

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Электрон-ионные столкновения в сильных электромагнитных полях

А.А. Балакин, Г.М. Фрайман

Представлено современное состояние проблемы электрон-ионных столкновений в сильных электромагнитных полях. Интеграл столкновений выражен через интеграл по траекториям тестовых частиц для произвольного переменного поля. Проведён анализ уравнения для тестовых частиц. Показано, что все энергетические процессы (джоулев нагрев, генерация излучения и быстрых электронов) не ослабевают с возрастанием амплитуды электромагнитного поля. В рамках классического описания получены выражения для частоты столкновений, распределения быстрых электронов по импульсам и интеграла электрон-ионных столкновений.

Ключевые слова: электрон-ионные столкновения в плазме, сильные электромагнитные поля, интеграл столкновений

PACS numbers: 52.20.Dq, 52.20.Fs, 52.25.Dg, 52.50.Sw

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.02.038075>

Содержание

1. Введение (1289).
 2. Интеграл столкновений в переменных электромагнитных полях (1291).
 - 2.1. Кинетическое уравнение в канонически инвариантной форме.
 - 2.2. Ядро интеграла столкновений. 2.3. Метод возмущений.
 3. Уравнение движения тестовой частицы. Проблемы численного интегрирования (1296).
 4. Область высоких скоростей (1298).
 5. Область усреднённого описания (1300).
 6. Область многократных возвратов (1301).
 7. Притяжение с учётом корреляций (1305).
 - 7.1. Многопоточность. 7.2. Сингулярность в функции корреляции. 7.3. Стохастическая динамика. 7.4. Особенности поперечного рассеяния.
 8. Сечения столкновений. Излучение при столкновениях (1311).
 9. Ускорение частиц при столкновениях (1314).
 - 9.1. Дрейфовые координаты в релятивистски сильной электромагнитной волне. 9.2. Условия адиабатичности. 9.3. Изменение энергии при мгновенном ударе. 9.4. Распределение сверхбыстрых частиц.
 10. Столкновения в релятивистски сильных полях (1319).
 - 10.1. Джоулев нагрев. 10.2. Генерация быстрых частиц.
 11. Интеграл столкновений в сильных полях (1323).
 12. Область применимости (1325).
 13. Заключение (1327).
- Список литературы (1327).

А.А. Балакин, Г.М. Фрайман. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: balakin@appl.sci-nnov.ru, fraiman@appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 24 октября 2016 г.,
после доработки 20 февраля 2017 г.

1. Введение

В последние годы наблюдается значительный прогресс в генерации сверхсильных лазерных импульсов с интенсивностью в фокусе $10^{18} - 10^{21}$ Вт см⁻² и выше. При таких интенсивностях в лазерном диапазоне длин волн электроны плазмы осциллируют со скоростями, существенно превышающими их тепловые скорости, что открывает совершенно новые, не исследованные ранее, возможности взаимодействия излучения с плазмой. Одним из ключевых вопросов при этом является вопрос о важности столкновительных процессов при таких взаимодействиях.

Исследование столкновительного поглощения сверхсильных лазерных импульсов в плазме необходимо для ряда приложений. К таковым можно отнести термоядерный синтез с использованием ультракоротких интенсивных лазерных импульсов для быстрого поджига термоядерной реакции, рентгеновские лазеры, преобразование энергии лазерного излучения в когерентное излучение на гармониках основной частоты при взаимодействии сверхсильных лазерных импульсов с плазмой.

Традиционно теоретическое исследование электрон-ионных соударений в сильных электромагнитных (ЭМ) полях проводилось на основе трёх моделей: малоуглового (straight-line — в англоязычной литературе) [1–22], борновского [15, 23–30] и низкочастотного [14, 31] приближений. Приближение, используемое в работах [3–5], исторически называют малоугловым, но правильнее было бы называть его приближением прямолинейных траекторий, поскольку в нём предполагается, что дрейфовые траектории рассеивающихся частиц являются почти прямыми линиями. Дрейфовой траекторией частицы назовём траекторию, получающуюся в результате вычитания осцилляций частицы из её траектории в

лабораторной системе координат. Отметим, что в дрейфовых координатах невозмущённое кулоновским потенциалом движение электрона происходит по прямой линии, а ион осциллирует. Наоборот, в лабораторной системе координат ион покоится, а движение электрона представляет собой медленный дрейф осцилляций. В борновском приближении вычисляются аналогичные малые поправки к волковской волновой функции, которая в дрейфовых координатах представляет собой плоскую волну. В низкочастотном приближении более точно описывается процесс рассеяния на ионе, но предполагается единственность удара электрона о ион.

Во всех этих приближениях получались результаты, различающиеся только логарифмическими множителями. Основной причиной подобного совпадения, по-видимому, были общие предположения о некоррелированности моментов столкновений и невозможности электрону искривить свою дрейфовую траекторию (притянуться к иону) в процессе многократных осцилляций около иона. Особенно наглядно это продемонстрировано в работах [32, 33], где непосредственно из кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме Ландау получены также с логарифмической точностью те же результаты. Напомним [5], что вывод интеграла столкновений Ландау основывается на предположениях о равномерности распределения моментов столкновений и определении вклада дальних (почти прямолинейных, без изменения прицельного параметра) рассеяний. По-видимому, совпадение результатов трёх, на первый взгляд различных, приближений стало причиной утраты интереса к этой тематике более чем на 30 лет.

Позднее делались попытки создания численных кодов для моделирования процессов энергообмена в плазме с учётом электрон-ионных столкновений в сильных лазерных полях [34, 35]. В частности, уже результаты [34] не совпадают с традиционными. В то же время появились и экспериментальные данные, не получившие удовлетворительного объяснения в рамках традиционных представлений.

Какие же эффекты, на наш взгляд, опускаются в традиционных моделях? Рассмотрим, как обычно описывалось столкновение. В отсутствие кулоновского поля иона движение частицы представляет собой осцилляции в поле ЭМ-волны с осцилляторной скоростью $v_{osc} = eE/(m\omega_0)$ (где ω_0 и E — частота и амплитуда поля ЭМ-волны), наложенные на медленный дрейф с постоянной дрейфовой скоростью v . Обычно полагают [3, 4], что дрейф происходит по прямой линии в течение всего времени столкновения и осуществляет только "доставку" частиц в область взаимодействия. Затем происходит столкновение частицы с ионом, по-разному описываемое в разных моделях. При этом частицы перед столкновением полагаются равномерно распределёнными в пространстве. После столкновения частица считается навсегда покинувшей область рассеяния.

Предположение о равномерности распределения частиц по фазе столкновений оправдано в случае быстрых частиц, $v \gg v_{osc}$, $\omega_0 b_v$, когда частица пролетает область существенного рассеяния¹ $b_v = e^2 Z/(mv^2)$ за время, много меньшее периода поля, и больше не возвращается к этому иону. Формальное перенесение этого предполо-

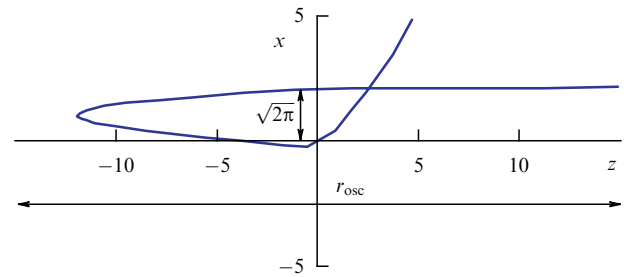


Рис. 1. Траектория частицы, притянувшейся к иону за одну осцилляцию.

жения на случай медленных частиц, $v < v_{osc}$, с соответствующей оценкой области рассеяния как $b_{osc} = e^2 Z/(mv_{osc}^2)$ неправомерно, поскольку частица пролетает над ионом много раз (много периодов поля) и имеет возможность "подтянуться" к иону. Как следствие, предположение о равномерности частиц может быть неприменимым. В частности, в работах [37–44] показано, что учёт возвратов электронов к иону существенно меняет картину рассеяния.

Действительно, численное моделирование показывает другую динамику рассеяния частицы. В сильных полях из-за большого размаха осцилляций, $r_{osc} = eE/(m\omega_0^2) \gg b_{osc}$, частица многократно возвращается к одному и тому же иону и испытывает за время рассеяния много далёких, малоугловых по полной скорости столкновений. Энергия частицы при этом практически не изменяется, но её дрейфовая траектория искривляется [37, 38]. Более того, схожая картина притяжения волновой функции электрона за много периодов внешнего поля наблюдается и при квантово-механическом описании процесса столкновений в сильных полях [42–44].

В качестве примера на рис. 1 изображена траектория частицы, "подтянувшейся" к иону за полупериод осцилляций ЭМ-поля (за один пролёт над ионом). В результате перед последним ударом, фактически и изменяющим энергию частиц, частицы оказываются значительно ближе к иону, чем при прямолинейном дрейфовом движении. Поэтому изменение энергии частиц при рассеянии существенно возрастает и появляется множество новых эффектов, рассмотрению которых и посвящён настоящий обзор.

План обзора следующий. В разделе 2 вводятся общие понятия и приводится общий вид интеграла парных столкновений в переменных ЭМ-полях. В частности, показано, как ядро интеграла столкновений определяется траекториями тестовых частиц. Рассмотрена связь полученного интеграла с интегралом столкновений в прямолинейном приближении. В разделе 3 проведён анализ уравнений тестовых частиц. В разделах 4–6 обсуждаются особенности динамики тестовых частиц в областях высоких скоростей, усреднённого описания и многократных возвратов. Аналитические результаты для отображения координат и импульсов тестовых частиц через период представлены в разделе 7. Интегральные характеристики электрон-ионных столкновений в сильных полях рассмотрены в разделах 8 и 9. Раздел 10 посвящён столкновениям в релятивистски сильных полях. Окончательный вид интеграла столкновений в сильных ЭМ-полях приведён в разделе 11. Условия применимости полученных результатов рассмотрены в разделе 12.

¹ Частицы со скоростью v и прицельным параметром $b_v = e^2 Z/(mv^2)$ рассеиваются на угол $\pi/2$ [36].

2. Интеграл столкновений в переменных электромагнитных полях

В этом разделе приведены общие соотношения для кинетических уравнений, используемых для описания неравновесных процессов в полностью ионизованной плазме. Эти соотношения, полученные из уравнения Лиувилля с помощью метода, предложенного Боголюбовым [45], позволяют, во-первых, определить границы применимости интегралов столкновений Больцмана, Ландау и др., а во-вторых, найти в дальнейшем новые интегралы столкновений. Последние имеют место в условиях, когда необходимо учитывать быстропеременные процессы и описывать столкновения в плазме, находящейся в сильных ЭМ-полях.

2.1. Кинетическое уравнение в канонически инвариантной форме

Наиболее полное описание плазмы из N частиц даёт N -частичная функция распределения $D_N(t, \zeta_1, \dots, \zeta_N)$. Здесь $\zeta_i = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$ — координаты и импульс i -й частицы. Физический смысл функции D_N заключается в том, что величина $D_N d\zeta_1 \dots d\zeta_N$ представляет собой вероятность того, что параметры частиц ($i = 1, \dots, N$) лежат в диапазоне от ζ_i до $\zeta_i + d\zeta_i$. В качестве нормировки D_N в замкнутой системе можно выбрать условие $\int D_N d\zeta_1 \dots d\zeta_N = 1$. Функция D_N удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\partial_t D_N + [\mathcal{H}_N^\Sigma, D_N] = 0, \quad (1)$$

отражающему тот факт, что изменение вероятности распределения частиц в заданном фазовом объёме возможно только в результате прохождения частиц через его границы. Здесь $\partial_t f = \partial f / \partial t$, $[\dots, \dots]$ — скобки Пуассона,

$$[f, g] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Предполагая, что имеют место только парные взаимодействия между частицами², гамильтониан $\mathcal{H}_N^\Sigma$ системы N частиц можно представить в виде

$$\mathcal{H}_N^\Sigma = \sum_i \mathcal{H}_i + \sum_{j>i} \mathcal{V}_{ij}, \quad (2)$$

где $\mathcal{H}_i$ — гамильтониан свободной частицы, $\mathcal{V}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, t)$ — потенциал взаимодействия между частицами. Столь простая форма потенциала взаимодействия имеет место только для нерелятивистских частиц. Ради простоты именно им мы и ограничимся в дальнейшем. В релятивистском случае потенциал будет зависеть ещё и от импульсов частиц (см. раздел 9.1), что потребует незначительного обобщения выкладок.

Уравнение (1) сложно из-за того, что определяет эволюцию во времени функции от $6N$ переменных (где $N \sim 10^{23}$ — число всех частиц плазмы). С другой стороны, ввиду относительной малости средней энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией частиц, в кинетике плазмы большую роль должны играть понятия, относящиеся к отдельным частицам. Для их

описания вводят s -частичные функции распределения:

$$D_s = V^{(s)} \int D_N d\zeta_{s+1} \dots d\zeta_N, \quad (3)$$

где V — объём плазмы. Уравнения для каждой из этих функций, называемые цепочкой Боголюбова [45], имеют в качестве источника функцию распределения более высокого порядка:

$$\partial_t D_1 + [\mathcal{H}_1, D_1] = - \int \frac{d\zeta_2}{V} [\mathcal{V}_{12}, D_2], \quad (4)$$

$$\partial_t D_2 + [\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{V}_{12}, D_2] = - \int \frac{d\zeta_3}{V} ([\mathcal{V}_{13}, D_3] + [\mathcal{V}_{23}, D_3]) \quad (5)$$

и т.д. Заметим, что в этих уравнениях ЭМ-поля задаются внешними для плазмы источниками без учёта воздействия плазмы.

Поскольку в отсутствие корреляций (взаимодействия) $D_n = \prod_{i=1}^n D_1(\zeta_i)$, в функциях $D_2, D_3, \dots$ целесообразно явно выделить члены, ответственные за корреляции:

$$D_1(\zeta_a) = \frac{V}{N_a} f_a, \quad D_2(\zeta_a, \zeta_b) = \frac{V^2}{N_a N_b} (f_a f_b + g_{ab}), \quad (6)$$

$$D_3(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c) = \frac{V^3}{N_a N_b N_c} (f_a f_b f_c + f_a g_{bc} + f_b g_{ac} + f_c g_{ab} + d_{abc}).$$

Здесь и далее нижние индексы указывают зависимость соответствующей функции от координат (например, $g_{ab} \equiv g_{ab}(\zeta_a, \zeta_b)$).

Подставляя определения (6) в уравнение (4), получим кинетическое уравнение для функции распределения f_a :

$$\partial_t f_a + [H_a, f_a] = \sum_b \text{St}_{ab}[f_a] \equiv - \sum_b \int d\zeta_b [\mathcal{V}_{ab}, g_{ab}]. \quad (7)$$

При этом гамильтониан в левой части уравнения (7) содержит уже самосогласованное (действующее) поле в плазме:

$$H_a = \mathcal{H}_a + \sum_b \int f_b \mathcal{V}_{ab} d\zeta_b.$$

Интеграл в правой части уравнения (7) называется интегралом столкновений $\text{St}_{ab}[f_a]$ с частицами сорта b . Для его определения должна быть известна функция парных корреляций g_{ab} . Уравнение для функции g_{ab} получается из (5) с учётом определений (6) и несложных преобразований:

$$\partial_t g_{ab} + [H_a + H_b + \mathcal{V}_{ab}, g_{ab}] = -[\mathcal{V}_{ab}, f_a f_b]. \quad (8)$$

При этом были опущены ответственные за динамическую поляризацию плазмы (дебаевское экранирование) члены $\int d\zeta_c ([\mathcal{V}_{ac}, f_a g_{bc}] + [\mathcal{V}_{bc}, f_b g_{ac}])$, существенные на расстояниях от заряда, больших дебаевского радиуса r_D , $r \geq r_D = \sqrt{T/(8\pi e^2 n_e)}$. В уравнении (8) также отброшен член с трёхчастичными корреляциями d_{abc} при предположении малости вероятности одновременного столкновения трёх частиц в одной точке пространства.

