

## Применение учения о квантах к теории спектральных серий.

П. Эпштейн <sup>1)</sup>.

I. Отдел.

В В Е Д Е Н И Е.

С 1896 по 1902 г. Макс Планк сосредоточил все свои силы на теории излучения. С беспримерной последовательностью и энергией создал он сначала принципиальные основания этой теории и на рубеже столетий пришел к убеждению, что обыкновенной механики и электродинамики Максвелл-Лоренца недостаточно для обоснования учения об излучении. Последовательное применение этих классических принципов при всех обстоятельствах ведет к такому закону распределения энергии (так наз. распределение Релея-Джинса), который в области коротких волн стоит в резком противоречии с данными опыта. Отсюда Планк был поставлен перед необходимостью ввести в теорию излучения *новое положение, чуждое механике и электродинамике*. В 1901 году ему удалось смелым движением мысли найти недостающее звено в цепи своих умозаключений. Таким звеном была *гипотеза квантов*, которая не только разрешила все загадки в теории излучения, но, как это впоследствии оказалось, овладела всеми остальными атомистическими процессами.

Применение теории квантов в атомистике дало за последние годы целый ряд значительных успехов; и в этом новейшем развитии теории Планк также сыграл выдающуюся роль. Целью настоящей статьи является обзор новейших результатов теории квантов, поскольку дело касается теории спектральных серий. Соответственно этому в начале

<sup>1)</sup> Статья П. Эпштейна появилась в номере журнала „Die Naturwissenschaften“, посвященном *M. Планку* по поводу шестидесятилетия со дня его рождения.

П. С. Эпштейн — один из видных современных теоретиков, в настоящее время приват-доцент Цюрихского Университета. В начале своей деятельности он был приват-доцентом Московского Университета.

Переводчик.

даются вкратце принципиальные основания Планкова учения о квантах (§§ 2—4), а также сопоставляется необходимый фактический материал из области атомистики и спектроскопии (§§ 5—6). Второй отдел заключает первую удачную попытку применения теории квантов к атому, которая связана с именем *Нильса Бора*, и которая завершилась обяснением простейших спектральных серий (§§ 7—10). В третьем отделе рассматриваются применения к системам с несколькими степенями свободы в связи с теми новыми представлениями, которые были созданы *Планком* и *Зоммерфельдом*. Здесь дается, главным образом, теория тончайшей структуры линий, сходных с водородными (wasserstoffähnliche), а также теория явления Штарка (§§ 11—15). В заключение рассматриваются воззрения Планка на структуру фазового пространства фаз (Phasenraum).

## § 2. Гипотеза о квантах энергии.

Чтобы выяснить содержание гипотезы квантов, разовьем подробнее сказанное во введении; при этом мы возьмем за отправный пункт понятие о линейном резонаторе. В качестве такого резонатора мы можем себе представить электрон, который квазиэластически (т.-е. силой, пропорциональной расстоянию  $x$ ) связан со своим положением равновесия, вследствие чего совершает вокруг этого положения синусодальные колебания с постоянным, для данного резонатора характерным, числом колебаний в секунду  $v$ :

$$x = x_0 \sin 2 \pi v t \dots \dots \quad (I).$$

Здесь  $t$  означает время,  $x_0$  — амплитуду.

По законам электродинамики подобный линейный резонатор должен излучать электромагнитные волны с тем же числом колебаний  $v$ , и наоборот — под влиянием падающих волн совершать вынужденные колебания. Таким образом, если внутри совершенно отражающего пространства заключается большое число резонаторов со всевозможным  $v$ , то они должны находиться с излучением и между собою в состоянии подвижного равновесия, при котором каждая группа резонаторов (с определенным числом колебаний  $v$ ) излучает как раз такое же количество энергии, какое она поглощает из падающего на нее излучения. Это равновесное излучение называют „черным излучением“ и проблема, поставленная *Планком*, состояла в том, чтобы найти спектральное распределение энергии черного излучения. Оказалось, однако, что неизбежно получается неверный закон, если только допустить, что резонатор при взаимодействии с другими может получать всевозможные количества энергии (а стало быть и амплитуды). Новое, в высшей степени смелое допущение Планка состояло в том, что энергия  $A$  ре-

резонатора обладает атомистическим характером и является целым кратным некоторого элементарного количества  $\epsilon$ ,

$$A = n \epsilon.$$

где  $n$  — целое число. По термодинамическим основаниям (закон смещения Вина), это элементарное количество энергии не может быть независимым от числа колебаний  $v$ , но должно быть ему пропорционально:  $\epsilon = hv$ . Таким образом в качестве выражения первой формулировки гипотезы Планка, которую называют гипотезой „квант энергии“, получается формула

$$A = nhv \dots \dots \dots \quad (2).$$

Здесь  $h$  — универсальная постоянная размерность которой равна размерности действия (энергия времени), которую поэтому называют Планковым количеством действия (Wirkungsquantum). Из измерений Курльбма, Луммера и Прингсмейма, Планк получил для  $h$  следующее числовое значение

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

Выражение для энергии линейного резонатора  $A$  получится, если принять во внимание, что в момент прохождения через начальное положение ( $t=0$ ) имеется только кинетическая энергия. Если назовем массу электрона через  $\mu$ , то

$$A = \frac{\mu}{2} \left( \dot{x} \right)_{t=0}^2 = 2 \mu (\pi v x_0)^2$$
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Соотношение (2) дает тогда

$$2\pi^2 \mu v x_0^2 = nh. \dots \dots \dots \quad (3).$$

Таким образом, теория квантов допускает лишь определенные, выбранные амплитуды  $x_0$ , именно те, которые удовлетворяют соотношению (3).

### § 3. Гипотеза о квантах действия.

Впоследствии Планк дал своей гипотезе другую формулировку, при которой становится яснее, что именно действие, а не энергия является постоянной. При этом он воспользовался механическим понятием об импульсе или количестве движения. Как известно, если пользоваться декартовыми координатами и рассматривать консервативные силы (т.е. такие силы, которые имеют потенциал), то импульс, соответствующий координате  $x$  для точки с массою  $\mu$  выразится

$$p_x = \mu x$$

Но и при более сложных обстоятельствах можно вообще определить момент  $p$ , соответствующий координате  $q$  системы.

При этом достаточно знать величины всех  $p$  и  $q$  в некоторый момент, для того, чтобы определить тем самым движение системы полностью и для любого момента времени.

В частном случае, когда имеется одна степень свободы, можно легко выразить  $p$  в функции  $q$ .

Например для линейного резонатора, согласно уравнению (1) имеем

$$\frac{p_x}{2\pi\nu\mu} = x_0 \cos 2\pi\nu t \quad \dots \dots \quad (4).$$

Возводя в квадрат (1) и (4) и складывая их между собой, получим

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{p_x}{2\pi\nu\mu x_0}\right)^2 = 1$$

А это, как известно, есть уравнение эллипса с полуосами  $a = x_0$ ,  $b = 2\pi\nu\mu x_0$ . Таким образом, если взять  $p_x$  за ординату, а  $x$  — за абсциссу, то для всякого частного значения  $x_0$  получится некоторый эллипс (рис. 1), а для всевозможных  $x_0$  — семейство подобных кон-

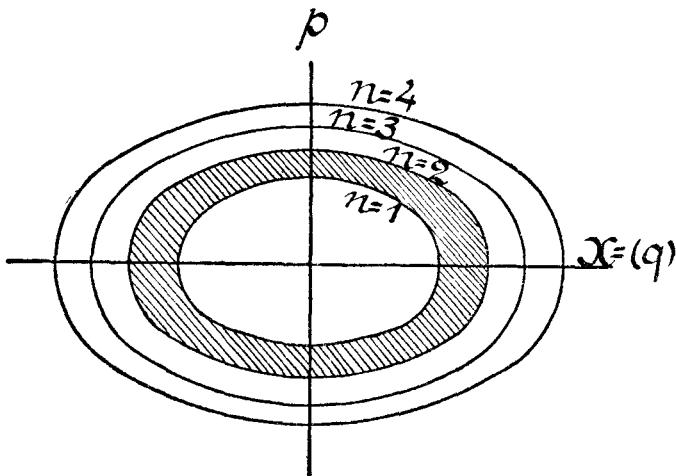


Рис. 1.

центрических эллипсов. В общем случае системы, определяемой координатой  $q$  и соответствующим моментом  $p$ , аналогичным построением, можно получить другое (не эллиптическое) семейство кривых, из которых каждая изображает движение системы для определенной величины энергии. На основании допущения Планка, согласно уравнению (3) возможны не все кривые семейства, но лишь некоторые совершенно

определенные. Позднейшая формулировка Планка в том и состоит, что *площадь, заключающаяся между двумя последовательными, допустимыми сточками зрения теории квантов, кривыми, должна быть равна количеству действия  $h$* . Математически это выражается так

$$\iint dp dq = h$$

или

$$\int (p_n - p_{n-1}) dq = h$$

Интеграцию следует распространить на всю заштрихованную область между кривыми для  $n = 2$ ;  $p_n$  и  $p_{n-1}$  относятся к значениям для импульса на пограничных кривых.

Суммируя выражения

$$\int (p_1 - p_0) dq = h, \int (p_2 - p_1) dq = h, \dots, \int (p_n - p_{n-1}) dq = h,$$

получим для  $n$ -го допустимого с точки зрения гипотезы квантов движения, или, как мы будем говорить, для  $n$ -ой „статической формы движения“:

$$\int (p_n - p_0) dq = nh$$

Здесь  $p_0$  означает импульс на самой внутренней статической кривой с наименьшей допустимой величиной площади.

Для этого  $p_0$  можно ожидать значение отличное от нуля только тогда, когда рассматриваемая система по механическим основаниям допускает предельное состояние, которому как раз импульс  $p_0$  и соответствует. Для линейного резонатора это не имеет места. Здесь и минимальные амплитуды и импульсы вплоть до совершенного покоя ( $p_0 = 0$ ) механически возможны. Для таких систем — а большинство систем именно таковы — квантовое условие (5 а) сводится просто к следующему

$$\int pdq = hn \dots \dots \dots \quad (5 \text{ в}),$$

т.е. площадь, ограниченная статической кривой, есть целое кратное количества действия  $h$ .

Легко видеть, что это трактование Планковского допущения, — которое в такой форме называют гипотезой „квантов действия“, для случая линейного резонатора совпадает с гипотезой квантов энергии (2). Действительно, площадь эллипса равна  $\pi ab$ , т.е.

$$nh = \pi ab = 2\pi^2 v m x_0^2$$

Мы пришли таким образом к формуле (3). Одно из преимуществ, которое представляла такая формулировка гипотезы квантов, сводилось к тому, что можно было довести до минимума необходимые изменения в электродинамике, по крайней мере, поглощение энергии можно было представлять непрерывным и существенно новое в этом возвращении — свести к вычислению статистической вероятности. А, так как для последующего безразлично, рассматриваем ли мы статические формы движения, как единственно возможные или только как в статическом смысле выбранные, то мы вернемся к этому вопросу лишь впоследствии (§ 16).

Дальнейшее преимущество второй теории заключается в том, что в ней никакой роли не играет число колебаний и поэтому не приходится заранее ограничиваться только периодическими движениями. И действительно, впоследствии удалось применить эту теорию, как к системам с несколькими степенями свободы, так и к известным классам непериодических движений.

#### § 4. Развитие идеи о квантах энергии.

Замечательно, что представление о квантах действия, основанное на понятии об импульсе, не сделало идею о квантах энергии излишней, но только переместило область ее приложений. И действительно эту идею с успехом можно было применить для обяснения многих явлений. В особенности Эйнштейн, которому мы обязаны разработкой теории квант в самых разнообразных направлениях, упорно защищал ту точку зрения, что при действии излучения с числом колебаний  $v$ , должен проявляться квант энергии  $h\nu$ . Таким образом он дал, картину количественных соотношений при *фотоэлектрическом эффекте*. Согласно его гипотезе, электрон, вылетающий из металла под действием ультрафиолетового света с частотою  $v$ , получает от света кинетическую энергию  $h\nu$ , из которой некоторую часть ( $P$ ) он затрачивает на ту работу, которую он совершает, чтобы пройти через поверхность и преодолеть связи с атомами металла. Отсюда для скорости  $v$  фотоэлектрона получается уравнение Эйнштейна (1905).

$$\frac{\mu v^2}{2} + P = h\nu,$$

которое вполне подтверждается и которое недавно *P. Милликаном* (1916) применено для точного определения величины  $h$ .

Обратное представление — допущение, что при процессе излучения света число колебаний, даваемое неизвестным нам механизмом может определяться имеющимся запасом энергии, мы находим впер-

вые у *Вина* и *Штарка*. Вин<sup>1)</sup> рассматривает процесс возникновения рентгеновских лучей при внезапном торможении катодных лучей на антикатоде и выставляет гипотезу, что число колебаний испускаемых рентгеновских лучей определяется кинетической энергией  $T$  заторможенного электрона из соотношения

$$T = ch\nu^2).$$

Замечательно в этом представлении то, что величина  $ch\nu$  ни в коем случае не совпадает с энергией, излучаемой в форме рентгеновских лучей, ибо последняя составляет, как это можно подсчитать<sup>2)</sup> и как это следует из измерений<sup>3)</sup>, лишь незначительную часть (порядка 0,2%) энергии катодных лучей. Таким образом условие (6) определяет лишь число колебаний испускаемого излучения и ничего не говорит об его энергии. Вот почему это уравнение мы называем „условием для частоты“ (Frequenzbedingung).

Это соотношение в последнее время проверено (до напряжения в 40.000 вольт<sup>4)</sup>). Причем подтвердилось с совершенной строгостью, что *наибольшее* число колебаний рентгеновских лучей, которые вызываются электронами с определенной кинетической энергией, удовлетворяет уравнению (6).

Впервые применение подобных соображений к оптическому спектру было сделано Штарком<sup>5)</sup>. Он рассматривает испускание линий спектра ртути и исходит из допущения, что предварительным условием для этого испускания является наличие ионизированных атомов и свободных электронов в ртутном газе. Свечение происходит, по его мнению, при рекомбинации электрона с ионизированным атомом. Так как при этом процессе имеется в запасе конечное количество энергии, а именно энергия  $T$ , которую нужно затратить для того, чтобы наоборот удалить электрон из атома в бесконечность так наз. ионизующий потенциал) и которая известна из непосредственных измерений, то Штарк заключил, что граница ртутного спектра, т.-е. наибольшее число колебаний  $\nu$ , излучение которого возможно, опре-

1) W. Wien Gött Nachr., p 598, 1907.

