должны убывать с возрастанием скорости. Тем не менее в приведённых Галицким оценках турбулентного переноса, не учитывающих влияния магнитного поля, характерная частота ленгмюровских колебаний так и не появилась.

Подводя промежуточный итог, заметим, что работа Давыдова и диссертация Галицкого заложили основу последующего строгого анализа эффектов, связанных с плазменной турбулентностью. Однако для построения последовательной квазилинейной теории потребовалось перейти от феноменологического описания эффектов диффузии частиц к систематическому анализу уравнения Власова.

4. Феноменологическое уравнение для потенциала

С точки зрения анализа ключевых теоретических исследований, предшествовавших появлению квазилинейной теории, важно упомянуть работу Климонтовича [16] 1959 года, в которой суммированы основные результаты по взаимодействию электронных пучков с плазмой, полученные на тот момент. Этот материал вошёл в известный обзор Климонтовича и Силина [77] (см. раздел 7), опубликованный в *УФН* в 1960 г.

В начале статьи [16] Климонтович обращает внимание на неприменимость уже известных аналитических формул, описывающих торможение отдельных заряженных частиц в плазме, для описания рассеяния электронных пучков. Аномально быстрое рассеяние, замеченное ещё Ленгмюром, и пучковая неустойчивость уже неоднократно исследовалось теоретически (Власов, Бом, Ахиезер), и экспериментально было обнаружено возбуждение плазменных колебаний при распространении пучков [78, 79]. Так, расчёт на основе кулоновских столкновений показывает, что при энергии пучка порядка 2 кэВ в плазме с плотностью 10^{13} см^{-3} длина пробега должна быть порядка 10^6 м . В действительности реальные пучки такой энергии затухают на масштабах лабораторных установок. Для построения строгой теории Климонтович предлагает воспользоваться иерархическим методом Боголюбова [80] получения кинетического уравнения, учитывающего возбуждение плазменных волн. В результате вычислений он получает интеграл столкновений в виде

$$St = n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}'} d\mathbf{r}' d\mathbf{p}', \quad (34)$$

где корреляционная функция выражается как

$$G = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int_0^\infty U\left(\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{m} \tau\right|\right) d\tau \left\{ f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}'} f_1 \right\}. \quad (35)$$

Заметив, что это уравнение аналогично кинетическому уравнению Ландау для частиц с кулоновскими столкновениями [42–44, 72], Климонтович, следуя традиционному методу, линеаризует его и приходит к классическому уравнению в форме Фоккера–Планка. Однако он получает коэффициент диффузии частиц в пространстве скоростей, учитывающий плазменные колебания,

$$D_V \approx \frac{e^2 k_B T}{2\pi} \int \delta(\omega_L - \mathbf{kV}) d^3 \mathbf{k}, \quad (36)$$

причём в виде, уже существенно отличном от рассмотренного выше результата Давыдова. Здесь за счёт дельта-функции $\delta(\omega_L - \mathbf{kV})$ в явном виде учтён резонансный характер взаимодействия электронов с ленгмюровскими волнами. Качественная оценка может быть записана уже в терминах частоты ленгмюровских колебаний ω_L ,

$$D_V \propto \frac{e^2}{V^3} k_B T \omega_L^2 \propto \frac{ne^4}{V} \frac{k_B T}{mV^2}, \quad (37)$$

однако она фактически совпадает со скейлингом Давыдова.

Такая "двойственность" не удовлетворила Климонтовича, и он в той же статье делает попытку получить описание эволюции функции распределения пучка путём прямого решения уравнения Власова методом возмуще-

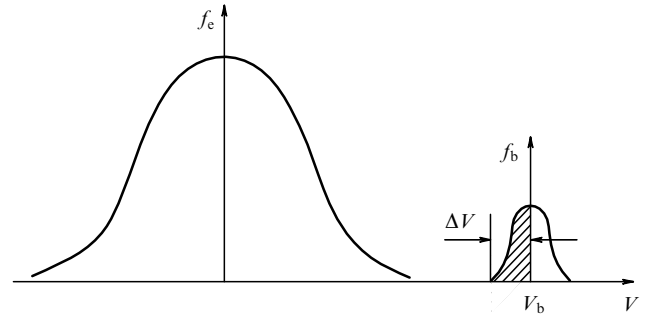


Рис. 2. Пучковая неустойчивость.

ний, представляя функцию распределения в виде основной гармоники и возмущения: $f = f_0 + f_1$. Фактически Климонтович постулирует свою систему уравнений. Одно из них он выбирает как уравнение для возмущённой части функции распределения электронов f_1 . Это уравнение, полученное из классического уравнения Власова,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0. \quad (38)$$

Другое уравнение является феноменологическим и описывает эволюцию амплитуды потенциала плазменной волны за счёт "феноменологической" модификации классического уравнения Пуассона,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\gamma_L}{V_{ph}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{V_{ph}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi e \left(\int f_1 dV - n \right). \quad (39)$$

Поскольку перед Климонтовичем стояла задача описать пучковую неустойчивость, он рассматривал простейшую "двухгорбую" функцию распределения, положительная производная которой на левом склоне горба, соответствующего частицам пучка, инициирует развитие неустойчивости черенковского типа (рис. 2). Здесь инкремент Ландау даётся классической формулой:

$$\gamma_L = \frac{\pi \omega_L^3}{2k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial V} \right|_{V=\omega/k} \approx \frac{\pi}{4} \omega_L \frac{n_b}{n} \left(\frac{V_b}{\Delta V} \right)^2, \quad (40)$$

где n_b — плотность частиц в пучке, V_b — характерная скорость пучка, ΔV — разброс по скоростям.

По замыслу автора, член $(1/V_{ph}^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2$ позволял перейти от классического уравнения Пуассона к волновому уравнению, а член $2(\gamma_L/V_{ph}) \partial \varphi / \partial x$ учитывал эффекты, связанные с резонансными механизмами Ландау, что позволило бы самосогласованно описать эволюцию плазменных колебаний в условиях турбулентности.

Этот момент работы Климонтовича заслуживает особого рассмотрения, поскольку напоминает феноменологический подход Давыдова к описанию атмосферной турбулентной диффузии [71]. Так, классическое диффузионное уравнение для переноса примеси (скаляра) имеет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}. \quad (41)$$

Здесь n — плотность частиц примеси, D_0 — коэффициент молекулярной диффузии примеси в среде. Давыдов для учёта нелокальных эффектов, связанных с турбулентной конвекцией, приводящей к существенному ускорению

переноса, включил в это уравнение дополнительный член $\partial^2 n / \partial t^2$, превращающий параболическое уравнение переноса в волновое уравнение гиперболического типа

$$\tau_* \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (42)$$

Здесь τ_* — характерное время.

Такой "силовой приём", использованный Давыдовым, носил несколько революционный для середины 1930-х годов характер и стал широко применяться для описания эффектов нелокальности как раз в 1950-е годы в связи с расширением исследований в области атмосферной турбулентности и загрязнения воздушной среды [81–84]. Надо отметить, что ссылки на раннюю работу Давыдова [71] у Климонтовича нет, но работа Давыдова [13] о влиянии плазменных колебаний на перенос электронов указана в списке цитируемой литературы. Кроме того, интересно отметить, что позднее Климонтович ещё несколько раз обращался к подобной феноменологии, но уже для перенормировки кинетического уравнения для функции распределения частиц [85].

Сейчас ясно, что малые возмущения, о которых говорил Климонтович, не могут привести к появлению волны с конечной амплитудой. Искусственность использованного Климонтовичем приёма сегодня хорошо видна, поскольку в ставшей классической квазилинейной теории слабой плазменной турбулентности эволюция электрического потенциала описывается в спектральных терминах. Такой подход уже доказал к тому времени свою эффективность в теории вихревой гидродинамической турбулентности [86–92]. В плазменных задачах использование спектральных терминов также выглядит более естественным при описании волновых пакетов.

Фактически основные элементы теоретической модели Климонтовича близки к представлениям, впоследствии развитым в квазилинейной теории. Это использование уравнения Власова для функции распределения электронов, дельта-функция в выражении для коэффициента диффузии частиц в фазовом пространстве, учитывающая резонансность взаимодействия волна – частица, и учёт классического затухания Ландау (инкремент которого взят из линейной теории). В разделе 5 мы увидим, что идеи Климонтовича, высказанные в 1959 г., получили существенное развитие уже в 1960–1961 гг., когда собственно и появились впервые квазилинейные уравнения.

5. Коэффициент диффузии в приближении хаотических фаз волн

Замечательная по своей глубине работа Романова и Филиппова [2] 1961 года, ставшая известной теоретикам ещё в 1960 г., подвела итог десятилетним поискам адекватной модели для одной из важнейших задач плазменной турбулентности. Авторы [2] критикуют попытки объяснить аномально быстрое рассеяние пучка флуктуациями напряжения на границе и выделяют давно известную неустойчивость пучка, связанную с "эффектом обращения" затухания Ландау, как главный фактор, создающий турбулентные флуктуации при наличии участка спектра, на котором $\partial f / \partial V > 0$. Существенным моментом, безусловно, является и чёткое понимание необходимости рассмотрения флуктуа-

ций в терминах спектральной плотности энергии W_k плазменных волн,

$$W_k(t) = \frac{\delta W(\mathbf{k}, t)}{\delta \mathbf{k}^3}. \quad (43)$$

Заметим, что теория турбулентности, построенная ещё в 1941 г. Колмогоровым и Обуховым именно для спектрального распределения энергии, к 1960-м годам стала классическим образцом для специалистов, работающих в областях, связанных с турбулентностью атмосферы и океана. Спектральное представление предлагал использовать и Галицкий [14], но его диссертация могла быть неизвестна авторам [2]. Однако Романов и Филиппов участвовали в работе над атомным оружием [59], и проводимый анализ результатов многочисленных испытательных взрывов в атмосфере неизбежно был связан с исследованием атмосферной турбулентности.

Романов и Филиппов уже на второй странице статьи [2] отмечают влияние работы Климонтовича [16], указывая её главный недостаток, связанный с неоправданным предположением о формировании в плазме установившейся волны. Авторами [2] было предложено уравнение, описывающее эволюцию плотности энергии плазменных волн $W_k(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$, в виде

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} = A + 2\gamma_L W_k, \quad (44)$$

где A — член, учитывающий спонтанное излучение плазмонов, γ_L — инкремент Ландау. Здесь интеграл столкновений Галицкого приобрёл более конкретный вид, поскольку в нём "самосогласованно" учитываются как возбуждение, так и затухание плазменных волн под действием черенковских механизмов.

Романов и Филиппов указывают, что эффекты диффузии в задаче о взаимодействии пучка быстрых электронов с продольными плазменными волнами могут быть вычислены методом Давыдова с использованием квантовых представлений. Так, эти эффекты приводят к вероятностям испускания и поглощения электроном кванта с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ вида

$$w^+ = \frac{\omega_L^2}{2\pi\omega k^2} (N_\omega + 1), \quad (45)$$

$$w^- = \frac{\omega_L^2}{2\pi\omega k^2} N_\omega, \quad (46)$$

где $\omega_L^2 = 4\pi e^2 n / m$. Важно отметить, что вероятности w^+ и w^- , приведённые Романовым и Филипповым, в точности соответствуют вероятностям, использованным Давыдовым при исследовании рассеяния электронов ленгмювскими волнами.

Коэффициенты, входящие в уравнение Фоккера – Планка, вычислялись на основе рассмотрения среднего и среднеквадратичного ускорения, сообщаемого электрону турбулентным электрическим полем. Для трения получаем

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{e}{m} \int_0^{\Delta t} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \rangle dt. \quad (47)$$

Для диффузии в пространстве скоростей

$$\langle \Delta V_\alpha \Delta V_\beta \rangle = \frac{e^2}{m^2} \int_0^{\Delta t} dt \int_0^{\Delta t} \langle \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}(t), t) \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}(t'), t') \rangle dt'. \quad (48)$$

В этих расчётах принималось во внимание, что как ширина спектра ленгмюровских волн Δk , так и затухание Ландау удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\gamma_L} \gg \Delta t \gg \frac{1}{V\Delta k} \approx \tau_{ph}. \quad (49)$$

Фактически это условие хаотичности фаз волн, входящих в рассматриваемый пакет, которое является необходимым для обеспечения случайности скачков частиц и, как следствие, возможности применения диффузионной модели эволюции функции распределения. Важным является и то обстоятельство, что в этот критерий вошёл инкремент Ландау как один из параметров задачи. Для потока быстрых электронов имеем также соотношение

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{n}{n_0} \left(\frac{V}{\Delta V} \right)^2. \quad (50)$$

Условие правомерности пренебрежения членами высокого порядка при разложении функции распределения в ряд имеет вид

$$W = \int W_k d^3 \mathbf{k} \ll \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^4 n_0 m V^2. \quad (51)$$

С одной стороны, это условие слабости турбулентности, а с другой — обеспечения достаточно широкого пакета волн. Использование спектральных терминов теперь выглядит вполне естественным при описании волновых пакетов. В следующих разделах мы увидим, что это важные условия применимости квазилинейных выражений.

Другим важным моментом является получение выражения, описывающего диффузию электронов в результате их взаимодействия с полем турбулентных пульсаций электрического потенциала:

$$D_{ik} = \frac{4\pi e^2 \omega_0^2}{m^2} \int \frac{k_i k_k}{k^2} \frac{W_k}{\omega^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) d^3 k. \quad (52)$$

Эта формула замечательна по нескольким причинам. Во-первых, здесь впервые в выражение для коэффициента диффузии электронов в пространстве скоростей корректно вошла частота ленгмюровских колебаний $\omega = \omega(k)$. Кроме того, даже поверхностный качественный анализ позволяет установить связь этого выражения с классическим определением турбулентной диффузии, данным Тэйлором для переноса примеси в условиях гидродинамической турбулентности:

$$D_T = \int \langle V(0)V(t) \rangle dt \propto V_p^2 \tau_{cor}, \quad (53)$$

где $\langle V(0)V(t) \rangle$ — автокорреляционная функция скорости лагранжевых частиц жидкости. Здесь мы видим квадратичный характер зависимости коэффициента переноса в обычном конфигурационном пространстве от амплитуды пульсаций скорости V_p . В нашем кинетическом случае мы имеем дело с пространством скоростей, в котором пульсации связаны с ускорениями $A \propto eE/m$ и можно ожидать скейлинга в виде

$$D_V = A^2 \tau \approx \left(\frac{eE}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega_L}. \quad (54)$$

Именно к такой размерностной оценке и приводит формула Романова — Филиппова.

Обратим внимание ещё на одно обстоятельство, связанное с почти параллельным развитием гидродинамической и плазменной теории турбулентности. В 1960 г. в *Journal of Fluid Mechanics* была опубликована ставшая классической статья Хауэлса, в которой коэффициент турбулентной диффузии примеси выражался через спектральную плотность энергии гидродинамических пульсаций $E_p(k)$ [93–95],

$$D_p^2 = \int_k^\infty \frac{E_p(k)}{k^2} dk. \quad (55)$$

Здесь использована нормировка спектральной плотности энергии на квадрат характерной амплитуды пульсаций скорости жидких частиц V_p^2 ,

$$\frac{V_p^2}{2} = \int_0^\infty E(k) dk. \quad (56)$$

Как следствие полученных уравнений, удаётся оценить время квазилинейной релаксации пучка электронов. Романов и Филиппов получают выражение, содержащее в качестве множителя логарифм отношения плотностей энергии электростатических шумов в конце и начале процесса,

$$\tau_{rel} \approx \frac{1}{\gamma_L} \ln \frac{W}{W_0} \approx \frac{1}{\omega_L} \frac{n_b}{n} \ln \frac{nmV_b^2}{k_B T / r_D^3} \approx \frac{1}{\omega_L} \ln A. \quad (57)$$

Подводя предварительный итог, отметим, что в работе Романова и Филиппова [2] синтезированы важные идеи их предшественников:

- "обращение" эффекта затухания Ландау (Ахиезер — Файнберг, Бом — Гросс);
- диффузионная эволюция функции распределения (Давыдов);
- спектральное представление турбулентных флуктуаций (Галицкий);
- учёт "резонансности" взаимодействия частиц с волнами в выражении для коэффициента диффузии электронов в фазовом пространстве (Климонтович).

Вопросы установления научных приоритетов не входят в задачу автора настоящей статьи. Мы анализируем эволюцию теоретических моделей, позволяющих описать слаботурбулентное состояние плазмы. Тем не менее почти одновременное появление в 1961 г. сразу трёх работ независимых коллективов авторов является фактом, который нельзя игнорировать. Безусловно, первой по времени публикации является работа Романова и Филиппова [2]. Авторы этой статьи ссылаются на работы как Климонтовича [16], так и на отчёт Давыдова [13, 60]. Работа Галицкого [14] им, по-видимому, не была известна.

Несложно заметить, что использованные Романовым и Филипповым уравнения являются, по современной терминологии, квазилинейными. Более того, ссылка на эту работу содержится уже в самой первой публикации Веденова, Велихова, Сагдеева [1] по этой теме. Так, Р.З. Сагдеев пишет [15]: "Квазилинейная теория стала ответом на то, как надо строить нелинейную теорию. Одна из идей была использовать метод, напоминающий метод другого нашего замечательного физика-теоретика Боголюбова, который в молодости занимался ме-

тодами, связанными с нелинейными колебаниями, но не плазмы, а более простых систем. Толчком к применению метода Боголюбова стал приезд к нам на семинар Юрия Романова и моего однокурсника Гены Филиппова. Они сделали доклад о том, что надо учесть квантовые и полуквантовые эффекты отдачи электрона при взаимодействии с волнами. Красивая работа!

Но мы использовали метод Боголюбова — усреднение по мелким колебаниям. Так появилась квазилинейная теория. Мы её распространили на другие типы волн в плазме, особенно на те волны, которые распространяются в плазме в магнитном поле".

6. Квазилинейный метод и образование "плато"

В разделе 5 мы обсуждали квазилинейный коэффициент диффузии, полученный в статье Романова и Филиппова. С другой стороны, широко известен квазилинейный метод описания слабой турбулентности, начало которому положили работы Веденова, Велихова и Сагдеева [1, 3, 4]. Безусловно, именно квазилинейный метод анализа уравнения Власова получил очень широкое распространение, приобретая хрестоматийный характер. Он достаточно подробно изложен в многочисленных обзорах (в том числе и самих авторов) и монографиях [28–52]. Поэтому мы кратко приведём только схему вычислений.

Авторы классической работы [2] рассмотрели взаимодействие резонансных частиц с волновым пакетом на основе уравнения Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = 0, \quad (58)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi n e \int f d\mathbf{V}. \quad (59)$$

Здесь f — функция распределения по скоростям, $\mathbf{E}$ — напряжённость электрического поля, n — плотность плазмы. Такой подход является, как мы видим, вполне естественным в контексте развития теории турбулентной плазмы. Так, Романов и Филиппов показали, что линейного механизма Ландау вполне достаточно для объяснения аномального рассеяния пучка. С другой стороны, обмен энергией должен привести к эффекту фазового перемешивания электронов и уравнение для усреднённой функции распределения частиц в резонансной области должно принять диффузионный вид. Действительно, в линейном приближении, использованном Ландау в задаче о бесстолкновительном затухании, фурье-компоненты поля действовали на электроны независимо. Переходя к нелинейному анализу, мы сталкиваемся с ситуацией, в которой даже слабое поле может существенно влиять на резонансные частицы, значительно изменяя их функцию распределения.

Веденов, Велихов и Сагдеев рассмотрели задачу об эволюции функции распределения электронов в пространстве скоростей в предположении, что в одномерном случае в отсутствие пространственной неоднородности её можно представить в виде

$$f = f_0(V, t) + \tilde{f}_1(V, x, t), \quad (60)$$

где f_0 — медленная, а $\tilde{f}_1$ — быстро осциллирующая функции времени. Соответственно, электрическое поле

представляется в виде

$$E = E_0(t) + \tilde{E}(x, t), \quad (61)$$

где среднее электрическое поле отсутствует, $E_0 \equiv 0$. Здесь пространственная однородность сглаженной функции распределения $f_0(V, t)$ следует из предположения об отсутствии "захвата" электронов отдельными гармониками электрического поля, которое имеет вид достаточно широкого пакета волн,

$$\Delta V = \frac{\omega}{k} \Big|_{\max} - \frac{\omega}{k} \Big|_{\min} \gg \sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}}, \quad (62)$$

где $\Phi_0^2 = \int dk |E_k|^2 / k^2$ — характерная амплитуда потенциала электрического поля. Фактически электроны перемещаются "между гармониками пакета" (в системе отсчёта, движущейся с фазовой скоростью волн, пакет представляет собой "холмистый ландшафт"), и они не могут оставаться в потенциальной яме одной из волн дольше, чем время пролёта этого участка.