Уравнение (8) — уравнение гиперболического типа, и его решение легко найти, учитывая плавность функций распределения на масштабе столкновений

$$\partial_t f_a f_b + [H_a + H_b, f_a f_b] \ll [\mathcal{V}_{ab}, f_a f_b]$$

² Это заведомо верно для некантовой плазмы [5].

и условие отсутствия корреляций "до взаимодействия" $\lim_{t \rightarrow -\infty} g_{ab} = 0$, предложенное Боголюбовым [45]. В результате получим

$$g_{ab} = -f_a f_b|_{tr} \equiv -f_a(\zeta_{a0}(\zeta_a, \zeta_b)) f_b(\zeta_{b0}(\zeta_a, \zeta_b)). \quad (9)$$

Выражение в правой части $f_a f_b|_{tr}$ следует понимать как зависимость от "текущих" координат и импульсов ζ на траектории тестовых частиц, которые в свою очередь зависят от "начальных" координат и импульсов ζ_0 . В дальнейшем для обозначения этой зависимости будем использовать функцию $\tilde{\zeta}_a(\zeta_{a0}, \zeta_{b0}, t)$. Под тестовыми частицами понимаются частицы, движущиеся в системе с гамильтонианом $H_\Sigma = H_a + H_b + U_{ab}$.

Подставляя выражение (9) в (7), получим интеграл столкновений в виде

$$St_{ab}[f_a] = \int d\zeta_b \left[\mathcal{V}_{ab}, f_a f_b|_{tr} \right]. \quad (10)$$

Выражение (10) можно привести к классическому виду интегрального оператора с ядром $w_{ab}(\zeta_a, \zeta_a^0)$:

$$St_{ab}[f_a] = \int f(\zeta_{a0}) w_{ab}(\zeta_a, \zeta_{a0}, t) d\zeta_{a0}. \quad (11)$$

В свою очередь, используя свойства гамильтоновости системы, для w_{ab} получим довольно простое выражение [46]:

$$w_{ab}(\zeta_a, \zeta_{a0}, t) = \int f_b(\zeta_{b0}) \frac{d}{dt} \delta(\tilde{\zeta}_a(\zeta_{a0}, \zeta_{b0}, t) - \zeta_a) d\zeta_{b0}. \quad (12)$$

Выражение (12) имеет простой физический смысл: изменение функции распределения при столкновениях определяется только движением по траекториям тестовых частиц. Соответственно, распределение по импульсам получается как интегральное изменение импульса тестовых частиц при движении по траекториям. Таким образом, для определения интеграла столкновений необходимо и достаточно найти траектории частиц при рассеянии и проинтегрировать распределение по изменению импульса по всем возможным начальным координатам и импульсам ζ_{b0} .

По сути, на формулах (11), (12) основан метод расчёта характеристик парных столкновений с использованием тестовых частиц. Суть метода состоит в мысленном сведении всех однотипных ионов плазмы в одну точку А. При этом всё множество столкновений электронов с ионами плазмы сводится к последовательным столкновениям невзаимодействующих между собой (тестовых) частиц с одним ионом, находящимся в точке А. Фактически происходит замена усреднения по пространству (по столкновениям с разными ионами) усреднением по времени (последовательные столкновения с одним ионом). При программной реализации берётся достаточно большое ($10^7 - 10^8$ для типичных параметров) число тестовых частиц. Для каждой частицы выбираются случайные начальные параметры $\zeta_0 = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0\}$ и рассчитывается её траектория при столкновении с ионом. Затем результаты всех столкновений суммируются по аналогии с тем, как это делается в методе Монте-Карло. Таким образом, формулы (11), (12) являются обоснованием применимости метода тестовых частиц в произвольном рассеивающем потенциале, в том числе зависящем от времени.

2.2. Ядро интеграла столкновений

Заметим, что уравнение (12) имеет канонически инвариантную форму, поскольку включает в себя смещения частиц как в импульсном, так и в координатном пространстве. К сожалению, непосредственное использование (12) сопряжено с огромными сложностями, несмотря на его довольно простой вид. Для упрощения (12) пренебрежём изменением пространственной координаты (будем считать, что $\mathbf{r}_{a0} = \mathbf{r}_a$) при столкновении ввиду малости столкновительных масштабов и сосредоточимся на импульсной части. Такое пренебрежение изменением координат частиц после рассеяния приводит к потере канонической инвариантности интеграла столкновений (11), (12), поскольку происходит огрубление информации о столкновении. В результате интеграл столкновений приобретёт диффузионный характер, обычный для интеграла столкновений в форме Больцмана.

В разделе 2.1 рассматривался интеграл столкновений для произвольных (в том числе релятивистских) сталкивающихся частиц. Для того чтобы избежать громоздких выкладок в общем случае, вначале рассмотрим важный частный случай нерелятивистских электрон-ионных столкновений. Обобщение практически всех формул для случая релятивистских столкновений проводится аналогично с точностью до более сложных выражений для дрейфовых координат (см. раздел 9.1).

Гамильтониан для двух заряженных (тестовых) частиц в нерелятивистском случае хорошо известен:

$$H_\Sigma = \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_b^2}{2m_b} + \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \mathbf{E}(t)(e_a \mathbf{r}_a + e_b \mathbf{r}_b).$$

Однако для практического использования гамильтониан удобно записать в дрейфовых координатах $\mathbf{r}_{a,b}^{\text{drift}} = \mathbf{r}_{a,b}^{\text{lab}} - \mathbf{r}_{a,b}^{\text{osc}}$, $\mathbf{p}_{a,b}^{\text{drift}} = \mathbf{p}_{a,b}^{\text{lab}} - \mathbf{p}_{a,b}^{\text{osc}}$:

$$H_\Sigma = \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_b^2}{2m_b} + U_{ab}, \quad (13)$$

$$U_{ab} = \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a^{\text{osc}}(t) - \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_b^{\text{osc}}(t)|}.$$

Здесь $\mathbf{p}_{a,b}^{\text{osc}} = \int e_{a,b} \mathbf{E}(t) dt$ — осцилляторный импульс, $\mathbf{r}_{a,b}^{\text{osc}} = \int \mathbf{p}_{a,b}^{\text{osc}} / m_{a,b} dt$ — осцилляторный радиус, e_a, e_b — заряды частиц сорта a и b соответственно. Такое представление удобно ввиду пространственной локализованности рассеивающего потенциала U_{ab} . Ценой применения такого преобразования стала явная зависимость потенциала U_{ab} от времени. Кроме того, если одна частица (электрон) много легче другой (иона), то осцилляциями $\mathbf{r}_b^{\text{osc}}(t)$ тяжёлой частицы в потенциале взаимодействия можно пренебречь ввиду малости параметра m_a/m_b .

Для гамильтониана вида (13) важны только относительные расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$. Будем также полагать малым изменение скорости ионов при электрон-ионных столкновениях и пренебрежём изменением координатной части функций распределения f_a, f_b вследствие изменения положения частиц при столкновениях. В результате ядро (12) можно представить в виде

$$w_{ab} = n_b(\mathbf{r}_a) \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a0}) \int \frac{d}{dt} \delta(\tilde{\mathbf{p}}_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}_{a0}, t) - \mathbf{p}_a) d^3 r, \quad (14)$$

³ В квантовой механике такой переход называется преобразованием Крамерса – Хеннебергера.

где $n_b = \int f_b d^3 p_b$ — концентрация частиц сорта b в точке r_a . В дальнейшем опустим $\delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a0})$ в (14), полагая все столкновения локальными.

Если H_a, V_{ab} — периодические функции времени (например, в случае столкновений в плоской ЭМ-волне) с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, то функция столкновений и, соответственно, интеграл столкновений также должны быть периодическими функциями времени. Поэтому представляет интерес поиск среднего значения и амплитуды гармоник функции столкновений. Среднее по времени значение ядра столкновений выражается как

$$\langle w_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \rangle = \frac{n_b}{T} \int_t^{t+T} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t) dt. \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем опущены индексы a у импульсов.

Перейдём к декартовым координатам ξ, ρ_1, ρ_2 с началом координат в точке нахождения иона и осью ξ , направленной вдоль начального импульса $\mathbf{p}_0$. Используя условие периодичности гамильтониана с периодом T , запишем соотношение для импульсов в разные моменты времени при $\xi \rightarrow -\infty$

$$\mathbf{p}(t; \xi) = \mathbf{p}(t - T; \xi - \zeta), \quad \zeta = |\mathbf{v}_0|T. \quad (16)$$

Здесь начальная скорость $\mathbf{v}_0$ связана с начальным импульсом обычным образом: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0/m$. Соотношение (16) для импульсов позволяет представить функцию w (15) в виде

$$\begin{aligned} \langle w_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \rangle &= \\ &= \frac{n_b}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\xi}^{(n+1)\zeta} \int_{\rho} [\delta(\tilde{\mathbf{p}}(t+T) - \mathbf{p}) - \delta(\tilde{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p})] d\xi d^2\rho = \\ &= \frac{n_b}{T} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\tilde{\mathbf{p}}(t + (n+1)T) - \mathbf{p}) - \\ &- \delta(\tilde{\mathbf{p}}(t + nT) - \mathbf{p})] d\xi d^2\rho = \\ &= \frac{n_b}{T} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} [\delta(\tilde{\mathbf{p}}(+\infty) - \mathbf{p}) - \delta(\tilde{\mathbf{p}}(-\infty) - \mathbf{p})] d\xi d^2\rho, \end{aligned}$$

где Ξ — расстояние между налетающей частицей и рассеивающим центром. Начальное значение импульса $\tilde{\mathbf{p}}(-\infty)$ тождественно равно $\mathbf{p}_0$, отсюда

$$\langle w_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \rangle = \frac{n_b}{T} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} [\delta(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p})] d\xi d^2\rho, \quad (17)$$

где $\mathbf{p}_+ \equiv \tilde{\mathbf{p}}(+\infty)$. Таким образом, физический смысл среднего за период ядра интеграла столкновений состоит в том, что оно является плотностью распределения частиц по скоростям в задаче рассеяния моноэнергетического пучка.

Возвращаясь к формуле (11), получим выражение для интеграла столкновений [46]

$$\begin{aligned} \langle St_{ab}[f] \rangle &= \\ &= \frac{n_b}{T} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} \int f(\mathbf{p}_0) [\delta(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p})] d^3 p_0 d\xi d^2\rho, \end{aligned} \quad (18)$$

обобщающее интеграл столкновений Больцмана для случая рассеяния в периодически зависящем от времени

потенциале. Итак, изменение функции распределения при столкновениях определяется *только* движением частиц по траекториям. Соответственно, распределение по импульсам получается как интегральное изменение импульса частиц при движении по траекториям.

Аналогично можно найти выражение для амплитуды k -й гармоники ядра интеграла столкновений:

$$w_k^{ab} = ik\omega_0 \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} \int \int \delta(\tilde{\mathbf{p}}(\tau) - \mathbf{p}) \exp\left(\frac{i2\pi\tau k}{T}\right) d\tau d\xi d^2\rho. \quad (19)$$

Отметим ещё одно важное и более или менее очевидное свойство (17)–(19). Интеграл столкновений (18) даёт точное решение для эволюции функции распределения через период в квазимонохроматических ЭМ-полях, а выражение (19) позволяет вычислить спектр её гармоник. Действительно, в левой части кинетического уравнения (7) после усреднения по периоду останется только слагаемое $\int \partial_t f dt = f(t+T) - f(t)$, а в правой части — интеграл столкновений (18). Это позволяет строить численные методы (типа метода "частиц в ячейке"), быстро и точно рассчитывающие эволюцию плазмы с достаточно большим временным шагом, равным периоду ЭМ-поля.

Интеграл столкновений (11) и выражения для функции w (17), (19) позволяют легко найти характеристики (моменты) столкновений, например, для джоулева нагрева плазмы

$$\frac{dT_e}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{p}, t) d^3 p = \frac{mv_{\text{osc}}^2}{2} \int v_{\text{ei}}(\mathbf{p}_0) f(\mathbf{p}_0) d^3 p_0. \quad (20)$$

Здесь введена эффективная частота столкновений v_{ei} как среднее за период изменение энергии электронов плазмы в единицу времени, отнесённое к осцилляторной энергии электронов,

$$v_{\text{ei}}(\mathbf{p}_0) = \frac{2m}{p_{\text{osc}}^2} \frac{n_i}{2m} \int p^2 \langle w_{\text{ei}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \rangle d^3 p, \quad (21)$$

где n_i — концентрация ионов. Используя формулу (17), легко получить выражение для частоты столкновений

$$v_{\text{ei}}(\mathbf{p}_0) = \frac{n_i}{T p_{\text{osc}}^2} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_{\Xi}^{\Xi+\zeta} (p_+^2 - p_0^2) d\xi d^2\rho, \quad (22)$$

показывающее, что для вычисления изменения энергии при столкновениях достаточно найти изменение энергии тестовых частиц по характеристикам из одного слоя с шириной ζ по ξ во времени $(-\infty, \infty)$.

Делая замену координат $\varphi = \zeta\xi/(2\pi) = p_0 T\xi/(2\pi m)$, формулу (22) можно представить в более удобном виде:

$$v_{\text{ei}}(\mathbf{p}_0) = n_i v_0 \sigma_{\text{eff}}, \quad \sigma_{\text{eff}}(\mathbf{p}_0) = \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \int_0^{2\pi} \int \frac{p_+^2 - p_0^2}{p_{\text{osc}}^2} d\varphi d^2\rho. \quad (23)$$

Эффективное сечение σ_{eff} имеет размерность площади и характеризует отношение числа частиц, изменивших свою энергию на величину $p_{\text{osc}}^2/(2m)$, к плотности потока налетающих частиц. Именно эта величина будет использована для расчёта джоулева нагрева плазмы.

Аналогично можно найти ток пучка электронов, определяемый столкновениями:

$$\frac{d\mathbf{j}_{\text{ei}}}{dt} \equiv e \frac{d}{dt} \int \mathbf{p} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) d^3 p = en_i \int \mathbf{p} w_{\text{ei}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t) d^3 p. \quad (24)$$

Подставляя в (24) выражение (19) для функции w_{ei} , для фурье-спектра тока $\mathbf{j}_{ei}$ получим:

$$\mathbf{j}_{\omega} = \int \mathbf{j}_{ei} \exp(i\omega t) dt = \\ = en_i \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \iint_{\Xi}^{\Xi+\zeta} \mathbf{p}_{\omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i\omega n \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \right) d\zeta d^2\rho. \quad (25)$$

Сумма в правой части (25) есть сумма δ -функций,

$$\mathbf{j}_{\omega} = e \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \iint_{\Xi}^{\Xi+\zeta} \mathbf{p}_{\omega} d\zeta d^2\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad (26)$$

поскольку отклик системы (в частности, плазмы) на периодическое возмущение на частоте ω_0 должен быть периодическим с частотами, кратными ω_0 .

Внешнее поле не оказывает влияния на электрон-электронные столкновения. Следовательно, частота электрон-электронных столкновений v_{ee} почти всегда будет превосходить частоту электрон-ионных столкновений и можно ожидать, что любая анизотропия в функции распределения будет "размыта" за время $1/v_{ee}$. То есть при электрон-ионных столкновениях функцию распределения электронов можно считать изотропной. Исключением является область $Zv_{osc} > v_T > v_{osc}$, в которой, как показано Лангдоном [47, 48], частота электрон-ионных столкновений превосходит частоту электрон-электронных столкновений. (Здесь Z — отношение заряда иона к заряду электрона.) Вследствие этого функция распределения электронов становится анизотропной.