2)  $c$ —скорость света. Под числом колебаний мы разумеем здесь и в дальнейшем обратную величину длины волны  $v = \frac{1}{\lambda}$ . Строго говоря, это есть число колебаний в  $\frac{1}{c}$  секунд.

3) Зоммерфельд в работе (Münch. Ber. p 1, 1911), оказавшей большое влияние на дальнейшее развитие теории квантов модифицировал теорию Вина и разработал ее количественно.

4) W. Wien. Ann d. Phys 18, p. 991; 1905.

5) Duane и Nutt, Phys. Rev. 6, p. 166, 1915.

6) W. Stenling. Phys, Zs. 10, p. 991, 1905.

яется уравнением (6). Новейшие измерения ионизующего потенциала ртути<sup>5)</sup> подтвердили квантовое уравнение (6). Однако, число колебаний  $v$ , которое им определяется, относится не к границе спектра, но к резонансному излучению ртути (253,6 мк).

### § 5. Структура сериальных формул. Комбинационный принцип Ритца.

Наша цель состоит в том, чтобы дать обзор успехов, которые достигнуты за последние годы в обяснении спектральных законов, благодаря применению теории квантов к атомистике. Поэтому необходимо, прежде всего, сказать несколько слов о структуре спектральных формул и о современных воззрениях на строение атома.

При изучении линий, из которых состоит спектр, установлено существование особых последовательностей этих линий. Эти последовательности называются *сериями*. Все линии одной и той же серии обладают внешним сходством и однообразными физическими свойствами, из чего заключают об их генетической однородности. Изображение спектральных серий при помощи формулы было введено уже в 1885 году Бальмером, который дал для водородной серии, впоследствии названной его именем, следующую формулу

$$v = N \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m = 3, 4, 5 \dots \dots \dots \quad (7)$$

Здесь  $N$  — константа; ее наилучшим значением в настоящее время считается 109677,69. Из этой Бальмеровской серии, единственной серии, которую обладает водород в видимой части спектра, известно 29 линий, обозначаемых в порядке убывающей длины волны  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma \dots$  В спектрах водородных трубок найдены, однако лишь 13 первых линий, остальные недоступны наблюдению с земными источниками, вследствие своей слабости, но известны в спектрах звезд. Формула (7) дает с точностью, не оставляющей желать ничего лучшего, числа колебаний всех 29 линий, если подставлять вместо  $m$  последовательные целые числа от 3 до 31. Впрочем, последние исследования показали, что линии Бальмеровской серии не являются простыми, но могут быть разложены, по крайней мере, на два тесно расположенных компонента.

Равным образом, водороду приписывалась астрономическая серия, которая была найдена в 1896 г. Пикерингом в спектре звезды  $\zeta$  Puppis:

$$v = N \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m = 1,5; 2,5; 3,5 \dots \dots \quad (8).$$

<sup>5)</sup> J. Frank und G. Hertz. Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16, p. 512, 1914.

Мы увидим (§ 10), что в действительности она принадлежит ионизированному гелию.

Характерно для структуры этих формул, что число колебаний  $\nu$  в них является разностью двух членов  $\frac{N}{2^2}$  и  $\frac{N}{m^2}$ . Подробный анализ существовавшего в то время экспериментального материала показал шведскому физику Ридбергу в 1890 г., что многие спектральные серии различных веществ могут быть хорошо изображены обобщенной формулой.

$$\pm \nu = \frac{N}{(m_1 + \mu_1)^2} - \frac{N}{(m_2 + \mu_2)^2} \dots \dots \quad (9).$$

При этом  $N$  есть та самая постоянная, которая встречается в Бальмеровской формуле (7). Она приобретает, таким образом, значение универсальной постоянной и называется „*константой Ридберга*“.  $\mu_1$  и  $\mu_2$  суть также две константы, характерные для данного элемента,  $m_1$  и  $m_2$  — целые числа („порядковые числа“); знак следует выбирать так, чтобы  $\nu$  было положительно. Уже при постоянном  $m_1$  получается серия, если  $m_2$  пробегает ряд целых значений. Если же и  $m_1$  будет переменно, то одним только выражением (9) можно изобразить несколько серий.

Однако, с возрастанием точности спектральных измерений формула Ридберга оказалась недостаточной. Лучшая из предложенных впоследствии формул принадлежит *В. Ритцу* (1903). Ритц сохранил внешний вид формулы в том отношении, что  $\nu$  представляется разностью двух членов и видоизменил только самые эти члены. Еще большая заслуга перед спектроскопией принадлежит этому, к сожалению, рано скончавшемуся швейцарскому ученому за создание так наз. „*комбинационный принцип*“. Этот принцип принес доказательство того, что оба члена, разность которых равна числу колебаний, не являются случайной особенностью математической формулировки, но независимо от нее имеют действительный физический смысл, обективное существование.

Комбинационный принцип состоит в том, что один из двух членов, которые определяют какую-нибудь линию серии, можно комбинировать с одним из членов соответствующих другой линии (той же серии или какой-либо другой серии того же элемента) таким образом, что разность их дает спектральную линию. Таким образом Ритцу удалось с одной стороны отыскать новые серии, а с другой — причислить к сериям такие линии, которые казались стоящими одиноко. Например, применив этот принцип к Бальмеровской формуле (7), Ритц предсказал существование водородной (линии) серии вида

$$\nu = N \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad m = 4, 5, 6 \dots \dots \quad (7)$$

которая должна лежать в инфракрасной части. И уже в том же году (1908) это предсказание было подтверждено измерениями Пашена, который нашел следующие значения для длин волн в воздухе и чисел колебаний двух первых линий:

$m$	$\lambda$ в $\text{\AA}$ наблюд.	Вычисл.	$\nu$ Наблюд.	Вычисл.
4	18751,3	18751,6	5331,58	5331,49
5	12817,6	12818,7	7799,70	7799,10

Несколько раньше Лиманом были измерены в ультрафиолетовой части первые члены серии:

$$\nu = N \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (7 \text{ в}).$$

из которой по комбинационному принципу следует как Бальмеровская серия, так и Ритц-Пашеновская.

Впоследствии в особенности Пашен много занимался комбинационным принципом. Ему мы обязаны как экспериментальными обоснованиями этого принципа, путем нахождения и точного измерения комбинационных линий во всех сериальных спектрах так и окончательным сопоставлением различных серий химического элемента в одну систему серий. С точки зрения этой систематики и по аналогии с другими элементами можно было ожидать рядом с серией Пикеринга (8), которую приписывали водороду, еще серию

$$\nu = N \left( \frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (8 \text{ а}).$$

на что было указано уже Ридбергом.

Основную линию этой серии отождествляли с линией  $\nu = 4687,88$  (выч.  $\nu = 4687,90$ ) в спектрах некоторых неподвижных звезд. Однако, только в 1912 году Фаулеру (Fowler) удалось наблюдать эту серию в земных излучениях. В свете электрического разряда через Гейслерову трубку, наполненную смесью водорода и гелия, он получил три линии серии (8), четыре серии (8а) и три линии ультрафиолетовой серии

$$\nu = N \left( \frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad m = 2,5; 3,5; 4,5, \dots \quad (8 \text{ в}).$$

Наблюденные числа колебаний были несколько больше вычисленных по формулам (8а, в). Замечательно то, что эти линии нельзя было получить в чистом водороде; прибавление гелия оказалось безусловно необходимым.

## § 6. Модель атома Резерфорда.

С тех пор, как стало известно, что электрические заряды играют существенную роль внутри атома, было сделано множество попыток построить модель атома. Наиболее популярной моделью в течение долгого времени был предложенный *Лордом Кельвином* так наз. „атом Эпинуса“: положительное электричество непрерывно с постоянной плотностью распределено во всем (шарообразном) атоме, внутри этого шара находятся электроны в таком количестве, что их общий заряд как раз нейтрализует положительный заряд шара. Эта модель представляет то преимущество, что в ней электроны обладают статическими положением равновесия, так что нет необходимости сначала рассматривать их движение. Конечно здесь остается неясным — какие силы сдерживают положительное электричество шара. *Д. Д. Томсон* обосновал эту модель разнообразными атомистическими соображениями. Из его результатов для нас, главным образом, важен следующий: *Число  $\times$  электронов в атоме приблизительно равно половине атомного веса  $M$ .* Из различных физических явлений, которые привели Томсона к этому результату, следует обратить особенное внимание на *рассеяние рентгеновских лучей* различными веществами. Рассуждения, основанные на этом явлении, требуют только одной предпосылки, что в атоме имеются электроны и поэтому независимы от характера соединения последних. Поэтому результат Томсона о числе электронов остается справедливым и для всякой другой модели.

С другой стороны имелось и такое представление что атом построен из дискретных положительных частиц и электронов, которые действуют друг на друга кулоновыми силами и на подобие планетной системы двигаются друг около друга <sup>1)</sup>; статическое равновесие при силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния — невозможно. И всего несколько лет тому назад (1911) один, повидимому, незначительный экспериментальный результат позволил *Резерфорду* разрешить вопрос в пользу последнего класса моделей атома. По его предложению *Гейгер* и *Марсден* (1909) исследовали отклонение  $\alpha$ —лучей <sup>2)</sup> от их прямолинейного пути при прохождении через тонкие листочки различных веществ. При этом они показали, что в небольшом числе случаев наблюдаются даже весьма значительные (больше  $90^\circ$ ) углы отклонения в результате столкновения  $\alpha$ —частицы с одним

<sup>1)</sup> Еще до открытия электрона *Ф. Рихарц* (1894) рассматривал молекулу, как систему двух обращающихся друг около друга планет (положительный и отрицательный ион).

<sup>2)</sup>  $\alpha$ —лучи испускаются радиактивными веществами и состоят из атомов гелия летящих с большой скоростью и несущих на себе положительный заряд (равный двойному элементарному заряду).

единственным атомом. Для чтобы получить такое значительное отклонение  $\alpha$ —частица должна испытать при прохождении через атом соответственно сильное (электрическое) отталкивание. Обсуждение условий, существующих в Кельвиновской модели, показывают что имеющиеся там электрические поля слишком слабы для обяснения этого эффекта. Достаточно значительные силы поля возможны лишь тогда, когда весь положительный заряд атома, который уже приблизительно известен из упомянутых работ Томсона, будет сосредоточен на очень небольшом пространстве, в так наз. положительном „ядре“.

Исходя из этого допущения, Резерфорд мог подсчитать, что число  $\alpha$ —частиц, которые уклонились на угол  $\phi$  от прямой, пропорционально следующим величинам: 1)  $\sin^{-4}\phi$  (или  $\phi^{-4}$  для малых  $\phi$ ); 2) числу атомов в единице об'ема рассеивающего вещества; 3) толщине слоя  $d$  последнего (до тех пор, пока  $d$ —мало). 4) квадрату заряда ряда  $E$ ; 5) обратной величине квадрата кинетической энергии  $\alpha$ —частицы. При помощи результата (4) можно было на основании имеющегося экспериментального материала подсчитать заряды ядра  $E = ke$ . При этом оказалось в согласии с Томсоном, что  $k$  приблизительно равно половине атомного веса  $M$ :

$$k = \frac{M}{2}$$

В новой работе Гейгера и Марсдена (1913) заключения Резерфорда подверглись проверке во всех деталях и оказалось, что они совпадают с результатами опыта. Внезапное отклонение после столкновения особенно бросается в глаза в газах. В этом случае можно по методу Вильсона (C. T. R. Wilson) (рис. 2) сделать видимыми пути  $\alpha$ —частиц и сфотографировать эти пути. В конце видимого пути некоторых частиц, там, где их скорость уже уменьшена, можно заметить более или менее резкий изгиб, который и является результатом центрального столкновения с атомом газа:

Таким образом, мы приходим к так наз. „нуклеарной“ теории атома, которую можно также назвать планетарной теорией: атомы состоят из ядра, где сосредоточен весь заряд и почти вся масса атома и облака электронов, которые на подобие планет по более или менее удаленным орбитам вращаются вокруг ядра. Взаимные отношения подобных солнечных систем друг к другу, т.е. химические свойства атома, прежде всего определяются распределением периферических электронов, равным образом и оптический спектр существенным образом и оптический спектр существенным образом зависит от периферии. О внутренних же электронах, вращающихся вблизи самого



Рис. 2.

ядра, нам дают сведения рентгеновские спектры элементов, о чём мы еще будем говорить в § 14.

Разность атомных весов соседних элементов периодической системы составляет, в среднем, две единицы. Этому соответствует, согласно приблизительному равенству (10) увеличение заряда ядра  $z$  на одну элементарную единицу при переходе от данного элемента к соседнему. Отсюда, естественно, вытекает представление, что положение в периодической системе определяется не атомным весом, но зарядом ядра, или, как часто говорят *порядковым числом* ( $K$ ) элемента. Надо только для этого допустить, что зарядом ядра уже определяется все распределение электронов вокруг ядра, от чего, как мы видели, зависят все химические и физические свойства атома. Атомный вес изменяется лишь приблизительно параллельно порядковым числам, и этим объясняется то обстоятельство, что в различных местах периодической системы ( $A_r - K, Co - Ni, Te - J$ ) последовательность атомных весов не соответствует химическим свойствам. Впрочем безупречное доказательство того, что заряд ядра атома при переходе с одного места периодической системы на другое, изменяется на одну единицу, было получено лишь впоследствии при помощи рентгеновских спектров (§ 14). Согласно нашим современным сведениям водород состоит из ядра с одним зарядом ( $z = 1$ ) и одного электрона, гелий — из ядра с двумя зарядами ( $z = 2$ ) и двух электронов и т. д. до урана, которому соответствует порядковое число  $z = 92$ . В общем нам еще не известны шесть элементов (порядковые числа 43, 61, 72, 75, 85, 87).