Тогда после подстановки получаем выражение для модифицированного в соответствии с методом возмущений уравнения Власова

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_0 + \tilde{f}_1) + V \frac{\partial}{\partial x}(f_0 + \tilde{f}_1) - \frac{e}{m} \tilde{E} \frac{\partial}{\partial V}(f_0 + \tilde{f}_1) = 0. \quad (63)$$

Используя усреднение по быстрым осцилляциям и вычитая усреднённое уравнение из полного, приходим к двум уравнениям:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{e}{m} \left\langle \tilde{E} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial V} \right\rangle = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} - \frac{e \tilde{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial V} = 0. \quad (65)$$

Эта система уравнений получила название квазилинейной. Аргументом при выборе такого названия служат сохранение нелинейного члена в уравнении для усреднённой функции распределения частиц и использование линейного уравнения для её возмущений. Такой подход широко используется не только для решения задач, связанных с уравнением Власова, но и для построения различных моделей переноса пассивного скаляра [96–100], эволюции стохастического магнитного поля [101–103] и пр.

Диффузионный характер эволюции усреднённой функции распределения $f_0(V, t)$ просматривается уже на этом раннем этапе. Так, если использовать упрощённый вид уравнения для $\tilde{f}_1$, в котором пренебрегается пространственной производной $\partial \tilde{f}_1 / \partial x$, то получим оценку

$$\tilde{f}_1 = \int \frac{e}{m} \tilde{E} \frac{\partial f_0}{\partial V} dt. \quad (66)$$

После подстановки в уравнение эволюции для усреднённой функции распределения находим искомое диффузионное соотношение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left[\left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \langle E^2 \rangle dt \right] \frac{\partial^2 f_0}{\partial V^2}, \quad (67)$$

в котором, как и ожидалось, коэффициент диффузии имеет характерную "тэйлоровскую" форму, $D_V \approx [(e/m)E_0]^2 \tau$, с амплитудой флуктуаций напряжённости электрического поля E_0 .

Формальный метод рассмотрения основан на использовании полного уравнения для быстро осциллирующей части функции распределения, что совпадает с подходом Ландау,

$$\tilde{f} = i \frac{e}{m} \frac{\tilde{E}}{\omega - kV} \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (68)$$

На этом этапе необходимо сделать дополнительные предположения о характере волнового поля. Полагаем, что электрическое поле можно представить в виде суперпозиции независимых гармоник (считаем амплитуды фурье-компонент малыми, и поэтому пренебрегаем взаимодействиями между гармониками),

$$\tilde{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[-i(\omega_k t - kx)] dk. \quad (69)$$

Заметим, что $\omega_k = \tilde{\omega}_k + i\gamma_k$, и поскольку электрическое поле должно быть вещественным, $E_{-k} = E_k^*$, $\tilde{\omega}_k = -\tilde{\omega}_{-k}$, $\gamma_k = -\gamma_{-k}$. В случае слабого затухания (малые инкременты затухания γ) используется стандартный метод преобразования знаменателя в выражении для быстро осциллирующей части функции распределения $\tilde{f}$:

$$\frac{1}{\omega - kV} = P\left(\frac{1}{\omega - kV}\right) - i\pi\delta(\omega - kV), \quad (70)$$

которое отражает предположение об адиабатичности включения электрического поля в "бесконечно удалённом прошлом", $\tilde{f}_1(V, x, t \rightarrow -\infty) = 0$. Это приводит к "перенормировке" частоты, заключающейся в появлении бесконечно малой положительной добавки, $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$. Здесь используется традиционный символ главного значения

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Теперь можно вычислить нелинейный член в уравнении для усреднённой функции распределения частиц f_0 :

$$\langle \tilde{E} \tilde{f} \rangle = \left[i \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_k E_{-k}}{\tilde{\omega}_k - kV} \exp(-2\gamma_k t) dk + \frac{e\pi}{m} \int E_k^2 \exp(-2\gamma_k t) \delta(\omega_k - kV) dk \right] \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (72)$$

Несложно заметить, что, учитывая только резонансный член в этом выражении, мы приходим к искомому уравнению диффузии в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V} \left(D_V \frac{\partial f_0}{\partial V} \right) \quad (73)$$

с квазилинейным коэффициентом диффузии

$$D_V = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{|E_k|^2}{\omega(k) - kV} dk. \quad (74)$$

Эти уравнения дополняются соотношением, описывающим эволюцию амплитуд фурье-гармоник электрического поля вследствие черенковских механизмов излучения и поглощения волн,

$$\frac{d}{dt} |E_k|^2 = 2\gamma_k |E_k|^2, \quad (75)$$

где инкремент Ландау γ_k определяется как

$$\gamma_k = 2\pi e^2 \omega \int \frac{\partial f_0}{\partial V} \delta(\omega - kV) dV. \quad (76)$$

Здесь $\omega(k)$ описывает зависимость частоты от волнового числа k , а $|E_k|^2$ — спектральная функция электрического поля. Эта система уравнений для усреднённой функции распределения f_0 и квадрата фурье-гармоник $|E_k|^2$ является замкнутой и представляет собой простейшую форму квазилинейных уравнений, позволяющих описать взаимодействие резонансных частиц с волновым пакетом.

В случае одномерной постановки задачи условие черенковского резонанса $\omega_L - k_z V_z = 0$ приводит к однозначной связи волнового вектора и скорости, $k_z = \omega_{pe}/V_z$. В итоге уравнения квазилинейной теории в терминах плотности энергии $W(V_z, t)$ примут вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V_z} \left(\frac{\pi e^2 V_z}{m^2 \omega_L} |E_V|^2 \frac{\partial f_0}{\partial V_z} \right), \quad (77)$$

$$\frac{\partial |E_V|^2}{\partial t} = 2 \frac{\pi V_z^2 \omega_L}{2n} V_z^2 \frac{\partial f_0}{\partial V_z} |E_V|^2.$$

Выделяя в уравнениях (77) общий "структурный элемент" $|E_V|^2 \partial f_0 / \partial V_z$, с помощью подстановки легко получаем квазилинейный интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f_0 - \frac{e^2 n}{m \omega_L^2} \frac{\partial}{\partial V_z} \left(\frac{|E_V|^2}{V_z} \right) \right] = 0. \quad (78)$$

Это означает, что мы имеем уравнение, связывающее конечное и начальное состояния,

$$f_\infty - \frac{e^2 n}{m \omega_L^2} \frac{\partial}{\partial V_z} \left(\frac{|E_V(\infty)|^2}{V_z} \right) = f_0 - \frac{e^2 n}{m \omega_L^2} \frac{\partial}{\partial V_z} \left(\frac{|E_V(0)|^2}{V_z} \right). \quad (79)$$

Если в начальный момент флуктуации тепловые, $W_T \approx \approx k_B T (1/r_D^3) \approx nk_B T / N_D \ll nk_B T$, то можно положить $|E_k(t=0)|^2 = 0$. В итоге получаем самосогласованную картину образования "плато" на функции распределения и возрастания электростатических шумов (рис. 3)

$$|E_V|^2 = 4\pi m V_z \int_0^{V_z} (f_0(\infty) - f_0(0)) dV_z. \quad (80)$$

Полученный результат для коэффициента квазилинейной диффузии электронов в пространстве скоростей совпал с результатом Романова и Филиппова. В сборнике, посвящённом памяти А.А. Веденова, можно найти несколько упоминаний о проблемах, возникающих при установлении приоритета в связи с квазилинейным описанием взаимодействия частиц с пакетом волн. Для справки приведём отрывок из "Отзыва о диссертации Веденова А.А. на соискание учёной степени доктора физико-математических наук", написанного Ю.А. Романовым [15]:

"В диссертации А.А. Веденова содержится анализ ряда явлений в плазме, имеющих место, когда плотность энергии плазменных колебаний значительно превышает плотность энергии тепловых шумов. Рассмотрение ведётся на основе квазилинейных уравнений, полученных ранее другими авторами (Ю.А. Романовым и П.Ф. Филипповым).

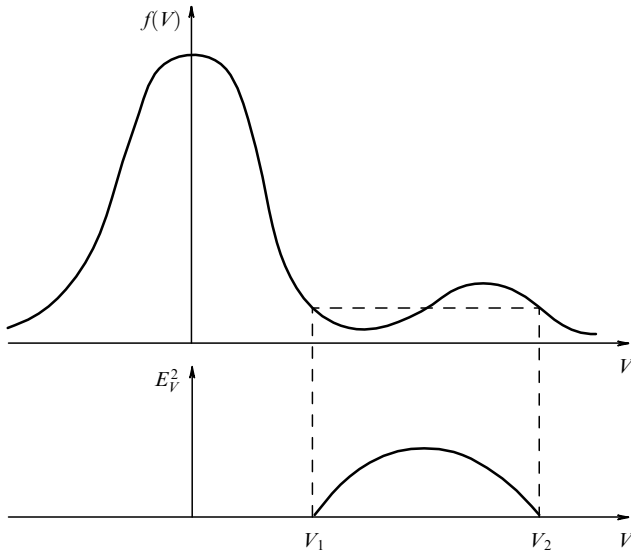


Рис. 3. Образование квазилинейного плато на функции распределения.

Центральной идеей диссертации является указание на существование квазистационарного состояния, к которому приходит плазма в результате развития в ней возмущений. В этом состоянии функция распределения электронов в некоторой части фазового пространства оказывается постоянной, а плотность энергии пламенных колебаний становится достаточно большой. Следует подчеркнуть, что квазистационарное состояние осуществляется только тогда, когда функцию распределения электронов можно считать одномерной".

С другой стороны, известна позиция Веденова, который в первом обзоре, посвящённом квазилинейной теории, опубликованном в *Вопросах теории плазмы* [6], утверждал, что Романов и Филиппов "постулировали свои уравнения". Это мнение также справедливо, поскольку в следующих разделах мы покажем, насколько эффективно работает "схема Веденова – Велихова – Сагдеева" при рассмотрении таких вопросов, как турбулентная диффузия примесей (пассивного скаляра), хаос магнитных силовых линий, турбулентная конвекция и пр.

Подходя несколько формально, можно считать, что Романов и Филиппов реализовали потенциал квантовомеханического подхода, предложенного Давыдовым для случая ленгмюровских колебаний, что позволило им получить необходимые уравнения, в то время как Веденов, Велихов и Сагдеев развили эффективный метод возмущений для решения уравнения Власова и сформулировали концепцию образования "плато" на усреднённой функции распределения частиц. Ясно, что квазилинейный характер теории приводит к сравнительно малым амплитудам, и желательно детализировать эти оценки посредством более подробного рассмотрения как структуры пакета волн, так и декорреляционных механизмов, ответственных за диффузионный характер эволюции функции распределения.

7. Стохастичность в пакете волн и корреляционные масштабы

В основе квазилинейного описания слаботурбулентной плазмы лежит представление об отсутствии захвата

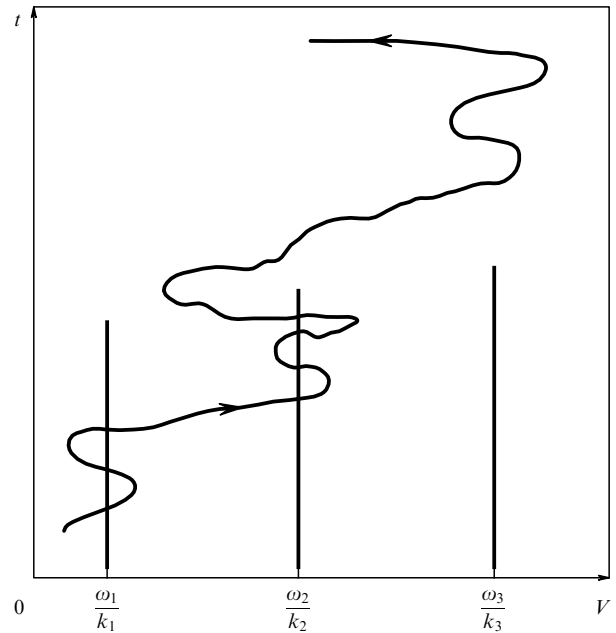


Рис. 4. Блуждание электронов между гармониками волнового пакета.

частиц отдельными гармониками и случайности фаз волн, входящих в "пакет", что позволяет реализовать декорреляционный механизм, обеспечивающий диффузионное блуждание частиц в пространстве скоростей (рис. 4). Приведём цитату из работы [1]: «Будем предполагать, что в плазме имеется одновременно много волн с различными волновыми векторами и хаотически распределёнными фазами. Таким образом, будут рассматриваться волновые пакеты достаточно большой ширины, чтобы можно было пренебречь захватом частиц в "потенциальные ямы" отдельных гармоник пакета...». Важно отметить, что Драмонд и Пайнс в работе [5] даже не обсуждали этот важный вопрос.

Корреляционные аспекты квазилинейной диффузии удобно рассмотреть в рамках концепции Чирикова о появлении стохастического слоя в окрестности сепаратрисы физического маятника при наличии модулирующего возмущения [17, 45, 46]. Тогда, используя критерий Чирикова перекрытия стохастических слоёв (рис. 5), удаётся получить полезные оценки ключевых параметров квазилинейной модели. Так, амплитуда возмущений электрического поля в спектральном представлении даётся выражением

$$\delta E \propto |E_k|^2 \delta k. \quad (81)$$

Здесь $|E_k|^2$ — спектральное распределение, δk — ширина пакета волн в пространстве волновых чисел. В качестве оценки ширины стохастического слоя можно взять величину скорости δV_S , которую набирает частица в поле флуктуаций электрического потенциала $\delta \varphi$,

$$\frac{m(\delta V_S)^2}{2} \propto e \delta \varphi. \quad (82)$$

Используя представление $\delta E \propto \nabla \varphi \propto \delta \varphi k$, получаем выражение для характерной амплитуды электрических флуктуаций $\delta \varphi$, создаваемых гармониками волнового

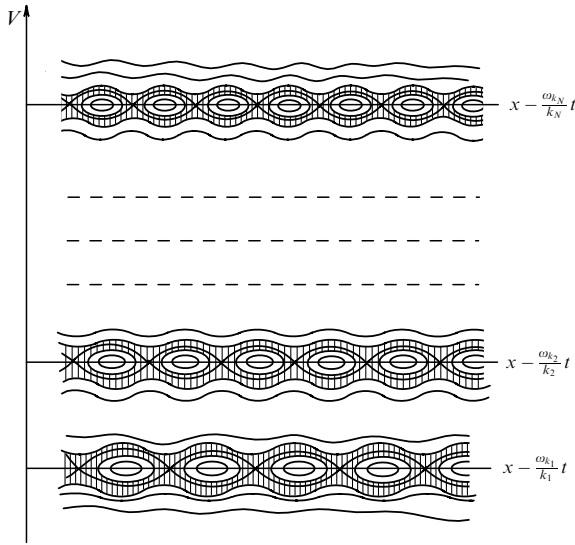


Рис. 5. Перекрывание "цепочек" островов создаст условия для диффузии частиц в пространстве скоростей.

пакета, в виде $k^2 \delta \varphi^2 \propto E_k^2 \delta k$. После подстановки выражения для $\delta \varphi$ в уравнение для ширины стохастического слоя δV_S , получаем

$$\delta V_S \propto \left(\frac{e^2}{m^2} \frac{E_k^2}{k^2} \delta k \right)^{1/4}. \quad (83)$$

Расстояние между гармониками исследуемого пакета волн в пространстве скоростей даётся формулой

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\omega}{k} \right) &= \delta V = \frac{\partial(\omega/k)}{\partial k} \delta k = \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} - \frac{1}{k} \frac{\omega}{k} \right) \delta k = \\ &= \frac{\delta k}{k} (V_g - V_\phi). \end{aligned} \quad (84)$$

В нашем случае предполагается, что волны, составляющие пакет, имеют амплитуды одного порядка величины, $V_\phi \ll V_g$, и для степенных зависимостей $\omega(k)$ получается простая оценка:

$$\delta V(\delta k) \propto \frac{\omega(k)}{k^2} \delta k. \quad (85)$$

Условие перекрытия резонансов $\delta(\omega/k) \leq \delta V_S$ оказывается полезным сразу в двух отношениях. Во-первых, оно позволяет оценить нижнюю границу для уровня шумов плазменных колебаний, рассматриваемых в квазилинейном приближении,

$$\left(\frac{e^2}{m^2} \frac{E_k^2}{k^2} \delta k \right)^{1/4} \geq \frac{\omega}{k^2} \delta k. \quad (86)$$

Во-вторых, δk фактически является параметром модели, который может быть получен из "умеренного" условия Чирикова для перекрытия резонансов, принимающего в этом случае вид алгебраического уравнения для определения величины δk ,

$$\left(\frac{e^2}{m^2} \frac{E_k^2}{k^2} \delta k_* \right)^{1/4} = \frac{\omega}{k^2} \delta k_*. \quad (87)$$

Элементарные вычисления дают оценку ширины пакета, содержащую ключевые параметры волнового поля,

$$\delta k_* = \left(\frac{e^2}{m^2} E_k^2 \right)^{1/3} \frac{k^2}{\omega^{4/3}}, \quad (88)$$

где выполнено условие $kV_\phi = \omega$.

В рамках модели случайных блужданий необходимо обеспечить не только возможность, но и случайность переходов. Получим условие стохастичности фаз волн. Предполагая, что "расфазировка" в пакете наступает за характерное время τ_{ph} , можем записать

$$\Delta \theta \propto \Delta(\omega t) \propto \Delta V k \tau_{ph} \approx 1. \quad (89)$$

Здесь ΔV — характерная ширина волнового пакета в пространстве скоростей. Тем самым для времени перемешивания фаз получаем оценку

$$\tau_{ph} \propto \frac{1}{k \Delta V} \propto \frac{1}{k} \frac{1}{\delta V N}, \quad (90)$$

где N — число волн в пакете. Очевидно, что время перемешивания τ_{ph} оказывается значительно меньше корреляционного времени $\tau \approx 1/(k \delta V)$, поскольку нас интересует широкий пакет, в котором число гармоник $N \gg 1$.

С использованием корреляционных масштабов $\delta V_* \approx \delta V_S(\delta k_*)$ и $\tau_* \approx 1/(k \delta V_*)$ удаётся записать условие для максимально допустимой плотности энергии пакета. Фактически это критерий быстрого "размешивания" фаз волн, составляющих пакет,

$$\tau_{ph} \ll \tau_{rel} \approx \frac{(\Delta V)^2}{D_V}, \quad (91)$$

где $D_V \propto \delta V_*^2 / (\tau_*(k))$ — коэффициент диффузии в пространстве скоростей. Так, для амплитуды "скачков" в пространстве скоростей получаем

$$\delta V_* \approx \delta V_S \propto \left(\frac{e^2}{m^2} E_k^2 \frac{1}{\omega} \right)^{1/3}. \quad (92)$$

В качестве характерного корреляционного времени надо использовать размерностную оценку, $\tau_*(k) \propto 1/(k \delta V_*)$, поскольку $\delta V_* \approx \delta V_S \geq \delta V$. После подстановки получаем для коэффициента диффузии квазиклассический результат:

$$D_V \propto \frac{\delta V_*^2}{\tau_*(k)} \propto \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{E_k^2}{V_\phi} \Big|_{V_\phi = \omega/k}. \quad (93)$$

Как мы видели ранее, эта формула соответствует представлениям Тэйлора о характере турбулентной диффузии, но мы имеем дело не с обычным пространством, а с пространством скоростей. Анализ с использованием модели перекрытия стохастических слоёв позволил выяснить важные детали декорреляционных механизмов. Так, например, инкремент Ландау внешне выступает в квазилинейном методе только как характеристика, определяющая эволюцию гармоник волнового пакета, в то время как механизм черенковского взаимодействия создаёт эффект модуляции волн, приводящий к стохастизации и "перекрытию" сепаратрис и, как следствие, к диффузионному характеру движения частиц в поле пакета. Отметим, что формально можно вычислить ширину

стохастического слоя методом интегрирования Мельникова [104–108], но при этом получим только линейную зависимость от амплитуды возмущения $\delta V_* \propto \Phi_*$, а параметрические зависимости в выражении для корреляционных масштабов будут утрачены.

Заметим, что если ввести часто используемый формальный критерий стохастичности K ,

$$K = \frac{\delta V_S}{\delta V} > 1, \quad (94)$$

то условия применимости квазилинейного приближения $\tau_{ph} < \tau_* < \tau_{rel}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{k\delta V} \frac{1}{N} < \frac{1}{k\delta V_S} < \frac{(N\delta V)^2}{D} \approx N^2 \frac{(\delta V)^2}{(\delta V_S)^3 k}, \quad (95)$$

что приводит к оценке $K < N$, т.е. фактически к условию ограниченности ширины стохастического слоя $\delta V_S < \Delta V$.