Заметим, что для изотропной функции распределения $f(|\mathbf{p}|)$ в силу соотношения симметрии при $\zeta \rightarrow -\infty$

$$\mathbf{p}(t; \zeta, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}\left(t + \frac{T}{2}; -\zeta, -\mathbf{p}_0\right) \quad (27)$$

в сумме останутся только нечётные гармоники частоты ω_0 . В результате формула (26) примет вид

$$\mathbf{j}_{\omega} = en_i v_0 \chi_{coh}(\mathbf{p}_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad (28)$$

где введена величина χ_{coh} , называемая в дальнейшем сечением когерентного излучения,

$$\chi_{coh}(\mathbf{p}_0) = \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \iint_0^{2\pi} \mathbf{p}_{\omega}(\Xi + \varphi r_a, \mathbf{p}) d\varphi d^2\rho. \quad (29)$$

Аналогичным образом можно найти выражения для других величин. Транспортное сечение, характеризующее площадь, с которой частицы рассеиваются на угол порядка $\pi/2$, имеет вид

$$\sigma_{tr}(\mathbf{p}_0) = \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \iint_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_0}{p p_0}\right) d\varphi d^2\rho. \quad (30)$$

Сечение некогерентного излучения, имеющее размерность площади на энергию,

$$\chi_{inc}(\mathbf{p}_0) = \frac{4}{3c^3} \lim_{\Xi \rightarrow -\infty} \iint_0^{2\pi} p_{\omega}^2 d\varphi d^2\rho. \quad (31)$$

В то время как в выражении для столкновительного тока (26) учитывается коррелированность мощностей излучающих источников, в выражении для некогерентного

излучения (31) эти мощности суммируются без учёта их возможной коррелированности. Это общепринятый метод подсчёта интенсивности некогерентного излучения при столкновениях [49].

2.3. Метод возмущений

К сожалению, точное аналитическое решение уравнений движения для тестовой частицы найти достаточно сложно. Однако в ряде случаев удаётся развить теорию возмущений благодаря малости отличия траектории частицы от прямолинейной. Такое приближение называют малоугловым или прямолинейным (straight-line approach) [2–4, 15, 26, 31]. По сути, приближение состоит в пренебрежении членом

$$[\mathcal{V}_{ab}, g_{ab}] \ll [\mathcal{V}_{ab}, f_a f_b] \quad (32)$$

в уравнении для функции корреляций (8),

$$\partial_t g_{ab} + [H_a + H_b, g_{ab}] = -[\mathcal{V}_{ab}, f_a f_b]. \quad (33)$$

Заметим, что предположение (32) само по себе накладывает условие прямолинейности дрейфовых траекторий частиц за время столкновения. Это приближение вполне оправдано для высокоэнергетичных частиц, $v \gg v_{osc}$, испытывающих однократный удар о ион и никогда больше к нему не возвращающихся, или для отталкивающего потенциала взаимодействия (например, при электрон-электронных или ион-ионных столкновениях), когда каждое последующее столкновение слабее предыдущего. Однако для более медленных частиц, $v \leq v_{osc}$, ситуация при электрон-ионных столкновениях не столь однозначна, поскольку у электрона появляется возможность вернуться через период к тому же иону и испытать более сильный удар. В частности, в работах [38–43] показано, что учёт возвратов электронов к иону существенно меняет картину рассеяния.

Итак, сосредоточимся на высокоэнергетичных частицах, $v \gg v_{osc}$. Решение уравнения (33) может быть легко найдено с учётом равенства нулю скобки Пуассона $[H_a, \mathbf{p}_a]$ (т.е. при постоянстве дрейфового импульса на "траектории" частицы):

$$g_{ab} = -f_b \int [\mathcal{V}_{ab}, f_a] \Big|_{tr} dt = f_b \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \int \frac{\partial \mathcal{V}_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t} dt.$$

Подставляя последнее выражение в (11), получим интеграл столкновений, выражающийся в квадратурах:

$$\text{St}[f_a] = n_b \int d^3r \left[\mathcal{V}_{ab}, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \int \frac{\partial \mathcal{V}_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t} dt \right]. \quad (34)$$

Отметим, что квадратичная зависимость от кулоновского потенциала (или от заряда иона), возникшая здесь только в силу приближения (32), ни в коей мере не является следствием (критерием) приближения парных столкновений. Более того, строгое решение уравнения (8) могло бы дать любую степень зависимости от заряда иона, поскольку сами траектории тестовых частиц зависят от него трансцендентным образом.

В нерелятивистском случае, когда потенциал взаимодействия не зависит от импульсов (13), этот интеграл можно вычислить аналитически. Действительно, легко увидеть, что интеграл столкновений в этом случае можно

представить как

$$St_{ab}[f_a] = \frac{\partial}{\partial p_j} B_{ij} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad (35)$$

где тензор B_{ij} определяется выражением

$$B_{ij} = \iint \frac{\partial \mathcal{V}_{ab}}{\partial r_j} \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t} dt \frac{\partial \mathcal{V}_{ab}}{\partial r_i} d^3 r. \quad (36)$$

Используя разложение Фурье для кулоновского потенциала

$$\frac{1}{r} = 4\pi \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

получим

$$B_{ij}(t) = \frac{2Z^2 e^4}{\pi} \int \frac{d^3 k}{k^4} k_i k_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\text{osc}}(t)) \times \\ \times \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}t' - i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\text{osc}}(t')) dt'. \quad (37)$$

В лабораторной системе координат это соответствует интегралу столкновений В.П. Силина [2]

$$B_{ij}(t) = \frac{2Z^2 e^4}{\pi} \iint \frac{d^3 k dt}{k^4} k_i k_j \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{osc}}(t))t]. \quad (38)$$

Вид интеграла (38) может быть упрощён с логарифмической точностью. Для этого заметим, что в случае больших k (существенных, например, для определения эффективной частоты столкновений) в выражении (38) можно пренебречь изменением в момент рассеяния полной скорости частицы по параметру $kv/\omega \equiv kr_a \gg 1$:

$$B_{ij}(t) \approx 2Z^2 e^4 \int \frac{d^3 k}{k^4} k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) = \\ = 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} V^2 - V_i V_j}{V^3} \ln \frac{r_a}{b_v}, \quad (39)$$

где $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{osc}}(t)$ — полная скорость частицы в момент удара, δ_{ij} — символ Кронекера, r_a — радиус адиабатичности. В области малых k ($kr_{\text{osc}} \ll kr_a \leq 1$) можно пренебречь членом $\mathbf{k}\mathbf{r}_{\text{osc}}(t)$ в (37), что соответствует отсутствию влияния внешнего поля на далёкие столкновения:

$$B_{ij} \approx 2Z^2 e^4 \int \frac{d^3 k}{k^4} k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) = 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \ln \frac{r_D}{r_a}. \quad (40)$$

Окончательно для интеграла столкновений в области применимости малоуглового приближения получим

$$B_{ij} \approx 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} V^2 - V_i V_j}{V^3} \ln \frac{r_a}{b_v} + \\ + 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \ln \frac{r_D}{r_a}. \quad (41)$$

Первое слагаемое в правой части (41) отвечает в первую очередь за изменение энергии плазмы при взаимодействии с внешним полем электромагнитной волны. Второе слагаемое не приводит к изменению энергии плазмы и, как правило, не рассматривается. Оно ответственно только за транспортные характеристики рассеяния (по

аналогии с интегралом столкновений Ландау для электрон-электронных столкновений).

Выражение (41) для тензора B_{ij} имеет достаточно общий вид. В ряде конкретных случаев оно заметно упрощается и приводится к некоторым известным формам или позволяет сделать выводы о динамике частиц в этих режимах. Рассмотрим их.

В отсутствие внешнего поля ($v_{\text{osc}} \rightarrow 0$) полная скорость становится равной дрейфовой скорости частицы, $\mathbf{V}(t) \rightarrow \mathbf{v}$. Соответственно, B_{ij} переходит в тензор Ландау B_{ij}^0 (40), входящий в интеграл столкновений Ландау:

$$B_{ij} \rightarrow 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \left(\ln \frac{r_a}{b_v} + \ln \frac{r_D}{r_a} \right) = \\ = 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \ln \frac{r_D}{b_v}. \quad (42)$$

Отметим, что интеграл традиционного вида при наличии ненулевого ЭМ-поля [2] такого перехода не имеет.

В случае непрозрачной плазмы, $\omega < \omega_p \Leftrightarrow r_a > r_D$, тензор B_{ij} имеет вид тензора Ландау с заменой дрейфовой скорости полной скоростью частиц:

$$B_{ij} = 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} V^2 - V_i V_j}{V^3} \ln \frac{r_D}{b_v}. \quad (43)$$

Такой вид тензора традиционно используется для определения диэлектрической проницаемости непрозрачной плазмы [5].

В обратном предельном случае высокочастотных полей, $r_a < b_v$, тензор B_{ij} тождественно равен тензору Ландау (40) в задаче без поля:

$$B_{ij} = 2\pi Z^2 e^4 \frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \ln \frac{r_D}{b_v}. \quad (44)$$

Заметим, что из интеграла (37) такой же вид B_{ij} получается и в случае малости осцилляторного радиуса по сравнению с резерфордским, $r_{\text{osc}} \ll b_v$, вне зависимости от соотношения дрейфовой и осцилляторной скоростей. В обоих случаях ($r_a, r_{\text{osc}} \ll b_v$) в тензоре B_{ij} остаётся часть, ответственная только за изменение направления импульса частицы, но не за изменение её энергии. Последнее, в частности, означает, что *транспортное сечение остаётся резерфордским* в этих диапазонах с точностью до логарифмического множителя. Отсутствие изменения энергии в выражении (44) означает, что для определения эффективной частоты, ответственной за изменение энергии плазмы, в указанных диапазонах необходимо учитывать рассеяние на большие углы [50, 51]. Однако отсюда отнюдь не следует отсутствия энергообмена в рассматриваемых областях, как это утверждается, например, в [15].

Наконец, в прозрачной плазме в области

$$v \gg v_{\text{osc}}, \quad b_v \ll r_a \ll r_D, \quad (45)$$

тензор B_{ij} (41) содержит оба слагаемых. Слагаемое, ответственное за изменение энергии (первое слагаемое в (41)), имеет вид впервые предложенного В.П. Силиным [2] тензора, традиционно используемого в этой области.

Дальнейшее обобщение интеграла столкновений Силина (41) для области малых скоростей должно проводиться с учётом конечной кривизны характеристик уравнения для функции корреляции, т.е. должно выходить за рамки прямолинейного приближения.

3. Уравнение движения тестовой частицы. Проблемы численного интегрирования

Обратимся к случаю низкотемпературной плазмы, $v \ll v_{\text{osc}}$. Для вычисления интеграла столкновений (11), (18) должно быть известно движение тестовых частиц. Рассмотрим подробнее уравнение движения, соответствующее гамильтониану (13). В случае однородного монохроматического электрического поля, в дальнейшем называемого полем накачки,

$$\mathbf{E}(t) = E \operatorname{Re} [\mathbf{e}_0 \exp(i\omega_0 t)],$$

уравнения можно записать в безразмерном виде:

- для лабораторной системы

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \operatorname{Re} [\mathbf{e}_0 \exp(i\Omega t)]; \quad (46)$$

- для дрейфовых координат $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{osc}}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{osc}}|}, \quad \mathbf{r}_{\text{osc}} = \frac{1}{\Omega^2} \operatorname{Re} [\mathbf{e}_0 \exp(i\Omega t)]. \quad (47)$$

Здесь введены характерные масштабы

$$r_E = \sqrt{\frac{eZ}{E}}, \quad \omega_E = \sqrt{\frac{eE^3}{m^2 Z}}, \quad v_E = \sqrt{\frac{Ze^3 E}{m^2}}, \quad (48)$$

где E — амплитуда поля накачки, $\mathbf{e}_0$ — комплексный вектор, характеризующий поляризацию поля накачки. В частности, для линейной (ЛП) и циркулярной (ЦП) поляризаций его удобно выбрать в виде

$$\mathbf{e}_0^{\text{LP}} = \{0, 0, 1\}, \quad \mathbf{e}_0^{\text{CP}} = \{1, -i, 0\}. \quad (49)$$

В уравнения (46) и (47) входит *единственный* безразмерный параметр — безразмерная частота, характеризующая поле накачки [38, 39]:

$$\Omega = \omega_0 \left(\frac{m^2 Z}{eE^3} \right)^{1/4} = \frac{\omega_0}{\omega_E}. \quad (50)$$

В параметр Ω амплитуда E и частота ω_0 входят в комбинации E^3/ω_0^4 . Это означает, что столкновения в сильных высокочастотных полях (например, лазерного диапазона) подобны столкновениям в более слабых, низкочастотных, полях (например, микроволнового диапазона). Таким образом, структура фазового пространства и ожидаемые эффекты определяются только параметром Ω и являются принципиально различными в областях высокочастотного, $\Omega \gg 1$, и низкочастотного, $\Omega \ll 1$, поля [52].

При больших значениях Ω структура фазового пространства будет заметно изменяться только в малой окрестности сепаратрисы, отделяющей пролётные траектории от захваченных (квазипериодических). По мере возрастания амплитуды поля (уменьшения параметра Ω) объём стохастического слоя увеличивается и при $\Omega \ll 1$ становится порядка $v_{\text{osc}} = 1/\Omega \gg 1$. В размерных переменных это соответствует осцилляторному радиусу в координатном пространстве и осцилляторному импульсу в импульсном. Качественно такая эволюция изображена на рис. 2. С точки зрения задачи рассеяния это означает, что в слабых полях ($\Omega \gg 1$) или до тех пор, пока дрейфовая (тепловая) скорость электрона велика по сравнению с осцилляторной, динамика частиц регулярна и энергообмен с полем может быть рассчитан по модели Ландау. Напротив, в случае сильного поля ($\Omega \ll 1$) в

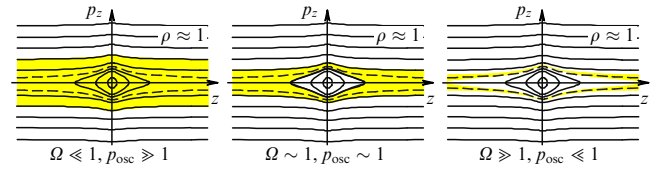


Рис. 2. Изменение области стохастичности (качественно) в фазовом пространстве при изменении параметра Ω . Штриховой линией изображена сепаратрисная кривая.

условиях, когда осцилляторная скорость существенно больше дрейфовой, область нерегулярной динамики в фазовом пространстве системы становится определяющей. Уже эти простые соображения показывают, что в ранних работах 1960–1970-х годов эти эффекты не могли быть учтены адекватно, поскольку само понятие стохастичности ещё только зарождалось. Кроме того, и с точки зрения численного решения эта задача являлась весьма трудной.

Вторым параметром, определяющим столкновения отдельных частиц, является тепловая скорость электронов v_{Te} . Поскольку внешнее электрическое поле не влияет на электрон-электронные столкновения, в сильных полях их частота будет превосходить частоту электрон-ионных столкновений, $v_{\text{ee}} \geq v_{\text{ei}}, v_{\text{ii}}$. Следовательно, любая неоднородность скоростей электронов (например, из-за электрон-ионных столкновений) будет быстро (по параметру $v_{\text{ee}}/v_{\text{ei}}$) изотропизоваться. Таким образом, вследствие изотропности функции распределения направления скоростей отдельных электронов не должны влиять на результат (по ним следует усреднить), т.е. вторым параметром, определяющим динамику столкновений, является модуль тепловой скорости электронов.