Из измерений отклонения  $\alpha$ —лучей Резерфорда мог указать верхний предел размеров радиуса ядра, который оказался равным (для золота)  $3 \cdot 10^{-12}$  см.<sup>1)</sup> По сравнению с порядком величины атома ( $10^{-8}$  см.) это настолько малые размеры, что ядро при расчёте его поля можно считать точечным. Однако радиоактивные явления заставляют нас приписывать ядру тяжёлых элементов более или менее сложную структуру: как известно, новый элемент возникает из своего радиоактивного предшественника путём испускания одного  $\alpha$ —луча (ядро гелия), либо одного  $\beta$ —луча (электрон). Химические свойства получающегося продукта указывает правило *Фаянса-Содди* (1913), согласно которому при всяком  $\alpha$ —превращении элемент смещается влево на две группы периодической системы, при всяком  $\beta$ —превращении смещается в следующую группу.

С только что изложенной точки зрения это можно выразить так: при при  $\alpha$ —превращении заряд ядра уменьшается на две единицы; при  $\beta$ —превращении увеличивается на одну единицу. Это явление

<sup>1)</sup> Исходя из менее строгих предпосылок Дарвин получил для верхнего предела радиуса ядра у водорода и гелия  $1,7 \cdot 10^{-13}$  см.

легко обясняется, если допустить, что как  $\alpha$ —лучи (которые несут два положительных заряда), так и  $\beta$ —лучи (с одним отрицательным зарядом) возникают из ядра. Поэтому ядро, по крайней мере, у радиоактивных атомов, есть сложное образование, в состав которого входят электроны и ядра гелия <sup>2)</sup>.

## II. Отдел.

### Системы с одной степенью свободы.

#### § 7. Применение квант действия к модели атома Резерфорда.

Применением учения о квантаках к атомистике мы обязаны молодому датскому ученому *Нильсу Бору* (1913). В своей теории он так остроумно использует элементы, изложенные в §§ 2—6 и настолько приближается к истине, что эту теорию можно считать поворотным пунктом для всей атомистики. Планковская теория квантов написала в ней новую обширную область применения, в которой мы, несмотря на краткость времени протекшего с момента появления работы Бора, располагаем целым рядом точно установленных теоретических истин.

<sup>2)</sup> Ряд работ сделанных за последнее время Резерфордом и его учениками (Marsden. Phil. Mag. 27, p. 499 (1914), Marsden и Lantsberg. I. c. 30, p. 240 (1915) и в особенности самые последние четыре работы Резерфорда, напечатанные в одной книжке Philosophical Magazine 37, pp. 5-37-587, (1919) показал, что в состав ядра радиоактивных элементов, повидимому, должны входить, кроме ядер гелия также и ядра водорода. По крайней мере относительно радия С можно было констатировать, что на ряду с  $\alpha$ —частицами он испускает более легкие частицы, которые Резерфорд с полной убедительностью отожествил с ядрами водорода ( $H$ -частицы). Впрочем не исключена возможность, что в данном случае эти  $H$ -частицы обязаны своим происхождением окклюдированному водороду. Зато относительно одного из легких элементов—азота, получены были совершенно недвусмысленные и удивительные результаты. А именно подвергая азот бомбардировке  $\alpha$ —лучами Резерфорд и здесь обнаружил появление  $H$ -частиц. Таким образом ему удалось осуществить распад обыкновенного (т.-е. не-радиоактивного) элемента и показать, что и у этих элементов ядро есть образование сложное. Приведем исторические слова самого Резерфорда:—„Мы должны заключить, что атом азота разрушается под влиянием огромных сил развивающихся при столкновении с потоком частиц и что атом водорода, который при этом освобождается входит составной частью в ядро азота“.

Работы Резерфорда заключают в себе массу интересных и важных данных о структуре атомного ядра. Некоторые подробности о них можно найти в реферате акад. *П. П. Лазарева* в настоящем номере „Успехов“, а также в переведенных и имеющих вскоре появиться в книгах:

*Л. Грец* Современное развитие атомной теории.

*К. Фаэнс*. Радиоактивность и современное развитие ученых о химических элементах.

Переводчик.

Согласно § 6 атом водорода состоит из одного ядра с одним зарядом и одного электрона. Будем рассматривать несколько более общее образование: ядро с зарядом  $ke$ , вокруг которого вращается один

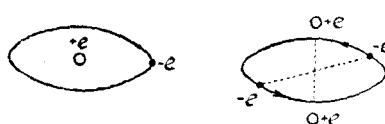


Рис. 3. a b

электрон (рис. 3 а). Такую систему называют водородоподобной (wasserstoffähnlich); если  $k$  отлично от единицы, то система не соответствует нормальному состоянию какого-либо атома, или для того, чтобы быть электрически нейтральным, ей нехватает  $k-1$

электронов. Таким образом, это будет атом, у которого  $k-1$  электронов удалено, или, как принято говорить,  $k-1$  раз ионизированный атом. Попытаемся, подобно тому, как это мы сделали для линейного резонатора в §§ 2 и 3, из всех, механически возможных движений электрона выбрать лишь некоторые, допустимые с точки зрения теории квантов. Оказывается, однако, что, между случаем линейного резонатора и данным имеется существенная разница. В самом деле, в том и другом случае колебания совершаются электрическим зарядом, ведут к излучению энергии. Но в то время как при квазиупругой связи — движение электрона совершается с постоянным, не зависящим от запаса энергии числом колебаний, в случае же действия Ньютона сил вследствие потери энергии (при излучении), изменяются самые размеры орбиты, а вместе с тем и все остальные константы движения. Чтобы обойти это затруднение, Бор отважился поступить вопреки электродинамике: он просто допустил, что на выбранных согласно квантовым соотношениям („статических“) орбитах, которые нам, в конце концов, только и важны, излучения не происходит. Здесь имеется лишь взаимное притяжение ядра и электрона по законам электростатики. Несмотря на необычайную смелость этого допущения, оно подтвердилось теми блестящими результатами, к которым привело.

С этой точки зрения движение одного единственного электрона вокруг ядра является периодическим и нетрудно применить к данному случаю Планковское условие (5), если свести его к случаю системы с одной степенью свободы, рассматривая лишь круговые орбиты. В самом деле, положение  $M$  планеты на круговой орбите определяется одной только координатой, в качестве которой мы можем выбрать ф-угол, составляемый радиусом, проведенным к электрону с некоторым постоянным направлением ор. (рис. 4). При этом масса ядра настолько превосходит массу электрона ( $\mu$ ), что только с достаточным приближением можно считать ядро бесконечно тяжелым и заменить его неподвижным центром притяжения. Таким приближением мы ограничимся в этом и следующем § и примем во внимание собственное движение ядра лишь в § 10.

Пусть  $a$  будет радиус круговой орбиты, которую электрон описывает вокруг неподвижного центра,  $v$  — скорость при этом движении; пусть далее, по прежнему —  $e$  (отрицательный) заряд электрона, а положительный заряд ядра  $\kappa e$ . При круговом движении центростремительная сила  $\kappa e$  строго уравновешивается Ньютона притяжением, что ведет к следующему соотношению между радиусом и скоростью:

$$\frac{\mu v^2}{a} = \frac{\kappa e^2}{a^2} \text{ или } \mu v^2 = \frac{\kappa e^2}{a} \dots (11).$$

Помощью этого соотношения получим величину полной энергии  $A$  электрона, которая складывается из кинетической и потенциальной энергии.

$$A = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\kappa e^2}{2a}, \dots (12).$$

а также угловую скорость

$$\varphi = \frac{v}{a} = e \sqrt{\frac{\kappa}{\mu a^3}} \dots (13).$$

Согласно обыкновенной механике возможны все значения радиуса  $a$  и, следовательно, согласно уравнению (12) — все значения (всегда отрицательные) энергии. Воспользуемся теперь Планковским квантовым условием

$$\int p dq = hn$$

чтобы сделать выбор между этими орбитами. Координатой  $q$  в данном случае служит угол  $\varphi$ , а соответствующим моментом  $p_\varphi$ , по правилам динамики будет так наз. угловой момент количества движения  $p_\varphi = \mu a v$ , т.-е. постоянная величина. Интеграцию следует распространить на всю область переменного, т.-е. от 0 до  $2\pi$ . В конце концов получается

$$hn = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi \mu a v \dots (13).$$

Из этого уравнения и из соотношения (11) получается при исключении  $v$

$$a_n = \frac{h^2}{4\pi^2 \kappa \mu e^2} n^2 \dots (14).$$

Последняя величина, будучи подставлена в (12) и (13), дает

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\frac{2\pi^2 \kappa^2 \mu e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ \Phi_{(n)} &= \frac{8\pi^3 \kappa^2 \mu e^4}{h^3} \cdot \frac{1}{n^3} \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

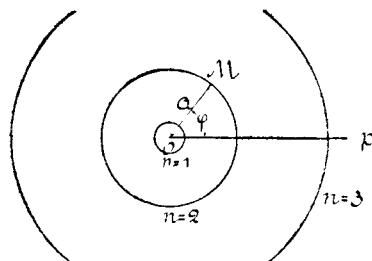


Рис. 4.

Таким образом из всех механически возможных  $a$  и  $A$  мы выбрали ряд *дискретных*, допустимых с квантовой точки зрения. Это значит, что электрон не может вращаться на любом расстоянии от ядра, но может двигаться только по статическим орбитам, определяемым выражением (14). Мы видим, что с возрастанием квантового числа  $h$ , расстояния соседних орбит становятся все больше (первые орбиты изображены на рис. 4). Обратное соотношение имеет место для статических ступеней энергии (15); эти последние с возрастанием  $n$  лежат все теснее и скучиваются вокруг значения  $A = 0$  (т.-е.  $a = \infty$ ).

### § 8 Условие для частоты.

Движение электрона по одной из статических орбит, которое, согласно сказанному выше, происходит без отдачи энергии, составляет по мысли Бора, нормальное или равновесное состояние атома. Если же электрон под влиянием какой-нибудь возмущающей причины будет удален с такой орбиты, он тотчас же стремится перескочить на другую, чтобы восстановить равновесие. На этой новой орбите энергия будет, конечно, меньше, так как всякая система без внешних влияний может только отдавать энергию (путем излучения), но не приобретать ее. Бор делает допущение, что атом излучает только при таком переходе электрона с одного статического пути на другой. Возникает вопрос—каким образом определяется длина волны получающегося излучения. Если стать на точку зрения Вина-Штарка, изложенную в § 4, то эта длина волны должна определяться имеющейся налицо энергией. Таким образом, если назвать энергию начального и конечного пути соответственно через  $A_m$  и  $A_n$ , то по аналогии с уравнением (6) получится

$$ch\nu = A_m - A_n \dots \dots \dots \quad (16).$$

Это и есть, действительно, вторая гипотеза, которой—наравне с Планковым квантовым условием—пользуется Бор в своей теории<sup>1)</sup>. Назовем ее на будущее время „Условием Бора для частоты“.

Легко видеть, что эта гипотеза согласуется с комбинационным принципом Ритца (§ 5) и заключает в себе естественное обяснение этого принципа. Действительно, согласно формуле (16) число колебаний представляется разностью двух членов, которые физически означают энергию двух статических орбит. Так как переход электрона должен быть возможен между всякими двумя статическими орбитами (в направлении убывающей энергии), то и всякие два члена можно комбинировать между собой.

<sup>1)</sup> Мы далеки от того, что бы утверждать, что Бор на самом деле знал и использовал работы Штарка и Вина. Мы считаем однако целесообразным в нашем изложении исходить от ранее существовавших взглядов.

### § 9. Объяснение простейших законов спектральных серий.

Если мы снова обратимся к случаю водородо-подобного атома, то нам нужно будет только подставить в формулу (16) уже найденное значение для энергии, чтобы получить общее выражение для серий, помянутых в § 5

$$v = \frac{2\pi^2 \kappa^2 \mu e^4}{h^3 c} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{m^2} \right) = N \kappa^2 \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{m^2} \right) \dots (17).$$

Если подставить  $n = 2$ , то получается формула Бальмера. Но кроме того оказывается, что и по численной величине фактор  $N$  совпадает с константой Ридберга, если для констант  $\mu$ ,  $e$ ,  $h$  подставить наиболее точные современные значения, полученные из других явлений. Лучше всего при этом вычислении изобразить  $N$  в следующем виде:

$$N = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2}{c} \cdot \frac{\mu}{e} \left( \frac{e}{h} \right)^3$$

Это потому, что отношения  $\frac{e}{\mu} = 5,2908$ . (Фортрат, 1912) и  $\frac{h}{e} = 1,370 \cdot 10^{-17}$  (Варбург и Мюллер, 1915) можно определить значительно точнее, чем самые константы. Отсюда получается для  $N$  следующее числовое значение

$$N = 110100.$$

которое должно обладать точностью приблизительно в 1,5%; мы видим, что оно действительно в указанных пределах точности совпадает с экспериментальным значением (§ 5) 109677,69. В настоящее время поступают наоборот и пользуются оптическими данными для наиболее точного определения универсальных констант (ср. § 10).

Ядро атома водорода несет один положительный заряд, а потому для этого газа в формуле (17) следует положить  $\kappa = 1$  и тогда формула эта для  $n = 1, n = 2$  и  $n = 3$  дает три серии (7a), (7b) и (7c) водорода. Т.е. линии инфракрасной Пашеновской серии испускаются при перескакивании электрона с какого-либо внешнего кольца ( $m = 2, 3, 4 \dots$ ) на первое ближайшее к ядру. Линии Бальмеровской серии получаются при переходе на *второе* кольцо, линии ультрафиолетовой серии Лимана — при переходе на *третье* кольцо.

Если принять во внимание такой механизм возникновения линий, то становится понятным, почему в гейслеровых трубках наблюдаются только первые 12 линий Бальмеровской серии: для появления линий, соответствующей порядковому числу  $m$  должно быть выполнено то предварительное условие, что в некоторой части атомов электроны врачаются по  $m$ -тым орбитам. Но очевидно, что орбиты с большим радиусом образуются тем легче, чем меньше плотность газа, чем реже

стало быть сфера атома нарушается соседними атомами и молекулами. Надо поэтому допустить, что давление газа в тех частях звездной атмосферы, которые дают 29 линий значительно меньше, нежели обычное давление в гейслеровых трубках.