Вопрос о характерных временах задачи не исчерпывается иерархией $\tau_{ph} < \tau_* < \tau_{rel}$. Так, несложно переопределить τ_* в терминах коэффициента квазилинейной диффузии:

$$\tau_* \approx \frac{1}{k\delta V_*} \propto \frac{1}{(k^2 D)^{1/3}}. \quad (96)$$

Причём этот характерный масштаб окажется одного порядка как с временным масштабом, характеризующим стохастическую неустойчивость τ_K , так и с "баунс-периодом" $\tau_B \approx (k\sqrt{e\Phi_*/m})^{-1}$. Иерархию временных масштабов можно теперь представить в виде

$$\tau_{ph} < \tau_* \approx \tau_K \approx \tau_B < \tau_{rel}. \quad (97)$$

Впервые связь между квазилинейным подходом и идеями Чирикова была, по-видимому, замечена только в 1965 г. Басом, Файнбергом и Шапиро, указавшими на важность учёта конечности времени расщепления корреляций [109]. Заметим, что Чириков опубликовал статью [17] о стохастичности в динамических системах ещё в 1959 году. Более того, он работал (под руководством Будкера) в ЛИПАНе с 1954 г. по 1960 г. над задачами удержания частиц в магнитных ловушках, т.е. в то же время, что и авторы квазилинейного метода (сектор Леонтовича) [1]. Тем не менее только в серии статей Заславского, Сагдеева и Филоненко 1966–1968 гг. вопросы вычисления корреляционных эффектов и ширины стохастического слоя получили систематическое рассмотрение в рамках гамильтонова формализма [110–112].

8. Автомоделность и "фронты" в пространстве скоростей

Этот раздел мы начнём цитатой из статьи Гуревича, Парийской и Питаевского [113], опубликованной в 1966 г.: "Система уравнений, описывающих бесстолкновительную плазму, настолько сложна, что трудно указать нестационарную нелинейную задачу, которая имела бы ясный физический смысл и решение которой было бы доведено до конца". Именно такая задача была решена в опубликованной уже в 1966 г. статье Иванова и Рудакова [114]. Аналитические методы кинетической теории плазмы в этот период бурно развивались [115]. Уже обыденными стали представления о диффузии и источниках – стоках в пространстве скоростей. Пришёл черёд привести в кинетику ещё одну красивую гидродинами-

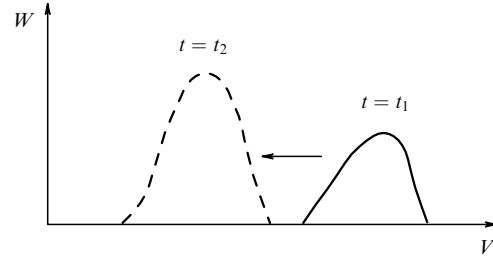


Рис. 6. Движение квазилинейного фронта.

ческую идею, связанную с распространением "фронта" [114]. Так, "внутренний склон горба" функции распределения электронов, генерируя черенковское излучение за счёт $\partial f / \partial V > 0$, продвигается в область меньших скоростей из-за потери энергии электронами пучка. Важно, что "склон" становится всё более крутым, поскольку более энергичные частицы теряют большую энергию. Фактически это движение фронта в пространстве скоростей (рис. 6).

Аналитическое представление этого процесса распространения фронта было получено путём введения автомодельных переменных. Автомодельные переменные к тому времени уже применялись в кинетике бесстолкновительной плазмы в упомянутых работах Гуревича и Питаевского [113, 116], но при рассмотрении пространственно-временной задачи. Иванов и Рудаков привели систему квазилинейных уравнений к хорошо изученному классу нелинейных уравнений диффузии (теплопроводности) [117]. Удобно перейти от квадратов фурье-гармоник поля к плотности энергии W_V как функции скорости V_z . Тогда величина $W_V \omega_L (dV_z / V_z^2)$ — это плотность энергии колебаний с фазовой скоростью в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$. В итоге уравнения одномерной квазилинейной теории в терминах плотности энергии $W_V(V_z, t)$ примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\pi}{\omega_p} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial V} \left(V W_V \frac{\partial f}{\partial V} \right), \\ \frac{\partial W_V}{\partial t} = \frac{\pi \omega_p}{n} V^2 W_V \frac{\partial f}{\partial V}. \end{cases} \quad (98)$$

Систему (98) удастся упростить, если ввести новую, "перенормированную", функцию плотности шумов:

$$\psi = W_V V^\alpha. \quad (99)$$

Тогда, добиваясь появления одинаковых "комбинаций" в обоих уравнениях, получаем при значении параметра автомоделности $\alpha = -1$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\pi}{\omega_p} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial V} \left(V^2 \psi \frac{\partial f}{\partial V} \right), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pi \frac{\omega_p}{n} V^2 \psi \frac{\partial f}{\partial V}. \end{cases} \quad (100)$$

С помощью алгебраической подстановки второго уравнения в первое и последующего интегрирования по времени приходим к системе, в которой уравнение для плотности шумов ψ может быть решено независимо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\pi}{\omega_p} \left(\frac{e}{m}\right)^2 V^2 \psi \frac{\partial^2}{\partial V^2} (\psi - \psi_0) + \pi \frac{\omega_p}{n} V^2 \psi \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (101)$$

Несложно заметить, что уравнение для "перенормированной" функции плотности шумов $\psi = W_V/V$ является нелинейным диффузионным уравнением (нелинейность степенного вида) с источником. Здесь $f_0(V)$ и $\psi_0(V)$ — начальные распределения перенормированной функции распределения частиц и шумов соответственно.

Автомодельные переменные являются эффективным средством аналитического исследования подобных задач [117]. Однако наличие источника, связанного с $\partial f_0/\partial V$, позволяет дополнительно выделить характерные стадии процесса релаксации пучка. Так, начальная стадия образования плато и возрастания уровня шумов в основном обусловлена влиянием члена $\pi(\omega_p/n)V^2\psi \partial f_0/\partial V$, и нелинейность мала. Затем "выхолащивание" профиля функции распределения электронов приводит к возможности пренебречь членом с источником ($\partial f_0/\partial V \rightarrow 0$) и, следовательно, воспользоваться автомодельными переменными для решения редуцированного уравнения для плотности шумов

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\pi}{\omega_p} \left(\frac{e}{m}\right)^2 V^2 \psi \frac{\partial^2}{\partial V^2} (\psi - \psi_0). \quad (102)$$

Именно этот автомодельный режим даст решение для описания как скорости распространения, так и ширины "фронта" возмущения ψ и f в форме, аналогичной фронту тепловой волны.

Поскольку традиционный для нелинейных уравнений теплопроводности метод масштабирования не приводит к появлению принципиально нового соотношения инвариантности, Иванов и Рудаков [114] ввели автомодельную переменную в виде

$$\xi(U, \tau) = 1 - \frac{U}{\sqrt{\tau}}, \quad (103)$$

аналогичную переменной в классической пространственной задаче диффузии, где пространственный и временной масштабы связаны соотношением $\xi = l/\sqrt{t}$. Были введены безразмерные величины для ключевых параметров модели:

$$\tilde{F} = \frac{V_b}{n_b} f(V), \quad w = W_k \frac{\omega_p}{2\pi m n_b V_b^3}, \quad (104)$$

$$\tau = \pi \omega_p \left(\frac{n_b}{n_0}\right) t, \quad U = \frac{V}{V_b}. \quad (105)$$

Тогда после преобразования получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для искомой функции $\varphi = w(U, \tau) - w_0(U)$:

$$-\frac{\xi}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = (\varphi + w_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}. \quad (106)$$

Здесь имеется два граничных условия: $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(\infty) = 0$. Авторам [114] удалось найти приближённое решение этого уравнения в случае возрастающих шумов: $\ln(\varphi/w_0) \gg 1$,

$$\varphi = \frac{1}{2} \xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln \frac{1}{w_0}, \quad (107)$$

где константа ξ_0 даётся условием $\varphi(0) = 1$ и очевидно, что она определяет положение движущегося в пространстве скоростей фронта: $\xi_0 = \sqrt{2/\ln(1/w_0)}$. Возвращаясь

к размерным величинам, используем определение автомодельной переменной:

$$\xi \propto \frac{1}{V_b} \frac{V_b - V}{\sqrt{\pi \omega_p (n_b/n_0) t}}, \quad (108)$$

для установления времени релаксации пучка на интервале скоростей $\Delta V = V_b - V(\Delta t)$

$$\Delta t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V}{\Delta V_b}\right)^2 \frac{1}{\pi \omega_p} \frac{n_0}{n_b} \ln \frac{1}{w_0}. \quad (109)$$

Поскольку оценка инкремента Ландау даётся выражением

$$\gamma_L \approx \omega_p \frac{n_b}{n} \left(\frac{V_b}{\Delta V}\right)^2,$$

отсюда легко получаем для времени релаксации

$$\tau_{rel} \approx \frac{1}{2\gamma_L} \ln \frac{1}{w_0} \gg \frac{1}{\gamma_L}. \quad (110)$$

Логарифмический множитель является величиной, сравнимой с кулоновским логарифмом, поскольку он связан с отношением амплитуд шумов в начале и конце процесса релаксации.

Качественная оценка скорости движения фронта даётся отношением характерного "сдвига" $\delta V_F \propto \Delta V/\ln(1/w_0)$ к времени, за которое он происходит (обратный инкремент $1/\gamma_L$). Иванов и Рудаков провели также детальное исследование структуры фронта путём упрощения ключевого автомодельного уравнения. Традиционная для задач распространения тепловых волн оценка ширины переходной области здесь невозможна по причине "выпадения" пространственного масштаба из модельного уравнения.

Рассмотренное здесь красивое решение Иванова и Рудакова демонстрирует эффективность совместного решения уравнения диффузии для усреднённой функции распределения, нелинейно связанного с уравнением для эволюции спектра шумов. Фактически удаётся перевести на новый уровень понимания осуществлённый Власовым подход, в котором кинетическое уравнение "самосогласовывалось" с уравнениями Максвелла. Причём автомодельные решения кинетических уравнений сыграли в дальнейшем важную роль в анализе трёхмерных моделей релаксации пучка [41], ионно-звуковой турбулентности [118] и сильнонеравновесных функций распределения надтепловых электронов [40, 52, 119–121].

9. Эффекты рассеяния волн и секторальное плато

Квазилинейный подход позволяет анализировать не только одномерные задачи. Так, феноменология "платообразования" может быть использована для рассмотрения задачи о рассеянии электронов пакетом ионно-звуковых волн. Этот механизм был указан Кадомцевым и Сагдеевым как ключевой для объяснения аномального сопротивления плазмы при протекании через неё электрического тока [26, 122, 123]. Наглядно существенную неоднородность (анизотропию) развития неустойчивости ионно-звуковых волн в токонесящей плазме продемонстрировали численные эксперименты Филда и Фрида

[122]. Было показано, что на больших временах становится важной роль волн, направленных под достаточно большими углами к вектору электрического поля. Кроме того, возникает диффузия электронов в пространстве скоростей по азимутальному углу.

Появление эффектов анизотропии находит объяснение при рассмотрении механизма резонансного взаимодействия электронов с ионно-звуковыми волнами. Так, неустойчивость ионно-звуковых волн возникает в неизоэлектрической плазме, где температура электронов много больше температуры ионов ($T_e \gg T_i$), в условиях, когда направленная скорость электронов U превышает некоторое критическое значение, $U > U_* \approx c_s$ [26, 47]. Это происходит, например, при наличии внешнего электрического поля. Эффект рассеяния электронов ионно-звуковыми волнами связан с черенковским механизмом взаимодействия, для которого условие резонанса имеет вид

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{V}_e = kV_e \cos \theta_*, \quad (111)$$

где θ_* — угол между направлением скорости электрона $\mathbf{V}_e$ и волновым вектором ионного звука $\mathbf{k}$. При малых волновых числах (длинноволновой предел, $\omega/k = \sqrt{T_e/m_i}$, $k \ll 1/r_{De}$) это условие выполняется только тогда, когда $\cos \theta_* \approx \omega/(kV_e) \approx (m_e/m_i)^{1/2}$. Это означает, что с волной взаимодействуют электроны, движущиеся к ней под почти прямым углом, а приращение скорости $\Delta V_e/V_e \approx \cos \theta_*$, являясь параллельным волновому вектору $\mathbf{k}$, оказывается перпендикулярным к $\mathbf{V}_e$. Действительно, изменение импульса в каждом акте испускания – поглощения кванта, $\Delta \mathbf{p} = m\Delta \mathbf{V} = \hbar \mathbf{k}$, приводит к изменению энергии $\Delta \varepsilon = m\mathbf{V}\Delta \mathbf{V} = \hbar \mathbf{k}\mathbf{V} = \hbar \omega$. Формальные вычисления дают оценку

$$\frac{\Delta p}{p} \propto \frac{\hbar \omega}{mV^2/2} \frac{kV}{\omega} \propto \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \quad (112)$$

позволяющую уверенно использовать модель упругого рассеяния.

Если инкремент неустойчивости ионно-звуковых волн, возбуждаемых в плазме при протекании тока, мал, $U \geq c_s$, то на функции распределения электронов возникает квазилинейное плато, соответствующее конкретному направлению волнового вектора (рис. 7). Здесь

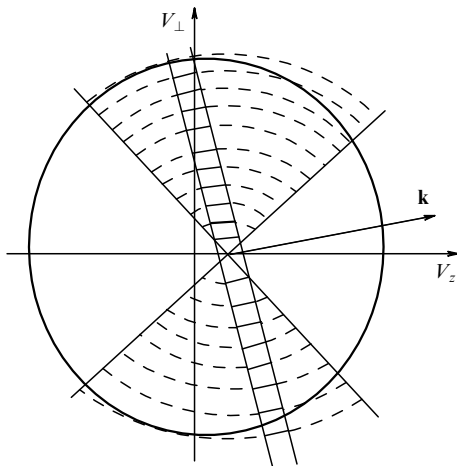


Рис. 7. Квазилинейное плато, соответствующее выделенному направлению волнового вектора.

U — дрейфовая скорость токонесящих электронов. Кадомцев заметил [26], что если волновые векторы заполняют некоторый сектор в направлении протекания тока, то область образования плато (область изотропизации функции распределения электронов) существенно расширится, поскольку в местах пересечения различных резонансных полос функция распределения должна иметь одно и то же постоянное значение. Очевидно, что подобная "неоднородность" существенно усложняет теоретический анализ по сравнению с анализом одномерной квазилинейной модели [1–7].

Как обсуждалось выше, для случая тепловых шумов влияние ионно-звуковых волн ($T_e \gg T_i$) на функцию распределения электронов F_e исследовалось Давыдовым с помощью модельного уравнения Фоккера – Планка [13]. Для описания эффекта рассеяния Давыдов использовал интеграл столкновений, аналогичный интегралу столкновений электронов с бесконечно тяжёлыми ионами (приближение Лоренца):

$$\text{St}[F_e] = \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(v_{\text{eff}} \sin \theta' \frac{\partial F_e}{\partial \theta'} \right). \quad (113)$$

Здесь $v_{\text{eff}} \approx \omega_{pe} W/(nTe)$ — эффективная частота столкновений, θ' — азимутальный угол вектора скорости электрона. В терминах плотности энергии шумов применяется традиционная нормировка

$$W = 2\pi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi W(k, \theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (114)$$

Фактически идея образования "секторального плато" и кинетическая (лоренцева) модель рассеяния электронов шумами послужили основой для построения квазилинейной теории ионно-звуковой турбулентности в работах [124–128]. В работе Рудакова и Кораблёва впервые было подробно изучено квазистационарное состояние, в котором сила динамического трения не позволяет большей части электронов перейти в режим свободного ускорения. Упрощённое кинетическое уравнение для функции распределения электронов записывается традиционно с использованием для скорости частиц сферических координат V, θ', ϕ' . В этом уравнении вследствие симметрии задачи зависимость от ϕ' отсутствует и вводится переменная $\xi = \cos \theta'$:

$$F_e(V, \xi) = f_0(V) + f_1(V, \xi), \quad (115)$$

$$\begin{aligned} F_e(V, \xi) &= f_0(V) + f_1(V, \xi) - \frac{eE}{m_e} \xi \frac{\partial f_0}{\partial V} = \\ &= \frac{V_T^3}{V^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) v_{\text{eff}}(\xi) \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (116)$$

Здесь эффективная частота столкновений $v_{\text{eff}}(\xi)$ появляется в результате вычисления квазилинейного столкновительного члена

$$\text{St}_{\text{QL}} = \frac{e^2}{m_e^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} |\varphi_k|^2 \pi \delta(\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{V}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} \right). \quad (117)$$

Выражение для v_{eff} записывается через определение спектральной плотности колебаний

$$N(\mathbf{k}) = \frac{k^2 |\varphi_k|^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon(\omega, \mathbf{k})] \approx \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 \frac{k^2 |\varphi_k|^2}{4\pi} \quad (118)$$

и имеет следующий вид

$$v_{\text{eff}}(\xi) = \frac{V_T}{n_0 T_e} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(2\pi)^2} \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{N(k, x)}{\sqrt{1-\xi^2-x^2}} \left(\frac{\omega}{k c_s}\right)^2 \frac{x^2}{1-\xi^2} dx, \quad (119)$$

где использована сферическая система координат для волнового вектора k, θ, φ и принято обозначение $x = \cos \theta$.

Главным для развития квазилинейного метода стало рассмотрение Рудаковым и Кораблёвым стационарного уравнения для спектральной плотности энергии ионно-звуковых колебаний

$$\gamma_\Sigma(k, \theta) N(k, \theta) = 0. \quad (120)$$

Здесь γ_Σ — сумма инкрементов, обуславливающих возбуждение и затухание ионно-звуковых волн. В простейшей постановке [125] были учтены инкремент возбуждения ионно-звуковых волн неравновесной функции распределения электронов,

$$\gamma_e = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e k^2} \frac{\omega}{\omega_{pe}^2} \int d\mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{kV}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{V}} \right), \quad (121)$$

и затухание волн на ионах вследствие черенковского взаимодействия (затухания Ландау),

$$\gamma_i = 2\pi^2 k \left(\frac{\omega}{k} \right)^4 F_i \left(\frac{\omega}{k} \right). \quad (122)$$

Авторы [125] здесь впервые использовали приближение разделения переменных $N(k, \theta) = N(k) \Phi(\cos \theta_k)$, где k — модуль волнового вектора звуковой волны, θ — угол между волновым вектором и дрейфовой скоростью электронов. Для $N(k)$ выбиралось "пикированное" дельтаобразное распределение

$$N(k) = \frac{(2\pi)^3}{\omega} \frac{\delta(k - k_0)}{k_0^2}, \quad (123)$$

где k_0 определялось из условия экстремальности инкремента (аналогичное условие есть в [124]),

$$\frac{\partial}{\partial k} \gamma_\Sigma(k_0, \theta) \Big|_{\theta \rightarrow 0} = 0, \quad \gamma_\Sigma(k_0, \theta) \Big|_{\theta \rightarrow 0} = 0. \quad (124)$$

Важно отметить, что физические представления о механизме возбуждения ионно-звуковых волн позволяют получить уравнение, описывающее угловую зависимость распределения волн $\Phi(\cos \theta)$. Так, естественно предположить, что волны возбуждаются внутри области, имеющей форму конуса, расширяющегося в направлении тока. Авторы [125] вслед за Кадомцевым предположили, что угол раствора конуса $\theta_0 < \pi/2$ и, следовательно, $\Phi(\cos \theta)$ отличен от нуля только в области $1 \geq \cos \theta \equiv x \geq \cos \theta_0 \equiv x_0$.

Можно смело утверждать, что счастье здесь улыбнулось теоретикам, поскольку стационарное уравнение для спектральной плотности волн здесь сводится к интегральному уравнению Абеля

$$g(x) = \int_0^x \frac{\Phi(z)}{(x-z)^\alpha} dz, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (125)$$

Это частный случай интегрального уравнения Вольтерры первого рода, которое имеет аналитическое решение

$$\Phi(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt. \quad (126)$$

Опуская громоздкие вычисления, отметим, что в случае, рассматриваемом Рудаковым и Кораблёвым, $\alpha = 1/2$.

Однако полученное с помощью решения уравнения Абеля угловое распределение турбулентных пульсаций приводит к расходимости при $\theta \rightarrow 0$, что означает бесконечность энергии пакета волн. Эту трудность преодолел Коврижных [126], включив в рассмотрение парные столкновения ионов. Добавив соответствующий инкремент

$$\gamma_{st} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e T_e}{m_i T_i} \right)^{1/2} \frac{c_s^2 k^2}{\omega} v_{ei}, \quad (127)$$

где

$$v_{ei} = \frac{4\pi e^4 n}{m_e^2 V^3} \ln A, \quad (128)$$

в выражение для γ_Σ , он получил следующее угловое распределение:

$$\Phi(\cos \theta) \equiv \Phi(x) = c_0 \frac{\lambda}{x(1-\lambda x)} \left\{ p[p + 3x^2(1-\lambda x)] - \frac{3}{4} \lambda x_0^2 \ln \frac{x + p^{1/2}}{x_0} \right\}, \quad (129)$$

которое мы приводим в качестве иллюстрации возможностей аналитического подхода. Здесь $x^2 - x_0^2 = p$, c_0 — постоянная, λ — отличный от единицы параметр, учитывающий вклад ион-ионных столкновений. Случай отсутствия столкновений [125] соответствует $\lambda = 1$ и, как следствие, расходимости $\Phi(x)$ при $x \rightarrow 1$, $\Phi(x) \propto 1/[x(1-x)]$. Секторальная диаграмма Кадомцева соответствует случаю малого превышения дрейфовой скорости U над фазовой скоростью звуковых волн c_s . Иллюстрация для более общего случая приведена на рис. 8, где схематически показано резонансное условие.