Итак, на столкновения влияют только два безразмерных параметра: частота $\Omega = \omega_0/\omega_E$ и скорость $v = v_{\text{Te}}/v_E$. В то же время можно ввести три имеющих физический смысл пространственных параметра: $b_v, r_{\text{osc}}, b_{\text{osc}}$, влияющих на траекторию частицы, — и параметр, определяющий характер изменения энергии частицы полем накачки, r_a . Выпишем их в размерном и безразмерном (в квадратных скобках) виде:

$$b_v = \frac{Ze^2}{mv^2} = \left[\frac{1}{v^2} \right], \quad r_{\text{osc}} = \frac{eE}{m\omega_0^2} = \left[\frac{1}{\Omega^2} \right], \quad (51)$$

$$b_{\text{osc}} = \frac{Ze^2}{mv_{\text{osc}}^2} = [\Omega^2], \quad r_a = \frac{v}{\omega_0} = \left[\frac{v}{\Omega} \right].$$

Параметр b_v , называемый резерфордовским радиусом, характеризует размер области, попадая в которую, электрон, имеющий скорость v , рассеется на угол порядка 1 рад (без учёта поля накачки). Аналогично $b_{\text{osc}} \equiv b_v(v_{\text{osc}})$ — размер области, попав в которую, электрон, имеющий осцилляторную скорость, рассеется на угол порядка 1 рад. Осцилляторный радиус r_{osc} — радиус осцилляций электрона в поле накачки (без кулоновского поля иона). Радиус адиабатичности r_a характеризует размер области, в которой движение электрона не адиабатическое, т.е. время прохождения этой области r_a/v много меньше периода поля $2\pi/\omega_0$. Приведём также выражение нормировочного масштаба r_E (48) через параметры (51):

$$r_E = \sqrt{r_{\text{osc}} b_{\text{osc}}}. \quad (52)$$

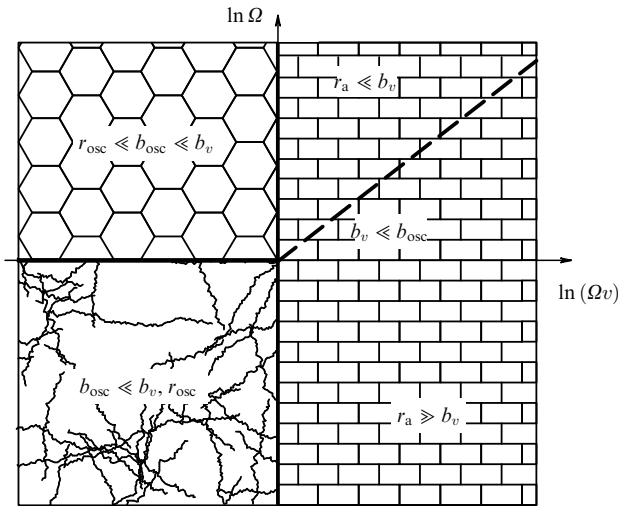


Рис. 3. Разбиение плоскости параметров $(\Omega \times \Omega v)$ на области различной динамики электрона.

Сравнивая параметры (51) между собой на плоскости параметров $\Omega \times \Omega v$, можно выделить три области (рис. 3), представляющие принципиально разную динамику движения электрона. Заметим, что традиционно рассматривается только две области: область слабого поля, $v \gg v_{osc}$, и область сильного поля, $v \ll v_{osc}$.

Рассмотрим кратко каждую из областей.

Область высоких скоростей. Траектория в области высоких скоростей ($b_{osc} \gg b_v \Leftrightarrow v \gg v_{osc}$) близка к резерфордской траектории вследствие малости поля накачки, $v_{osc} \ll v$, поэтому влиянием внешнего поля на траекторию можно пренебречь. Движение является регулярным. Захваты частиц и столкновительный ток отсутствуют. Это наиболее хорошо исследованная область параметров. Более того, в области $r_a \gg b_v$ при вычислении изменения энергии (эффективной частоты столкновений) можно пользоваться малоугловым приближением [2] (см. раздел 2.3). Вне этой области малоугловое приближение неприменимо. В области $r_a \leq b_v$ необходимо более аккуратное вычисление изменения энергии с учётом существенного притяжения электрона ионом.

Область усреднённого описания. В области усреднённого описания, в которой $r_{osc} \leq b_{osc} \leq b_v$, влияние внешнего поля на траекторию существенно, но ввиду высокой частоты поля накачки его учёт может быть проведён введением усреднённого потенциала [50, 51]. Движение снова оказывается регулярным. Появляется возможность падения частиц на центр из-за неточечной особенности усреднённого потенциала. Далёкие траектории близки к резерфордским, соответственно, близки и сечения: транспортное и некогерентного излучения.

Область многократных возвратов. В области многократных возвратов, в которой $b_{osc} \leq r_{osc}, b_v$ и $b_{osc} \leq b_v \Leftrightarrow v \ll v_{osc}$, траектория представляет собой медленный дрейф электрона, движущегося по осциллирующей траектории $\mathbf{r}_{osc}$. Эта область наиболее сложна для аналитического описания. В ней появляется множество новых эффектов: многопоточность, стохастическая динамика частиц при рассеянии, захват частиц ионом, группирование частиц в процессе рассеяния и др. Именно этой области будет уделено основное внимание в дальнейшем.

Проблемы численного интегрирования. Численные результаты, представленные ниже, основываются на вычислении моментов интеграла столкновений и усреднённой за период функции столкновения w_{ci} (17) посредством численного интегрирования. Интегрирование проводилось методом Монте-Карло по начальным координатам $\mathbf{r}_0$. Траектории электронов вычислялись методом Рунге – Кутты. При численном интегрировании моментов интеграла столкновений возникает ряд трудностей.

Первой трудностью является необходимость вычисления очень большого числа траекторий. Вследствие большой "изрезанности" (см. раздел 6) подынтегральных функций в формулах (23) и (29), для каждой точки $\{\mathbf{p}_0, \Omega\}$ приходится вычислять значительное число траекторий, исходящих от начальных координат $\mathbf{r}_0$,

$$N_{\text{traj}} \sim \frac{50}{\min(\Omega^4, v^4)} \max\left(20, \frac{1}{\Omega^2}\right). \quad (53)$$

Иногда это число достигало величины 10^8 .

Изрезанность функций связана с возможностью частице получить значительное по сравнению с её собственной энергией изменение энергии $\Delta w \sim v_{osc}^2 = 1/\Omega^2$. Это означает, что малая доля частиц ($\sim \Omega^2$), изменивших энергию до v_{osc}^2 , даёт заметный вклад в общее изменение энергии частиц и, соответственно, сечений. Для корректного вычисления характеристик рассеяния необходимо учитывать и малую долю таких частиц.

Другим лимитирующим фактором является машинное время вычисления отдельной траектории. Особенно актуальным это становится при малых скоростях электронов или большой частоте поля накачки. Время расчёта (число шагов при решении уравнения движения) можно оценить как

$$N_{\text{step}} \sim \Omega t_{\text{pass}} \equiv \frac{\Xi}{v} \Omega, \quad \Xi \geq \max\left(\frac{3v}{\Omega}, \frac{4}{v^2}, \frac{2}{\Omega^2}\right), \quad (54)$$

где начальное расстояние Ξ выбиралось как наибольшее из всех характерных масштабов задачи.

Таким образом, сложность численного решения задачи с числом операций как минимум порядка $N_{\text{traj}} N_{\text{step}}$ катастрофически быстро возрастает с уменьшением параметра Ω — как величина, пропорциональная $1/\Omega$ в седьмой степени! Именно с этим обстоятельством связано ограничение области расчётов. Численные расчёты при малых Ω ($\Omega < 0,1$) практически отсутствуют.

Следует отметить ещё две общие проблемы при численном моделировании столкновений в очень сильных (или, наоборот, низкочастотных) полях [52].

Первая из них, проявляющаяся в моделировании методом частиц в ячейках (Particle-In-Cell — PIC), связана с тем, что современные компьютеры могут вычислять только конечное (порядка нескольких десятков или сотен) число частиц в одной ячейке⁴. В сильных или в низкочастотных полях радиус осцилляций электрона становится большим по сравнению с межчастичным расстоянием. Это приводит к необходимости либо учитывать очень большое число частиц в ячейке, что пока нереально, либо численно "разрывать" движение электрона на куски при пересечении границы ячейки. Про-

⁴ Ячейка — это искусственно (волей программиста) выбранная область пространства, движение частиц внутри которой рассчитывается точно, а вклад частиц, находящихся вне ячейки, определяется методом среднего поля.

блема состоит в том, что при такой разрывной траектории "численный" электрон теряет информацию о изменении параметров при движении в другой ячейке. В то же время реальный электрон вследствие непрерывности его плавной траектории сохраняет информацию о рассеянии на предыдущем периоде осцилляций и при достаточно малой дрейфовой скорости сможет накопить изменение прицельного параметра для качественного изменения своей динамики. Возникает вопрос: насколько заметно это изменение динамики? Результаты численного моделирования показывают, что оно существенно. Это означает недостоверность описания столкновений в плазме в сильных полях *любым* из существующих PIC-кодов. Способы устранения этой проблемы приведены в разделе 7. Заметим, что интегрирование методом вычисления величин по численно найденной плавной траектории рассеяния тестового электрона лишено указанного выше недостатка. В этом случае компьютер не вносит случайных искажений в траекторию частицы, обусловленных пересечением границ ячеек.

Вторая проблема состоит в сложности достоверного описания движения частиц около иона и их рассеяния на большие углы [53–55]. Действительно, уравнения движения в виде (46) имеют особенность в точке расположения иона. Скорость электрона при приближении его к иону возрастает как

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty,$$

что затрудняет численное прохождение этой области. Более того, характерное время изменения скорости и, следовательно, максимальный шаг пропорциональны

$$r^{3/2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

и могут быть много меньше периода поля накачки. В случае низкой частоты поля накачки, $\Omega \ll 1$, отношение времени одного удара, $\sim \Omega^3$, к полному времени рассеяния $r_{\text{osc}}/v \sim 1/(\Omega^2 v)$ очень быстро (как Ω^5) убывает с уменьшением частоты Ω ! Последнее обстоятельство заставляет программу неоправданно дробить временной шаг, что приводит к очень длительному времени расчёта или некорректному расчёту движения частицы около иона и тем самым к значительным случайным погрешностям в результатах. Заметим, что большинство PIC-кодов вообще не рассматривает эту проблему, предполагая, что доля частиц, рассеивающихся на большие углы, мала и ею можно пренебречь. Представленные в настоящем обзоре результаты говорят об обратном: вклад частиц, рассеивающихся на большие углы, становится заметным в сильных полях.

Для устранения последней проблемы при численном интегрировании уравнения (46) была использована схема регуляризации уравнений движения [52], которая заключается во введении фиктивного времени s , связанного с настоящим временем t дифференциальным соотношением⁵

$$dt = f(R) ds, \quad f(R) > 0. \quad (55)$$

Уравнения движения при этом примут вид

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P}f(R), \quad \mathbf{P}' = \left[-\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{E}(t) \right] f(R), \quad t' = f(R). \quad (56)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по параметру s , который иногда называют фиктивным временем. Кроме того, вследствие явной зависимости уравнений от времени t появляется дополнительное уравнение для "настоящего" времени t .

В качестве функции $f(R)$ можно выбрать

$$f(R) = \frac{R^2}{1 + R^2}. \quad (57)$$

Эта функция исключает явную особенность при $R = 0$ в уравнениях и обращается в единицу на бесконечности, где влияние кулоновского потенциала мало. Кроме того, такая функция быстро вычисляется при численном моделировании.

Смысл введения времени s состоит в том, что система уравнений самостоятельно осуществляет "подбор" шага реального времени t при движении по траектории. Вдали от иона ($R \rightarrow \infty$) время течёт нормальным образом. При приближении к иону время "замедляется". Это соответствует тому, что в ходе численного интегрирования при движении с постоянным по s шагом шаг по реальному времени t будет автоматически дробиться вблизи кулоновской особенности. Сами импульсы, в отличие от таковых в случае регуляризации Леви-Чивиты [52, 56], могут обращаться в бесконечность, но в масштабе фиктивного времени они изменяются медленно. Такая схема позволяет более быстро и точно вычислять изменение импульса частицы при столкновении благодаря исключению явной особенности в уравнениях движения. Однако ценой этого стало увеличение размерности системы уравнений: появились новая независимая переменная t и уравнение для неё.

4. Область высоких скоростей

Рассмотрим динамику электрон-ионных столкновений в каждой из областей (см. рис. 3) подробнее. Начнём с области высоких скоростей электронов, $v \gg v_{\text{osc}}$. В этом случае влиянием внешнего поля $\mathbf{E}$ на траекторию частицы можно пренебречь и рассматривать её движение только в кулоновском потенциале иона:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (58)$$

Решение задачи движения в кулоновском потенциале, называемой задачей Резерфорда, хорошо известно [36]. Нас будут интересовать только инфинитные траектории. Движение в этом случае происходит по гиперболе, которую удобно представить в параметрическом виде:

$$r = b_v(\varepsilon \cosh \xi - 1), \quad \varphi = \frac{\varepsilon - \cosh \xi}{\varepsilon \cosh \xi - 1}, \quad (59)$$

$$t = \frac{b_v}{v}(\varepsilon \sinh \xi - \xi),$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 + \rho^2/b_v^2}$ — эксцентриситет орбиты, параметр ξ пробегает значения⁶ от $-\infty$ до ∞ . Минимальное

⁵ Поскольку в этом разделе не обсуждаются кинетические эффекты, f в (55) обозначает просто некоторую функцию, никоим образом не связанную с функцией распределения.

⁶ Параметр ξ , связанный с временем t соотношением $dt = r d\xi$, имеет смысл фиктивного времени при переходе к координатам Леви-Чивиты.

расстояние от частицы до иона выражается как

$$r_{\min} = b_v(\varepsilon - 1) = \sqrt{b_v^2 + \rho^2} - b_v \approx \begin{cases} \rho, & \rho \gg b_v, \\ \frac{\rho^2}{2b_v}, & \rho \ll b_v. \end{cases} \quad (60)$$

Первое приближённое равенство означает, что прицельный параметр почти не изменяется при $\rho \gg b_v$, т.е. частица движется почти по прямой. Второе указывает на сильное притяжение частицы ионом при $\rho \ll b_v$, так что минимальное расстояние до иона оказывается много меньше начального прицельного параметра. В частности, решая обратную задачу — с каким прицельным параметром (или, что то же самое, с какой площади) должны начать движение частицы, чтобы попасть в область радиусом a , — легко получить формулу

$$\rho_{\text{gr}} = \sqrt{(a + b_v)^2 - b_v^2} \underset{a \ll b_v}{\approx} \sqrt{2ab_v} \gg a. \quad (61)$$

Уже из соотношения (61) можно получить оценку для эффективного сечения при высоких ($r_a \ll b_v$) частотах:

$$\sigma_{\text{eff}} \geq 2\pi r_a b_v, \quad r_a \ll b_v. \quad (62)$$

Действительно, изменить свою энергию могут только частицы, приблизившиеся к иону на расстояние, меньшее радиуса адиабатичности $r_a = v/\Omega$. Из формулы (61) при малых r_a ($r_a \ll b_v$) видно, что частицы собираются с площади $\pi \rho_{\text{gr}}^2 \approx 2\pi r_a b_v$. Соответственно, эффективное сечение должно быть не менее σ_{eff} , определяемого оценкой⁷ (62). Эта величина значительно, в b_v/r_a раз ($b_v/r_a \gg 1$), превышает значение эффективного сечения r_a^2 , полученное из малоуглового приближения [15].

В дальнейшем рассмотрении будет полезным выражение для изменения скорости частицы Δv при рассеянии на кулоновском центре:

$$\Delta v = -\frac{\mathbf{p} v}{\rho} \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} - \mathbf{v} \frac{2}{\varepsilon^2} = -\frac{2\mathbf{p} v^3}{1 + \rho^2 v^4} - \frac{2\mathbf{v}}{1 + \rho^2 v^4}. \quad (63)$$

При этом угол рассеяния выражается как $\theta = \pi - 2 \arccos(1/\varepsilon) = 2 \arctan(b_v/\rho)$. Подставляя его в выражение для транспортного сечения (30), получим хорошо известную формулу Резерфорда [36]:

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{2\pi A}{v^4}, \quad (64)$$

справедливую и в рамках квантовой механики [57].