### § 10. Собственное движение ядра.

В § 7 мы уже упомянули, что все стальные атомы, кроме водорода, только в ионизированном состоянии удовлетворяют предпосылкам формул (15) и (17). Например, эти формулы справедливы для однократно ионизированного гелия, т.е. для атома, который состоит из ядра гелия с двумя зарядами ( $k=2$ ) и только одного электрона. В этом случае из формулы (17) получается

$$v = 4N \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

что можно записать и так:

$$v = N \left[ \frac{1}{\left( \frac{n}{2} \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{m}{2} \right)^2} \right]$$

Мы видим, что эта формула содержит в себе серии (8a) и (8b) § 5, которые приписывались водороду. Действительно, для  $n=3$  получается выражение, охватывающее серии Ридберга (8a) и Фаулера (8b):

$$v = N \left[ \frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{\left( \frac{m}{2} \right)^2} \right]; m=4,5,6 \dots (19).$$

Для  $n=4$  имеем формулу

$$v = N \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left( \frac{m}{2} \right)^2} \right]; m=5,6,7 \dots (20).$$

которая дает для целых  $m$ , кроме линий серии Пикеринга (8) еще ряд других, совпадающих с водородными линиями Бальмеровской серии (7) и потому не упомянутых Пикерингом.

То обстоятельство, что наблюденные серии (8, 8a, 8b) обязаны своим происхождением не водороду, как это думали раньше, а гелию, как этого требует только что изложенная теория, это обстоятельство подтвердилось вполне. Мы уже упомянули, что *Фаулер* нашел безусловно необходимым наличность примеси гелия к водороду для возбуждения этих линий; затем, летом 1914 года *Пашен* и *Бартельс* наблюдали их в чистом гелии. Но уже сам *Бор* указал на одно обстоя-

тельство, которое доставило решительное доказательство его воззрения: мы уже знаем, что линии серии Фаулера не вполне удовлетворяют формуле (8b); это отклонение полностью об'ясняется, если привести вычисление несколько строже и принять во внимание собственное движение ядра.

В действительности ядро не есть некоторый неподвижный центр; оно обладает конечной массой  $M$ , вследствие чего электрон и ядро описывают круги около их общего центра тяжести. Радиусы этих орбит, как известно, обратно пропорциональны массам  $\mu$  и  $M$ . Следовательно в квантовое условие (11) надо ввести вместо  $P_\phi$  сумму угловых моментов количества движения ядра и электрона и после некоторых промежуточных вычислений, аналогичным предыдущим, получается формула (17), в которой, однако, величина  $N$  уже зависит и от массы  $M$ .

$$N = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3 c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu}{M}} \quad \dots \quad (21)$$

Обозначим выражение для  $N$  по формуле (17), которое мы получим, полагая массу  $M$  бесконечно большой по сравнению с  $\mu$ , через  $N_\infty$ , тогда

$$N = \frac{N\infty}{1 + \frac{\mu}{M}} \quad \dots \quad (21^1).$$

Поэтому число Ридберга, строго говоря, не является универсальной константой, но изменяется, хотя и очень слабо, от элемента к элементу. Наибольшие отклонения от  $N_\infty$  имеют место как раз для водорода и гелия, так как для обоих этих элементов отношение  $\frac{\mu}{M}$  принимает наибольшее значение.

Считая  $e$ ,  $h$ ,  $M_H$  известными, можно с помощью этих чисел под-

считать величины  $\frac{e}{uc}$ ,  $\frac{\mu}{M_H}$  и  $N \infty$ . Получается

$$\frac{e}{uc} = 1,76 \cdot 10^5; \frac{M_H}{u} = 1844; N_\infty = 109737,16^{-1})$$

<sup>1)</sup> Фактор  $C (3 \cdot 10^{10})$  введен потому, что автор всегда выражает  $e$  в электростатических единицах, между тем как общепринято давать отклонение  $\frac{e}{\mu}$  в единицах электромагнитных.

Наилучшее, экспериментально (из Зеемановского эффекта) найденное значение для  $\frac{e}{\mu_e}$ , как уже упомянуто, есть  $1,76 \cdot 10^7$ . Таким образом—совпадение полное.

На мнение о теории Бора ученых этот новый триумф ея оказал решающее влияние. Прежде большинство из них относилось к этой теории сдержанно. Было общепринято, что Бору удалось сконструировать константу Ридберга из универсальных величин  $e$ ,  $\mu$  и  $h$ , однако полагали, что его модель сыграла при этом случайную роль и считали ее продуктивность исчерпанной этими результатами. Но то обстоятельство, что путем увеличения точности вычислений удалось добиться новых важных результатов, показывало, что здесь мы имеем дело не только с поверхностной аналогией. А это, в свою очередь, побудило некоторых физиков попытаться еще глубже применить к атомной теории небесную механику.

Упомянем еще вкратце, как по мнению Бора, должна быть устроена молекула водорода. Эта последняя ( $H_2$ ) состоит из двух атомов, и следовательно обладает двумя ядрами и двумя электронами. Расположение этих составных частей изображено на рис. 3в; оба электрона двигаются по одному (изображеному на рисунке) кругу вокруг линии соединения обоих ядер, которая и служить осью. Размеры молекулы, допустимые по теории квантов, можно вычислить таким же образом, как это сделано для атома (§ 7). Для самого внутреннего круга, который могут описывать электроны, и который соответствует нормальному состоянию не светящегося газа, получается

$$a^1 = 0,504 \cdot 10^{-8} \text{ ст. . . . .} \quad (23'),$$

между тем, как формула (14) дает для атома лишь мало отличающуюся величину.

$$a = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ . . . . .} \quad (23).$$

Половина расстояния между ядрами относится к радиусу  $a'$  как  $1 : \sqrt{3}$ .

Значение (23<sup>1</sup>) находится в хорошем согласии с результатами кинетической теории. Дальнейшим подтверждением модели молекулы Бора мы обязаны Дебаю (1915), который исследовал дисперсию газа, состоящего из таких образований и констатировал полное совпадение с экспериментальными данными для дисперсии в водороде.

III. О т д е л.

**Системы с несколькими степенями свободы.**

**§ 11. Обобщение квантовых условий на случай нескольких степеней свободы.**

Вопрос о том, каким образом условие *Планка* (5) можно обобщить на системы с несколькими степенями свободы, был поставлен Пуанкаре на Брюссельском конгрессе по поводу теории квантов в 1911 г. Но только четыре года спустя одновременно *Планком* и *Зоммерфельдом* этот вопрос был до известной степени разрешен. При этом, Планк исходил из общих статистических соображений, между тем как *Зоммерфельд* прежде всего имел в виду применение к модели атома *Бора*. Так как в ближайших параграфах мы будем рассматривать некоторые специальные случаи, при исследовании которых теория Зоммерфельда получила блестящее подтверждение, то мы пойдем именно его путем. К теории Планка, лишь формально отличающейся от теории Зоммерфельда мы вернемся впоследствии (§§ 16 и 17).

Зоммерфельд исходил из того факта, что линии серии Бальмера не являются простым, но при исследовании спектральными аппаратами весьма большой разрешающей силы оказываются по меньшей мере двойными. Так как по теории Бора (§ 8) спектральная линия является результатом комбинации двух статических орбит, то Зоммерфельд заключил, что должно существовать большее число орбит, чем это дается формулой Бора (17); а это побудило его обратиться к рассмотрению не только круговых, но и эллиптических орбит.

Под влиянием Ньютона центра притяжения тело описывает, вообще говоря, эллипс (Кеплеров эллипс), в одном из фокусов которого находится этот притягивающий центр. Дело сводится, таким образом, к изысканию между всевозможными эллиптическими путями, которые электрон может описывать по законам классической, орбит, удовлетворяющих требованиям теории квантов, *статических* орбит. Но эллипс по своей величине и по форме определяется двумя константами (напр. большой и малой полуосью), а потому для установления его необходимо также два квантовых условия. Пусть положение электрона в плоскости орбиты определяется полярными координатами  $r$  и  $\phi$ , если взять за начало ядро (которое мы опять рассматриваем как неподвижный центр). *Зоммерфельд* сохраняет квантовое условие

$$\int P_\phi \cdot d\phi = nh \dots \dots \dots \quad (24),$$

которое оправдалось у Бора и дополняет его аналогичным соотношением

$$\int P_r \cdot dr = n' h \dots \dots \dots \quad (24').$$

где под  $P_r$  разумеется импульс, соответствующий радиусу вектору  $r$  (что спретвенно для  $\phi$ , того мы вправе требовать и от  $r$ !). Оба интеграла следует распространить на все точки пути, т.е. на весь период движения.

В более общем случае, если система определяется  $f$  координатами,  $q_1, q_2, \dots, q_f$  и  $f$  соответствующими им импульсами  $p_1, p_2, \dots, p_f$ , согласно Зоммерфельду, на нее следует наложить  $f$  условий вида

$$\int p_i dq_i = n_i h; i = 1, 2, 3 \dots \dots \quad (25).$$

Так как  $p_i$  и  $dq_i$  имеют всегда одинаковые знаки, то из этого определения следует, что и  $n_i$  *суть всегда положительные целые числа*.

Результат, к которому ведут условия (24) и (24') для полуосей статических эллипсов, заключается в следующем

$$a = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 me^2} \left( n + n' \right)^2; b = a \frac{n}{n + n'} \dots \quad (26).$$

Таким образом, при данной сумме квантовых чисел  $n + n'$ ,  $a$  будет постоянно,  $b$  — переменно, и при том отношение  $\frac{b}{a}$  будет правильная дробь с знаменателем  $n + n'$ .

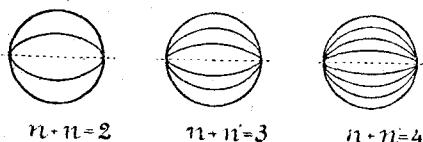


Рис. 5 а, б, с.

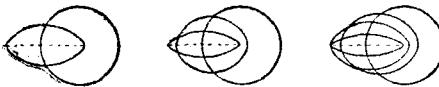


Рис. 6 а, б, с.

Число в действительности существующих орбит в каждом случае равно  $n + n'$ . Следует заметить, что эллипсы расположены по отношению к ядру конфокально, а не концентрически, как это простоты ради изображено на рис. 5.

Цель Зоммерфельда была достигнута постольку, поскольку было получено большее число статических орбит. Однако первоначально результат этот вызвал разочарование, так как увеличение числа орбит вовсе не сопровождалось увеличением числа ступеней энергии. В самом деле, энергия, соответствующая Кеплерову эллипсу, есть функ-

ция  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{r}k$ , где  $v$  — скорость,  $r$  — радиус вектора,  $k$  — константа, зависящая от ядра. Для квантовых сумм  $n + n' = 2, 3, 4$  возможные эллипсы изображены на рис. 5. При этом, тот путь, который представляется прямой, проходимой дважды (туда и обратно) —  $b = 0$ ,  $n = 0$ , изображен пунктиром. На этом пути электрон должен был бы столкнуться с ядром, а потому его следует считать невозможным.

Число в действительности существующих орбит в каждом слу-

ции только его большой оси, следовательно для всех орбит каждой из наших фигур ( $a, b, c$ ) она будет одна и та же. Она выражается

$$A = -\frac{2\pi^2 \kappa^2 \mu e^4}{h^2 (n + n')^2} \dots \dots \dots \quad (27).$$

которая при целых  $n$  и  $n'$  дает как раз те самые дискретные значения, что и выражение Бора

$$A = -\frac{2\pi^2 \kappa^2 \mu^2 e^4}{h^2 n^2}$$

Таким образом Земмерфельд получил те же простые серии линий, которые заключаются в формуле (17), но всякая линия возникает, по его теории, различными способами в результате комбинации нескольких различных пар статических орбит. Она заключает в себе, так сказать, несколько совпадающих степеней свободы. Только принимая во внимание переменную массу электрона, как функцию его скорости, согласно требованию теории относительности, Земмерфельду удалось разделить друг от друга эти скрытые степени свободы и получить блестящее совпадение с опытом (§ 18).

### § 12 Условно-периодические движения.

В теории Земмерфельда, развитой в предыдущем параграфе, остаются все же открытыми несколько вопросов. Уже при рассмотрении периодических движений, где интеграцию, очевидно, надо распространить на весь период, было неясно, какую из многоразличных координатных систем, при помощи которых можно описать движение, следует выбрать. При непериодических движениях—даже самые пределы интеграции неизвестны. Поэтому дальнейший шаг вперед был сделан, когда независимо друг от друга Шварцшильд и автор (1916), заимствовав из небесной механики понятно об „условно-периодических движениях“, перенесли его в область атомистики и строго установили для этого обобщенного класса механических систем условия Земмерфельда о выборе координат и пределах интеграции.

„Условно-периодическими“ называют такие системы для определения которых можно выбрать координаты так, чтобы они испытывали монотонные колебания между двумя постоянными пределами, или, как принято говорить, совершили *мбрации*. Простейшим примером такого движения является результирующее двух перпендикулярных друг к другу синусоидальных колебаний.

$$X = X_0 \sin(\omega_x t + \sigma_x), \quad Y = Y_0 \sin(\omega_y t + \sigma_y),$$

где  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $\omega$  и  $\sigma$  суть константы. Совершенно ясно, что  $X$  в течение времени  $t$  пробегает все значения от  $-X_0$  до  $+X_0$ , а  $Y$ —все значения

от  $-Y_0$  до  $+Y$ . Если частоты  $\omega_x$   $\omega_y$  несопоставимы, то результирующая кривая (рис. 7) подходит к любой точке прямоугольника, заключенного между пределами либрации сколь угодно близко или, употребляя математический термин, заполняет прямоугольник с равномерной плотностью. Рассмотрим другой пример, важный для теории *Зоммерфельда*. Мы уже упомянули, что масса электрона, строго говоря, не является постоянной, но зависит от его скорости. Форма этой зависимости устанавливается теорией относительности. Если принять во внимание это обстоятельство, то движение под влиянием Ньютона центра притяжения испытывает некоторое изменение: орбита остается попрежнему эллиптической, однако этот эллипс не сохраняет своего положения, но его большая ось вращается с незначительной угловой скоростью в плоскости орбиты, вокруг фокуса с тем же периодом, что и электрон при своем движении по эллипсу. Кривая, которую описывает при этом электрон, изображена на рис. 8. Здесь снова координата  $r$  варьирует между двумя постоянными пределами  $r_1$  и  $r_2$ , а циклическая переменная  $\phi$  — от 0 до  $2\pi$ . Кольцевая область  $r_1 \leq r \leq r_2$ , вообще говоря, заполнена орбитой с равномерной плотностью.