Анализ квазилинейных результатов позволил выявить серьёзные проблемы модельной теории. Так, повышение температуры приводит к возрастанию числа убегающих электронов и к выходу из стационарного состояния. Это означает, что величина приложенного электрического поля должна быть значительно меньше критического поля, приводящего к убегаанию электро-

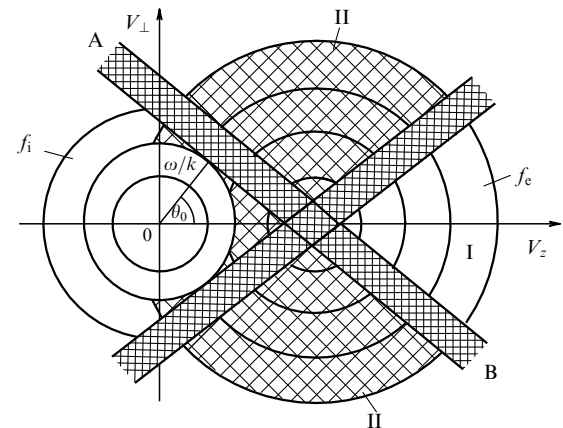


Рис. 8. Область квазилинейной диффузии в модели Рудакова–Кораблёва.

нов, — дрейсеровского поля E_D , быстро убывающего с температурой,

$$E_D \propto \frac{e}{\lambda_e^2(T_e)} \ln A \propto \frac{1}{T_e^2}, \quad (130)$$

где λ_e — длина пробега электронов, $\ln A$ — кулоновский логарифм. Действительно, элементарные оценки дают $n\sigma\lambda_e \approx 1$, $e/\sigma \approx k_B T_e$, где σ — сечение. С другой стороны, здесь пренебрегалось эффектами анизотропии ионной функции распределения, резонансным поглощением волн ионами и нелинейным взаимодействием волн (индуцированное рассеяние и пр.).

Естественным направлением дальнейших исследований стало решение кинетических уравнений для плазменных, учитывающих нелинейные эффекты [127–130]. Уже в 1965 г. Сизоненко и Степанов [124] обратили внимание на то, что уровень ионно-звуковых колебаний должен быть согласован с нелинейными процессами. Фактически именно с помощью модификации уравнения для числа квантов, в котором отказались от модельного дельта-образного профиля $N(k)$, но сохранили метод разделения переменных и абелев интеграл, в работах Силина с соавторами [131, 132] получено самосогласованное аналитическое решение задачи о квазистационарной ионно-звуковой турбулентности. Как бы нам ни хотелось развить эту тему, мы вынуждены ограничиться только этой краткой аннотацией. В заключение данного раздела отметим, что задача описания ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ) носит неакадемический характер и многие важные аспекты ИЗТ всё ещё остаются невыясненными [132–134].

10. Баланс инкрементов и надтепловые частицы

Квазилинейный подход к анализу коллективных эффектов, связанных с учётом возбуждаемых в плазме колебаний, существенно расширил круг поддающихся решению задач в кинетической теории плазмы. Так, в рамках лоренцева приближения с использованием квазилинейного коэффициента диффузии удалось описать анизотропные искажения функции распределения частиц по скоростям, связанные с колебаниями под воздействием внешнего электрического поля. Здесь мы рассмотрим феноменологический метод решения квазилинейных уравнений, основанный на использовании баланса характерных времён задачи. Действительно, в выражение для инкремента Ландау входит производная функции распределения частиц. Поэтому, сравнивая этот инкремент с другими характерными обратными временами, описывающими затухание колебаний (например, за счёт столкновений частиц), можно получить простое дифференциальное уравнение для функции распределения. В простейшем случае это просто баланс двух инкрементов.

Интересную модель такого типа предложил Рютов [135], рассматривая эволюцию ленгмюровских шумов, возникающих в задаче об убегающих электронах. Был рассмотрен случай малых полей, т.е. случай, в котором электрическое поле E меньше критического поля Дрейсера $E_D \propto (mV_T/e)v_{ei}(V_T)$. Здесь $v_{ei}(V_T)$ — частота электрон-ионных столкновений при скоростях частиц порядка тепловых V_T . В этих условиях малая доля частиц может переходить в режим ускорения, формируя второй макси-

мум на функции распределения электронов по скоростям. Поскольку быстрые электроны практически не испытывают парных столкновений, $\lambda_e \propto V_e^4$, важную роль начинают играть коллективные процессы, связанные с раскачкой ленгмюровских колебаний. Квазилинейное уравнение для эволюции спектра принимает вид

$$\frac{\partial W(k)}{\partial t} = 2[\gamma_L(k) - v_{ei}(V_T)] W(k), \quad (131)$$

где

$$\gamma_L(k) = \pi\omega_{pe} \frac{n'}{n} \left(V^2 \frac{\partial f}{\partial V} \right) \Big|_{V=\omega_{pe}/k}, \quad (132)$$

n' — характерный масштаб плотности пучка быстрых электронов. В одномерном, близком к стационарному случае (отсутствие электрического поля в первом приближении) ожидаем, что в интервале волновых чисел $k_1 < k < k_2$ можно записать баланс инкрементов в виде

$$\gamma_L(k) - v_{ei}(V_T) = 0. \quad (133)$$

Это уравнение выглядит проще, чем стационарный баланс Рудакова–Кораблёва, однако несложно убедиться в его эффективности. Так, после подстановки соответствующих задаче инкремента и частоты искомое уравнение для функции распределения принимает простой вид:

$$\frac{\partial f(V)}{\partial V} = \frac{\alpha_R}{V^2}, \quad (134)$$

где $\alpha_R = (n/n')v_{ei}(V_T)/(\pi\omega_{pe})$. После интегрирования находим

$$f(V) = \alpha_R \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V} \right), \quad (135)$$

где

$$\frac{\omega_{pe}}{k_2} = V_1 < V < V_2 = \frac{\omega_{pe}}{k_1}. \quad (136)$$

Вне этого интервала скоростей функция распределения не меняется, сохраняя первоначальный вид $f_0(V)$ (рис. 9). Параметрами в такой постановке являются значения V_1 и V_2 , которые находятся из двух условий. Первое — это закон сохранения полного числа частиц:

$$\alpha_R \left(\frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) + \int_{V_2}^{\infty} f_0(V) dV = 1. \quad (137)$$

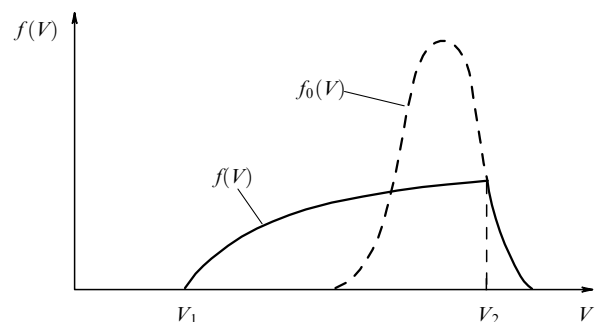


Рис. 9. Функция распределения частиц в модели Рютова.

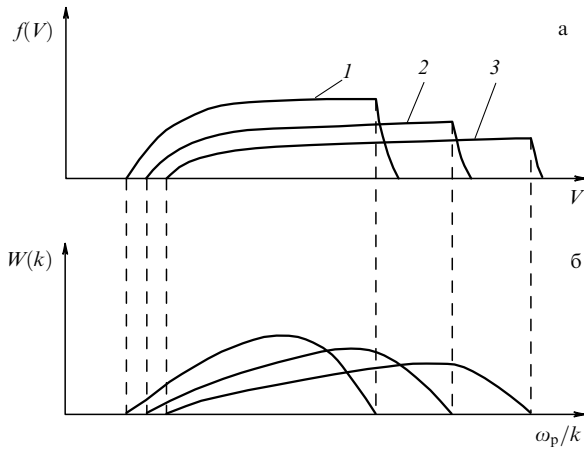


Рис. 10. Эволюция спектральной функции в модели Рютова.

Второе условие обеспечивает непрерывность распределения частиц по скоростям:

$$\alpha_R \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = f_0(V_2). \quad (138)$$

Для учёта малого электрического поля автор [135] предложил рассматривать точки V_1 и V_2 как подвижные, а функцию распределения при $V > V_2$ представить в виде

$$f(V, t) = f_0 \left(V - \frac{e}{m} Et \right). \quad (139)$$

Это, естественно, приведёт к переопределению характерных масштабов скорости V_1 и V_2 за счёт включения в них зависимости от параметра Et .

Теперь удаётся найти и спектр ленгмюровских колебаний, энергия которых в отсутствие электрического поля равняется нулю. Так, классическое одномерное квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{W(\omega_{pe}/V)}{V} \frac{\partial f}{\partial V} \right], \quad (140)$$

после простых преобразований примет вид

$$-\frac{1}{V_1^2} \frac{dV_1}{dt} \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right) - \frac{eEk}{m\omega_{pe}} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \frac{k^3}{\omega_{pe}} W(k) + \text{const}. \quad (141)$$

Поскольку $\omega(k_1) = 0$,

$$\text{const} = -\frac{\omega_{pe}}{k_1 V_1^2} \frac{dV_1}{dt} - \frac{eEk_1}{m\omega_p}. \quad (142)$$

В итоге эволюционирующая спектральная функция даётся выражением (рис. 10)

$$W(k) = \frac{neE}{\pi k^4} (k - k_1)(k - k_2). \quad (143)$$

Рассмотренная здесь модель достаточно проста, но она демонстрирует эффективность рассмотрения баланса характерных инкрементов (времен). В качестве инкрементов могут быть использованы и величины, характеризующие такие важные нелинейные процессы, как индуцированное рассеяние или различные декорреляционные механизмы. Причём результаты, которые удаётся получить таким несложным образом, позволяют устано-

вить качественную картину явления, без которой построение строгой теории невозможно.

11. Диффузия силовых линий и "островные" структуры

Квазилинейное рассмотрение взаимодействия электронов с пакетом волн опиралось на представление о блуждании частиц внутри волнового пакета. Такой механизм наглядно представлялся на фазовой плоскости как переход частиц между волнами вследствие перекрытия областей стохастизации в окрестностях сепаратрис. При исследовании структуры магнитных поверхностей в установках для удержания высокотемпературной плазмы в окрестности резонансных поверхностей возникают также разделённые сепаратрисами "островные" структуры [136–141], аналогичные фазовым портретам группы волн (рис. 11). Такое сходство не является случайным, и аналогия вызвана гамильтоновой структурой уравнений, описывающих траекторию силовой линии магнитного поля.

Авторы [142] использовали это свойство для построения квазилинейной модели блуждания силовой линии стохастического магнитного поля в плазменных ловушках с разрушенными магнитными поверхностями. Они опирались на феноменологическое определение коэффициента диффузии магнитных силовых линий D_m ,

$$D_m = \frac{\langle \Delta r_{\perp}^2(l) \rangle}{l}. \quad (144)$$

Эта формула основана на вычислении поперечного смещения силовой линии магнитного поля $\Delta r_{\perp}(l)$ при движении наблюдателя вдоль неё на расстояние l .

Рассмотрим плоское сечение магнитных поверхностей, вытянутых вдоль оси z , в котором островная структура состоит из нескольких цепочек (рис. 12). Сходство с фазовым портретом пакета продольных волн очевидно. С этой точки зрения ось z здесь аналогична оси времени, x — скорости, а y — смещению частицы в поле волны. Тогда аналогом волновой фазы осциллятора $\varphi = kx - \omega t$ станет фаза возмущения магнитного поля $\varphi_m = k_y y - k_z z$. Сама отдельная гармоника возмущения запишется в виде

$$B_x = B_{\perp} \cos(k_y y - k_z z). \quad (145)$$

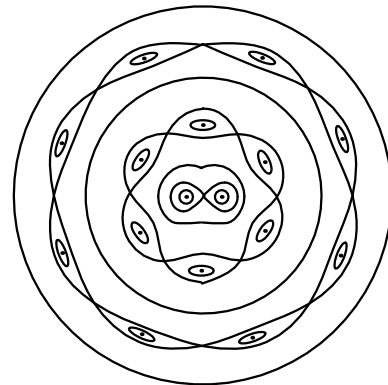


Рис. 11. Сечение тороидальных магнитных поверхностей и островные структуры.

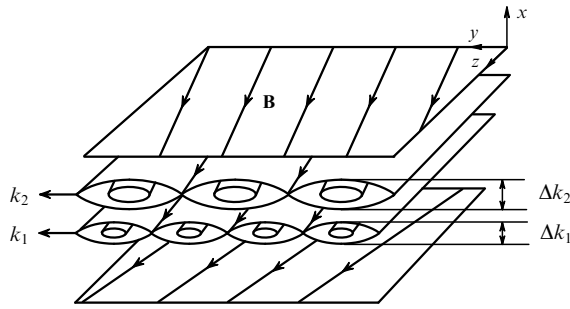


Рис. 12. Система магнитных островов.

Уравнения "движения" силовой линии имеют традиционный вид:

$$\frac{dx}{dl} = \frac{B_x}{B_0} = b_x, \quad (146)$$

$$\frac{dy}{dl} = \frac{B_y}{B_0} = b_y, \quad (147)$$

где B_0 — невозмущённое магнитное поле, направленное вдоль оси z , b_x и b_y — характерные скорости движения силовой линии в поперечном направлении.

Для полноты рассмотрения аналогии запишем простейшее уравнение для эволюции скорости резонансной частицы в поле волны. Воспользуемся условием черенковского резонанса $\omega = kV$ и запишем уравнение движения частицы в системе координат, движущейся вместе с волной,

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \cos(k\tilde{x}). \quad (148)$$

Здесь $x = (\omega/k)t + \tilde{x}$. Представив смещение частицы $\tilde{x}$ в интегральном виде

$$\tilde{x} = \int \tilde{V}(t) dt, \quad (149)$$

получаем уравнение, описывающее взаимодействие резонансной частицы с отдельно взятой гармоникой электрического поля,

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \cos\left(k \int \tilde{V} dt\right). \quad (150)$$

Условия резонанса можно сформулировать и для случая гармоник магнитного поля. Здесь аналогом скорости выступает производная $dy/dl = B_y/B_0$. Условие постоянства фазы, $k_y y + k_z z$, в сочетании с правильно выбранной зависимостью $B_y(x)$ позволит получить условие для резонансной поверхности x_0 . Из соображений аналогии зависимость $B_y(x)$ должна быть линейной по x . Такую зависимость даёт простейшая аппроксимация ширового поля (рис. 13)

$$B_y(x) = \frac{\partial B_y}{\partial x} x = \frac{B_0}{L_s} x, \quad (151)$$

где L_s — характерный пространственный размер (параметр шира). После интегрирования уравнения движения силовой линии получим

$$y = \frac{x_0 l}{L_s} + \frac{1}{L_s} \int_{x_0}^x x dl. \quad (152)$$

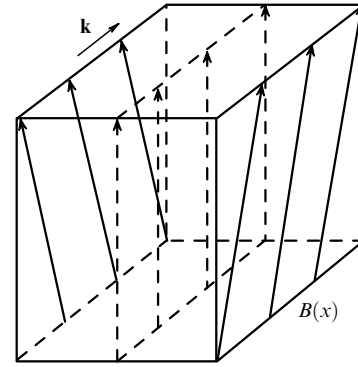


Рис. 13. Модель ширового магнитного поля.

Из условия резонанса при $x = x_0$ находим соотношение, связывающее основные параметры задачи,

$$k_z = -k_y \frac{x_0}{L_s}. \quad (153)$$

Действительно, условие резонанса $k_z = -k_y(y/z)$ надо сопоставить с уравнением невозмущённой компоненты $z/B_0 = y/B_y^0$ или $B_y^0 = (B_0/L_s)x_0$. Теперь имеем уравнение для скорости смещения силовой линии в направлении оси x

$$\frac{dx}{dl} = \frac{B_{\perp}}{B_0} \cos\left(\frac{k_y}{L_s} \int_{x_0}^x x dl\right), \quad (154)$$

являющееся полным аналогом приведённого выше уравнения движения частицы в электрическом поле одной гармоники. Здесь фактически устанавливается прямое соответствие между параметрами задачи о взаимодействии частицы с пакетом волн и задачи о блужданиях силовой линии в системе магнитных островов:

$$\frac{B_{\perp}}{B_0} \leftrightarrow \frac{e}{m} E_0, \quad \frac{k_y}{L_s} \leftrightarrow k. \quad (155)$$

Рассматривая ансамбль гармоник магнитного поля в форме фурье-разложения,

$$B_x = \sum_{k_y k_z} B_k \exp(ik_z z + ik_y y), \quad (156)$$

можем обобщить квазилинейный коэффициент диффузии для резонансных частиц в фазовом пространстве:

$$D_V = \sum_k \frac{\pi e^2 E_k^2}{m^2} \delta(\omega_k - kV). \quad (157)$$

Здесь электрическое поле задано набором фурье-гармоник,

$$E = \sum_k E_k \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (158)$$

Квазилинейный коэффициент диффузии силовых линий стохастического магнитного поля примет аналогичный вид:

$$D_m = \sum_{k_y k_z} \pi \frac{|B_k|^2}{B_0^2} \delta\left(k_z + k_y \frac{x}{L_s}\right). \quad (159)$$

Для определения переноса частиц в стохастическом магнитном поле необходимо использовать дополнительные аргументы, касающиеся механизмов декорреляции [143–150]. В простейшем случае баллистического (бесстолкновительного) движения "замагниченных" частиц вдоль силовых линий перенос определяется только декорреляционными свойствами магнитного поля:

$$D_T = \frac{\Delta r_{\perp}^2(\tau)}{\tau} = \frac{\Delta r_{\perp}^2(\tau)}{l_{\text{cor}}} \frac{l_{\text{cor}}}{\tau} = V_{\parallel} D_m, \quad (160)$$

где характерное корреляционное время $\tau = l_{\text{cor}}/V_{\parallel}$, $V_{\parallel}$ — продольная скорость частиц, l_{cor} — продольный корреляционный пространственный масштаб.

Интересные возможности возникают и в связи с использованием коэффициента диффузии силовых линий в задачах о распространении быстрых электронов в областях стохастизации магнитного поля. Модельное кинетическое уравнение, описывающее искажение хвоста функции распределения надтепловых электронов с интегралом столкновений в форме Фоккера–Планка, имеет вид

$$-|v|D_m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 v_e(v) \left(v f + \frac{T_e(x)}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] + v_e(v) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right]. \quad (161)$$

Здесь v_e — частота столкновения электронов, $v_e(v, x) = 4\pi e^4 \Lambda_e(x)/(m^2 v^3)$, $\mu = \cos \theta$, $f(x, v, \mu)$ — функция распределения электронов, D_m — коэффициент аномальной диффузии, T_e — температура основной массы электронов, n_e — плотность электронов, θ —pitch-угол скорости электрона, v — модуль скорости электрона. Можно не учитывать член, связанный с влиянием электрического поля E [120], поскольку вызванные им искажения появляются только при достаточно больших энергиях электронов, $\varepsilon > \varepsilon_D \approx 4\pi e^3 n_e \Lambda/E$. Используя автономные переменные, можно свести описание среды с пространственной неоднородностью к выражению, близкому по форме к уравнению, описывающему убегающие электроны в однородной плазме [150–152]. Техника решения таких уравнений детально разработана Гуревичем и Лебедевым. Так, в данной конкретной задаче функция распределения имеет разный характер поведения в областях, разграниченных значениями скоростей $v_1(D_m)$ и $v_2(D_m)$. Эти теоретически вычисленные значения могут быть использованы для экспериментального определения значений D_m по данным рентгеновских измерений [119, 153].

Обращает на себя внимание тот факт, что работа [142] появилась только в 1966 г. При этом уже в 1962 г. Л.С. Соловьёв, активно исследовавший расщепление магнитных поверхностей в тороидальных плазменных ловушках, в статье [137] ссылается на обзор Веденова, Велихова, Сагдеева 1961 года. Возможным объяснением образовавшейся паузы является тот факт, что связь между квазилинейным методом и критерием Чирикова для перекрытия резонансов не была сразу установлена. Тем не менее синтез квазилинейных идей, подхода Чирикова и гамильтоновых моделей для системы вложенных магнитных поверхностей привёл к бурному развитию теории динамического хаоса.

12. Перенос примеси и корреляционные эффекты

Одним из направлений развития квазилинейного подхода стало его использование в задачах описания турбулентной диффузии пассивной примеси (скаляра) в гидродинамических течениях. Под пассивной примесью могут пониматься помещённые в гидродинамический поток частицы, не оказывающие влияния на характер течения. В условиях, когда температура каждой частицы жидкости сохраняется (температура "заморожена" в среде), в качестве скаляра может выступать и температура.