Из траектории частицы (59) можно найти энергию, излучаемую одной частицей в диапазоне частот $d\omega$ [49]:

$$dE_{\omega} = \frac{\pi \omega^2}{6c^3} \left(H'^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} H^2 \right) d\omega.$$

Здесь c — скорость света в вакууме, $H = H_{iv}(iv\varepsilon)$ — функция Ханкеля 1-го рода ранга iv , $H' = H'_{iv}(iv\varepsilon)$ — её производная по аргументу $v = b_v/r_a(\omega) \equiv \omega/v^3$. С помощью интегрирования по многим частицам это позволяет найти сечение излучения (31) при рассеянии пучка

параллельно движущихся частиц [49]:

$$\chi_{\text{inc}} = \frac{4\pi^2 \omega}{3c^3 v^5} |H_{iv}(iv) H'_{iv}(iv)|. \quad (65)$$

Используя формулу $H_{iv}(iz) = -(2i/\pi) \exp(v\pi/2) K_{iv}(z)$, сечение (65) можно записать также в виде

$$\chi_{\text{inc}} = \frac{16}{3} \frac{\Phi(v)}{c^3 v^2}, \quad \Phi(v) = v \exp(v\pi) K_{iv}(v) \frac{K_{1-iv}(v) + K_{1+iv}(v)}{2}. \quad (66)$$

Здесь $K_{iv}(z)$ — модифицированная функция Бесселя ранга iv .

Рассмотрим особо случаи малых и больших частот. При малых частотах, $v \ll 1$, можно приближённо положить $K_{iv}(v) \approx K_0(v) \approx \ln[2/(\gamma v)]$ и $K_{1+iv}(v) \approx 1/v$, где γ — экспонента постоянной Эйлера, $\gamma \approx 1,78107 \dots$ С учётом этого находим

$$\chi_{\text{inc}} \approx \frac{16}{3v^2 c^3} \left(1 + \frac{\pi b_v}{r_a} \right) \ln \frac{2r_a}{\gamma b_v}, \quad b_v \ll r_a. \quad (67)$$

При больших частотах, $v \gg 1$, можно воспользоваться разложением

$$H_{iv}(iv) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{v} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$H'_{iv}(iv) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{v} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \frac{7}{90} \left(\frac{6}{v} \right)^{1/3} \right]$$

(где Γ — гамма-функция), подставив которое в формулу (65), получим для эффективного сечения на больших частотах

$$\chi_{\text{inc}} \approx \frac{16\pi}{3\sqrt{3} c^3 v^2} \left(1 + \frac{7}{90} \left(\frac{6r_a}{b_v} \right)^{2/3} \right), \quad b_v \gg r_a. \quad (68)$$

В формулах (67) и (68) был специально оставлен следующий порядок разложения по малому параметру (ср. с соответствующими формулами в [49]) для их дальнейшего использования при поиске эффективной частоты столкновений.

Для определения эффективной частоты столкновений в рассматриваемой области $v \gg v_{\text{osc}}$ удобно воспользоваться формулой, связывающей спонтанное (тормозное) и вынужденное (изменение энергии частицы) излучение для изотропного распределения по скоростям,

$$v_{\text{eff}} = \frac{\pi^2 c^3 n_i}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (\chi_{\text{inc}} v^2), \quad (69)$$

полученной в работе [58] исходя из принципа детального равновесия (см. также [5, 59]). Удобство формулы (69), выведенной из квантовых соображений, состоит в том, что она связывает два неклассических процесса: дипольное излучение частицы при движении по траектории и изменение энергии частицы под действием слабого внешнего поля.

В нашем случае это позволяет найти эффективную частоту столкновений в случае сложной траектории частицы, не прибегая к громоздким выкладкам (в классическом или квантовом подходе). Применяя (69) к выражению для сечения излучения (66), можно найти величину v_{eff} :

$$v_{\text{eff}} = \frac{16\pi^2 n_i}{3v^3} v \frac{d\Phi(v)}{dv}. \quad (70)$$

⁷ В действительности частицы, подлетевшие ближе к иону, сильнее изменяют свою энергию, чем малоугловые, поэтому эффективное сечение оказывается ещё больше.

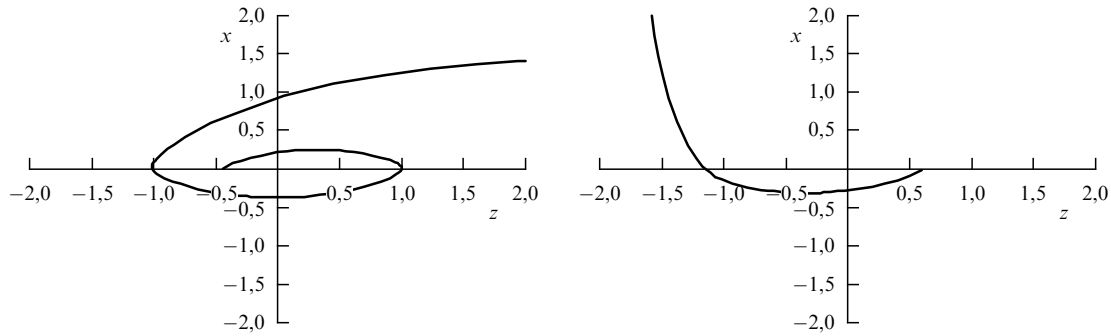


Рис. 4. Вид траекторий электрона, захваченных усреднённым потенциалом, в случае линейной поляризации поля. Координаты нормированы на радиус r_{osc} .

В случае малых и больших v выражение для эффективной частоты столкновений (70) упрощается:

$$v_{\text{eff}} \approx \begin{cases} 9,45 n_i v b_v^2 \ln \frac{r_a}{b_v}, & r_a \gg b_v, \\ 2,94 n_i v b_v^2 \left(\frac{r_a}{b_v}\right)^{2/3}, & r_a \ll b_v. \end{cases} \quad (71)$$

Первая формула в (71) представляет собой хорошо известный результат теории малоуглового рассеяния. Вторая формула, которая описывает столкновения в случае сильного притяжения, была получена исходя из квантово-механических представлений в работах [50, 51]⁸. Заметим, что вследствие значительного притяжения частота столкновений при высоких частотах убывает значительно медленнее, чем $1/\omega^2$, как предсказывается в рамках теории малоуглового приближения [15], и для описания плазмы необходимо учитывать рассеяние на большие углы.

5. Область усреднённого описания

В случае сильного ($v_{\text{osc}} \gg v$) и высокочастотного ($\Omega \gg 1$) поля

$$b_v \gg b_{\text{osc}} \gg r_{\text{osc}} \quad (72)$$

и уравнения движения (47) могут быть упрощены. Разложим для этого потенциал правой части уравнения в ряд Фурье:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{osc}}(t)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(\mathbf{r}) \exp(i\Omega n t), \quad (73)$$

$$U_n(\mathbf{r}) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \frac{\exp(-i\Omega n t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{osc}}|} dt.$$

В рамках условия (72) изменение скорости частицы за период поля накачки $2\pi/\Omega$ мало. Тогда в ряде (73) можно ограничиться только нулевым членом

$$U_0(\mathbf{r}) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \frac{dt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{osc}}|}, \quad (74)$$

называемым также *усреднённым потенциалом*.

В случае линейной поляризации интеграл (74) берётся аналитически [14]:

$$U_0^{\text{LP}}(\mathbf{r}) = -\frac{2}{\pi \sqrt{r_+ r_-}} K \left[\sqrt{\frac{4r_{\text{osc}}^2 - (r_+ - r_-)^2}{4r_+ r_-}} \right], \quad (75)$$

где $r_{\pm} = \sqrt{r_{\perp}^2 + (z \pm r_{\text{osc}})^2}$, $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $K(\mu)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Как и ожидалось, усреднённый потенциал (75) обладает аксиальной симметрией относительно оси z и является чётной функцией z . В точках остановки $r_{\pm} = 0$ потенциал имеет корневую особенность $U_0^{\text{LP}} \approx -1/\sqrt{r_{\text{osc}} r_{\pm}}$, а на оси симметрии при $|z| < r_{\text{osc}}$ — логарифмическую особенность

$$U_0^{\text{LP}} \approx -\frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{r_{\perp} r_{\text{osc}}}{r_{\text{osc}}^2 - z^2} \right) (r_+ r_-)^{-1/2}.$$

Однако больший интерес представляет разложение усреднённого потенциала на далёких расстояниях ($r \gg r_{\text{osc}}$):

$$U_0^{\text{LP, CP}} \approx -\frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{r_{\text{osc}}^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{4} + \dots \right), \quad (76)$$

где θ — угол между скоростью электрона и осью z . Первый член разложения представляет собой кулоновское поле иона, а последующие члены отвечают за нецентральный характер усреднённого потенциала.

Действительно, из условия применимости усреднённого описания (72) следует, что имеет смысл рассматривать движение со скоростями $v \ll \Omega$, т.е. при движении частиц существенны расстояния $r \gg r_{\text{osc}}$. Из разложения (76) видно, что движение большинства частиц продолжает хорошо описываться резерфордскими формулами. Новым является возникновение потенциала более высокой степени, $\sim 1/r^3$, в котором становятся возможными *захват* пролётных частиц и падение частиц на центр даже при ненулевом прицельном параметре.

При приближении к центру разложение (76) становится неприменимым. Однако движение в точном потенциале имеет тот же характер (рис. 4) притяжения к иону⁹.

⁸ Результат в [50, 51] отличается от полученного нами численным коэффициентом.

⁹ Формально такое движение не противоречит теореме Лиувилля о сохранении фазового объёма, так как по мере стягивания частиц к иону, $V_r \rightarrow 0$, их скорость возрастает, $V_v \rightarrow \infty$, так что полный фазовый объём $V_r V_v$ сохраняется. Такое движение не противоречит и сохранению момента движения, поскольку потенциал не является центрально-симметричным и центробежная сила уже не может компенсировать неточечную особенность потенциала.

При этом притяжение в точном потенциале оказывается более сильным, чем в аппроксимированном потенциале (76).

Сечение захвата частиц можно оценить из формулы (61) как сечение, при котором минимальное расстояние равно r_{osc} :

$$\sigma_{\text{cap}} \simeq \pi \rho_{\text{gr}}^2 \simeq 2\pi b_v r_{\text{osc}}, \quad b_v \gg b_{\text{osc}} \gg r_{\text{osc}}. \quad (77)$$

Легко увидеть, что с уменьшением скорости частиц v или частоты поля Ω это сечение возрастает.

Возвращаясь к полной динамической задаче (73), можно заметить, что сечение захвата (77) даёт оценку снизу для эффективного сечения σ_{eff} . Действительно, частицы, попавшие на особенность усреднённого потенциала в динамической задаче, испытают рассеяние на большие углы и изменят свою энергию на величину порядка осцилляторной энергии mv_{osc}^2 . Таким образом, имеем оценку эффективного сечения

$$\sigma_{\text{eff}} \geq \sigma_{\text{cap}} \simeq 2\pi b_v r_{\text{osc}}, \quad b_v \gg b_{\text{osc}} \gg r_{\text{osc}}. \quad (78)$$

На самом деле эффективное сечение больше. Действительно, в области усреднённого описания (72) выполняется неравенство $b_v \gg r_a$. Оно позволяет использовать результат для эффективного сечения из задачи Резерфорда, поскольку, как отмечалось выше, движение частицы при $r \gg r_{\text{osc}}$ близко к движению в стационарном кулоновском потенциале:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{v_{\text{eff}}}{n_i v} \approx 2,94 b_v^2 \left(\frac{2r_a}{b_v} \right)^{2/3} \gg 2\pi b_v r_{\text{osc}}. \quad (79)$$

Последнее связано с тем, что частицы, для которых влияние осциллирующего поля существенно, собираются со значительно меньшей площади, $\sim \pi b_v r_{\text{osc}}$, чем частицы, дающие вклад в эффективное сечение, и не могут существенно повлиять на интегральные характеристики рассеяния.

Разложение потенциала (76) позволяет оценить транспортное сечение. Действительно, рассеяние частиц на большие углы будет происходить при равенстве кинетической и потенциальной энергий. При выполнении условия $r_{\text{osc}} \ll b_v$ это будет иметь место при прицельных параметрах $r_{\text{min}} \approx b_v \pm (3 \cos^2 \theta - 1) r_{\text{osc}}^2 / (4b_v)$. Транспортное сечение тогда выражается как величина

$$\sigma_{\text{tr}} \approx \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{b_v^2 d\rho}{\rho} = b_v^2 \ln \frac{r_{\text{max}}}{b_v \pm (1/4)(3 \cos^2 \theta - 1) r_{\text{osc}}^2 / b_v}, \quad (80)$$

близкая к резерфордовскому сечению (64). Малая анизотропная зависимость от амплитуды поля $r_{\text{osc}}^2 (3 \cos^2 \theta - 1) / b_v$ входит лишь под знак логарифма. Этот результат связан с тем, что основной интеграл в транспортном сечении набирается на далёких столкновениях, которые хорошо описываются резерфордовскими траекториями. Более того, так как в сечение некогерентного излучения, как и в транспортное сечение, основной вклад дают дальние столкновения, можно показать, что и сечение некогерентного излучения будет логарифмически слабо зависеть от поля накачки. Численные расчёты (см. раздел 8) показывают, что эти результаты сохраняются и в низкочастотных полях, $b_{\text{osc}} \leq r_{\text{osc}}$.

Таким образом, формулы для эффективного (79) и транспортного (80) сечений показывают, что влияние внешнего слабого высокочастотного поля ($\Omega \gg 1$) на

процессы рассеяния в области усреднённого описания ($b_v \gg b_{\text{osc}} \gg r_{\text{osc}}$) несущественно, и рассеяние частицы в этом случае можно рассматривать как рассеяние на стационарном кулоновском потенциале, т.е. в рамках задачи Резерфорда.

6. Область многократных возвратов

Итак, рассмотрим, что же нового по сравнению с малоугловым приближением появляется при малых дрейфовых скоростях частиц при столкновениях в сильных полях, когда

$$b_{\text{osc}} \ll r_{\text{osc}}, \quad v \ll v_{\text{osc}}. \quad (81)$$

Главным является существенное искривление траекторий в процессе рассеяния. Это приводит к новым эффектам: 1) существенному увеличению сечений рассеяния вследствие притяжения поперёк начальной скорости пучка; 2) появлению группировки электронов в направлении вдоль пучка. Остановимся на них более подробно. В этом разделе представлено только качественное описание происходящих явлений. Количественные оценки приведены в разделе 7.

Рассмотрим вначале притяжение поперёк направления осцилляторной скорости, основным следствием которого являются увеличение изменения энергии частиц и, соответственно, возрастание всех сечений рассеяния. На рисунке 5 приведены в одном масштабе величины изменения энергии (здесь и далее более тёмные области соответствуют большему изменению энергии (чёрный цвет отвечает осцилляторной энергии), более светлые — меньшему (белый цвет означает отсутствие изменений энергии)) в зависимости от прицельных параметров, полученные численно и в рамках малоуглового приближения. Из рисунка видно, что наряду с частицами, испытавшими "лобовые" столкновения (чёрный кружок в центре размером b_{osc}), изменение энергии того же порядка испытывают и частицы с прицельными парамет-

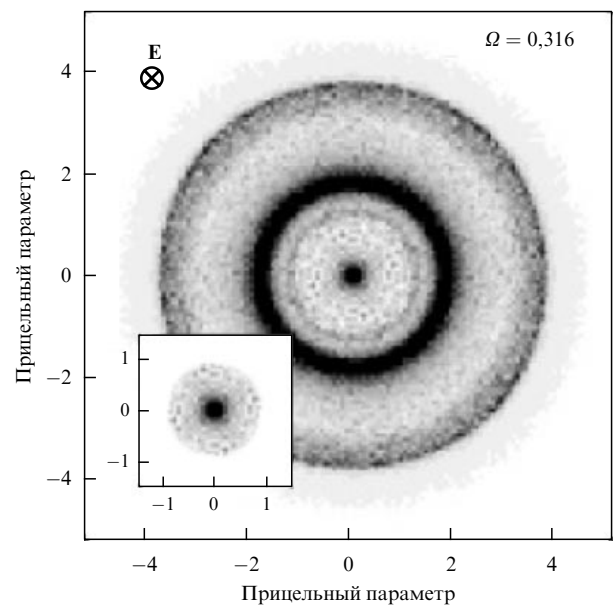


Рис. 5. Зависимость изменения энергии от прицельных параметров при $\Omega = 0,316$ и $v = 1$. На вставке показано изменение энергии в том же масштабе, полученное в рамках малоуглового приближения.