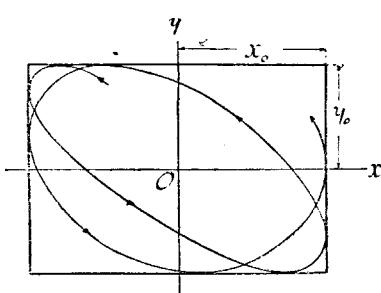


Рис. 7.

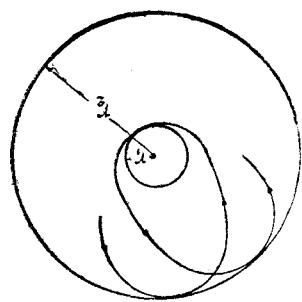


Рис. 8.

С математической точки зрения характеристика условно периодических движений состоит в том, что когда координаты выбираются только что описанным способом, импульс  $p_i$ , соответствующий любой координате  $q_i$ , зависит только от переменной  $q_i$  и не зависит от других  $q$

$$p_i = p_i(q_i) \dots \dots \dots \quad (25).$$

причем  $p_i$  на границах либрации ( $p_i = a_i$ ,  $q_i = b_i$ ) исчезает.

Теория квантов для условно периодических систем, в той форме, как она была формулирована автором, состоит в том, что квантовый интеграл (25), распространенный между двумя последовательными соприкосновениями с одним и тем же пределом либрации или, что то же самое, дважды взятый интеграл от одного предела либрации до другого, равен  $n_i h$ , т.-е.

$$2 \int_{a_i}^{b_i} p_i dq_i = n_i h \quad \dots \dots \dots \quad (29).$$

Если координата циклическая, как например  $\phi$  в случае эллипса, то интегрировать надо от 0 до  $2\pi$

$$\int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = n_\phi h \quad \dots \dots \dots \quad (29').$$

Можно доказать вообще, что эти условия, поскольку им подчинены все степени свободы, вполне определяют энергию, как функцию квантового числа.

### § 13. Тонкая структура водородных линий.

В качестве первого приложения правил, установленных для условно периодических систем рассмотрим уже упомянутый в предыдущем § пример движения по эллипсу<sup>1)</sup>. Условия (29) и (29') соответственно обозначения на рис. 8 принимает вид

$$2 \int_{r_1}^{r_2} p_r dr = n' h; \quad \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = n h \quad \dots \dots \dots \quad (30).$$

Теория относительности внесла лишь незначительные изменения в условия которые нас привели к эллиптическим орбитам, рассмотренным в § 11. Таким образом, квантовые соотношения попрежнему выделяют из всех механически возможных орбит ряд—“статических”, которые с достаточным приближением изображаются эллипсами рис.

Однако в отличие от того случая, ступени энергии, соответствующие различным эллипсам одной и той же фигуры, не строго равны между собой, но незначительно друг от друга отличаются. Действительно, приближенное<sup>2)</sup> выражение для энергии имеет следующий вид

$$A = -\frac{Nhc\alpha^2}{(n+n')^2} - \frac{Nhc\alpha^4\alpha^2}{(n+n')^4} \left[ \frac{1}{4} + \frac{n}{n'} \right] \quad \dots \dots \quad (31).$$

Буквой  $\alpha$  здесь обозначена константа, которая следующим образом зависит от универсальных постоянных  $e$ ,  $h$  и  $c$

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

<sup>1)</sup> В действительности этот случай был исследован Земмерфельдом еще до установления общих правил (29) и (29') для условно-периодических систем.

<sup>2)</sup> Можно дать и точное выражение для энергии, однако для наших целей формула (31) нагляднее.

Что касается физического смысла этого числа, то оно представляет собою скорость (измеренную по отношению к скорости света), которой обладает электрон на первой статической орбите ( $n = 1$ ) атома водорода ( $\kappa = 1$ ). Числовое значение интересующего нас квадрата следующее:

$$\alpha^2 = 5,316 \cdot 10^{-5},$$

а потому поправочный член, введенный по теории относительности, всегда мал по сравнению с первым членом выражения (31).

Этот поправочный член, очевидно, оказывает двоякое влияние: во-первых, он увеличивает абсолютное значение энергии для всех эллипсов с одной и той же большой осью на величину

$$\frac{Nhck^4\alpha^2}{4(n+n')^4};$$

во вторых, он увеличивает энергию различных эллипсов на значения отличающиеся друг от друга и пропорциональные отношению  $\frac{n'}{n}$ :

$$\frac{n'}{n} \cdot \frac{Nhcn^4\alpha^2}{(n+n')^4} \dots$$

Принимая во внимание условие Бора

$$\hbar c\nu = A_1 - A_2,$$

мы получаем частоту света, излучаемого при переходе электрона с одного статического пути ( $m, m'$ ) на другой ( $n, n'$ ), в следующей форме:

$$\nu = N\kappa^2 \left[ \frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2} \right] + \frac{N\alpha^2\kappa^4}{4} \left[ \frac{1}{(n+n')^4} \left( 1 + \frac{4n'}{n} \right) - \frac{1}{(m+m')^4} \left( 1 + \frac{4m'}{m} \right) \right]. \quad (33).$$

Вследствие малой величины заряда ядра  $\kappa$ , все это выражение лишь весьма мало отличается от своего первого члена, который, согласно § 9, дает выражение для Бальмеровой или какой либо другой подобной серии. Поэтому *числа колебаний (33) при заданных значениях квантовых чисел тесно группируются вокруг числа, полученного из формулы (17) и создают тонкую структуру водородной линии.*

Рис. 5 показывает, что для заданной системы чисел ( $m, m', n, n'$ ) существует  $m + m'$  возможных начальных орбит и  $n + n'$  — конечных. Отсюда следует, что водородная линия может состоять из  $(m + m')$  ( $n + n'$ ) компонентов. Однако, число действительно наблюдаемых компонентов повидимому, меньше. Чтобы ввести ограничение, Зоммерфельд руководствовался тем принципом, что квантовые числа

суть числа существенно положительные; поэтому, естественно предположить, что при перескакивании электронов должна уменьшаться не только сумма этих чисел, но и сами они в отдельности не могут возрастать. Т.-е. должно иметь место не только неравенство  $m + m' > n + n'$ , но и

$$m \geq n; m' \geq n' \dots \dots \dots \quad (34).$$

Возьмем например основную линию Бальмеровой серии ( $H_\alpha$ )

$$v = N \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right);$$

$m + m' = 3; n + n' = 2$ . Поэтому здесь *a priori* было бы возможно  $2 \cdot 3 = 6$  способов перехода, которые, однако, неравенствами (34) сводятся к четырем по следующей схеме

$$\begin{array}{l} m = 3 \ m' = 0 \rightarrow n = 2 \ n' = 0 \\ m = 2 \ m' = 1 \rightarrow \\ m = 1 \ m' = 2 \rightarrow n = 1 \ n' = 1. \end{array}$$

Впоследствии, однако, оказалось, что неравенства Зоммерфельда не являются строгими, но лишь приближенными: при известных обстоятельствах (в зависимости от способа возбуждения гейслеровой трубки), появляются и линии им противоречащие но всегда лишь со слабой интенсивностью.

Теория Зоммерфельда дает основания и для сценки интенсивности компонентов. Из статистических соображений с большой правдоподобностью следует, что вероятность эллиптического пути пропорциональна отношению осей этого эллипса  $\left( \frac{n'}{n+n'} \right)$ . Вероятность перехода с одной орбиты на другую будет тогда пропорциональна произведению соответствующих чисел для начальной и конечной орбиты, т.-е.

$$\frac{n'}{n+n'} \cdot \frac{m}{m+m'}$$

В действительности интенсивность компонент приблизительно следует этому правилу, когда свечение газа вызывается искровым разрядом, между тем, как при постоянном токе, повидимому, дело обстоит несколько иначе.

На рис. 9 изображены компоненты первых линий Бальмера ( $H_\alpha$  и  $H_\beta$ ) по положению и интенсивности. При этом ирреальные линии, которые противоречат условиям (34) изображены либо пунктиром, либо отмечены короткой стрелкой; теоретически ожидаемые интенсивности,

для наглядности, представляются длиной соответствующих линий. Характерным для расположения линий является постоянство расстояний между различными парами линий. Это происходит потому, что

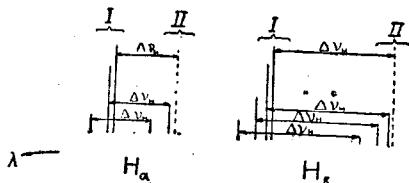


Рис. 9.

от соответствующих значений первой группы лишь на разность поправочных членов зависящих от  $n$  и  $n^1$ , т.-е. на постоянную величину.

$$\Delta v_H = \frac{Na^2}{16}$$

(в чем нетрудно убедиться, сделав надлежащие подстановки в формулу (33). перев. (Эту величину  $\Delta v_H$  Зоммерфельд называет разностью колебаний водородного дублета, ее числовое значение теоретически получается на основании данных в §§ 5 и 13 велины  $N$  и  $a^2$ :

$$\Delta N_H = 0,364 \text{ см.}^{-1}$$

При сравнении с наблюдениями следует помнить, что структуры, изображенные на рис. 9 не могут быть вполне разрешены даже при помощи наиболее мощных оптических средств и представляются простыми дублетами. Действительно, у водорода компоненты несколько широки и размыты, а расстояния настолько малы, что соседние линии легко сливаются друг с другом. То, что может быть непосредственно измерено в качестве ширины дублета, представляет собой расстояние  $\Delta v_H$  между центрами тяжести обеих тесных групп линий. Если пользоваться теоретическими интенсивностями, то для  $H_\alpha$  получается ( $\lambda = 6562,8$ )

$$\Delta v'_H = 0,842, \Delta v_H = 0,307 \text{ см.}^{-1}$$

или в длинах волн

$$\Delta \lambda'_H = 0,132 \text{ \AA}^0$$

Экспериментально же были найдены следующие значения

	$\Delta \lambda_H$	$\Delta v_H$
Майкельсон . . .	0,140 $\text{\AA}^0$	0,33 см. $^{-1}$
Фабри и Бюссон.	0,132	0,307
Мейсснер . . .	0,124	0,289

### Совпадение с теоретической величиной—блестящее.

Благоприятнее для проверки теории складываются обстоятельства у серий ионизированного гелия ( $\chi = 2$ ). Во первых, потому, что линии гелия резче; во-вторых, вследствие присутствия  $\chi$  в поправочном члене формулы (33), структура линий гелия по сравнению с соответствующими линиями водорода в шестнадцать раз раздольнее. Соответствующие измерения, со всей достоверностью в настоящее время точностью были произведены Пашеном (в 1916 г.). Рис. 10 дает теоретическую картину и экспериментальные результаты при двух различных способах возбуждения для основной линии серии Фаулерса ( $\lambda = 4686$ )

$$v = 4N \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)$$

Если мы рассмотрим результаты, изображенные на рисунке, то увидим, что они соответствуют теоретическим ожиданиям во всех деталях. Непредусмотренные компоненты—отсутствуют; не хватает только при постоянном токе линий III a, b противоречащих неравенствам (34) и линии Id—при искровом разряде; линии II c не была измерена, так как на фотографической пластинке нельзя установить слабую линию между двумя яркими. Отдельные пары линий, находящиеся в тесном соседстве—сливаются между собой. Совпадение теории и опыта, которое иллюстрируется этим рисунком, представляет собою поистине блестящую главу, величайший триумф теории квантов.

Столь же хорошее совпадение наблюдается и для второй линии серии Пикеринга, однако мы на этом случае не остановимся, а перейдем к тонкой структуре третьей линии (рис. 11). Соответственно трем возможным орбитам компоненты распадаются здесь, как и на рис. 10, на три группы I, II и III. Но в то время, как в первом случае группы I и II налагаются друг на друга, здесь они совершенно разделены и настолько узки, что каждая из них представляется одной широкой линией. Компоненты  $f$ , повидимому, слишком слабы и недоступны для наблюдения.

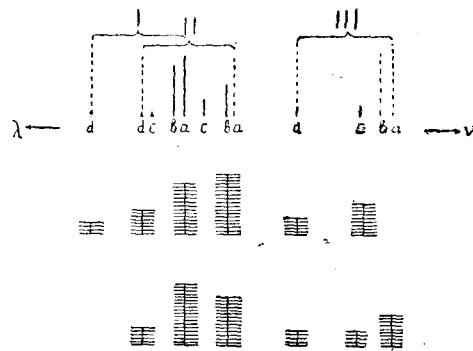


Рис. 10.

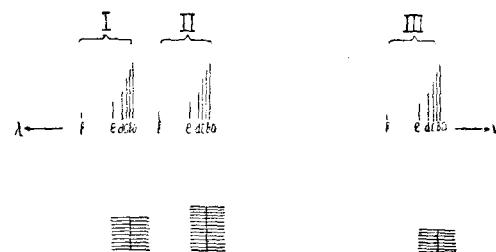


Рис. 11.

Из измерения всех этих тонких структур получается следующее лучшее экспериментальное значение разности  $\Delta v_H$

$$\Delta v_H = 0,3645 \pm 0,0045.$$

Таким образом, спектроскопия дает нам три величины, которые по теории, построены из универсальных констант  $e$ ,  $\mu$ ,  $h$ , а именно: число Ридберга (§ 8), изменение числа Ридберга от элемента к элементу, вследствие собственного движения ядра (§ 10) и разность колебаний водородного дублета  $\Delta v_H$ . Из трех уравнений можно численно определить три неизвестные  $e$ ,  $\mu$ ,  $h$ . Этот способ при современной точности спектроскопических измерений уже теперь дает результаты, одинаковые со всеми другими методами.