Обратим внимание на то, что идея усреднения уравнений переноса была эффективно реализована незадолго до появления квазилинейного метода в задачах описания аномальной диффузии скаляра Тэйлором [154], который рассмотрел перенос скаляра в ламинарном течении жидкости с немонотонным профилем скорости

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_x(y, z) \frac{\partial n}{\partial x} = D_0 \nabla^2 n. \quad (162)$$

Здесь n — плотность частиц, V_x — продольная (вдоль оси x) скорость, D_0 — коэффициент затравочной (молекулярной) диффузии. Был рассмотрен эффект случайного (за счёт диффузий) заброса частиц в неоднородное продольное поле скорости, что должно создать дополнительную к молекулярной продольную диффузию. Здесь мы проанализируем плоскую модель, представив профиль продольного течения в виде $V(y) = (V_0/L^2) \times (L^2 - y^2)$, где V_0 — характерная скорость, L — характерный пространственный масштаб. Представим распределение плотности и скорости как сумму среднего и поправки:

$$n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L n(x, y, t) dy + n_1(x, y, t) = n_0 + n_1(x, y, t), \quad (163)$$

$$V = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L V(y) dy + V_1(y) \equiv \frac{2}{3} V_0 + V_0 \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right]. \quad (164)$$

Рассмотрим стационарный случай. После подстановки выражений для n и V в исходное уравнение и усреднения получим выражения для эволюции средней плотности $n_0(x)$ и возмущения $n_1(x, y)$:

$$V_0 \frac{\partial}{\partial x} n_0 + \left\langle V_1 \frac{\partial}{\partial x} n_1 \right\rangle = D_0 \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}, \quad (165)$$

$$V_1 \frac{\partial n_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial n_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} - \left\langle V_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = D_0 \left(\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2} \right). \quad (166)$$

Рассматривая уравнение для возмущения плотности скаляра n_1 , выделим члены, ответственные за ожидаемый эффект, и учтём малость $\partial n_1/\partial x$ и $\partial^2 n_1/\partial x^2$ по сравнению со значимыми $\partial n_0/\partial x$ и $\partial^2 n_1/\partial y^2$,

$$V_1 \frac{\partial n_0}{\partial x} = D_0 \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2}. \quad (167)$$

Здесь уже просматривается нетривиальная зависимость $n_1 \propto V_0/D_0$. Так удаётся найти простое решение для n_1 :

$$n_1 = \frac{\partial n_0}{\partial x} \frac{V_0}{3D_0} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4L^2} \right) + \text{const}. \quad (168)$$

Используя условие $\langle n_1 \rangle = 0$, получаем

$$\text{const} = \frac{\partial n_0}{\partial x} \frac{V_0}{3D_0} \left(-\frac{7}{60} L^2 \right).$$

Выражение для $\langle V_1 \partial n_1 / \partial x \rangle$ определяет дополнительный вклад в продольный диффузионный перенос,

$$\left\langle V_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = -D_1 \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} = -\frac{8}{945} \frac{(V_0 L)^2}{D_0} \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}. \quad (169)$$

Получившаяся зависимость дополнительного продольного коэффициента диффузии сохранила "квазилинейный" (квадратичный) характер по амплитуде скорости, но оказалась аномальной с точки зрения вклада молекулярной диффузии, $D_1 \propto 1/D_0$,

$$D_{\text{eff}} = D_0 + \frac{8}{945} \frac{V_0^2 L^2}{D_0}. \quad (170)$$

Аналогичные эффекты будут и в турбулентных течениях. Естественно, новый диффузионный механизм проявится только на большом расстоянии вниз по течению, поскольку полученное уравнение справедливо только для времён $t \gg \tau_D \approx L^2/D$. С другой стороны, было использовано условие малости поперечного пространственного масштаба L по сравнению с продольным l : $L \ll l$.

Метод получения линейного (удобного для решения) уравнения для возмущений посредством усреднения исходного уравнения реализован здесь очень наглядно. Причём в разделе 13, посвящённом перенормировке квазилинейных уравнений, это будет как раз уравнение диффузионного типа. Важно отметить, что непосредственно квазилинейный подход к описанию турбулентного переноса примеси (скаляра) был применён уже после того, как его "взяли на вооружение" в физике плазмы. Так, вместо уравнения Власова мы можем рассмотреть уравнение неразрывности для плотности частиц пассивного скаляра несжимаемого течения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (171)$$

Здесь $n(x, t)$ — пространственная плотность пассивного скаляра, $V(t)$ — случайное поле скорости. Используем метод усреднения по ансамблю реализаций для уравнения неразрывности, полагая, что поле плотности можно представить как сумму $n = n_0 + n_1$ средней величины плотности n_0 и флуктуационной части $n_1 = n - \langle n \rangle$. Мы примем $\langle n_1 \rangle = 0$ и $v = v_0 + v_1$, где $v_0 = \text{const}$, $\langle v_1 \rangle = 0$. В результате несложных вычислений получим два уравнения:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_0}{\partial x} + \left\langle v_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (172)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial n_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} - \left\langle v_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = 0. \quad (173)$$

Предполагаем, что флуктуации n_1 и v_1 имеют порядок малости ε в сравнении со средним полем n_0 . "Квазилинейность" приближения состоит в том, что мы сохраним нелинейный член порядка ε^2 в уравнении для n_0 , но в уравнении для n_1 оставим члены только первого порядка по ε . В итоге этих преобразований мы получим уравнение для n_1 :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_1}{\partial x} = -v_1 \frac{\partial n_0}{\partial x}. \quad (174)$$

Теперь структура системы уравнений, описывающей эволюцию плотности скаляра, оказывается аналогичной структуре уравнений для средней и возмущённой частей функции распределения в квазилинейной теории плазмы.

Решение уравнения для возмущений плотности получим, используя метод функций Грина. Будем рассматривать это уравнение как линейное гиперболическое уравнение первого порядка с источником $I(x, t) = -v_1 (\partial n_0 / \partial x)$ и однородным начальным условием $n_1(x, 0) = 0$. Здесь $\partial n_0 / \partial x$ является параметром уравнения. Рассмотрим уравнение для функции Грина G :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v_0 \frac{\partial G}{\partial x} = \delta(x - x_1) \delta(t - t_1). \quad (175)$$

Решение этого уравнения легко найти, используя преобразование Лапласа по времени t и фурье-преобразование по пространственной координате x :

$$\tilde{G}_{k,s} = \frac{\exp(-t_1 s)}{s + ikv_0} \exp(ikx). \quad (176)$$

Здесь и далее надстрочный знак $\sim$ обозначает преобразование Фурье или преобразование Лапласа. Решение имеет наглядный физический смысл распространения возмущения вдоль характеристики $z = x - v_0(t - t_1)$: $G(x, t, x_1, t_1) = \delta(x - x_1 - v_0(t - t_1)) \Theta(t - t_1)$, где Θ — функция Хевисайда. Тогда решение для $n_1(x, t)$ примет вид

$$n_1(x, t) = - \int_0^t v_1(t_1) \frac{\partial n_0(z, t_1)}{\partial z} dt_1. \quad (177)$$

Подставим выражение (177) для n_1 в уравнение для средней плотности. В результате несложных преобразований получим

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_0}{\partial x} = \int_0^t \langle v_1(t) v_1(t_1) \rangle \frac{\partial^2 n_0(z, t_1)}{\partial z \partial x} dt_1. \quad (178)$$

Интегральная форма этого уравнения отражает лагранжев характер связи производных от $n_0(x, t)$, что является существенным отличием от "принципиально локального" классического уравнения диффузии. Возникшая в нашем рассмотрении характеристика $z = z(x, t)$ связывает производные, определённые в разные моменты времени. Так, в левой части уравнения (178) мы имеем дело с частными производными по x и t , а в правой суммируем $\partial^2 n_0 / \partial x^2$, вычисленные вдоль характеристики с весом $C(t, t_1) = \langle v_1(t) v_1(t_1) \rangle$, который является автокорреляционной функцией пульсаций скорости. В рассматриваемом уравнении в случае стационарного случайного процесса функция $C(t, t_1) \approx C(t - t_1)$ играет роль функции "памяти". Конечная форма уравнения переноса в рамках квазилинейного подхода зависит от аппроксимации корреляционной функции.

Простейшим содержательным случаем является редукция найденного выше уравнения к классическому уравнению диффузии:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_0}{\partial x} = D_T \frac{\partial^2 n_0(x, t)}{\partial x^2}. \quad (179)$$

Это возможно, если основной вклад в интеграл, стоящий в правой части интегрального уравнения, вносит малый

интервал $(t - t_0; t)$, где $t_0 \ll t$. Если на рассматриваемом малом промежутке вторая производная изменяется незначительно, то тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle v(t)v(t_1) \rangle \frac{\partial^2 n_0(z, t_1)}{\partial z \partial x} dt_1 &\approx \frac{\partial^2 n_0(x, t)}{\partial x^2} \int_{t-t_0}^t C(t-t_1) dt_1 \approx \\ &\approx \frac{\partial^2 n_0(x, t)}{\partial x^2} \int_0^\infty C(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (180)$$

Фактически мы сделали предположение о быстром затухании корреляций ("короткие" корреляции) и получили коэффициент турбулентной диффузии Тэйлора [155].

В рассмотренном примере не учитывается влияние молекулярной диффузии, которая приводит, например, к нетривиальным эффектам "возврата" частиц и, как следствие, к существенному отличию корреляционных функций от "удобной" экспоненциальной аппроксимации [156–158]. Кроме того, здесь нет учёта и спектральных свойств турбулентного поля. Возникшие трудности преодолевались как строгими, так и феноменологическими методами перенормировки, использующими, например, затравочную диффузию для связи лагранжевых и эйлеровых корреляций [159]. Важно отметить, что подобные перенормировки приводили к замене квадратичной зависимости коэффициентов переноса от амплитуды флуктуаций линейной зависимостью, которая всё чаще наблюдалась в экспериментах с высоким уровнем турбулентности [160–165]. Не остались без внимания эти вопросы и в физике плазмы, где они были применены для перенормировки квазилинейных уравнений.

13. Фазовое перемешивание и перенормировка

Можно с уверенностью сказать, что попытки улучшить квазилинейную модель слабой турбулентности плазмы начались сразу после её появления. Так, в классическом обзоре Кадомцева [26], опубликованном в 1964 г., рассмотрены различные аспекты перехода к задачам сильной турбулентности с учётом взаимодействия волн, входящих в пакет. Важно отметить также работу [109], в которой обсуждается не только возможность перехода от δ -коррелированных полей, но и впервые упомянуты в связи с квазилинейным подходом результаты Чирикова [17, 166]. Тем не менее в литературе вопрос о перенормировке квазилинейных уравнений часто связывают с классической работой Дюпри [167], опубликованной в 1966 г.

Для задач настоящей статьи целесообразно использовать "интуитивные" аргументы, поскольку тщательное рассмотрение "пульсационных" механизмов увеличит этот раздел в несколько раз. В литературе читатель найдёт все необходимые выкладки, а здесь мы укажем только не зафиксированную в литературе связь подхода Дюпри с работами Коррзина [168] и Тэйлора [154]. Эти авторы, теперь уже редко упоминаемые, сыграли важнейшую роль в рассмотрении декорреляционных механизмов, обусловленных затравочной диффузией в условиях пространственной анизотропии течения. Общая для обеих работ идея заключалась в использовании для описания продольных смещений частиц времени декорреляции, обусловленного диффузионными блужданиями в поперечном направлении, $\tau_\perp$. Так, для рассмотренной выше задачи Тэйлора имеем скейлинг $D_{\text{eff}} \propto V_0^2 L^2 / D_0$. Про-

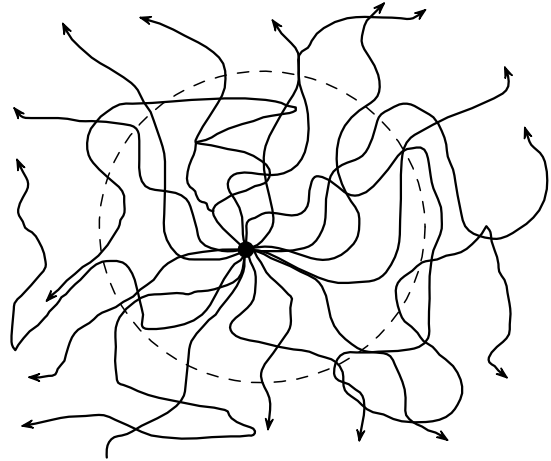


Рис. 14. Облако лагранжевых траекторий и его расплывание.

стую оценку такого типа удастся получить, учитывая "пульсационный" характер аномального вклада в эффективный перенос,

$$D_* \propto V_0^2 \tau_\perp, \quad \text{где } \tau_\perp(D_0) \propto \frac{L^2}{D_0}. \quad (181)$$

Здесь, как и ранее, V_0 — характерная продольная скорость, L — характерный пространственный масштаб, D_0 — затравочная (молекулярная) диффузия.

С другой стороны, Коррсин [159] в 1959 г. использовал диффузионную аппроксимацию для описания "облака" лагранжевых траекторий в развитом турбулентном течении (рис. 14). Так, для связи лагранжевой и эйлеровой корреляционных функций скорости он предложил феноменологическое соотношение

$$\begin{aligned} \langle V(x(t), t) V(x(t+\tau), t+\tau) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(x, t) U(x+\Delta, t+\tau) \rangle \rho_D(\Delta, \tau) d\Delta, \end{aligned} \quad (182)$$

где использована гауссова функция распределения

$$\rho_D(\Delta, \tau) = \frac{1}{(4\pi D_0 \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{4D_0 \tau}\right). \quad (183)$$

Переходя к квазилинейной задаче, заметим, что траектории электронов предполагались не возмущёнными флуктуационным электрическим полем. Это хорошо видно из уравнения для возмущённой части функции распределения. Однако диффузия в пространстве скоростей неизбежно вызывает "расплывание" (диффузию) траекторий частиц. Аналогия с задачами Коррзина и Тэйлора становится понятней, если обратить внимание на необходимость учёта "взаимозависимости" конфигурационного и скоростного пространств. На языке оценок имеем (рис. 15)

$$(\delta x)^2 \propto (\delta V \tau)^2 \propto D_V \tau^3. \quad (184)$$

Система квазилинейных уравнений позволяет красиво реализовывать такую диффузионную перенормировку, включив дополнительный член (учитывающий диффузию в пространстве скоростей) $D \partial^2 f_1 / \partial V^2$ в уравнение для возмущённой части функции распределения час-

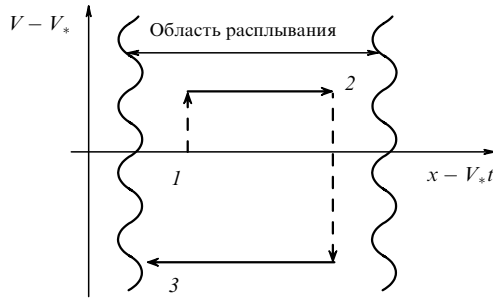


Рис. 15. Пульсации скорости в конфигурационном пространстве.

тиц. Тогда уравнения примут вид [167]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{e}{m} \left\langle E \frac{\partial f_1}{\partial V} \right\rangle = 0, \quad (185)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + V \frac{\partial f_1}{\partial x} = D_V \frac{\partial^2 f_1}{\partial V^2} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial V} = 0. \quad (186)$$

Заметим, что включение этого члена выглядит оправданным и с формальной точки зрения, поскольку он аппроксимирует "малую разность двух членов второго порядка" $V \partial f_1 / \partial x - \langle V \partial f_1 / \partial x \rangle$. Существенным является и то, что возможность использовать анализ Фурье для решения уравнения для возмущений сохранилась благодаря линейности перенормированного уравнения,

$$i(kV - \omega) \tilde{f}_k - D_V \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial V^2} = \frac{e}{m} \tilde{E}_k \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (187)$$

Так, простейшие преобразования приводят к новому выражению для фурье-образа возмущённой функции распределения:

$$\tilde{f}_k = \frac{e}{m} \frac{\tilde{E}_k}{i(kV - \omega) + (k^2 D_V / 3)^{1/3}} \frac{\partial f_0}{\partial V}. \quad (188)$$

Слагаемое $(k^2 D_V / 3)^{1/3}$ приводит к уширению имевшегося в классическом подходе резонанса и позволяет определить соответствующее характерное корреляционное время:

$$\tau_P = \left(\frac{k^2 D_V}{3} \right)^{-1/3} \approx \tau_K. \quad (189)$$

Выражение для коэффициента диффузии получается в форме, отличной от квазилинейной,

$$D_V = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \int_0^\infty |E_k|^2 \exp \left[i(kV - \omega_k \tau) - \frac{1}{3} k^2 D_V \tau^3 \right] d\tau. \quad (190)$$

Можно рассмотреть перенормировку квазилинейного коэффициента диффузии в терминах автокорреляционной функции ускорений,

$$C_a(t) = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \langle E(x(t), t) E(x(0), 0) \rangle. \quad (191)$$

Традиционно представляя электрическое поле как совокупность многих независимых фурье-компонент, $E(x, t) = \sum_k E_k \exp[i(kx - \omega_k t)]$, получаем формулу для корреляционной функции:

линейной функции:

$$C(t) = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_{kk'} \langle E_k \exp[i(kx(t) - \omega_k t)] E_{k'} \exp[ik'x(0)] \rangle. \quad (192)$$

Затем по аналогии с методом Коррсина для диффузионной аппроксимации "распыливания лагранжевых траекторий" используем гипотезу независимости

$$C(t) = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k |E_k|^2 \langle \exp[i(kx(t) - \omega_k t) + ik\Delta x(t)] \rangle \quad (193)$$

и предположение о гауссовости статистики $\langle \exp A \rangle = \exp(\langle A^2 \rangle / 2)$. Тогда выражение для корреляционной функции принимает вид

$$C(t) = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k |E_k|^2 \exp \left[i(kx - \omega_k t) - \frac{k^2 \langle \Delta x^2(t) \rangle}{2} \right]. \quad (194)$$

Используя диффузионную оценку $d\langle \Delta V^2(t) \rangle / dt \approx 2D_V$, несложно получить выражение для среднеквадратичного смещения $\langle \Delta x^2(t) \rangle \approx (2/3) D_V t^3$. Теперь коэффициент диффузии в условиях одномерной электростатической турбулентности, когда $t \rightarrow \infty$, выражается формулой Дюпри [167]:

$$D_V = \int_0^t C(\tau) d\tau = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \int_0^\infty |E_k|^2 \exp \left[i(kV - \omega_k \tau) - \frac{1}{3} k^2 D_V \tau^3 \right] d\tau. \quad (195)$$

Вводя удобную для интегрирования переменную $J = (k^2 D_V / 3)^{1/3} \tau$, несложно заметить, что это выражение даёт скейлинг, существенно отличающийся от квазилинейного,

$$D_V(E_k) \propto |E_k|^{3/2}. \quad (196)$$

Квазилинейный результат даёт более "крутую" зависимость: $D_{QL}(E_k) \propto |E_k|^2$. Перенормированный скейлинг для коэффициента диффузии, полученный Дюпри, неоднократно проверялся посредством вычислительных экспериментов, результаты которых опубликованы в [169–176]. Полученные результаты не были однозначными и не позволили сделать окончательных выводов. Численно найденный коэффициент диффузии значительно меньше, чем предсказываемый теорией. Ишихара и Хироси подтвердили эти результаты. Более того, применяя метод, предложенный Салатом, они пересчитали диффузию и заключили, что D_V может зависеть не только от амплитуды флуктуаций, но и от времени. Здесь уместно привести слова из обзорного доклада Кадомцева [54] 1972 года: "Более грубая квазилинейная теория в некотором отношении даже более предпочтительна как заведомо более приближённая и, стало быть, с меньшими претензиями. Развитие более точной теории сталкивается с трудностями из-за неаналитичности в следующих приближениях. Видно, что на следующем шаге мы получим не члены более высокого порядка малости, а новые концепции и подходы, близкие к сильной турбулентности".

Несмотря на недостатки такого феноменологического метода, подход Дюпри позволяет визуализировать корреляционные эффекты, отброшенные в квазилинейном подходе, и открывает новые возможности для получения оценок переноса как на основе перенормировки уравнения для возмущения плотности, так и посредством диффузионной аппроксимации корреляционных эффектов [159].

14. Стохастическое магнитное поле и сильная турбулентность

Оценка амплитудной зависимости коэффициента диффузии в подходе Дюпри всё ещё была "недостаточно плавной" с точки зрения задач сильной турбулентности. Именно в этот период стало окончательно ясно, что квазилинейные скейлинги не отражают специфики переноса в задачах сильной плазменной и гидродинамической турбулентности. Тем не менее служивший для теоретиков ориентиром линейный скейлинг Бома уже просматривался в перенормированных моделях турбулентного переноса скаляра полем гидродинамической турбулентности [93, 94, 177]. Так, например, его можно было сконструировать размерностным образом, опираясь на спектральную плотность энергии [89, 93]:

$$D_T \propto \sqrt{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{E(k)}{k^2} dk}. \quad (197)$$

Кадомцеву и Погуце [178] удалось реализовать такой подход, объединив сразу несколько ключевых идей. Так, до появления работы [178] использование модели пассивного скаляра для описания стохастического магнитного поля приводило только к квазилинейному результату. Рассмотренная в [178] конфигурация магнитного поля имеет достаточно специфический характер. Но квазилинейность полученного результата свидетельствует о возможности применить более общий метод, основанный на использовании уравнения неразрывности для плотности силовых линий магнитного поля n_B .