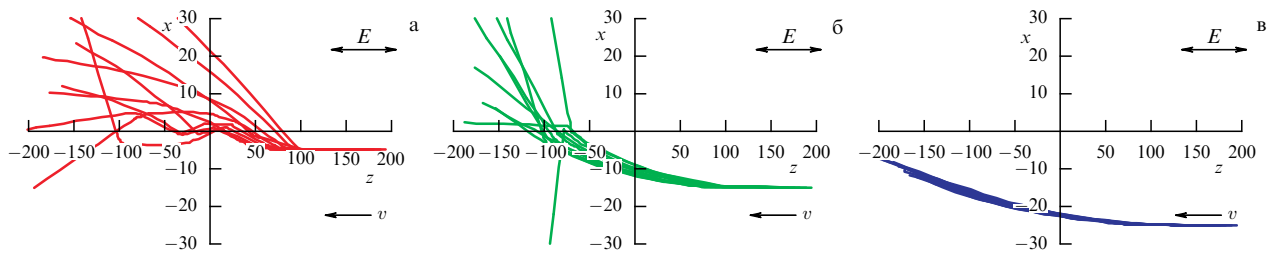


Рис. 6. Набор дрейфовых траекторий частиц с различными начальными фазами для частиц, движущихся внутри (а), на границе (б) и вне (в) области притяжения. (Продольное падение, линейная поляризация, $\Omega = 0,1$ и $v = 1$.)

рами, много большими b_{osc} . Такой эффект можно назвать эффектом "парашюта" [37, 38], поскольку частицы плавно, в течение времени нескольких пролётов, приближаются к иону (уменьшают свой мгновенный прицельный параметр). В традиционных моделях мы бы увидели только лобовые столкновения. Изменение энергии частиц с концентрических колец являлось бы экспоненциально малым из-за адиабатичности движения далёких частиц.

Из рисунка 5 видно и второе следствие поперечного притяжения: зависимость изменения энергии от прицельных параметров не является взаимно однозначной функцией. В сильных полях, $\Omega \ll 1$, при малых дрейфовых скоростях, $v < v_{\text{osc}}$, реализуется ситуация, когда одно и то же изменение энергии получают частицы с разными прицельными параметрами. Более того, одну и ту же конечную скорость могут иметь частицы с разными прицельными параметрами. То есть реализуется многопоточность, отсутствующая в слабых полях. Наряду с этим возникает стохастичность: малое изменение начальных параметров приводит к сильному разбеганию траекторий и различию конечных скоростей частиц (рис. 6). Так, если далёкие частицы движутся почти по одной линии и хорошо подходят для описания в рамках малоуглового приближения (рис. 6в), то уже на границе области притяжения наблюдается сильный разброс траекторий. Внутри области притяжения траектории ведут себя стохастическим образом (рис. 6а). Граница области притяжения может быть оценена численно в ЛП-поле для $\theta = 0$:

$$\rho_{\text{attr}} = \frac{1,5}{\Omega v} \gg b_{\text{osc}} = \Omega^2. \quad (82)$$

Отметим, что граница области притяжения одновременно является и границей сильного изменения энергии частиц. Действительно, для того чтобы значительно изменить свою энергию, частице надо приблизиться к иону, но частицы вне области притяжения к иону близко подойти к нему не могут, следовательно, они не могут сильно изменить и свою энергию.

Заметим, что граница области притяжения при $v \leq 1$ оказывается больше радиуса адиабатичности $r_a = v/\Omega$. В этом состоит один из наиболее нетривиальных результатов решения задачи энергообмена электронов с сильным полем, который заключается в отсутствии даже при больших прицельных расстояниях области, соответствующей так называемому кулоновскому логарифму (41).

Напомним, как возникает эта область в слабых полях. Если осцилляторный радиус электрона мал по сравнению с расстоянием до кулоновского центра, т.е. прицельные параметры достаточно велики, то для решения

задачи рассеяния достаточно разложить потенциал в уравнении для дрейфового центра (47) по степеням осцилляторного радиуса и учесть первый поправочный член, соответствующий дипольному приближению. При этом собственно траектория дрейфового центра определяется статическим полем иона, а энергообмен с полем — работой осциллирующего дипольного поля вдоль этой траектории. Эта задача легко решается [5] на прицельных расстояниях, принадлежащих области существенно неадиабатического взаимодействия, $\rho < v/\Omega$. Можно убедиться в том, что начиная со сравнительно малых прицельных параметров, соответствующих резерфордскому радиусу $b_v = 1/v^2$, оценённому по дрейфовой скорости, и вплоть до расстояний, соответствующих границе зоны неадиабатичности, $r_a = v/\Omega$, для усреднённого по фазам влёта энергообмена с полем в зависимости от прицельного параметра имеет место оценка

$$\Delta w \simeq m v_{\text{osc}}^2 \frac{b_v^2}{\rho^2} \exp\left(-\frac{\Omega \rho}{v}\right). \quad (83)$$

Экспонента в правой части (83) соответствует адиабатическому пролёту электрона через область взаимодействия при прицельных параметрах, больших размера области неадиабатичности. Отсюда видно, что при интегрировании по прицельным параметрам, $\int \Delta w \rho d\rho$, появляется логарифмический множитель, обусловленный "обрезанием" энергообмена на этой границе.

Теперь обсудим, как эта картина изменяется в сильных полях. В области прицельных параметров, соответствующих эффекту "парашюта", прицельный параметр изменяется сильно и эта область во многом аналогична области малых прицельных параметров в слабых полях. Существенно, что в этой области дрейфовые траектории сильно расходятся в зависимости от фазы поля, в отличие от дрейфовых траекторий в случае слабых полей. При дрейфовых скоростях, меньших единицы (в безразмерных переменных), граница области притяжения оказывается дальше границы области адиабатичности. Поэтому сразу за ней начинается экспоненциальное обрезание. При больших дрейфовых скоростях, $1 < v < 1/\Omega$, закон убывания вне области захвата является степенным и постепенно переходит в $1/\rho^2$. То есть по мере возрастания скорости в этой области мы постепенно переходим к режиму с кулоновским логарифмом.

Похожая ситуация имеет место и в случае неперодического падения, $\theta \neq 0$ (рис. 7). Здесь концентрические окружности разбиваются на дуги, расстояние между которыми уменьшается. Как и следует ожидать, эффект усиливается с уменьшением начальной скорости. При больших скоростях основной вклад дают лобовые стол-

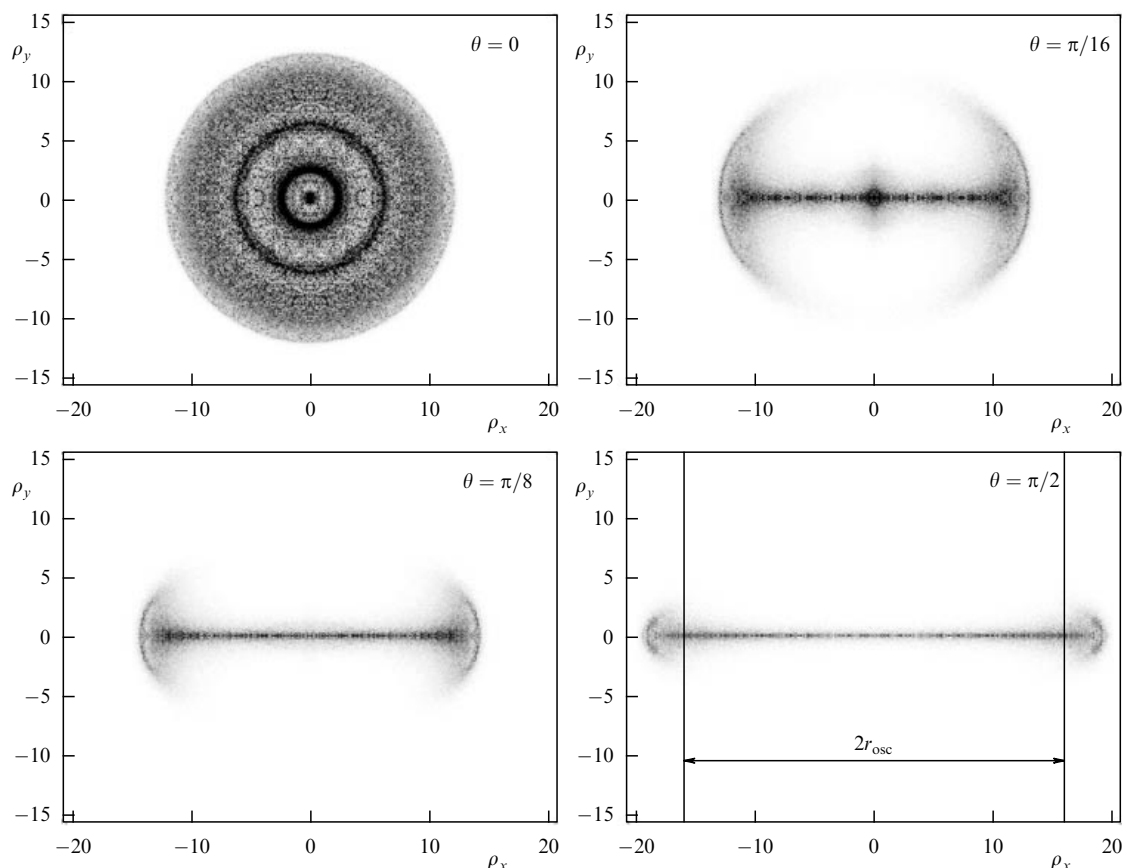


Рис. 7. Зависимость изменения энергии от прицельных параметров для разных углов падения θ при линейной поляризации и $\Omega = 0,25$, $v = 0,5$. Точками изображена проекция осцилляций иона на плоскость прицельных параметров.

кновения и притяжение несущественно. С уменьшением скорости "отрезок" (тонкая полоска на рис. 7) уширяется, кроме того, на его краях появляются дуги. В случае продольного падения дуги замыкаются в концентрические круги (см. рис. 7). То есть при малых скоростях дрейфовую траекторию электрона уже нельзя считать прямолинейной и необходимо учитывать *искривление дрейфовой* траектории частицы при движении вблизи кулоновского центра.

Аналогичная ситуация наблюдается и при циркулярной поляризации (рис. 8), только в случае ЦП поперечное падение является аналогом продольного падения при линейной поляризации. При поперечном падении в случае циркулярной поляризации электрон пролетает мимо многократно осциллирующего иона. В результате наиболее ярко проявляются эффекты притяжения за счёт периодических возвратов, как это имеет место в продольном падении при ЛП. В случае продольного падения при ЦП эффекты притяжения ослаблены.

Вновь, как и в случае ЛП, проявляется расщепление эллипса (см. рис. 8). Механизм расщепления такой же, как и механизм появления концентрических колец в продольном падении для ЛП. Механизм расщепления связан с тем, что заметное изменение энергии получают не только электрон, влетевший непосредственно в ион, но и электроны, притянувшиеся к иону за несколько полупериодов осцилляций. Заметим, что картина является несимметричной относительно оси x , вследствие того что полная скорость при пролёте мимо иона оказывается разной на двух концах "отрезка". На одном его

конце полная скорость равна сумме осцилляторной и дрейфовой скоростей, а на другом — их разности.

Одним из следствий искривления траекторий частиц под действием кулоновского потенциала может служить появление сингулярности в распределении по минимальному расстоянию $r_{\min}$ до иона — поверхностная плотность частиц в точке, где притягивающая сила иона максимальна. В случае применимости малоуглового приближения эта поверхностная плотность должна быть постоянной, равной поверхностной плотности на плоскости при $\zeta = -\infty$. Согласно результатам численного моделирования поверхностная плотность убывает как $1/r_{\min}$ при малых $r_{\min}$ (рис. 9), что ещё раз подтверждает необходимость учёта искривления траекторий частиц при рассеянии. При известной зависимости $n(r_{\min})$ и предположении, что основное изменение энергии происходит скачком при $r = r_{\min}$, можно оценить эффективное сечение σ_{eff} (см. раздел 7). Последнее может быть использовано для контроля точности расчётов.

Как говорилось выше, кулоновское поле иона вызывает не только сжатие "пучка" частиц (поперечное притяжение), но и совместно с периодическим полем накачки группирование частиц вдоль "пучка". Оказывается, что практически все столкновения, особенно столкновения с большим изменением энергии, происходят при вполне определённых фазах поля накачки (рис. 10). Эффект этот тем более необычен, что он имеет место при рассеянии разных электронов на различных случайно расположенных ионах с единственным синхронизирующим механизмом — электрическим полем волны накачки. В плазме

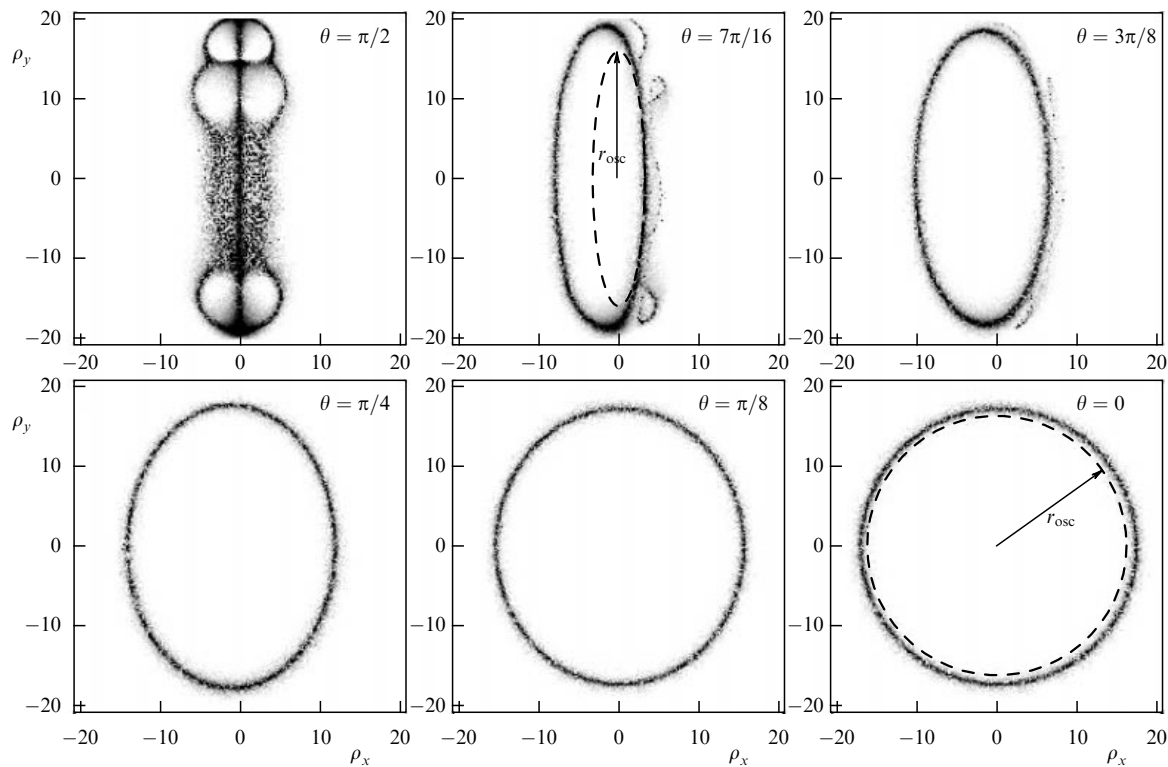


Рис. 8. Зависимость изменения энергии от прицельных параметров для разных углов падения θ при ЦП и $\Omega = 0,25$, $v = 0,5$.