#### § 14. Спектры рентгеновских лучей.

Открытие *Лауз*, *Фридриха* и *Книпинга* дало возможность применить спектральный анализ в области рентгеновских лучей. Мы обязаны Мозелею первыми подробными исследованиями длин волн этих лучей для ряда элементов. Измеренные числа колебаний можно расположить в несколько серий, которые называются, в порядке убывающих чисел колебаний (жесткости) соответственно:  $K$ —серия  $L$ —серия и т. д. (линии  $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$  и т. д.). Рис. 12 дает снимки Мозелея линий  $K_{\alpha}$  и  $K_{\beta}$  для ряда элементов. Последний член этого ряда относится к латуни (Brass). То обстоятельство, что здесь две линии цинка просто присоединяются к двум линиям  $Cu$  предшествующего снимка, указывает, что рентгеновские спектры являются чисто аддитивным свойством атома.

Аналогичные линии на этом рисунке расположены по параболе. Мозелею удалось изобразить числа колебаний  $K_{\alpha}$  — линий формулой

$$v_H = N \left( \kappa - 1 \right)^2 \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right],$$

а  $L_{\alpha}$  линий

$$v_L = N \left( \kappa - 7,4 \right)^2 \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right],$$

где  $\kappa$  обозначает число зарядов ядра соответствующего элемента.

Из этого результата вытекают два следствия: во-первых, подтверждается изложенное в § 6 представление, что заряд ядра при переходе от одного элемента к другому (в периодической системе) увеличивается на единицу. Во-вторых, рентгеновские линии  $K_{\alpha}$  и  $L_{\alpha}$  оказываются сходными с водородными, с тем небольшим изменением, что действующим оказывается не весь заряд  $\kappa$ , как в серии Бальмера (7) или (17), а только часть его.

При более точном исследовании оказывается, что эти линии являются не простыми, но обладают тонкой структурой. Теоретически, при полном подобии водороду можно было бы ожидать у линии  $L_\alpha$  совершенно такую же структуру, как и у линии  $H_\alpha$  (рис. 9), с тою только разницей, что все расстояния в первом случае должны были бы быть в  $(\kappa - 7,4)^4$  раз больше, нежели во втором. В действительности получается лишь простой дублет, разность колебаний которого находится в теоретически правильном соотношении с разностью колебаний для водорода.

$$\Delta v = (\kappa - 7,4)^4 \Delta v_H$$

Таким образом, сходство с водородом, очевидно, вследствие сложности условий испускания — ограниченное. Что касается  $K_\alpha$ , то ее структура вполне отвечает требованиям теории. Здесь имеется одна возможная конечная орбита ( $n + n' = 1$  или  $n = 1$   $n' = 0$ ), начальных же две. Поэтому, искомая структура — простой дублет, расширенный по сравнению с  $\Delta v_H$  в  $(\kappa - 1)^4$  раз.

Измерения, произведенные Зигбаном и его сотрудниками для всех элементов, поскольку это было технически возможно, подтвердили требования теории. Для иллюстрации мы даем следующий чертеж, (рис. 13) который заключает в себе весь экспериментальный материал для  $K$ -серии от натрия ( $\kappa = 1$ ) до неодима ( $\kappa = 60$ ). По оси ординат отложены  $v \cdot 10^{-4}$ , по оси абсциссе —  $\kappa$   $a_1$  и  $a_2$  суть компоненты  $K_\alpha$ ,  $\beta_1$ , и  $\beta_2$  — обозначения Зигбана для  $K_\beta$  и  $K_\gamma$ . Что касается разностей чисел колебания, то по точным измерениям, их ход совпадает с предсказаниями Зоммерфельда, и это является превосходным подтверждением теории, если принять во внимание, что  $\Delta v$ , напр. для  $\kappa = 92$  для урана в  $(84,4)^4$ , т.е. круглым числом в 150 миллионов раз больше, нежели для водорода. Немного существует теорий, которые допускают подобную экстраполяцию!

То обстоятельство, что рентгеновские спектры отчасти подобны спектру водорода — объясняется следующим образом. Если электрон вращается вблизи ядра, то остальные электроны, которые двигаются на большем расстоянии, оказывают на него весьма незначительное влияние, которым можно пренебречь. Дело сводится, таким образом, в существенных чертах, к тому случаю, когда имеется только ядро с  $\kappa$  зарядами и один единственный электрон, как это и предполагается

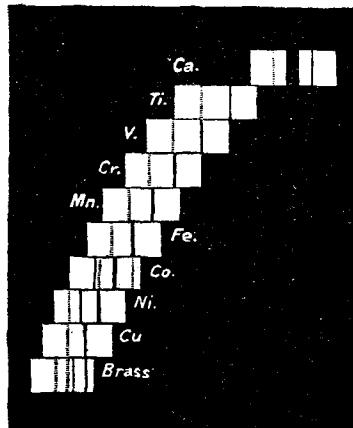


Рис. 12.

в теории, развитой в §§ 7, 8 и 13. Как же однако можно обяснить, что часть заряда ядра маскируется? Возможный ответ на этот вопрос указал уже *Бор*: представим себе, что не один электрон, а несколько,

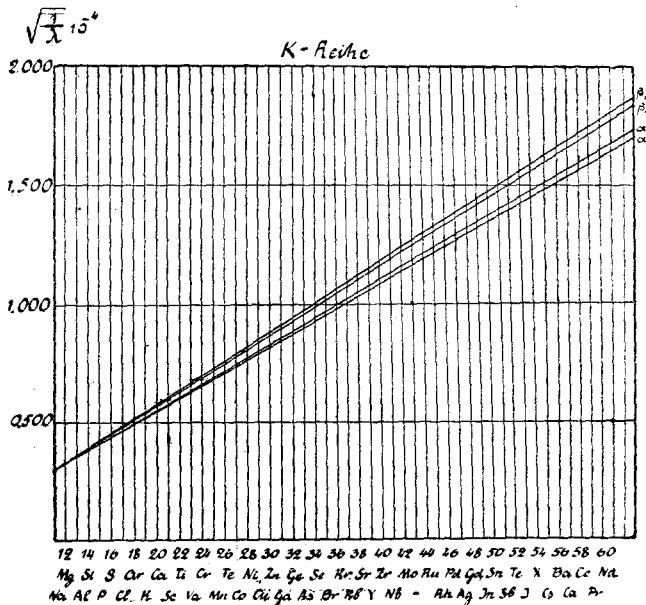


Рис. 13.

расположенных по кругу, вращаются вокруг ядра (рис. 14). Тогда, притяжению ядра должно противодействовать отталкивание между электронами, которое выявляется как раз в том, что вместо  $\kappa^2$  в формулу входит меньший множитель  $(\kappa - \sigma)^2$ . Вместе с тем

можно было бы рассматривать и такой случай, когда несколько, скажем,  $p$  электронов, находятся ближе к ядру, чем те, движение которых мы рассматриваем; тогда, комплекс из ядра с  $k$  положительными зарядами и  $p$  электронов на известных расстояниях действуют приблизительно, как ядро с  $k - p$  положительными зарядами. Согласно работе *Дебая* и еще не опубликованным исследованиям *Кроо и Зоммерфельда* дело обстоит, повидимому, так: атом построен, как это предполагал

и *Бор* из ядра с несколькими концентрическими кольцами, занятыми электронами. Самое внутреннее называют *K*-кольцом, следующее *L*-кольцом и т. д. Испускание рентгеновских лучей происходит следующим образом: под влиянием внешней причины (катодный луч) электрон пе-

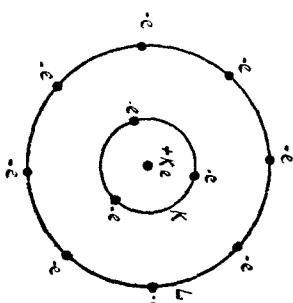


Рис. 14.

рекакивает с внутреннего кольца на внешнее, напр. с  $K$ -кольца на  $L$ -кольцо. Тогда на первом будет одним электроном меньше, чем следует, а на последнем окажется один электрон лишний. При возвращении электрона к нормальному положению на внутреннее кольцо—этот процесс сопровождается излучением энергии—испускается рентгеновская волна, согласно условию Бора (16).

Последовательное проведение этой точки зрения еще не закончено, и потому еще нельзя сказать, какое именно число электронов на кольцах соответствуетциальному состоянию. Повидимому предварительно можно говорить соответственно о трех и восьми электронах на двух внутренних кольцах; впрочем, совершенно не исключена возможность, что подтверждатся числа 2, 8, 8, 18, 18 и т. д., которые вытекают из химических соображений (периодический закон) <sup>1)</sup>.

### § 15. Теория явления Штарка.

Если внести излучающий атом в электрическое поле, то характер излучения под влиянием этого поля изменяется: спектральные линии, которые без поля представлялись простыми, во многих случаях под действием электрических сил расщепляются на несколько компонентов. Этим поразительным открытием мы обязаны *И. Штарку* (1913), почему и самое явление носит его имя. Несмотря на то, что влияние средних сил поля уже достаточно отчетливо, несмотря на то, что для наблюдения явления вовсе не требовались особенно тонкие оптические средства, случайно это открытие было сделано весьма трудно, ибо в высшей степени трудно получить в светящейся среде даже средней величины падение потенциала. Только Штарку, который систематически искал это явление, удалось побороть упомянутые трудности при помощи остроумного расположения: он возбуждал свечение в слое разреженного газа между обкладками конденсатора, помещенного внутри разрядной трубки, поступавшими туда каналовыми лучами <sup>2)</sup>.

1) J. J. Thomson. Корпускулярная теория вещества, 6 глава; N. Bohr. Phil. Mag. 26, p. 857, 1913; W. Kossel, Ann. d. Phys. 49, p. 229, 1916.

2) Когда в разрядной трубке под влиянием поля возбуждается свечение, то вместе с тем, вследствие ионизации газа, получается ток проводимости. Поэтому разность потенциалов сразу падает и подвергнуть светящейся молекулы влиянию больших сил поля становится невозможным. С другой стороны, если при большом разрежении, когда длина свободного пути измеряется сантиметрами, расположить электроды весьма близко друг от друга (на расстояния нескольких миллиметров), то на пути между ними ионизации толчком не происходит, но вместе с тем не происходит и свечения. Все остроумие метода Штарка заключается в том, что оно в это узкое пространство, на протяжении которого можно было создать большое падение потенциала ввел светящиеся молекулы извне. Такими светящимися молекулами и служили ему частицы каналовых лучей.—Трубка Штарка имела три электрода: анод, катод с от-

Таким образом он мог исследовать целый ряд веществ.

Для нашей цели, однако, особенно важны те весьма тщательные измерения, которые он произвел над „тонким электрическим разложением“ первых четырех линий Бальмеровой серии водорода ( $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$ ).

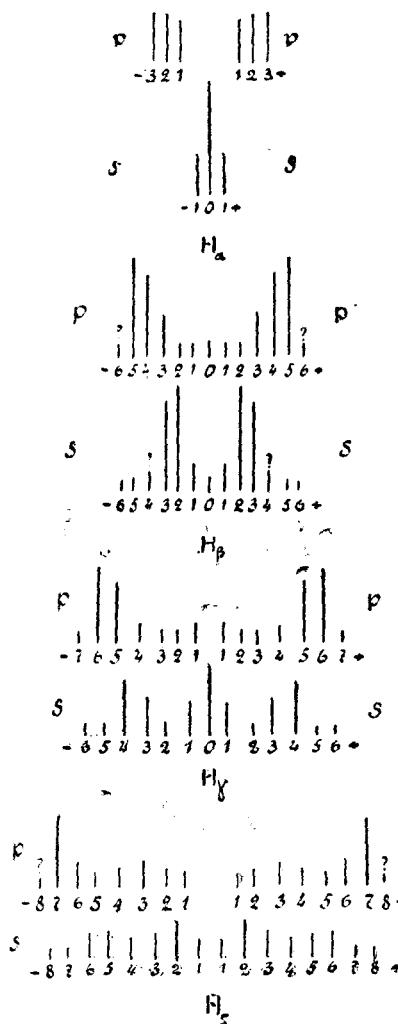


Рис. 15.

родного атома в однородном электрическом поле. Это движение—ifи пренебречь поправочным членом, введенным на основании теории относительности—условно-периодическое. При этом, для того, чтобы

верстиями и третий электрод расположенный весьма близко к катоду. Между последними двумя электродами возбуждалось сильное поле и в это-то поле попадали частицы каналовых лучей.

оказалось, что компоненты, на которые разлагаются эти линии, расположены симметрично относительно нормального положения, и что расположение растет пропорционально электрической силе. Производились наблюдения и перпендикулярно, к направлению поля, причем при этом расположены компоненты оказались линейно поляризованными. В таблицах I—IV результаты Штарка сопоставлены в рубрике „измерено“. Буквой  $P$  обозначается компонент, электрический вектор которого направлен параллельно полю, буквой  $S$ —компонент с электрическим вектором, перпендикулярным к полю.  $\Delta\lambda$  есть расстояние между соответствующими компонентами (а так же и симметричными с ними) в единицах Авгстрэма; в рубрике „нат.“ помещена относительная интенсивность, при тем эти интенсивности сравним между собой лишь в пределах одного столбца. Электрическая сила, к которой относятся данные значения  $\Delta\lambda$ , известна несколько не точно и оценивается Штарком в 104.000 volt/cm. На рис. 15 графически изображена картина расщепления.

Теория явления Штарка сводится к рассмотрению движения водородного атома в однородном электрическом поле. Это движение—ifи пренебречь поправочным членом, введенным на основании теории относительности—условно-периодическое. При этом, для того, чтобы

Переводчик.

привести выражения импульсов к виду (28), приходится употреблять параболические координаты <sup>1)</sup>). Координатные поверхности получаются путем вращения чертежа около прямых  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$ , как осей. Получается, таким образом, два семейства конфокальных параболоидов вращения ( $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ ) и меридианальные плоскости  $\phi = \text{const}$  (где  $\phi$  обозначает угол между вращающейся плоскостью и некоторым постоянным ее положением). Точка пространства определяется, поэтому, координатами,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ . ¶

Не будем принимать во внимание собственное движение ядра; будем считать его неподвижным центром. Тогда систему координат надо ориентировать так, чтобы ядро было началом, а прямая  $\xi = 0$  совпадала с направлением поля. Решение задачи показывает, что движение электрона заключено в кольцевом пространстве, которое получается путем вращения криволинейного четырехугольника  $ABCD$  рис. 16 (вокруг оси  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ). При этом нужно себе представить, что электрон движется по кривой, изображенной внутри четырехугольника, и одновременно весь чертеж вращается (с переменной угловой скоростью) вокруг упомянутой оси.