Мы рассматриваем здесь частный случай задачи о блуждании магнитных силовых линий, связанный с присутствием сильного постоянного магнитного поля, на которое наложены малые случайные поперечные возмущения (рис. 16). Фактически можно полностью воспроизвести вычисления для случая переноса скаляра, опираясь на выделенность продольного направления и возможность его сопоставления с временной осью,

$$\frac{\partial n_B}{\partial t} + \mathbf{b}_\perp \nabla_\perp n_B = 0. \quad (198)$$

Здесь $\mathbf{b}_\perp(l, r_\perp)$ — возмущения магнитного поля в направлении, перпендикулярном силовой линии, $n_B = n_0 + n_1$, где $n_0 = \langle n_B \rangle$. Результат по-прежнему будет "чисто квазилинейный":

$$D_m(b_0) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle b(l, 0) b(0, 0) \rangle dl \propto b_0^2 L_\parallel, \quad (199)$$

где b_0 — характерная амплитуда поперечных флуктуаций, $L_\parallel$ — характерный продольный корреляционный масштаб.

Рассмотрение этого скейлинга позволяет увидеть ограниченность метода, в котором используется только один продольный корреляционный масштаб. Кадомцев

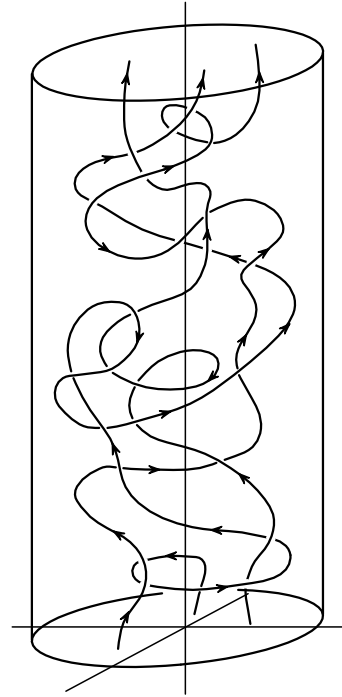


Рис. 16. Силовые линии стохастического магнитного поля.

и Погуце разделили характерные пространственные масштабы в этой существенно анизотропной задаче. Так, силовые линии могут декоррелировать гораздо раньше, если поперечные флуктуации велики. Критерием, позволяющим идентифицировать эти режимы, является условие $b_0 L_\parallel \geq \lambda_\perp$, или в терминах введенного авторами безразмерного параметра (числа Кубо Ku)

$$Ku_m = \frac{b_0 L_\parallel}{\lambda_\perp} > 1. \quad (200)$$

Здесь уже нельзя пренебрегать поперечным смещением $\lambda_\perp$ в тэйлоровском выражении для коэффициента турбулентной диффузии $\mathbf{b}(z, \lambda_\perp) \approx \mathbf{b}(z, 0)$.

Опираясь на идеи Дюпри, Коррсина и Хауэлса, Кадомцев и Погуце предложили "перенормировать" квазилинейные уравнения, описывающие перенос скаляра,

$$\frac{\partial n_0}{\partial z} + \nabla_\perp \langle \mathbf{b} n_1 \rangle = 0, \quad (201)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} + \mathbf{b} \nabla_\perp n_0 = b_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} - \left\langle b_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle, \quad (202)$$

заменяв отбрасываемые ранее члены $b \partial n_1 / \partial x - \langle b \partial n_1 / \partial x \rangle$ диффузионным членом, описывающим поперечное "расплывание" корреляций,

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} + \mathbf{b} \nabla_\perp n_0 = D_m \nabla_\perp^2 n_1. \quad (203)$$

Был использован, как в работе Дюпри [167], эффективный коэффициент диффузии магнитных силовых линий D_m , что отличает эту модель от моделей переноса скаляра Коррсина [159] и Дыхне [179]. Линейность уравнения сохранена, несмотря на его превращение из гиперболического в параболическое. Его формальное решение находится методом функций Грина,

$$\frac{\partial G}{\partial z} - D_m \nabla_\perp^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (204)$$

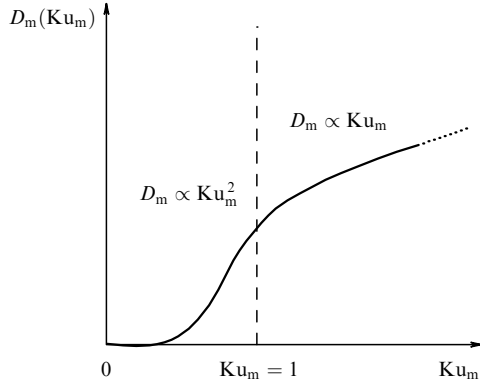


Рис. 17. Характер зависимости коэффициента диффузии силовых линий от магнитного поля.

После подстановки получим искомое уравнение для средней плотности,

$$\frac{\partial n_0(z, \mathbf{r})}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} \int \frac{b^2(\mathbf{k})}{ik_z + k_\perp^2 D_m} d\mathbf{k} \right) \nabla_\perp^2 n_0, \quad (205)$$

где коэффициент магнитной диффузии и спектр Фурье возмущённых амплитуд даются формулами

$$D_m = \frac{1}{2} \int \frac{b^2(\mathbf{k})}{ik_z + k_\perp^2 D_m} d\mathbf{k}, \quad (206)$$

$$b^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle b(0)b(r) \rangle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (207)$$

Решение Кадомцева и Погуце позволяет использовать представления о характерных корреляционных масштабах, развитые для вихревой турбулентности. Так, мы можем на основе размерностных оценок выделить случаи сильной и слабой турбулентности, сопоставляя продольные и поперечные масштабы. В случае $\Delta k_z > k_\perp^2 D_m$ получено классическое квазилинейное выражение:

$$D_m = \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k} b^2(\mathbf{k}) \delta(k_z) \propto b_0^2 \lambda_z \propto Ku_m^2, \quad (208)$$

где λ_z — продольный корреляционный масштаб. В случае сильных поперечных корреляций, $\Delta k_z < k_\perp^2 D_m$, получаем скейлинг бомовского (линейного) типа (рис. 17),

$$D_m = \sqrt{\frac{1}{2} \int \frac{b^2(\mathbf{k})}{k_\perp^2} d\mathbf{k}} \propto b_0 \lambda_\perp \propto Ku_m. \quad (209)$$

Анализ задач турбулентного переноса с точки зрения числа Кубо сегодня стал одним из необходимых элементов исследования сильно турбулентных состояний, поскольку он позволяет сосредоточить внимание на ключевых декорреляционных механизмах в низкочастотных режимах и сравнить теоретические скейлинги с результатами экспериментов.

15. Дрейфовая турбулентность и вихревые структуры

Вопрос о перенормировке квазилинейных уравнений остро стоял и в контексте исследования низкочастотных дрейфовых неустойчивостей плазмы. Эти "универсаль-

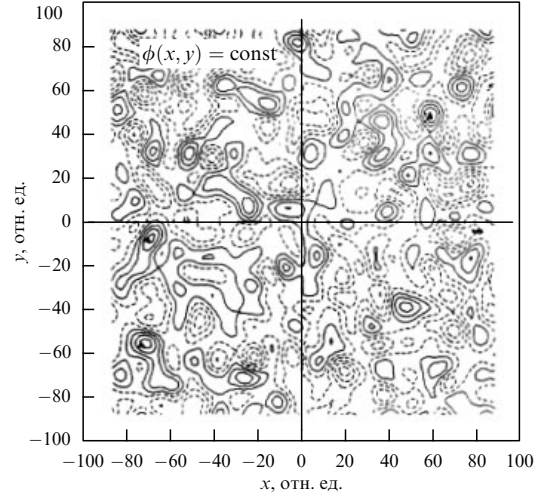


Рис. 18. Линии тока (эквипотенциалы) случайного двумерного вихревого течения.

ные" моды были исследованы в классических работах [26, 34, 180, 181] в начале 1960-х годов. Наблюдаемые в экспериментах большие амплитуды турбулентных пульсаций свидетельствовали о неприменимости формальной квазилинейной теории. Построение строгой теории сильной турбулентности замагниченной плазмы встречалось с теми же трудностями, что и в гидродинамическом случае. Это неудивительно, поскольку становились всё более очевидными важность роли вихревых структур (рис. 18) и учёта перекачки энергии от малых масштабов к большим.

Качественно картину аномального переноса представляли в рамках оценок, сделанных Бомом [182]. Так, выражение для скорости дрейфа заряженных частиц плазмы в скрещённых электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях имеет вид

$$\mathbf{V}_E = c \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{B^2} \propto \frac{\nabla \phi}{B_0}. \quad (210)$$

Здесь $\mathbf{V}_E$ — дрейфовая скорость, ϕ — электрический потенциал. Для флуктуаций электрического поля, меньших, чем ионная циклотронная частота (низкочастотный предел), движение частиц в плазме может быть представлено как суперпозиция вращательного движения вокруг магнитной силовой линии и дрейфового движения ведущего центра со скоростью $\mathbf{V}_E$. Опираясь на размерностные соображения, можно оценить характерное декорреляционное время переноса частиц τ_{cor} полем электрических флуктуаций

$$\delta V_E \approx \frac{c}{B_0} \delta E_p \approx \frac{c}{B_0} \frac{\delta \phi}{L_B} \quad (211)$$

с характерным пространственным масштабом L_B ,

$$\tau_{\text{cor}} \approx \frac{L_B}{\delta V_E} \approx \frac{L_B^2}{c \delta \phi} B_0. \quad (212)$$

Здесь $\delta \phi \approx \delta E_p L_B$ — возмущение потенциала на масштабах вихря, δE_p — соответствующее возмущение напряжённости электрического поля. Флуктуации электрического поля несложно связать с температурой плазмы T_p соотношением $e \delta \phi \approx e \delta E_p L_B \approx T_p$. Теперь получаем скейлинг Бома для аномальной диффузии частиц в

турбулентной замагниченной плазме:

$$D_B \propto \frac{L_B^2}{\tau_{\text{cor}}} \approx L_B \delta V_E \approx \frac{c}{B_0} \delta \varphi \approx \frac{c T_p}{e B_0} \left\langle \left(\frac{e \delta \varphi}{T_p} \right)^2 \right\rangle^{1/2}. \quad (213)$$

В окончательном выражении уже отсутствует характерный пространственный масштаб вихревых структур L_B , введённый на первом этапе вычислений. С одной стороны, это может рассматриваться как универсальность полученной оценки. Однако в такой постановке отсутствует возможность анализировать пространственные корреляционные масштабы, что, как показали Кадомцев и Погуде [178, 183], важно для построения более полной модели аномального переноса.

В отличие от феноменологии Бома, формальная квазилинейная модель переноса частиц, как обычно, основывалась на черенковском взаимодействии электронов с дрейфовыми колебаниями [26, 34]. Выражение для коэффициента диффузии, которое получается после усреднения по случайным фазам поля,

$$E_{\perp} = \sum_k E_{\perp k} \exp(i k_{\parallel} x - i \omega_k t), \quad (214)$$

имеет традиционный интегральный вид:

$$D_{\perp} = \int |V_k|^2 \pi \delta(\omega - k V_{\parallel}) \frac{F_0}{n_0} d\mathbf{V} d\mathbf{k}, \quad (215)$$

где $\omega/k_{\parallel} \propto V_i$ — скорость ионов, $|V_k|^2 = (c E_{\perp}/B_0)_k^2$ — спектральная функция скорости $V_{\perp}$. Соответствующая этой формуле оценка диффузии за счёт температурно-дрейфовой неустойчивости

$$D_{\perp} \propto \int \frac{|V_k|^2}{V_e k_{\parallel}} d\mathbf{k} \propto \chi \frac{V_i}{V_e} \propto \chi \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (216)$$

приводит к величинам, соответствующим классической кинетической модели кулоновских столкновений, что не согласуется с наблюдаемыми аномальными значениями, где диффузия и температуропроводность χ являются величинами одного порядка. Оценки нелинейных эффектов захвата электронов дрейфовыми волнами и исследование отдельно взятых конвективных ячеек, как и ожидалось, не привели к улучшению ситуации. Приведём вывод, сделанный в обзоре [183] 1967 года: "Малость коэффициента диффузии связана с тем, что электроны стремятся быть распределены по Больцману, и их довольно трудно сдвинуть с магнитных поверхностей. Но если магнитные поверхности разрушены, то диффузия частиц будет идти одновременно с переносом тепла и коэффициент $D_{\perp}$ будет порядка χ ".

В контексте преодоления трудностей важно упомянуть работу Дюпри [184] того же 1967 года, в которой получено выражение для перенормированного коэффициента диффузии

$$D_{\perp} \propto \sum_{k, \omega} \frac{c^2 |\tilde{E}_{k\omega}|^2}{B_0^2} \frac{k^2 D_{\perp}}{\omega^2 + k^4 D_{\perp}^2}. \quad (217)$$

Для больших амплитуд пульсаций в низочастотном приближении $\omega \tau_D \ll 1$, где $\tau_D \propto 1/(k^2 D_{\perp})$, получаем бомовский линейный результат. Идея подобной диффузионной перенормировки была затем развита во многих работах [185–191], и акцент всё больше смещался в сторону учёта эффектов, связанных с присутствием в

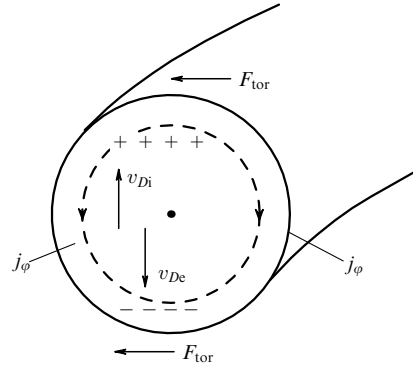


Рис. 19. Движение частиц в токамаке.

замагниченной плазме ансамбля вихревых структур. В этих работах использовались уравнения движения ведущих центров в простейшем виде (рис. 19):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = V_{\parallel} \mathbf{e}_z + \mathbf{V}_{\perp} = V_{\parallel} \mathbf{e}_z + c \frac{\mathbf{B} \times \nabla \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, z, t)}{B^2}. \quad (218)$$

В пределе, когда частота столкновений меньше, чем характерная частота колебаний, мы можем предположить, что продольные скорости постоянны, и представить электрический потенциал в упрощённом виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x, y, z_0 + V_{\parallel} t, t), \quad (219)$$

где z_0 — первоначальная координата частицы. Соответствующий гамильтониан дается выражением

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{c}{B} \varphi(x, y, z_0 + V_{\parallel} t, t). \quad (220)$$

Чтобы избежать детализации, связанной с анализом спектров флуктуаций, в новой версии результаты для случая $\omega \rightarrow 0$ представлялись как комбинация квазилинейного скейлинга $D_{\perp} \propto V_0^2 \tau_D$ и диффузионного выражения для корреляционного времени $\tau_D \propto 1/(k_{\perp}^2 D_{\perp})$. Несложно заметить, что полученный результат $D_{\perp} \propto V_0 k_{\perp}$ аналогичен оценке Кадомцева и Погуде $D_m \propto b_0 k_{\perp}$. Учёт спектральных особенностей приводит к появлению дополнительного логарифмического множителя [185]. Кроме того, были найдены режимы, в которых зависимость от амплитуды поля почти отсутствовала (flat scaling).

Переломным с точки зрения перехода к нелинейным моделям можно считать 1978 год. Во-первых, появилась ясная интерпретация численных экспериментов [191], основанная на параметрическом распаде дрейфовых волн как основном механизме генерации конвективных ячеек [192]. Сагдееву, Шапиро и Шевченко [192] удалось выделить в уравнениях взаимодействия дрейфовых волн моду с $k_{\parallel} = 0$ и $\omega = 0$. Было показано, что возможно существование квазистационарного состояния, причём перенос, осуществляемый за счёт конвективных ячеек, имеет бомовский характер.

Вторым важным шагом стало рассмотрение задачи об аномальном переносе на основе методов статистической топографии [178, 193], изучающей систему линий уровня "случайного" холмистого ландшафта (рис. 20). Кадомцев и Погуде предложили такую модель для выяснения роли механизмов, приводящих к бомовской диффузии. Так, перенос в двумерном случайном течении несжимаемой жидкости описывается системой уравне-

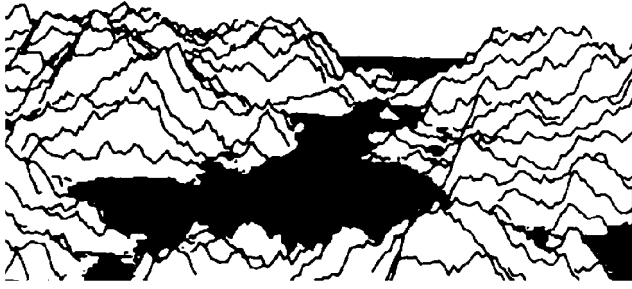


Рис. 20. Случайный ландшафт как генератор эквипотенциалей.

ний

$$V_x(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad (221)$$

$$V_y(x, y, t) = \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial x}. \quad (222)$$

Фактически мы имеем дело с гамильтоновой системой с $1^{1/2}$ степенями свободы [45, 46]. Исследование стохастических слоёв в присепаратрисной области таких систем активно развивалось как математиками, так и плазменщиками в связи со стохастизацией магнитных силовых линий в окрестности резонансных поверхностей установок с магнитным удержанием [194–197]. Идея Кадомцева и Погуде заключалась в выделении такого замкнутого пучка линий тока, который, огибая значительную часть вихрей рассматриваемого течения, формирует масштаб перемешивания много больше размера отдельного вихря.

В связи с этим необходимо упомянуть замечательные статьи Заславского, Филоненко и Сагдеева [110–112], в которых получены формулы для ширины стохастических слоёв, образующихся в результате возмущений сепаратрис. Были представлены два выражения — для случаев высоких и низких частот возмущения:

$$\Delta \approx \begin{cases} \lambda \exp\left(-\pi \frac{\Omega_p}{\omega_0}\right) & \text{при } \Omega_p \gg \omega_0, \\ \lambda \varepsilon \frac{\Omega_p}{\omega_0} & \text{при } \Omega_p \leq \omega_0. \end{cases} \quad (223)$$

Здесь λ — характерный пространственный масштаб, ε — параметр малости возмущения, Ω_p — частота возмущения, ω_0 — основная частота. Заметим, что ширина пучка линий тока, вносящих основной вклад в перенос в моделях, основанных на статистической топографии [193, 198, 199], может быть оценена как ширина стохастического слоя Δ . Это позволяет сконцентрировать внимание на генерации реалистичных систем эквипотенциалей. Несложно заметить, что задача описания аномального переноса всё дальше уходила от традиционного квазилинейного подхода, в котором главную роль играли резонансные (черенковские) механизмы взаимодействия волна — частица.

16. Перенос в конвективных ячейках

Переход в конце 1970-х годов от описания взаимодействия волн и частиц к моделям переноса, в которых главную роль играют вихри, безусловно, стал решающим для современного этапа исследований. Так, в формулировке В.И. Петвиашвили новая концепция звучала следующим образом: "Повышенный перенос в

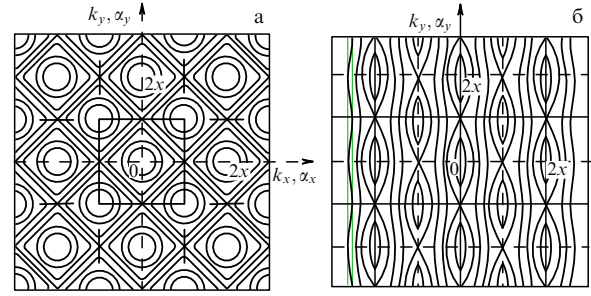


Рис. 21. Регулярная вихревая структура (а) и её перестройка при несовпадении амплитуд гармоник (б).

плазме объясняется образованием скоплений вихрей, что приводит к конвективному перемешиванию с очень большим характерным пространственным масштабом" (см., например, [200]).