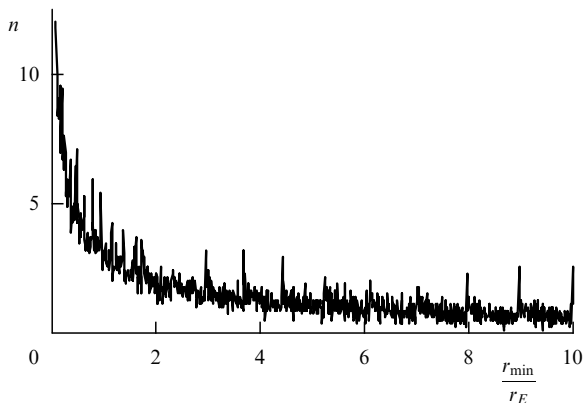


Рис. 9. Распределение частиц по минимальному расстоянию до иона.

как будто возбуждается волна "вспышек" тормозного излучения, бегущая вместе с волной поля накачки.

Рисунок 10 аналогичен рис. 5, но на нём учтена аксиальная симметрия задачи, позволившая вывести зависимость величин и от начальной фазы влёта частиц φ . На рисунке 10а приведена зависимость энергии, а на рис. 10б — фазы столкновения от начальной фазы и прицельного параметра рассеивающихся электронов. Очевидно, что эти зависимости периодичны по начальной фазе в силу периодичности поля накачки. Как отмечалось выше, в сильных полях вследствие эффекта "парашюта" электрон может сильно изменить свою энергию (более тёмный цвет на рис. 10а), даже если он изначально имел прицельный параметр, много больший резерфордского радиуса, оценённого по осцилляторной скорости частицы, b_{osc} (тонкая тёмная полоса при $\rho \approx 0$ в нижней части рис. 10а). Значительно более неожиданный факт демонстрирует рис. 10б, на котором одинаковым фазам момента последнего (наиближайшего) прохождения

электрона вблизи иона соответствует одинаковый цвет. Видно, что все столкновения из области притяжения происходят практически только при двух фазах поля. Это и есть эффект группирования электронов.

Группирование заключается в том, что, несмотря на равномерное начальное распределение электронов по фазам поля, все электроны в результате адиабатического притяжения пролетают мимо иона почти в одной и той же фазе поля. На рисунке 11 приведена зависимость фазы поля в момент "последнего" столкновения (момент прохождения электрона на ближайшем расстоянии от иона), называемая в дальнейшем *фазой столкновения*, от его начальной фазы. Все электроны начинают движение вдоль поля с прицельного расстояния $\rho = 3,2$. Видно, что собственно энергообмен с полем происходит в узкой полосе фаз поля. "Ступеньки" на этой зависимости соответствуют сдвигу моментов столкновения на половину периода поля. С возрастанием дрейфовой скорости группирование электронов по фазам исчезает, т.е. столкновения начинают происходить в произвольные, не зависящие от фазы внешнего поля моменты времени.

Степень группирования демонстрирует функция распределения по фазе столкновения на рис. 12. Видно, что с возрастанием отношения v_{osc}/v_T все электроны собираются в два достаточно узких максимума вблизи максимумов осцилляторной скорости. Ширина этих максимумов пропорциональна отношению v_T/v_{osc} . Из рисунка 12а видно, что при большой тепловой скорости электронов, $v_T > v_{\text{osc}}$, эффект фазового группирования отсутствует и становится применимой традиционная модель столкновений для слабого поля.

Ширина пиков на функции распределения электронов по фазе столкновения определяет ширину спектра когерентного излучения. Чем уже пики на функции распределения, тем шире спектр когерентного излучения (ср. с

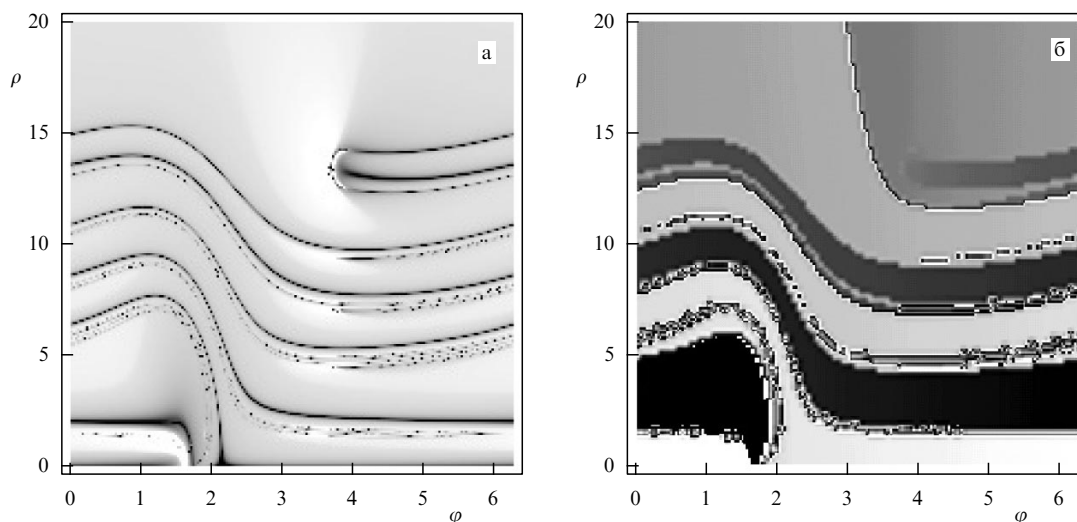


Рис. 10. Зависимость изменения энергии (а) и фазы столкновения (б) от прицельного параметра ρ и начальной фазы влёта φ рассеивающихся электронов для $v = 1$ и $\Omega = 0,1$ (продольное рассеяние, $\mathbf{p}_0 \parallel \mathbf{E}$).

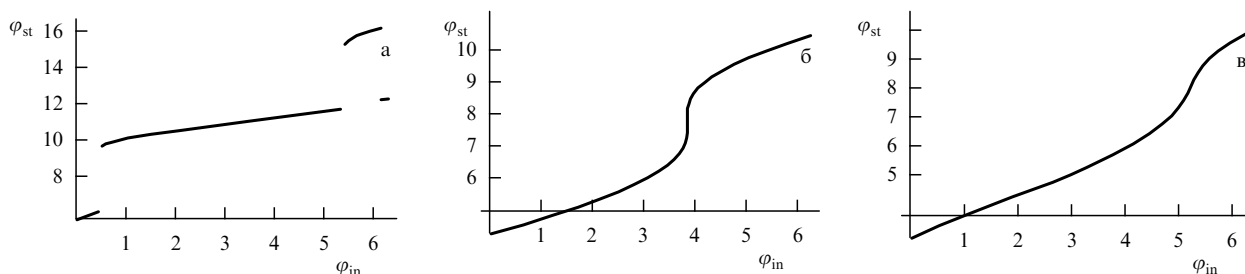


Рис. 11. Зависимость фазы столкновения от начальной фазы для значений скоростей (а) $v = v_{\text{osc}}/2$, (б) $v = v_{\text{osc}}$ и (в) $v = 3v_{\text{osc}}/2$ при $\Omega = 0,316$.

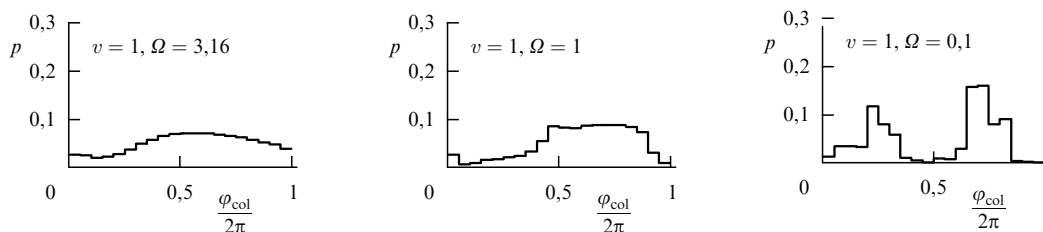


Рис. 12. Распределение частиц по фазам столкновения для продольного падения в зависимости от параметра Ω при $v = 1$ и линейной поляризации поля накачки.

рис. 25 в разделе 8). В соответствии с вышесказанным число пиков возрастает с увеличением отношения v_{osc}/v_T . Группировка, как и ожидалось, полностью исчезает при $v_T > v_{\text{osc}}$. Похожая ситуация имеет место в случае циркулярной поляризации. В частности, именно с эффектом группирования электронов связано появление генерации когерентного излучения при циркулярной поляризации поля накачки (см. раздел 8). Насколько известно авторам, это единственный механизм генерации когерентного излучения с ЦП-полем накачки в прозрачной плазме.

Относительно качественной стороны эффекта группирования можно лишь заметить, что, поскольку угол рассеяния электрона на каждом пролёте зависит от его скорости, которая в свою очередь зависит от фазы поля в момент пролёта электрона на ближайшем расстоянии от иона, эффективность энергообмена, определяемая фазой

поля в момент столкновения (последнего прохождения вблизи иона), целиком зависит от фазы поля. По сути дела, в этом и состоит механизм сепарирования электронов по фазам поля. Результатом его действия является приход почти всех электронов к иону в определённых фазах внешнего поля! Это и есть эффект группирования по фазам.

7. Притяжение с учётом корреляций

Представленные в разделе 6 результаты численного моделирования можно объяснить исходя из относительно простых аналитических соображений. Действительно, в сильных полях (81) размах осцилляций,

$$r_{\text{osc}} = \frac{1}{\Omega^2} \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} \infty,$$

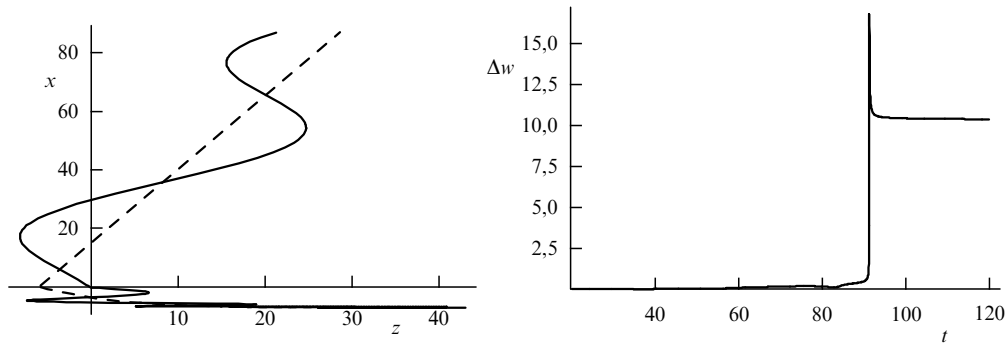


Рис. 13. Траектория движения электрона в кулоновском поле.

очень велик, т.е. электрон большую часть времени движется вдали от кулоновского центра по осциллирующей под действием поля накачки траектории. И только один или два раза за период электрон может подлететь к иону и за очень малое время, $\sim b_v/v_{\text{osc}} \ll 2\pi/\omega_0$, рассеяться на нём. Соответственно, дрейфовая траектория электрона представляет собой ломаную линию (см. рис. 6). Учитывая условие малости времени столкновения по сравнению с периодом поля накачки, можно выделить два временных масштаба, соответствующих: 1) мгновенному рассеянию на кулоновском центре, в процессе которого поле накачки несущественно; 2) движению по осциллирующей траектории без учёта кулоновского притяжения¹⁰. В этом заключается идея низкочастотного приближения [31]. Однако при рассмотрении движения частицы не будет накладываться ограничения на количество столкновений (ударов) электрона с ионом, тогда как в модели [31] предполагается только однократное столкновение. Более того, все качественно новые, необычные эффекты получаются только при учёте многих ударов. На траекторию частицы также не налагается каких-либо ограничений, кроме условия, что каждая частица пролетает вблизи иона за время, много меньшее периода поля, т.е. выполняется условие для мгновенного прицельного параметра

$$\frac{\rho}{V} \ll \frac{2\pi}{\omega_0} \iff \rho \ll r_{\text{osc}}. \quad (84)$$

Здесь, как и ранее, V — скорость в лабораторной системе координат (полная скорость частицы).

Отметим, что предположение об однократности удара электрона о ион в процессе столкновения, использованное в [31], эквивалентно приближению прямолинейных траекторий. Причина заключается в том, что в приближении однократного удара теряется информация о корреляциях движения электрона при пролётах над ионом в соседних периодах. Тем самым эффективное распределение электронов по прицельным параметрам становится однородным, для которого вклад электронов, рассеявшихся на большие углы, логарифмически мал.

Для описания системы в рамках низкочастотного приближения удобно использовать точечное отображение. Его идея заключается в том, что на непрерывной траектории $\zeta(t)$ (здесь, как и ранее, $\zeta = \{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ — совокуп-

ность координат и импульсов частицы) выделяется дискретный набор точек $\zeta_n = \zeta(nT)$, где n — целое число, T — некоторый промежуток времени. Связь точки с номером $n+1$ с точкой n описывается точечным отображением:

$$\zeta_{n+1} = \hat{M}[\zeta_n], \text{ или } \bar{\zeta} = \hat{M}[\zeta]. \quad (85)$$

Символом $\bar{\zeta}$ обозначено значение ζ через итерацию. Для периодической системы удобно выбрать промежуток времени T равным периоду $2\pi/\Omega$ внешнего поля.

В диапазоне параметров (81), (84) вид точечного отображения (85) заметно упрощается. Условие (81) соответствует тому, что радиус осцилляций r_{osc} велик, а условие (84) — тому, что изменение параметров при каждом пролёте происходит быстро на масштабах периода осцилляций (рис. 13). В этом случае, как говорилось выше, можно выделить два временных масштаба: медленный масштаб осцилляций электрона и быстрый масштаб изменения параметров электрона при ударе. Полагая, что последний масштаб очень мал (мгновенный удар), можно воспользоваться точным решением задачи Кеплера [36] и записать точечное отображение через период в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n t_c + \mathbf{v}_{n+1}(T - t_c), \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n - 2 \frac{V^3 \mathbf{p} + \mathbf{V}}{1 + \rho^2 V^4}, \end{aligned} \quad (86)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{\text{osc}}(t_c)$ и $\mathbf{R} = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_{\text{osc}}(t_c)$ — скорость и координата частицы в лабораторной системе координат в момент удара t_c , $\rho \equiv \mathbf{R} - \mathbf{V}(\mathbf{R}, \mathbf{V})/|V|^2$ — мгновенный прицельный параметр.

В случае, когда частица испытывает два "удара" о ион на периоде поля, суммарное отображение можно представить как последовательное применение двух отображений (86) с моментами столкновений, взятыми из первой и второй половины периода соответственно. С учётом предыдущего замечания можно говорить об отображении через половину периода π/Ω в случае линейной поляризации. Таким образом, величину "периода" можно записать в виде

$$T = \frac{\alpha\pi}{\Omega}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{для ЛП,} \\ 2, & \text{для ЦП.} \end{cases} \quad (87)$$

Отображение вида (86) имеет довольно сложный вид, но и оно не описывает весь процесс рассеяния частицы при наличии сильного поля накачки. Действительно, в

¹⁰ Учёт кулоновского притяжения для медленных частиц, $v \ll \Omega$, на больших расстояниях от иона можно, используя усреднённый потенциал (см. раздел 5).

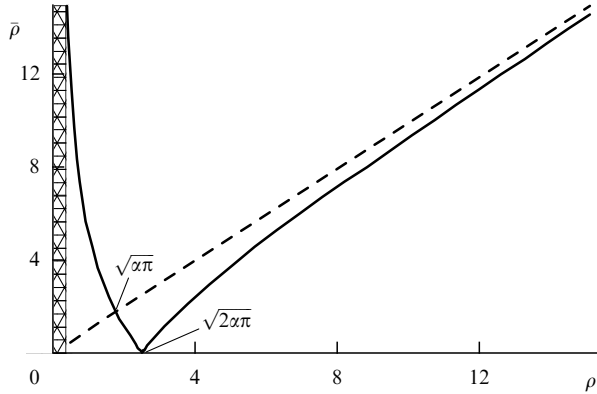


Рис. 14. Зависимость прицельного параметра $\bar{\rho}$ через итерацию отображения (89) от прицельного параметра ρ . Заштрихована область потерь частиц при рассеянии на большие углы.