Положение границ либрации (ср. § 12)  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ ,  $\eta = \eta_1$ ,  $\eta = \eta_2$  разумеется, зависит от начального положения и начальной скорости электрона, причем для каждого частного случая движение будет иное, так что соответствующим выбором начальных условий можно сообщить величинам  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , любое значение. В интересах § 17

рассмотрим три предельных случая. Во-первых, положим, что  $\eta_1$  совпадает с  $\eta_2$ , а  $\xi_1$  — с  $\xi_2$ ; тогда четырехугольник стягивается в одну точку и электрон движется по *круговой орбите*, расположенной перпендикулярно к направлению поля. Далее, мы можем положить  $\xi_1 = 0$ , и  $\eta_1 = 0$ , тогда путь электрона заполняет область, получающуюся при вращении треугольника  $B^1CD^1$ . Пусть теперь и  $\xi_2$  все уменьшается и наконец становится равным нулю, тогда движение электрона будет ограничено прямолинейным отрезком: он будет колебаться по полупрямой  $\xi = 0$  между точками  $O$  и  $B^1$ , вследствие чего эту орбиту мы будем называть *маятникоподобной*. Третий частный случай мы получим, если положим, что не  $\xi_2$ , а  $\eta_2$  уменьшается до нуля; здесь получается совершенно аналогичная „*маятникоподобная*“ орбита по полупрямой  $\eta = 0$  между

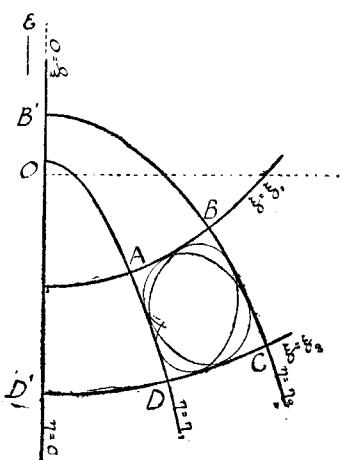


Рис. 16.

<sup>1)</sup> P. S. Epstein, Ann. Physik, 50, p. 489, 1916.

точками  $O$  и  $D^1$ . Когда орбита (без электрического поля)—кеplerов эллипс (§ 11)—случай прямолинейного пути мы отбрасываем, как невероятный, и это предсказание оправдывается экспериментальным изучением тонкой структуры. Маятникоподобные пути представляются *a priori* так же невероятными; замечательно, однако, что соответствующие им компоненты появляются при явлении Штарка, хотя и с весьма слабой интенсивностью.

В общем случае, мы должны написать квантовые условия (29) и (29') в следующей форме:

$$2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} p_{\xi}(\xi) d\xi = n_1 h; \quad 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} p_{\eta}(\eta) d\eta = n_2 h; \quad \int_0^{2\pi} p_{\varphi} d\varphi = n_3 h.$$

Из этих трех соотношений получается с достаточно хорошим приближением следующее выражение для энергии.

$$A = -\frac{N \kappa^2 \hbar c}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} + \frac{3 \hbar^2 E}{8 \pi^2 \kappa \mu e} (n_1 + n_2 + n_3) (n_1 - n_2).$$

Таким образом, электрическое поле, подобно зависимости массы от скорости, оказывает такое влияние, вследствие которого увеличивается число ступеней энергии, а потому уже существовавшие в спектральной линии, но налагавшиеся друг на друга степени свободы (возможности возникновения) разделяются и становятся видимыми.

Из условия Бора (16) мы получаем следующее значение для изменения числа колебаний по сравнению с нормальным

$$\Delta v = -\frac{3h}{8\pi^2 H \mu e c} EZ$$

$$Z = (m_1 + m_2 + m_3) (m_1 - m_2) - (n_1 + n_2 + n_3) (n_1 - n_2) \quad (37).$$

Как и раньше, числа  $m$  и  $n$  относятся к начальной и конечной орбите, при чем для компонент одной и той же линии

$$m_1 + m_2 + m_3 = \text{const} \quad \text{и} \quad n_1 + n_2 + n_3 = \text{const}.$$

Из самой структуры выражения (37) тотчас вытекают два важных свойства явления Штарка в водородных линиях: во-первых, расщепление пропорционально силе поля  $E$ , во вторых оно симметрично. В самом деле, обменяя числовыми значениями  $m_1$  и  $m_2$  и одновременно  $n_1$  и  $n_2$ ,  $Z$  переменить свой знак; значит для всякого положительного  $\Delta v$  существует равное ему по величине отрицательное. Мы уже упомянули, что Штарк действительно установил именно эти свойства у водородных линий.

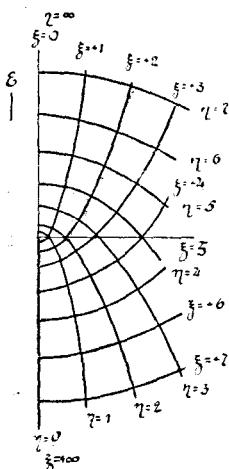


Рис. 17.

Числовое значение коэффициента в форм. (37) для водорода ( $H = 1$ ) следующее:  $6,43 \cdot 10^{-5}$ , если  $E$  выражено в  $\frac{\text{volt}}{\text{см}}$ . Поэтому для смещения компонента в длинах волн можно написать

$$\Delta\lambda = \lambda^2 \cdot \Delta\nu = 6,43 \cdot 10^{-5} \lambda^2 E Z \text{ см. . . . . (38).}$$

Выбор возможных значений  $Z$  ограничивается неравенствами Зоммерфельда, которые в данном случае гласят

$$m_1 \geq n_1; m_2 \geq n_2; m_3 \geq n_3 . . . . . (39).$$

Вычисленные значения  $\Delta\lambda$  сопоставлены в следующих таблицах. При этом напряжение поля было принято для  $H_\alpha$  106.000, для  $H_\gamma$  — 109.000 и для  $H_\delta$  — 110.000  $\frac{\text{volt}}{\text{см}}$ .

Таблица I ( $H_\alpha$  — линия).

$$m_1 + m_2 + m_3 = 3 \quad \lambda = 6562,8 \text{ \AA}$$

Z	Вычислено.				Измерено.			
	$m_3 - n_3 = 2l$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$m_3 - n_3 = 2l + 1$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$p$ -Комп.	$s$ -Комп.
5	14,7	*					—	
4	11,7	1					11,5	1,2
3	8,8	1					8,8	1,1
2	5,9	1	5,9	*			6,2	1
1	2,9	*	2,9	(1)			—	
0	—		0	(1)			2,6	1

Таблица II ( $H_\beta$  — линия).

$$m_1 + m_2 + m_3 = 4 \quad \lambda = 4861,3 \text{ \AA}$$

Z	Вычислено.				Измерено.			
	$m_3 - n_3 = 2l$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$m_3 - n_3 = 2l + 1$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$p$ -Комп.	$s$ -Комп.
12	19,4	*	[19,4]	3	19,4	1	19,3	1
10	16,1	2	[16,1]	3	16,3	11,5	16,4	1,1
8	12,9	2	12,9	*	13,2	9,1	13,2	1,3
6	9,7	2	9,7	1	10,0	4,8	9,7	9,7
4	6,5	*	6,5	1	6,7	1	6,6	12,6
2	3,2	(2)	3,2	1	3,3	1,2	3,4	3,3
0	0	(2)	0	1	0	1,4	0	1,4

Таблица III ( $H\gamma$  — линия). $m_1 + m_2 + m_3 = 5$  $\lambda = 4340.5 \text{ \AA}$ 

Z	Вычисление.				Измерено.			
	$m_3 - n_3 = 2l$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$m_3 - n_3 = 2l + 1$	$\Delta\lambda$	$Q_m$	$p$ -Комп.	$s$ -Комп.
							$\Delta\lambda$	Инт.
21	28,0	*	—	—	—	29,4	1 сомн.	—
20	—	—	[26,6]	—	4	—	26,3	1
18	23,9	3	—	—	—	23,9	10,8	—
17	—	—	[22,7]	—	4	—	22,8	1,1
16	—	—	—	21,3	*	—	—	—
15	20,0	3	—	—	—	18,9	7,2	—
13	—	—	17,3	—	2	—	17,3	6,1
12	16,0	3	—	—	—	15,9	2,0	—
11	14,4	*	—	—	—	—	—	—
10	—	—	13,3	—	2	—	13,3	4,3
9	12,0	*	—	—	—	—	—	—
8	10,6	2	—	—	—	10,6	1	—
7	—	—	9,3	—	2	—	9,7	1,2
6	—	—	8,0	—	*	—	—	—
5	6,7	2	—	—	—	6,6	1,5	—
4	—	—	5,3	—	*	—	—	—
3	—	—	4,0	(3)	—	—	3,9	3,6
2	2,7	2	—	—	—	2,6	1,6	—
1	1,3	*	—	—	—	—	—	—
0	—	—	0	(3)	—	—	0	7,2

Из этих таблиц видно, что совпадение между вычислениями и теорией блестяще. Яркие компоненты расположены как раз на вычислительных местах и только для слабых линий, положение которых очень трудно определить отклонения несколько больше. Звездочкой отмечены те компоненты, которые своим происхождением обязаны маятникообразным орбитам. Мы уже указали, что эти орбиты весьма мало вероятны; из таблиц видно, что они дают сплошь наиболее сла-

бые компоненты, а у линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  соответствующие им компоненты вообще не могли быть сняты. Если отвлечься от этих линий, то существует еще только одна—предсказанная теоретически и однако не имеющаяся на фотографиях Штарка ( $H_\delta, Z=0$ ). За то есть три линии, которые противоречат неравенствам (39). Интересно, что первые два неравенства выполняются строго, между тем, как третья, которое, согласно (36), относится к азимуту  $\phi$ , повидимому, справедливо лишь в грубых чертах. Подобное же обоснованное положение азимутального квантового числа установлено и Зоммерфельдом для случая тонкой структуры при искровом возбуждении свечения.}

Что касается поляризации, то подтверждается следующее в высшей степени замечательное эмпирическое правило: четная разность азимутальных квантовых чисел  $m_3-n_3$  ведет к параллельной ( $p$ ) поляризации, нечетная — к перпендикулярной.

Это правило справедливо во всех случаях без исключения, хотя у нас и нет решительно никаких путей к его пониманию. Кажется даже, что вообще невозможно обяснить состояние поляризации, исходя из ориентировки начальной и конечной орбиты относительно электрического поля; ибо при переходе электрона между двумя уже упомянутыми круговыми орбитами, которые ведь всегда расположены перпендикулярно к полю, согласно этому правилу, линии  $H_\alpha$  и  $H_\gamma$  — дают  $S$ —компоненты, а линии  $H_\beta$  и  $H_\delta$  —  $p$ —компоненты. Что касается возникновения большой интенсивности, то автор считает необходимым (но недостаточным) условием для этого возможно большую величину одной из разностей  $m_1-n_1, m_2-n_2, m_3-n_3$ . Поэтому наибольшая из этих трех разностей дана в таблицах в рубрике  $Qm$ .

Как бы то ни было, приведенные результаты теории явления Штарка, рядом с Зоммерфельдовой теорией тонкой структуры, дают одно из наиболее решительных доказательств в пользу учения о квантах и того применения этого учения к атомистике, которое сделано Бором.

#### IV О т д е л.

##### Структура фазового пространства.

###### § 16. Значение гипотезы Планка для статистики.

В предшествующем изложении мы исходили из той трактовки квантовых условий, которая была дана Зоммерфельдом и подробно развита Шваршильдом и автором (§ 11 и 12). Рассмотрим теперь форму этих условий, данную самим Планком для случая нескольких степеней свободы. С этой целью мы прежде всего дополним изложение гипо-

тезы „квантов действия“ (см. § 3) некоторыми соображениями, касательно ее статистического значения.

Причиной, заставившей Планка отказаться от представления о квантах энергии (§ 2), было противоречие между электродинамической и статистической частью его первой теории черного излучения. В то время, как взаимодействие между резонаторами и поле излучения должны были подчиняться законам электродинамики, и вследствие этого резонатора должен был быть способен обладать любым запасом энергии, при рассмотрении вопроса о распределении энергии между отдельными резонаторами делалось допущение, что возможны лишь дискретные ступени энергии, а именно—кратные  $\hbar\nu$ .

Мы можем это изобразить графически подобно тому, как это уже делалось на рис. 1. Мы знаем, что положением электрона  $x$  (или  $q$ ) и его импульсом  $p$  состояние линейного резонатора вполне определяется. Поэтому, всякому мгновенному состоянию системы, которое по *Гиббсу* называют *фазой* системы, соответствует точка  $C(p, q)$ —диаграммы или, как говорят, „*фазовой плоскости*“. С течением времени точка, изображающая состояние резонатора, пробегает некоторую кривую, „*фазовую кривую*“, которая в том случае, когда энергия извне не подводится, будет эллипсом (§ 3). Если имеется большое число резонаторов, то каждому из них в любой момент времени соответствует точка диаграммы и распределение этих „*фазовых*“ точек дает распределение энергии. Это станет для нас совершенно ясным, если мы вспомним, что энергия в некоторой точке определяется постоянными проходящего через нее эллипса из семейства концентрических эллипсов (ср. §§ 2 и 3

$$A = \frac{b^2}{2\mu}.$$

Цель статистического метода состоит в определении плотности, с которой распределены точки на диаграмме („*фазовая плотность*“)—для *наивероятнейшего* состояния системы из всех резонаторов,—состоиния, при котором резонаторы находятся в равновесии между собой и с излучением. Согласно первой электродинамической части исследования Планка энергия может принимать любые значения а потому фазовая плотность должна быть сплошной, т. е. фазовые точки могут лежать на всяком расстоянии от начала. Далее, соображения, опирающиеся на теорию вероятностей—с одной стороны и на механику и электродинамику—с другой, говорят нам даже больше. А именно, из этих соображений следует с несомненностью, что фазовая плотность должна быть непрерывной функцией места, функцией, которая, принимая на эллиптических кривых постоянные значения, непрерывно изменяется при переходе от начала координат ко все более удаленным точкам плоскости. Подробно ход этой функции исследуется во второй, статистической, части работы Планка. Но здесь он вынужден был при-

нять, что точки в фазовой плоскости распределены разрывным образом и могут располагаться лишь на дискретных кривых, удовлетворяющих соотношению  $A = h\nu$  (изобр. на рис. 1). Ибо только таким способом можно было притти к правильному закону излучения.