На первом этапе необходимо было найти простую модель, позволяющую на новом качественном уровне анализировать влияние ансамбля вихревых структур на турбулентный перенос. Оказалось, что такая модель является "близким родственником" квазилинейной задачи, а подходящий рельеф, содержащий регулярную систему вихревых структур, разделённых сепаратрисами, рассматривал ещё в 1956 г. И.М. Лифшиц [201]. Эта система регулярных конвективных ячеек описывается функцией тока, задаваемой суперпозицией двух косых волн (рис. 21),

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{\psi_0}{2} \left[\cos \pi \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) - \cos \pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right] = \\ &= \psi_0 \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{\pi}{b} y \right). \end{aligned} \quad (225)$$

Позднее такая функция тока исследовалась в связи с упрощённой моделью *ABC*-течения [202]. При наличии малой вторичной гармоник $\psi_1(x, y, t)$ такого же типа возникает стохастизация линий тока в окрестности сепаратрис, что приводит к появлению регулярной сети каналов конвективного переноса. К подобной задаче сводится и рассмотренная Хиршманом и Хортоном [203, 204] система двух дрейфовых волн:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= ux + \psi_0 \sin x \cos y + \\ &+ \psi_1 \sin(k_x x + \alpha_x) \cos(k_y y + \alpha_y). \end{aligned} \quad (226)$$

Важно, что в этих моделях критерий стохастизации совпадает с условием перекрытия резонансов Чирикова. Кроме того, здесь, как и в квазилинейной теории, не исследуется эволюция пакета, а изучается только распределение плотности частиц скалярной примеси в заданном функцией ψ поле скорости.

Результаты численного эксперимента по определению переноса в системе конвективных ячеек [205], опубликованные в 1984 г., указывали на нетривиальную для того времени зависимость коэффициента диффузии от амплитуды пульсаций скорости $D \propto \sqrt{V_0}$. Казалось бы, задача является достаточно простой, тем не менее описание взаимодействия частиц с такой структурой течения приводит к необходимости тонкого анализа. С одной стороны, здесь нельзя игнорировать ловушечные эффекты, связанные с захватом в отдельные вихри. С другой стороны, на больших временах начинает работать кон-

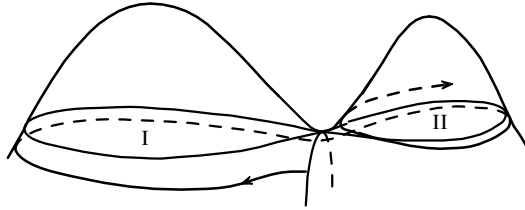


Рис. 22. Случайный характер рассеяния линий тока на седловой точке.

вективный перенос, связанный с существованием стохастических слоёв в окрестности сепаратрис, разделяющих вихри. Перенос в этом случае связан с рассеянием на седловых точках функции тока, образующих квадратную решётку. Заметим, что эффект такого рассеяния был исследован И.М. Лифшицем [206] в знаменательном для квазилинейной теории 1961 г. (рис. 22).

Рассмотрим самый простой случай. В качестве параметров выберем единый размер ячейки λ и характерную скорость конвективного потока V_0 . Опираясь на представление о важности присепаратрисного слоя, представим коэффициент эффективной диффузии в виде

$$D_{\text{eff}} \approx D_T P_\infty, \quad (227)$$

где $D_T \approx V_0^2 \tau$, P_∞ — доля пространства, отвечающая за конвекцию вдоль сепаратрис. В случае конвективных ячеек величину P_∞ легко оценить: $P_\infty \approx \lambda \Delta / \lambda^2 \approx \Delta(V_0) / \lambda$. Здесь Δ — ширина стохастического слоя.

Проблема состоит в выборе характерного времени. Формально имеются две возможности. Первая основана на представлении о диффузионном покидании стохастического слоя. Тогда $\tau \approx \Delta^2 / D_0$ и, следовательно,

$$D_{\text{eff}} = \frac{V_0^2}{D_0} \left(\frac{\Delta^3}{\lambda} \right). \quad (228)$$

Здесь D_0 — затравочный коэффициент диффузии, который может определяться, например, столкновениями или диффузией, возникающей вследствие стохастизации траектории частиц плазмы вблизи сепаратрис, разделяющих вихри. Заметим, что если мы имеем дело с низкочастотными режимами возмущений линий тока, то, используя оценку $\Delta \propto \varepsilon \Omega_p$, получим зависимость $D_{\text{eff}} \propto \Omega_p^3$ [207, 208].

Другая возможность выбора корреляционного времени связана с учётом баллистического движения частиц в стохастическом слое $\tau \approx \lambda / V_0$, что становится важным при увеличении амплитуды скорости. Теперь выражение для коэффициента турбулентной диффузии совпало с перенормированной квазилинейной оценкой Кадомцева–Погутце, рассмотренной в связи с диффузией силовых линий [178],

$$D_{\text{eff}}(V_0) \propto \lambda V_0 \frac{\Delta}{\lambda} = V_0 \Delta(V_0). \quad (229)$$

Опираясь на баланс декорреляционных механизмов, обеспечивающих баланс частиц в слое, сравним по порядку величины характерное время покидания частицами пограничного слоя $\tau \approx \Delta^2 / D_0$ и время баллистического движения вдоль границы ячейки $\tau \approx \lambda / V_0$. В итоге получим важную оценку ширины пограничного слоя:

$$\Delta(V_0) = \left(\frac{D_0 \lambda}{V_0} \right)^{1/2} \propto \frac{1}{\sqrt{V_0}}. \quad (230)$$

Окончательно находим следующую формулу для коэффициента эффективной диффузии в системе конвективных ячеек [209]:

$$D_{\text{eff}} = \text{const} \sqrt{D_0 V_0 \lambda} \propto V_0^{1/2}, \quad (231)$$

согласующуюся с результатами моделирования. Строгое решение задачи о переносе скаляра стационарным полем "решётки вихрей" при наличии затравочной диффузии, выполненное методом многих масштабов, приводит к такому же скейлингу [210]. Мы имеем гораздо более плавную зависимость, чем в случае квазилинейной, $D_{\text{eff}} \propto V_0^2$, и бомовской, $D_{\text{eff}} \propto V_0$, зависимости. Эти качественные оценки переноса в системе регулярных конвективных ячеек позволили перейти от квазилинейных моделей транспорта к нелинейным задачам.

В общем случае одномасштабное двумерное вихревое течение формируется суперпозицией большого числа гармоник, имеющих одинаковую длину волны λ , но различные амплитуды, фазы и направления волнового вектора $\mathbf{k}$:

$$\Psi(x, y) = \sum_j^N \psi_j \cos(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \varphi_j), \quad N \gg 1. \quad (232)$$

В результате удаётся провести моделирование случайного вихревого поля "общего положения", для которого применимы упомянутые выше перколяционные идеи Кадомцева и Погутце. Здесь удаётся получить подтверждаемые экспериментом скейлинги для коэффициентов турбулентного переноса [210–217]. Однако используемые для вычислений методы уже не опираются на квазилинейные представления.

17. Заключение

Внимательное чтение классических для теории турбулентной плазмы работ показывает, что развитие этого направления шло далеко не случайным путём. Это видно из синхронного появления результатов Вedenова – Велихова – Сагдеева и Драммонда – Пайнса на конференции в Зальцбурге в 1961 г. Несмотря на то что многие пионерские работы носили секретный характер, что было обусловлено геополитическим противостоянием государственных систем, теоретики обладали достаточной информацией о работах коллег. К этому моменту стала очевидной принципиальная роль черенковских механизмов излучения и поглощения волн.

Здесь уместно вспомнить Б.Б. Кадомцева [30], который указал на то, что для осмысления работы Ландау по бесстолкновительному затуханию потребовалось более 10 лет. И одним из первых эффективных приёмов систематического использования инкремента Ландау для решения сложной физической проблемы стал квазилинейный метод Вedenова, Велихова и Сагдеева. В каком-то смысле этот успех авторов [3] выглядит закономерным, поскольку все они окончили физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, где работал Власов, а двое из них являлись учениками Ландау. При изучении круга вопросов, связанных с возникновением и развитием квазилинейной теории, идея о важности преемственности в науке постоянно находит подтверждение.

Одновременно с решением конкретных квазилинейных задач развивалась нелинейная теория [26, 29, 34, 37, 41, 44]. Так, область применимости квазилинейной теории релаксации электронного пучка в плазме мала, поскольку для ленгмюровских волн нелинейные взаимодействия являются существенными уже при малых плотностях энергии волн. Естественным направлением исследований стало решение кинетических уравнений для плазмонов, учитывающих нелинейные эффекты. Например, с помощью модификации уравнения для числа квантов при сохранении общей идеи кинетического описания Силину с соавторами [131, 132] удалось получить самосогласованное аналитическое решение задачи о квазистационарной ионно-звуковой турбулентности. Переломным в идейном плане, по-видимому, стал 1967 г. Так, с одной стороны, в 1966 г. были опубликованы красивые решения Иванова – Рудакова, Рудакова – Кораблёва, Розенблюта – Сагдеева – Тэйлора, а с другой, вышла статья Дюпри о необходимости развития методов перенормировки [184]. В этом смысле рациональная квазилинейная теория столкнулась с печальным фактом важности длинных корреляций.

Развитие теории турбулентности плазмы продолжается уже более полувека, и многие вдохновлявшие теоретиков работы 1960–1970-х годов постепенно упоминаются всё реже и всё формальнее. Это совершенно несправедливо и даже контрпродуктивно, поскольку базовые идеи не теряют актуальности. Сейчас особенно интересным представляется рассмотреть с единой точки зрения как истоки возникновения теоретических моделей турбулентного переноса в плазме, так и современные применения квазилинейных идей для исследования явлений аномального переноса в условиях сильной турбулентности. Мы ограничились только одним направлением, демонстрирующим синтез многих интересных идей в задачах, связанных с описанием турбулентного переноса в условиях развитой двумерной структурной турбулентности. Так, перенос в системе конвективных ячеек на протяжении десятилетий привлекает внимание исследователей. Отметим, что эта задача носит неакадемический характер и многие важные аспекты этой проблемы остаются всё ещё не выясненными [56, 160].

При подготовке настоящей статьи к публикации автор заметил, что "квазиисторический" аспект неожиданно сильно проступает на "мелких" временных масштабах. Уже при просмотре литературных ссылок не обходится без курьёзов. Также бросается в глаза, что в рассмотренной выше работе [13] Давыдова нет ссылок на статьи Ахизера, Файнберга [20] и Бома, Гросса [18], опубликованные в широко известных журналах в 1949 г. Более того, имелся русский перевод статей Бома в журнале *Проблемы современной физики*. Давыдов лишь указывает на неравномерность исследуемых им плазменных систем и несколько раз повторяет тезис о том, что "любые упорядоченные потоки в плазме вызывают раскачку колебаний". Кроме того, ставшее позднее основой для вывода квазилинейного приближения уравнение Власова используется Давыдовым только для определения критерия существования ионно-звуковых колебаний: $T_e \gg T_i$. Традиционно считается, что этот результат получен Г.В. Гордеевым [218] в 1954 г. В статье Давыдова мы видим чёткое указание на то, что данный критерий был ранее, в 1951 г., получен Т.Ф. Волковым в дипломной работе, однако не был опубликован в открытой

печати из-за существовавших в то время условий секретности.

Ещё удивительнее выглядит отсутствие ссылок на работу Давыдова в классической статье Веденова, Велихова и Сагдеева [3], подробно обсуждённой на семинаре в отделе Леонтовича (и предварительно опубликованной в препринте Института атомной энергии [1] в 1960 г.). Леонтович, конечно, не мог не обратить внимание авторов на статью их предшественника, ещё недавно работавшего в этом же коллективе. Возможно, это, как и другие нестыковки, связано с режимом секретности и отстранением Давыдова от работы над программой управляемого термоядерного синтеза. С другой стороны, у Романова и Филиппова ссылки на статью Давыдова 1958 года есть. Заметим, что ссылки на работу Давыдова сейчас очень редки, а ссылки на статью Климонтовича фактически вообще не встречаются.

Отметим что недавно в Национальном исследовательском центре "Курчатовский институт" (НИЦ КИ) была рассекречена диссертация Велихова [219], в которой квазилинейному подходу посвящена отдельная глава. В архиве НИЦ КИ также имеются отчёты Давыдова, Брагинского, Волкова, Галицкого и др. Можно только сожалеть, что историки науки всё ещё не оценили потенциал плазменной тематики и не "протоптали тропу" в архив НИЦ КИ. К счастью, мы уже имеем сборники трудов Галицкого, Иванова, Кадомцева, Ларкина, Леонтовича. С другой стороны, важно продолжить эту славную традицию, поскольку всё ещё отсутствуют сборники статей Веденова, Галеева, Дыхне, Михайловского, Моисеева, Петвиашвили, Шафранова. Автор надеется, что настоящая статья хотя бы немного ускорит этот процесс, ещё раз показав красоту и глубину выполненных советскими теоретиками работ.

Автор выражает благодарность за ценные замечания и обсуждения Ю.Н. Днестровскому, И.О. Зотеевой, Н.С. Ерохину, С.В. Коновалову, Л.К. Кузнецовой, А.М. Попову, В.Д. Пустовитову, А.А. Рухадзе, В.П. Силину и Э.И. Юрченко.

От редакции

Когда представленная выше обзорная статья О.Г. Бакунина "Квазилинейная теория турбулентности плазмы. Истоки, идеи и эволюция метода" была уже на рассмотрении редколлегии нашего журнала *"Успехи физических наук"* (УФН), пришло трагическое известие о скоропостижной кончине Олега Геннадьевича Бакунина (08.09.1962–17.03.2017). Ему было всего 54 года.

О.Г. Бакунин был не только автором, но и другом УФН. У нас были большие планы: возобновить прерванный выход серии классических томов "Вопросы теории плазмы" на русском и английском языках ("Reviews of Plasma Physics"), планировали довести до конца сбор материалов для книги воспоминаний о Борисе Борисовиче Кадомцеве (и опубликовать эти воспоминания), в планах были и новые обзоры для УФН. Без неукротимой энергии Олега Геннадьевича нет уверенности, что все эти планы будут реализованы. Светлая ему память...

Некролог "Памяти Олега Геннадьевича Бакунина" опубликован в журнале *Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ)*. Сер. "Термоядерный синтез", 2017, т. 40, вып. 2, с. 92–93 http://vant.iterru.ru/vant_2017_2/ogbakunin.pdf

Список литературы

- Веденов А А, Велихов Е П, Сагдеев Р З "Устойчивость плазмы", Препринт (М.: ИАЭ им. Курчатова, 1960); "Устойчивость плазмы" *УФН* 73 701 (1961); Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z "Stability of plasma" *Sov. Phys. Usp.* 4 332 (1961)
- Романов Ю А, Филиппов Г Ф *ЖЭТФ* 40 123 (1961); Romanov Yu A, Filippov G F *Sov. Phys. JETP* 13 87 (1961)
- Веденов А А, Велихов Е П, Сагдеев Р З *Ядерный синтез* 1 82 (1961); Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion* 1 82 (1961)
- Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion Suppl.* (2) 465 (1962)
- Drummond W E, Pines D *Nucl. Fusion Suppl.* (3) 1049 (1962)
- Веденов А А, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 203; Пер. на англ. яз.: Vedenov A A, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 3 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1967) p. 229
- Веденов А А *УФН* 84 533 (1964); Vedenov A A *Sov. Phys. Usp.* 7 809 (1965)
- Шафранов В Д "Электромагнитные волны в плазме", Препринт (М.: ИАЭ, 1960)
- Власов А А *ЖЭТФ* 18 291 (1938)
- Власов А А "Теория вибрационных свойств электронного газа и ее применения" *Уч. зап. МГУ* 76 (1) (1944)
- Ландау Л Д *ЖЭТФ* 16 574 (1946)
- Власов А А *Теория многих частиц* (Л.: ГИТТЛ, 1950); Пер. на англ. яз.: Vlasov A A *Many-Particle Theory and its Application to Plasma* (New York: Gordon and Breach, 1961)
- Давыдов Б И, в сб. *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. 1 (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 77; Пер. на англ. яз.: Davydov B I *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Research* Vol. 1 (Ed. M A Leontovich) (Oxford: Pergamon Press, 1959)
- Галицкий В М, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (1954); "Волновые процессы в плазме", в сб. *Избранные труды. Исследования по теоретической физике* (М.: Наука, 1983)
- Велихов Е П и др. (Ред.), Ковалева С К (Сост.) *Многогранность таланта. Книга об Александре Алексеевиче Веденове* (М.: Знание, 2010)
- Климонтovich Ю Л *ЖЭТФ* 36 1405 (1959); Klimontovich Yu L *Sov. Phys. JETP* 9 999 (1959)
- Чириков Б *Атомная энергия* 6 630 (1959); Chirikov B V *J. Nucl. Energy C Plasma Phys.* 1 253 (1960)
- Bohm D, Gross E P *Phys. Rev.* 75 1864 (1949)
- Pines D, Bohm D *Phys. Rev.* 85 338 (1952)
- Ахизер А И, Файнберг Я Б *ДАН СССР* 64 555 (1949)
- Ахизер А И, Файнберг Я Б *ЖЭТФ* 21 1262 (1951)
- Веденов А А, Велихов Е П *ДАН СССР* 146 65 (1962); Vedenov A A, Velikhov E P *Sov. Phys. Dokl.* 7 801 (1963)
- Веденов А А, Велихов Е П *ЖЭТФ* 43 963 (1962); Vedenov A A, Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* 16 682 (1963)
- Vedenov A A *J. Nucl. Energy C Plasma Phys.* 5 169 (1963)
- Ахизер А И и др. *Коллективные колебания в плазме* (М.: Госатомиздат, 1964); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I et al. *Collective Oscillations in a Plasma* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1967)
- Кадомицев Б Б "Турбулентность плазмы", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 188–339; Пер. на англ. яз.: Kadomtsev B B *Plasma Turbulence* (London: Academic Press, 1965)
- Ситенко А Г *Электромагнитные флуктуации в плазме* (Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1965); Пер. на англ. яз.: Sitenko A G *Electromagnetic Fluctuations in Plasma* (New York: Academic Press, 1967)
- Завойский Е К, Рудаков Л И *Физика плазмы. Коллективные процессы в плазме и турбулентный нагрев* (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Физика. Астрономия, Вып. 12) (М.: Знание, 1967)
- Цытович В Н *Нелинейные эффекты в плазме* (М.: Наука, 1967)
- Кадомицев Б Б *УФН* 95 111 (1968); Kadomtsev B B *Sov. Phys. Usp.* 11 328 (1968)
- Веденов А А, Рютов Д Д, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 6 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1972) с. 3–69; Vedenov A A, Ryutov D D, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 6 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1974)
- Каплан С А, Цытович В Н *Плазменная астрофизика* (М.: Наука, 1972); Пер. на англ. яз.: Kaplan S A, Tsytovich V N *Plasma Astrophysics* (Oxford: Pergamon Press, 1973)
- Davidson R C *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (New York: Academic Press, 1972)
- Галлеев А А, Сагдеев Р З, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 7 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1973) с. 3–144; Пер. на англ. яз.: Galeev A A, Sagdeev R Z *Review of Plasma Physics* Vol. 7 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1979)
- Ахизер А И и др. *Электродинамика плазмы* (М.: Наука, 1974); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I et al. *Plasma Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
- "2-я Школа по колебаниям и волнам в нелинейных распределенных системах, 1973" *Изв. вузов Радиофизика* 17 (4) (1974); "The second (1973) school on oscillations and waves in nonlinear distributed systems" *Radiophys. Quantum Electron.* 17 (4) (1974)
- Tsytovich V N *Theory of Turbulent Plasma* (New York: Consultants Bureau, 1974)
- Krall N A, Trivelpiece A W *Principles of Plasma Physics* (New York: McGraw-Hill, 1973); Пер. на русск. яз.: Кролл Н, Трайвелпис А *Основы физики плазмы* (М.: Мир, 1975)
- Hasegawa A *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects* (Berlin: Springer-Verlag, 1975)
- "3-я Школа по колебаниям и волнам в нелинейных распределенных системах, 1975" *Изв. вузов Радиофизика* 19 (5, 6) (1976); "Third (1975) school on oscillations and waves in nonlinear distributed systems" *Radiophys. Quantum Electron.* 19 (5, 6) (1976)
- Иванов А А *Физика сильнонеравновесной плазмы* (М.: Атомиздат, 1977)
- Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
- Арцимович Л А, Сагдеев Р З *Физика плазмы для физиков* (М.: Атомиздат, 1979)
- Галеев А А, Судан А В (Ред.) *Основы физики плазмы* Т. 1, 2 (М.: Энергоатомиздат, 1983, 1984); Galeev A A, Sudan R N (Eds) *Basic Plasma Physics* Vol. 1, 2 (Amsterdam: North-Holland, 1983, 1984)
- Заславский Г М *Стохастичность динамических систем* (М.: Наука, 1984)
- Lichtenberg A J, Leiberman M A *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag, 1983); Пер. на русск. яз.: Лихтенберг А, Либерман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
- Кадомицев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Kadomtsev B B *Reviews of Plasma Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad. Plenum Publ., 2001) p. 1
- Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M *Nonlinear Physics: from the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
- Stix T H *Waves in Plasmas* (New York: American Institute of Physics, 1992)
- Бакай А С "Умеренная турбулентность", в сб. *Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур* (Сер. "Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения", Отв. ред. И М Макаров) (М.: Наука, 1996) с. 5
- Трубников Б А *Теория плазмы* (М.: Энергоатомиздат, 1996)
- Kingsep A S *Introduction to the Nonlinear Plasma Physics* (Moscow: Mosk. Fiz.-Tekh. Inst., 1996)
- Тимофеев А В *Резонансные явления в колебаниях плазмы* (М.: Физматлит, 2000)
- Кадомицев Б Б *Избранные труды* (Под ред. В Д Шафранова) Т. 1 (М.: Физматлит, 2003)
- Кадомицев Б Б *Избранные труды* (Под ред. В Д Шафранова) Т. 2 (М.: Физматлит, 2003)
- Diamond P H, Itoh S-I, Itoh K *Modern Plasma Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010)
- Рухадзе А А (Ред.) *Об основополагающих работах А.А. Власова по физике плазмы и их обсуждение* (М.: Мир журналов, 2014)
- Леонтович М А (Отв. ред.) *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. 1 (М.: Изд-во АН СССР, 1958); Пер. на англ. яз.: Leontovich M A (Ed.) *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Research* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1959)
- Сахаров А Д *Воспоминания* (Ред.-сост. Е Холмогорова, Ю Шиханович) (М.: Права человека, 1996)
- Бакунин О Г *УФН* 173 317 (2003); Bakunin O G *Phys. Usp.* 46 309 (2003)
- Гуревич Л Э *Основы физической кинетики* (Л.–М.: Гостехтеоретиздат, 1940)
- Sommerfeld A, Bethe H A, in *Handbuch der Physik* Vol. 24, Pt. 2 (Berlin: Springer-Verlag, 1933) p. 333; Пер. на русск. яз.: Бете Г, Зоммерфельд А *Электронная теория металлов* (М.–Л.: ГИТТЛ, 1938)