Чтобы преодолеть эти трудности и в тоже время свести к минимуму необходимые изменения в электродинамике, Планк изменил свою гипотезу, допустивши что хотя *поглощение* линейного резонатора проходит по известным нам законам, резонатор, однако, не может излучать, т.е. он не обладает „затуханием“.

Что касается излучения, то нам гораздо легче представить себе, что именно оно идет прерывным образом. Допускается поэтому, что излучение *может* (но не *должно*) происходить в моменты, когда энергию резонатора составляет целое кратное  $h\nu$ . В этот момент резонатор отдает сразу всю свою энергию. Так как здесь заранее приходится отказываться от обычных законов электродинамики, то заключение о непрерывном изменении фазовой плотности уже не является обязательным. Однако, механизм явления поглощения заставляет нас все же считать эту плотность сплошной. Поэтому вместо допущения о прерывном распределении вероятности, Планк вводит новое—что вероятность распределена хотя и сплошным, но не непрерывным образом внутри кольцеобразных областей, площадь которых равна  $\Delta g = h$ , и которые ограничены избранными кривыми рис. 1, вероятность—или, что тоже самое, фазовая плотность—должна быть постоянной и только на пограничной кривой, при переходе в соседнюю область она лестницеобразно убывает (или возрастает). При таких допущениях для черного излучения получается тоже спектральное распределение, как и при прежних.

Количество действия  $h$  приобретает вместе с тем смысл числовой величины элементарной области вероятности, поскольку статистика не делает различия между различными точками этой области  $\Delta g$ .

„Статистические“ фазовые кривые согласно новому воззрению, уже не представляют единственно возможных движений, но являются избранными лишь постольку, поскольку ими ограничиваются элементарные области. Интересное следствие из этой гипотезы состоит в том, что у резонаторов нельзя извлечь всей их энергии, приводя в равновесие с излучением весьма малой интенсивности (т.е. очень низкой температуры). Ибо, когда все фазовые точки, каждая из которых изображает резонатор, находятся в самой внутренней элементарной области, то дальнейшее уменьшение энергии уже невозможно, так как, согласно предыдущему, излучение происходит лишь при значениях энергии  $A = nh\nu$  (т.е. для статических кривых). Поэтому система и при абсолютном нуле температуры обладает так называемой *нулевой*

энергией, средняя величина которой составляет  $\frac{\hbar\nu}{2}$  для резонатора.

Если от линейного резонатора обратимся к рассмотрению других систем, то повсюду увидим аналогичную картину: статические кривые всегда можно рассматривать как единственно возможные, либо—принимать существование всех механически допустимых орбит и считать статические лишь избранными с точки зрения вероятностей. Последнее воззрение, защитником которого является Планк, ни в одном случае не ведет к противоречию, с опытом, напротив—именно от него можно ожидать выяснения некоторых, пока еще темных, проблем (удельная теплота двухатомных газов). Каждующаяся трудность, которая имелась в одном частном случае (теория так наз. „ротационного спектра“<sup>1)</sup>) Планк недавно изумительным образом преодолел. Точно также и теория Бора (§§ 7 и 8) вполне совместима с этой точкой зрения, если только несколько видоизменить условие для гипотезы: стоит только принять, что при обычных условиях излучения не происходит оно происходит только тогда, когда электрон испытывает возмущение и пересекает на новую орбиту; при этом излучаемая частота, согласно условию (16) определяется энергиями границ старой и новой элементарной области.

### § 17. Структура фазового пространства.

В свете соображений, изложенных в предыдущем параграфе те точки зрения, которые лежат в основании трактовок (5) и (5a), а также (5b) квантовых условий, можно строго формулировать следующим образом. В первом случае, двойной интеграл распространяется на все фазовые точки, которые соответствуют различным запасам энергии линейного резонатора, т.-е. статические кривые выводятся из всех состояний, которые может принимать резонатор при всевозможных условиях. Во втором случае, интеграция распространяется лишь на индивидуальные движения резонатора, совершающиеся—в отсутствие внешних возмущений. Соответственно этому, при рассмотрении систем многих измерений можно примкнуть либо к той, либо к другой точке зрения. Зоммерфельд пошел вторым путем, между тем, как Планком был предложен первый.

В общем случае— $f$  степеней свободы с переменными  $q_i$  и импульсами  $p_i$ ,—всякому мгновенному состоянию или всякой фазе системы

<sup>1)</sup> Так называются инфракрасные спектры поглощения газов, наблюденные Н. Бьеррумом, Рубенсом и другими. При их обяснении Бьеррум допускал, что заряженные атомы в молекуле совершают колебания, а сама молекула, кроме того вращается. Отсюда и происхождение самого названия.

соответствует своя система значений  $2f$  величин  $p_i, q_i$ . Совокупность всех фаз образует уже не плоскость, но многообразие  $2f$ —измерений, идеальное  $2f$ —мерное „фазовое пространство“, если  $p_i, q_i$  трактовать, как прямоугольные координанты. И здесь также Планк задается вопросом об элементарной области  $\Delta g$  вероятности или о „структуре фазового пространства“. Так как всякое отдельное произведение  $p_i q_i$  уже обладает размерностью действия, то следует положить, что об'ем элементарной области ( $2f$ —измерения).

$$\Delta g = h^f.$$

Как найти теперь границы элементарной области. Планк делает это таким образом, что он изыскивает  $f$  вырождений общего движения, которые совершаются в одном измерении, и которые, поэтому, можно трактовать как в § 3. Из решений этих отдельных случаев строится затем общее решение.

Возможно ли в каждом случае найти вырожденные движения с требуемыми качествами—еще не исследовано. Однако это требование во всяком случае удовлетворяется для одной группы систем, для систем условно-периодических (§ 12); для этого класса движений можно полностью провести решение Планка. Например, для движений, изученных в § 11 ( $f=2$ ) следовало бы рассматривать круговую орбиту ( $r=\text{const}$ ) и прямолинейную, как предельный случай эллипса с отношением осей  $o$  ( $\phi=\text{const}$ ); для явления Штарка ( $f=3$ )—три частных случая, рассмотренных на стр. 49 (круг и обе маятникообразные орбиты). Можно показать, вообще, что для условно-периодической системы выражение об'ема элементарной области распадается, вообще говоря, на  $f$  факторов.

$$\Delta g = \Delta g_1 \cdot \Delta g_2 \cdot \dots \cdot \Delta g_f,$$

из которых каждый представляет собой площадь участка соответствующей координатной плоскости ( $p_i, q_i$ ), по величине равную  $h$ ; далее, что статические движения системы совпадают с движениями, определяющимися условиями (29) и (29') § 12<sup>1</sup>). Поэтому в теории Планка уже содержатся *implicite* квантовые условия (29) для условно-периодических систем, а также те заключения, которые выведены из этих условий для частных случаев в §§ 13 и 15.

В рамках этого реферата мы не можем останавливаться на интересной трактовке этих условий, данной Эйнштейном<sup>2</sup>). Однако мы вкратце изложим здесь ту чрезвычайно важную точку зрения, которая связана с представлением, что статические орбиты суть единственны возможные, и которая выдвинута Эренфестом (1916). Будем рассматривать изменение, которое испытывает система, когда один из внешних

<sup>1</sup>) Согласно еще не опубликованным работам автора.

<sup>2</sup>) A. Einstein. Verh. d. Deutsh. phys. Ges. 19, S. 82, 1917.

параметров ее (но *не* переменные  $p$ ), подвергается медленному воздействию, например, когда при явлении Штарка внешнее поле постепенно усиливается. Подобный процесс называют „адиабатическим изменением состояния“, ибо при нем энергия системы изменяется при посредстве внешнего параметра, а не путем прямого увеличения живой силы; совершенно аналогично тому, как при адиабатическом сжатии газа изменение запаса энергии зависит от затраченной работы, а не от прямого теплового обмена. В начальном состоянии система совершает некоторое статическое движение. Если исходить из подобного движения и подвергнуть систему бесконечно медленному адиабатическому процессу, то с одной стороны можно, совершенно игнорируя квантовые условия, задаться вопросом о той форме движения, которая чисто механически получается из первоначального движения. Ибо начальное движение испытывает при этом процессе непрерывное видоизменение, так что в каждый момент ему соответствует совершенно однозначно новая форма. С другой стороны можно было бы для всякого значения параметра написать квантовые условия и определять соответствующие им статические орбиты. Возникает теперь вопрос; что же механика и теория квантов постоянно друг другу противоречат или они согласно ведут к одним и тем же движениям. Сущность гипотезы Эренфеста („Adiabatenhypothese“) состоит в том, что делается последнее предположение: допустимые с точки зрения теории квантов движения путем бесконечно медленного (чисто механического) процесса переходят в другие, также допустимые с точки зрения теории квантов. Отсюда следует, что те константы движения, которые, согласно условиям (25) полагаются равными универсальной константе  $nh$ , не могут изменяться во время адиабатического изменения или, как говорят, „адиабатически инвариантны“. Проверка этой гипотезы для периодических (Эренфест) и условно-периодических (Бургерс) систем, показала, что квантовые интегралы §§ 11 и 12 действительно суть адиабатические инварианты.

Гипотеза Эренфеста уже помогла выяснению некоторых принципиально трудных вопросов; важность ее становится очевидной если вспомнить, что путем адиабатического процесса можно переходить от простых систем к более сложным. Конечно, ту же гипотезу можно трактовать и с другой точки зрения, а именно, что статические движения не являются единственно возможными, но лишь избранными с точки зрения теории вероятностей. В таком случае при ее формулировке нужно заменить слово „допустимый“ словом „избранный“.

### § 18. Заключение.

Из предыдущего изложения, в особенности из отделов II и III читатель, наверное, вынес впечатление, что теория Планка в новой

области своего применения, в атомистике и спектроскопии уже дала ряд результатов, которые без преувеличения, можно считать большими успехами, и которые оправдывают попытку сделать этот предмет доступным широкому кругу читателей. Однако, всякому, кто работает в этой области, хорошо известно, что мы далеки еще здесь от законченной ясности: еще много принципиальных и вычислительных трудностей надо преодолеть, еще многие провизорные представления должны быть видоизменены или заменены новыми.

Прежде всего можно поставить вопрос, каким образом возможно у таких общих механических систем, как условно периодические, изыскать движения, допустимые по теории квантов. Отдельные попытки ответить на этот вопрос уже имеются: мы уже упомянули, что метод Планка применим и в области условно-периодических движений, хотя и не легко было бы дать однозначные указания для его применения. С другой стороны *Бургерс*<sup>1)</sup> указал на метод, введенный в небесной механике *Делоне* (1860) и состоящий в том, что к данной системе подходят сколь угодно близко через последовательный ряд определенным способом выбранных условно-периодических систем. Автор независимо от Делоне при исследовании одного частного случая обратил внимание на возможность такого приближения. Однако, вычисления, произведенные им по этому методу для спектра нейтрального гелия, (задача о трех телах) к сожалению, повидимому, не позволяют возлагать больших надежд на этот метод. Наконец, изложенную в предыдущем § гипотезу Эренфеста, вероятно, можно было бы использовать в качестве эвристического метода.

Однако, все это чисто практические вопросы, решение которых нам быть может принесет уже самое ближайшее будущее. Более серьезными представляются трудности с принципиальной стороной допущений Бора (§§ 7 и 8). Мы уже несколько раз упоминали, что теория квантов находится в известном противоречии с электродинамикой и допускает для последней внутри атома лишь ограниченное применение. Как же нужно видоизменить электродинамику, чтобы устраниТЬ это противоречие. Что нам действительно не хватает синтеза обоих теорий, видно из следующего обстоятельства: явление Штарка находит себе полное обяснение в теории квантов, между тем, как чисто электродинамическому обяснению оно не поддается; противоположную картину мы имеем, повидимому, родственном явлении—в явлении Зеемана (расщепление спектральных линий в магнитном поле): здесь пока с электродинамикой можно уйти дальше, нежели с теорией квантов (хотя и нельзя еще получить полного обяснения). Почему при движении по статической орбите не происходит излучения, и что

<sup>1)</sup> J. M. Burgers. Amsterdam Procelings. S. 170, 1917.

совершается, когда электрон перескакивает с одной статической орбиты на другую? Немногие факты, которые нам известны относительно последнего процесса, суть условие Бора для частоты (§ 8) и правила поляризации при явлении Штарка (§ 15). Но оба эти закона, в своей теперешней формулировке носят до некоторой степени теологический характер, для натуралиста совершенно неприемлемый, так что многие ученые по справедливости возмущаются этими „Bauern-Regeln“. Действительно, было бы в высшей степени желательно пересмотреть процесс излучения во всех деталях и найти обяснение упомянутым законам. Если это требование для данного времени слишком высоко, тем не менее, быть может, и теперь уже можно было бы попытаться с большей надеждой на успех, вводя степени свободы эфира, привести условие для частоты к той же форме (25), какую имеют квантовые условия для материи <sup>1)</sup>.

Таким образом, хотя в теории квантов надлежит еще заполнить много пробелов, быть может и таких, которые встречаются в самом начале, мы можем быть довольно темпом возрастания наших знаний об атоме, которым мы обязаны этой теории. Обозревая совершенно обективно ход развития теории квантов за последние годы и успехи, ею достигнутые, надо признать, что дело Макса Планка подвигнуло нас на шаг по пути к конечной цели точного естествознания, к познанию структуры материи и эфира, на шаг, который, как казалось, всего несколько лет тому назад, при самых смелых ожиданиях, должен повести нас в обширные и неопределенные дали.

Перевел. Э. В. Шпольский.

---

<sup>1)</sup> Как показал А. Рубинович (Phys. Zs; 18, № 96, 1917) это можно сделать для теории черного излучения; последним замечанием автор также обязал г. Рубинович.