63. Давыдов Б И, Шмушкевич И М *ЖЭТФ* **10** 1043 (1940)
64. Ландау Л Д, Компанец А С *Электропроводность металлов* (Харьков, ОНТИ, 1935)
65. Давыдов Б И *ЖЭТФ* **6** 463 (1936)
66. Bohm D, Gross E P *Phys. Rev.* **75** 1851 (1949)
67. Bohm D, Gross E P *Phys. Rev.* **75** 1864 (1949)
68. Bohm D, Gross E P *Phys. Rev.* **79** 992 (1950)
69. Bohm D, Pines D *Phys. Rev.* **92** 609 (1953)
70. Давыдов Б И *ЖЭТФ* **7** 1069 (1937)
71. Давыдов Б И *ДАН СССР* **2** 474 (1934)
72. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **10** 154 (1936)
73. Волков Т Ф, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 3–19; Пер. на англ. яз.: Kadomtsev B V *Plasma Turbulence* (London: Academic Press, 1965)
74. Брагинский С И, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 57; Пер. на англ. яз.: Braginskii S I, in *Reviews in Plasma Physics* Vol. 1 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1965)
75. Ахиезер А И, Ситенко А Г *ЖЭТФ* **23** 161 (1952)
76. Иванов В Е и др. *УФН* **105** 371 (1971); Ivanov V E et al. *Sov. Phys. Usp.* **14** 671 (1972)
77. Климонтович Ю Л, Силин В П *УФН* **70** 247 (1960); Klimontovich Yu L, Silin V P *Sov. Phys. Usp.* **3** 84 (1960)
78. Looney D H, Brown S C *Phys. Rev.* **93** 965 (1954)
79. Merrill H J, Webb H W *Phys. Rev.* **55** 1191 (1939)
80. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.–Л.: Гостехиздат, 1946) с. 29; Пер. на англ. яз.: Bogoliubov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)
81. Cattaneo C *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** 83 (1948–1949)
82. Goldstein S *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4** 129 (1951)
83. Davies R W *Phys. Rev.* **93** 1169 (1954)
84. Бакунин О Г *Физика плазмы* **29** 1031 (2003); Bakunin O G *Plasma Phys. Rep.* **29** 955 (2003)
85. Климонтович Ю Л *УФН* **167** 23 (1997); Klimontovich Yu L *Phys. Usp.* **40** 21 (1997)
86. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941); Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)
87. Обухова А М *ДАН СССР* **32** 19 (1941)
88. Обухова А М *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1988)
89. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967); Пер. на англ. яз.: Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics* Vol. 1, 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971, 1975)
90. Batchelor G K *Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge: Univ. Press, 1953); Пер. на русск. яз.: Бэтчелор Дж *Теория однородной турбулентности* (М.: ИЛ, 1955)
91. Frisch U *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
92. Tsinober A *An Informal Introduction to Turbulence* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001)
93. Howells I D J *J. Fluid Mech.* **9** 104 (1960)
94. Moffatt H K *J. Fluid Mech.* **106** 27 (1981)
95. Bakunin O G *Turbulence and Diffusion. Scaling Versus Equations Monograph on Complexity* (New York: Springer, 2008)
96. Moffatt H K *Rep. Prog. Phys.* **46** 621 (1983)
97. Ottino J *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989)
98. Ott E *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
99. Aref H (Guest Ed.), El Naschie M S (Ed.) *Chaos Applied to Fluid Mixing* (Oxford: Pergamon, 1995)
100. Bakunin O G *Chaotic Flows. Correlation Effects, Transport, and Structures* (Springer Series in Synergetics) (Heidelberg: Springer, 2011)
101. Childress S, Gilbert A D *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
102. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **31** 154 (1956); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **4** 460 (1957)
103. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Berezhinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)
104. Мельников В К "Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях" *Тр. Моск. матем. о-ва* **12** 1 (1963)
105. Simiu E *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems: Applications of Melnikov Processes in Engineering, Physics, and Neuroscience* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2002); Пер. на русск. яз.: Симиу Э *Хаотические переходы в детерминированных и стохастических системах* (М.: Физматлит, 2007)
106. Заславский Г М, Чириков Б В *УФН* **105** 3 (1971); Zaslavskii G M, Chirikov B V *Sov. Phys. Usp.* **14** 549 (1972)
107. Reichl L E *A Modern Course in Statistical Physics* (New York: Wiley, 1998)
108. Бакунин О Г *УФН* **185** 271 (2015); Bakunin O G *Phys. Usp.* **58** 252 (2015)
109. Басс Ф Г, Файнберг Я Б, Шапиро В Д *ЖЭТФ* **49** 329 (1965); Bass F G, Fainberg Ya B, Shapiro V D *Sov. Phys. JETP* **22** 230 (1966)
110. Заславский Г М, Филоненко Н Н *ЖЭТФ* **54** 1590 (1968); Zaslavskii G M, Filonenko N N *Sov. Phys. JETP* **27** 851 (1968)
111. Заславский Г М, Сагдеев Р З *ЖЭТФ* **52** 1081 (1967); Zaslavskii G M, Sagdeev R Z *Sov. Phys. JETP* **25** 718 (1967)
112. Filonenko N N, Sagdeev R Z, Zaslavsky G M *Nucl. Fusion* **7** 253 (1967)
113. Гуревич А В, Парийская Л В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **49** 647 (1965); Gurevich A V, Pariiskaya L V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **22** 449 (1966)
114. Иванов А А, Рудаков Л И *ЖЭТФ* **51** 1522 (1966); Ivanov A A, Rudakov L I *Sov. Phys. JETP* **24** 1027 (1967)
115. Гинзбург В Л, Гуревич А В *УФН* **70** 201 (1960); Ginzburg V L, Gurevich A V *Sov. Phys. Usp.* **3** 115 (1960)
116. Гуревич А В, Питаевский Л П, Смирнова В В *УФН* **99** 3 (1969); Gurevich A V, Pitaevskii L P, Smirnova V V *Sov. Phys. Usp.* **12** 595 (1970)
117. Зельдович Я Б, Мышкис А Д *Элементы математической физики* (М.: Наука, 1973)
118. Векштейн Г Е, Рютов Д Д, Сагдеев Р З *ЖЭТФ* **60** 2142 (1971); Vekshtein G E, Ryutov D D, Sagdeev R Z *Sov. Phys. JETP* **23** 1152 (1971)
119. Бакунин О Г, Крашенинников С И *Физика плазмы* **16** 629 (1990); Bakunin O G, Krasheninnikov S I *Sov. J. Plasma Phys.* **16** 501 (1990)
120. Бакунин О Г, Крашенинников С И *Физика плазмы* **21** 532 (1995); Bakunin O G, Krasheninnikov S I *Plasma Phys. Rep.* **21** 502 (1995)
121. Бакунин О Г *Физика плазмы* **29** 847 (2003); Bakunin O G *Plasma Phys. Rep.* **29** 785 (2003)
122. Field E C, Fried B D *Phys. Fluids* **7** 1937 (1964)
123. Sagdeev R, in *Magneto-Fluid and Plasma Dynamics, Symposium in Applied Mathematics*, 1965, New York (Proc. of Symp. in Applied Mathematics, Vol. 18) (Providence: American Mathematical Society, 1967) p. 281
124. Сизоненко В Л, Степанов К Н *ЖЭТФ* **49** 1197 (1965); Sizonenko V L, Stepanov K N *Sov. Phys. JETP* **22** 832 (1966)
125. Рудаков Л И, Кораблев Л В *ЖЭТФ* **50** 220 (1966); Rudakov L I, Korablev L V *Sov. Phys. JETP* **23** 145 (1966)
126. Коврижных Л М *ЖЭТФ* **51** 1795 (1966); Kovrizhnykh L M *Sov. Phys. JETP* **24** 1210 (1967)
127. Коврижных Л М *ЖЭТФ* **52** 1406 (1967); Kovrizhnykh L M *Sov. Phys. JETP* **25** 934 (1967)
128. Коврижных Л М *ЖЭТФ* **51** 915 (1966); Kovrizhnykh L M *Sov. Phys. JETP* **24** 608 (1967)
129. Кингсеп А С *ЖЭТФ* **52** 1386 (1967); Kingsep A S *Sov. Phys. JETP* **25** 921 (1967)
130. Кингсеп А С *ЖЭТФ* **56** 1309 (1969); Kingsep A S *Sov. Phys. JETP* **29** 704 (1969)
131. Быченков В Ю, Силин В П *ЖЭТФ* **82** 1886 (1982); Bychenkov V Yu, Silin V P *Sov. Phys. JETP* **55** 1086 (1982)
132. Вученков В Ю, Силин В П, Уругупин С А *Phys. Rep.* **164** 119 (1988)
133. Попов В Ю, Силин В П *Физика плазмы* **40** 368 (2014); Popov V Yu, Silin V P *Plasma Phys. Rep.* **40** 298 (2014)
134. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)
135. Рютов Д Д *ЖЭТФ* **52** 1378 (1967); Ryutov D D *Sov. Phys. JETP* **25** 916 (1967)
136. Морозов А И, Соловьев Л С *ЖЭТФ* **30** 261 (1960); Morozov A I, Solov'ev L S *Sov. Phys. JETP* **13** 927 (1961)
137. Соловьев Л С *ДАН СССР* **147** 1071 (1962); Solov'ev L S *Sov. Phys. Dokl.* **7** 1127 (1963)
138. Зуева Н М, Соловьев Л С *Атомная энергия* **20** 396 (1966); Zueva N M, Solov'ev L S *Sov. Atom. Energy* **20** 444 (1966)
139. Морозов А И, Соловьев Л С *ЖЭТФ* **45** 955 (1963); Morozov A I, Solov'ev L S *Sov. Phys. JETP* **18** 660 (1964)
140. Соловьев Л С *ЖЭТФ* **53** 626 (1968); Solov'ev L S *Sov. Phys. JETP* **26** 400 (1968)
141. Морозов А И, Соловьев А И "Геометрия магнитного поля", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 2 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 60; Morozov A I, Soloviev L S, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 2 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966)
142. Rosenbluth M N et al. *Nucl. Fusion* **6** 297 (1966)
143. Jokipii J R, Parker E N *Astrophys. J.* **155** 777 (1969)
144. Ptuskin V S *Astrophys. Space Sci.* **61** 251 (1979)

145. Jokipii J R *Astrophys. J.* **183** 1029 (1973)
146. Rechester A B, Rosenbluth M N *Phys. Rev. Lett.* **40** 38 (1978)
147. Krommes J A *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **64** 137 (1978)
148. Krommes J A, Oberman C, Kleva R G *J. Plasma Phys.* **30** 11 (1983)
149. Bakunin O G *Chaos Solitons Fractals* **23** 1703 (2005)
150. Bakunin O G *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** 1857 (2005)
151. Гуревич А В *ЖЭТФ* **38** 116 (1960); Gurevich A V *Sov. Phys. JETP* **11** 85 (1960)
152. Гуревич А В, Живлюк Ю Н *ЖЭТФ* **49** 214 (1965); Gurevich A V, Zhivlyuk Yu N *Sov. Phys. JETP* **22** 153 (1966)
153. Бакунин О Г *Физика плазмы* **30** 369 (2004); Bakunin O G *Plasma Phys. Rep.* **30** 338 (2004)
154. Taylor G I *Proc. R. Soc. London A* **219** 186 (1953)
155. Taylor G I *Proc. London Math. Soc.* **2** **20** 196 (1921)
156. Bouchaud J-P et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2503 (1990)
157. Ben-Avraham D, Havlin S *Diffusion and Reactions in Fractal and Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
158. Bakunin O G *Rep. Prog. Phys.* **67** 965 (2004)
159. Corrsin S, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Advances in Geophysics, Vol. 6, Eds F N Frenkiel, P A Sheppard) (New York: Academic Press, 1959) p. 161
160. Krommes J A *Phys. Rep.* **360** 1 (2012)
161. Horton W, Ichikawa Y-H *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (Singapore: World Scientific, 1996)
162. Balescu R *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Bristol: IOP Publ., 2005)
163. "Progress in the ITER Physics Basis" *Nucl. Fusion* **47** (6) (2007)
164. Зелёный Л М, Веселовский И С (Ред.) *Плазменная гелиофизика* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
165. Bakunin O G *Review of Plasma Physics* Vol. 24 (Ed. V D Shafranov) (Berlin: Springer-Verlag, 2008) p. 53
166. Заславский Г М, Чириков Б В *УФН* **105** 3 (1971); Zaslavskii G M, Chirikov B V *Sov. Phys. Usp.* **14** 549 (1972)
167. Dupree T H *Phys. Fluids* **9** 1773 (1966)
168. Corrsin S, in *Proc. of the Iowa Thermodynamics Symp.* (Iowa: State Univ. of Iowa, 1953) pp. 5–30
169. Flynn R W *Phys. Fluids* **14** 956 (1971)
170. Graham K N, Fejer J A *Phys. Fluids* **19** 1054 (1976)
171. Doveil F, Grésillon D *Phys. Fluids* **25** 1396 (1982)
172. Ishihara O, Hirose A *Comments Plasma Phys. Control. Fusion* **8** 229 (1984)
173. Salat A *Naturforsch. A* **38** 1189 (1983)
174. Ishihara O, Hirose A *Phys. Fluids* **28** 2159 (1985)
175. Salat A *Phys. Fluids* **31** 1499 (1988)
176. Ishihara O, Xia H, Hirose A *Phys. Plasmas* **4** 349 (1992)
177. Бакунин О Г *УФН* **173** 757 (2003); Bakunin O G *Phys. Usp.* **46** 733 (2003)
178. Kadomtsev B B, Pogutse O P, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Proc. of the 7th Intern. Conf., IAEA, Innsbruck, Austria, August 23–30, 1978* Vol. 1 (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1978) p. 649
179. Дрейзин Ю А, Дыхне А М *ЖЭТФ* **63** 242 (1972); Dreizin Yu A, Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **36** 127 (1973)
180. Веденов А А, Рудаков Л И *ДАН СССР* **159** 767 (1964); Vedenov A A, Rudakov L I *Sov. Phys. Dokl.* **9** 1073 (1965)
181. Horton W *Rev. Mod. Phys.* **71** 735 (1999)
182. Bohm D, in *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields* (National Nuclear Energy Ser. Manhattan Project Technical Section, Division I, Vol. 5, Eds A Guthrie, R K Wakerling) (New York: McGraw-Hill, 1949) p. 201
183. Кадомцев Б Б "Турбулентность плазмы", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1967) с. 188–339; Пер. на русск. яз.: Kadomtsev B B *Plasma Turbulence* (London: Academic Press, 1965)
184. Dupree T H *Phys. Fluids* **10** 1049 (1967)
185. Taylor J B, McNamara B *Phys. Fluids* **14** 1492 (1971)
186. Ohkawa T *Phys. Fluids* **14** 818 (1971)
187. Dawson J M, Okuda H, Carlile R N *Phys. Rev. Lett.* **27** 491 (1971)
188. Okuda H, Dawson J M *Phys. Rev. Lett.* **28** 1625 (1972)
189. Okuda H, Dawson J M, Hooke W M *Phys. Rev. Lett.* **29** 1658 (1972)
190. Okuda H, Dawson J M *Phys. Fluids* **16** 2336 (1973)
191. Cheng C Z, Okuda H *Phys. Rev. Lett.* **38** 708 (1977)
192. Сагдеев Р З, Шапиро В Д, Шевченко В И *Физика плазмы* **4** 551 (1978); Sagdeev R Z, Shapiro V D, Shevchenko V I *Sov. J. Plasma Phys.* **4** 306 (1978)
193. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
194. Wesson J *Tokamaks* (Oxford: Clarendon Press, 1987)
195. Miyamoto K *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (Berlin: Springer, 2005); Пер. на русск. яз.: Миямото К *Основы физики плазмы и управляемого синтеза* (М.: Физматлит, 2007)
196. Zaslavsky G M *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (London: Imperial College Press, 2007); Пер. на русск. яз.: Заславский Г М *Физика хаоса в гамильтоновых средах* (М.–Ижевск: РХД, Инст. компьютер. исслед., 2004)
197. Tabor M *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: an Introduction* (New York: Wiley, 1989); Пер. на русск. яз.: Табор М *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике* (М.: Эдиториал УРСС, 2001)
198. Исиченко М Б и др. *ЖЭТФ* **96** 913 (1989); Isichenko M B et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 517 (1989)
199. Грузинов А В, Исиченко М Б, Калда Я Л *ЖЭТФ* **97** 476 (1990); Gruzinov A V, Isichenko M B, Kalda Ya L *Sov. Phys. JETP* **70** 263 (1990)
200. Petviashvili V I, Pogutse O O "Vortices and nonlinear instabilities in inhomogeneous plasma", in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 20 (Ed. B B Kadomtsev) (New York: Plenum Press, 1997) p. 1
201. Лифшиц И М *ЖЭТФ* **18** 118 (1956)
202. Roberts K V, Taylor J B *Phys. Fluids* **8** 315 (1965)
203. Hirshman S P *Phys. Fluids* **23** 562 (1980)
204. Horton W *Plasma Phys. Control. Fusion* **27** 937 (1985)
205. Kleva R G, Drake J A *Phys. Fluids* **27** 1686 (1984)
206. Лифшиц И М, Слуткин А А, Набутовский В М *ЖЭТФ* **41** 939 (1961); Lifshitz I M, Slutskin A A, Nabutovskii V M *Sov. Phys. JETP* **14** 669 (1962)
207. Escande D F *Phys. Rep.* **121** 165 (1985)
208. Bakunin O G *J. Plasma Phys.* **72** 647 (2006)
209. Осипенко М В, Погуде О П, Чудин Н В *Физика плазмы* **13** 953 (1987); Osipenko M V, Pogutse O P, Chudin N V *Sov. J. Plasma Phys.* **13** 550 (1987)
210. Horton W, Ichikawa Y-H *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (Singapore: World Scientific, 1996)
211. Isichenko M B et al. *Phys. Fluids* **4** 3973 (1992)
212. Ottaviani M *Europhys. Lett.* **20** 111 (1992)
213. Bakunin O G *J. Plasma Phys. Control. Fusion* **72** 647 (2006)
214. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 809 (1991)
215. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 795 (1991)
216. Бакунин О Г *УФН* **183** 257 (2013); Bakunin O G *Phys. Usp.* **56** 243 (2013)
217. Зелёный Л М и др. *УФН* **183** 365 (2013); Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **56** 347 (2013)
218. Гордеев Г В *ЖЭТФ* **27** 19 (1954)
219. Велихов Е П "Возникновение турбулентности в плазме", Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (1964) 25 авг. 1964, инв. № 3285

Quasilinear theory of plasma turbulence. Origins, ideas, and evolution of the method

O.G. Bakunin

National Research Centre "Kurchatov Institute", pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation

The quasilinear method of describing weak plasma turbulence is one of the most important elements of current plasma physics research. Today, this method is not only a tool for solving individual problems but a full-fledged theory of general physical interest. The author's objective is to show how the early ideas of describing the wave-particle interactions in a plasma have evolved as a result of the rapid expansion of the research interests of turbulence and turbulence transport theoreticians.

Keywords: quasilinear theory, turbulence transport, diffusion coefficients, stochastic magnetic field, plasma

PACS numbers: **05.40.** – a, 47.27.tb, **47.53.** + n

Bibliography — 219 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **188** (1) 55–87 (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038096>

Received 13 October 2016

Physics – Uspekhi **61** (1) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038096>