точках остановки ($V(t) \ll v_{\text{osc}}$) условия построения отображения (86) нарушаются и необходимо, вообще говоря, использовать траектории из задачи рассеяния при наличии постоянного поля [60], которые сами по себе достаточно сложны.

Точечное отображение (86), несмотря на свой простой вид, достаточно сложно, и его анализ представляет собой отдельное исследование. Однако ряд свойств отображения (86) легко обнаружить, если пренебречь изменением продольной координаты и полного импульса $V \approx v_{\text{osc}}$ по малому параметру $v \ll v_{\text{osc}}$. Это приводит к отображению для поперечной координаты ρ и скорости $u = v_{\perp}/\Omega$:

$$\bar{\rho} = \rho + \alpha\pi\bar{u}, \quad (88)$$

$$\bar{u} = u - \frac{2}{\rho}$$

с производящей функцией $S(\rho, \bar{u}) = \rho\bar{u} + \alpha\pi\bar{u}^2 + 2\ln\rho$.

Пренебрегая в (88) смещением частицы поперёк электрического поля из-за дрейфовой скорости $u \ll 2\pi/\rho$ (наиболее легко это реализуется при продольном рассеянии), отображение (88) можно представить в виде отображения для изменения только одной переменной — локального прицельного параметра $\rho \approx \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\bar{\rho} = \left| \rho - \frac{2\alpha\pi}{\rho} \right|. \quad (89)$$

Напомним, что α определяется формулой (87). Графически отображение (89) показано на рис. 14. Отображение (89), как и отображение (86), не описывает рассеяния частиц на большие углы и их ухода из области рассеяния. Для учёта таких частиц можно ввести область потерь с шириной порядка $b_{\text{osc}} = \Omega^2 \rightarrow 0$ (заштрихованная область на рис. 14), при попадании в которую частицы считаются ушедшими из области рассеяния.

Рассмотрим свойства отображения (89).

7.1. Многопоточность

Прежде всего необходимо отметить появление многопоточности (см. раздел 6), состоящее в том, что в одну и ту же точку пространства одновременно приходят частицы, имеющие разные прицельные параметры. Найдём множество таких начальных прицельных параметров ρ_{ini} , при которых частицы попадают в область $\rho \leq b_{\text{osc}}$ и, соответственно, испытывают рассеяние на большие углы, сильное изменение энергии и т.д.

Простейший случай — частицы, имеющие малые начальные параметры $\rho_{\text{ini}} \leq b_{\text{osc}}$, т.е. частицы, которые "столкнулись" бы с ионом и в отсутствие осцилляций под действием поля накачки. Именно эти частицы описываются малоугловым приближением. Кроме них есть частицы, пролетевшие мимо иона один раз, рассеявшиеся на малый угол и попавшие в ион при возврате (см. рис. 1). То есть в одну и ту же точку пространства приходят частицы, начавшие движение, имея разные прицельные параметры. Это и есть многопоточность. Прицельный параметр ρ_1 , соответствующий этим частицам, можно найти из уравнения

$$\rho_1 - \frac{2\alpha\pi}{\rho_1} = 0 \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{2\alpha\pi}. \quad (90)$$

Именно таково значение прицельных параметров на первом максимуме (ср. рис. 15 с рис. 5).

Аналогичным образом можно найти значения начальных прицельных параметров $\rho_2, \rho_3, \dots$ для 2-го, 3-го и т.д. максимумов, появляющихся после 2-го, 3-го и т.д. возврата частицы к иону. Полное число максимумов N (или, что то же самое, пролётов над ионом) можно оценить по формуле

$$N \approx \frac{r_{\text{osc}}}{vT} = \frac{v_{\text{osc}}}{\alpha v}. \quad (91)$$

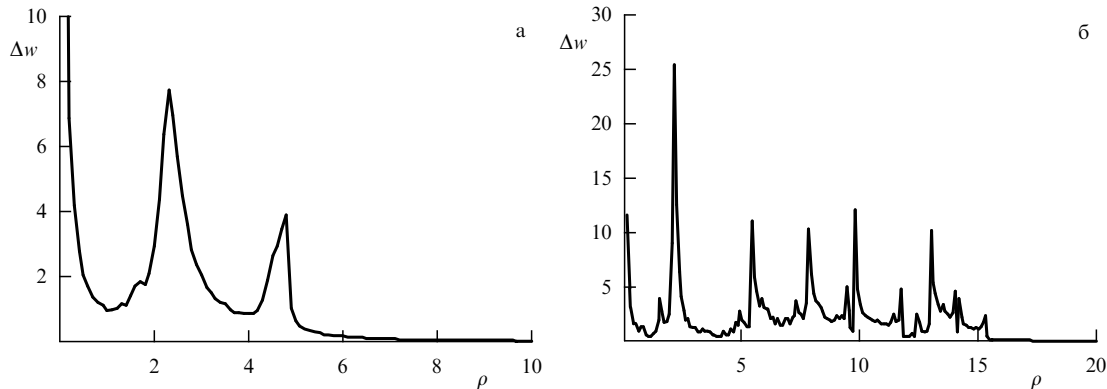


Рис. 15. Изменение энергии Δw , усреднённое по начальной фазе, в зависимости от начального прицельного параметра ρ для ЛП (продольное падение) при (а) $\Omega = 0.32, v = 1$ и (б) $\Omega = 0.1, v = 1$.

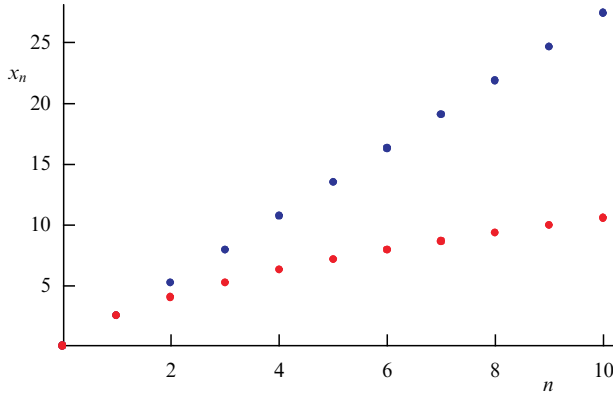


Рис. 16. Координаты максимумов, полученные в рамках простейшего отображения (89) (нижние точки) и более сложного варианта отображения (88) (верхние точки).

При этом из анализа отображения (88) можно получить координату последнего максимума, являющегося границей области притяжения,

$$\rho_N \equiv \rho_{\text{attr}} \approx \sqrt{2\alpha\pi} \frac{v_{\text{osc}}}{v} r_E, \quad (92)$$

хорошо согласующуюся с результатами численного моделирования (82). Заметим, что для определения положения далёких максимумов необходимо учитывать конечную поперечную скорость частицы u , т.е. анализировать более сложное отображение (88). Без учёта изменения поперечной скорости величины координат максимумов и, соответственно, выражение для границы притяжения окажутся заниженными (рис. 16).

Оценку (92) можно получить и более простым способом. Предположим, что электрон, пролетая с дрейфовой скоростью v мимо иона на расстоянии ρ , рассеялся на малый угол $\delta\theta \approx 2/(\rho v)$. Для заметного изменения энергии электрон должен успеть столкнуться с ионом на трассе $2r_{\text{osc}}$. Сделать это смогут только частицы с прицельными параметрами, удовлетворяющими условию

$$\rho \leq 2r_{\text{osc}} \delta\theta \Rightarrow \rho \leq \rho_{\text{attr}} = \frac{2}{\Omega v}. \quad (93)$$

Вновь получилась оценка для границы области притяжения, близкая к оценке (92).

Координаты максимумов ρ_n (см. рис. 15) обладают ещё одним интересным свойством: все частицы с прицельными параметрами $\rho \in [\rho_n, \rho_{n+1}]$ через один пролёт над ионом оказываются в диапазоне $\bar{\rho} \in [\rho_{n-1}, \rho_n]$. Это означает, что все частицы с прицельными параметрами $\rho \leq \rho_{\text{attr}}$ оказываются в области $\rho_{\text{fin}} \leq \rho_1 = \sqrt{2\alpha\pi}$. Таким образом, вместо исходной задачи рассеяния бесконечно широкого пучка частиц с концентрацией n_0 достаточно рассмотреть рассеяние пучка частиц диаметром $2\rho_1$ и концентрацией $n_{\text{eff}} \sim n_0 \rho_{\text{attr}}^2 / \rho_1^2$. В случае плотной плазмы вследствие экранирования кулоновского потенциала иона при $\rho \geq r_D$ (дебаевский радиус $r_D = \omega_p / v_T$) эффективная концентрация может уменьшиться:

$$n_{\text{eff}} = n_0 \frac{\min(r_D^2, \rho_{\text{attr}}^2)}{\rho_1^2}, \quad r_D \geq \rho_1. \quad (94)$$

Из формулы (94), в частности, следует, что все обсуждаемые эффекты, связанные с возвратом частиц к иону при рассеянии, исчезают при условии $r_D < \rho_1 \approx 2,51r_E$, а при

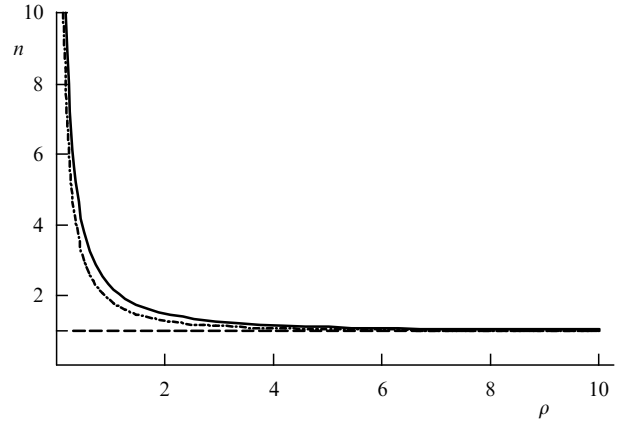


Рис. 17. Зависимость концентрации частиц от прицельного параметра ρ для невозмущённого распределения (штриховая кривая), распределения через одну итерацию отображения (89) (штрихпунктирная кривая) и предельного значения после бесконечного количества итераций (сплошная кривая), являющегося "нормой" отображения (89).

$r_E \ll r_D \leq \rho_{\text{attr}}$ оказываются всего лишь ослабленными. В достаточно разреженной плазме, $r_D > \rho_{\text{attr}}$, все эффекты будут проявляться в полную силу.

7.2. Сингулярность в функции корреляции

Другим важным свойством отображения (89) является появление сингулярности в функции корреляции (8). Как отмечалось в разделе 7.1, все частицы с прицельными параметрами $\rho \leq \rho_{\text{attr}}$ стягиваются в процессе рассеяния в область $\rho \leq \rho_1$. Представляет интерес установить, каково распределение частиц перед "последним" столкновением, т.е. в диапазоне $[0, \rho_1]$. Для ответа на этот вопрос найдём изменение концентрации (или, что то же самое, пространственной плотности функции корреляции) через итерацию отображения (89) из закона сохранения числа частиц $\bar{n}\bar{\rho} d\bar{\rho} = n\rho d\rho$. Выражая из отображения (89) старую координату ρ через новую $\bar{\rho}$ и используя неравенство $\rho > \rho_1$ (рассматриваются частицы, ещё не попавшие в область $[0, \rho_1]$), находим (рис. 17)

$$\bar{n}(\bar{\rho}) = n(\rho_1) \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} \left| \frac{d\rho_1}{d\bar{\rho}} \right| + n(\rho_2) \frac{\rho_2}{\bar{\rho}} \left| \frac{d\rho_2}{d\bar{\rho}} \right|, \quad (95)$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\bar{\rho}^2 + 8\alpha\pi} \pm \bar{\rho} \right).$$

В частности, при больших прицельных параметрах, $\bar{\rho} \gg \sqrt{8\alpha\pi} = 2\rho_1$, как и следует ожидать, концентрация практически не изменяется. Однако при малых прицельных параметрах в концентрации появляется особенность (ср. с рис. 9):

$$\bar{n} \underset{\bar{\rho} \ll \rho_1}{\sim} n \frac{\rho_1}{2\bar{\rho}}. \quad (96)$$

Учёт соотношения (94) приводит к формуле для распределения частиц по прицельным параметрам после N пролётов¹¹

$$n_{\text{eff}} \simeq n_0 \left(\frac{v_{\text{osc}}}{v} + \frac{b}{\rho} \right) \underset{\rho \ll b}{\simeq} n_0 \frac{b}{\rho}, \quad b = \frac{\rho_{\text{attr}}^2}{2\rho_1}. \quad (97)$$

¹¹ В действительности, из выражения (95) легко найти и инвариантную меру $n(\rho) = 1/\rho$ отображения (89) — распределение частиц, переходящее само в себя через шаг отображения.

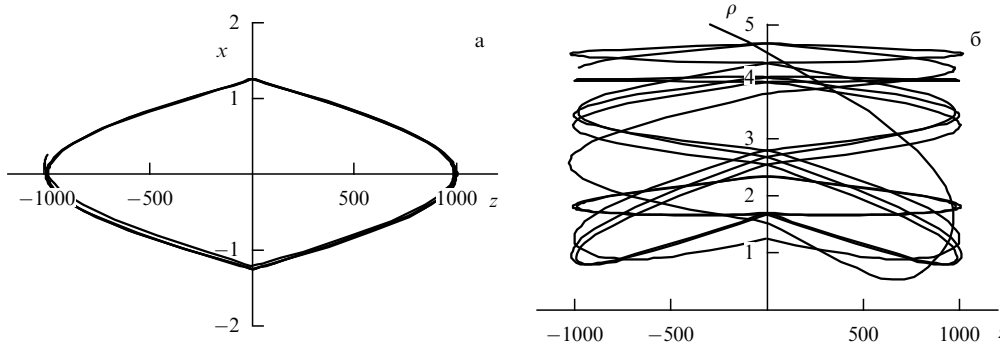


Рис. 18. (а) Простейшая траектория стационарной точки $\rho_1^{(1)}$ при $\Omega = 0,0316$. (б) Пример траектории, "захваченной" в кулоновский аттрактор.

Появление первого слагаемого в правой части (97) связано с тем, что далёкие частицы, не успевшие подтянуться к кулоновскому центру, тем не менее испытают за время пролёта около иона $N = v_{\text{osc}}/v$ малоугловых столкновений. Поэтому эффективная концентрация для одного столкновения с ионом для таких частиц будет иметь вид однородной концентрации n_0 , умноженной на число пролётов частицы мимо иона,

$$n_{\text{eff}} \simeq n_0 \frac{v_{\text{osc}}}{v}.$$

Примечание. Концентрация перед "последним" ударом (97) есть, по сути, якобиан перехода от начальных координат $\mathbf{r}_0$ к координатам "последнего" удара $\mathbf{r}$. При таком переходе далёкие частицы, очевидно, не возмущаются кулоновским полем иона. Соответственно, якобиан при $r \rightarrow \infty$ равен единице. Вблизи иона происходят притяжение и группирование частиц так, что каждые полпериода распределение становится сингулярным (96). Более того, на каждом следующем периоде из-за притяжения сталкивается больше частиц, чем на предыдущем. В результате якобиан принимает вид

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = 1 + \frac{\rho_1}{\rho} \sum_{n=1}^{2v_{\text{osc}}/v} n \delta\left(\frac{\xi}{r_a} - \frac{n}{2}\right).$$

При этом диапазон изменения координаты ξ равен $2r_{\text{osc}}$, в то время как диапазон изменения начальной координаты ξ_0 равен r_a (поскольку речь идёт о рассеянии одного слоя толщиной r_a). В дальнейшем представляет интерес интеграл от величин по нормированной продольной координате ξ/r_a . Наличие δ -функций в выражении для якобиана позволяет легко выполнить это интегрирование. В результате мы снова приходим к выражению (97).

Отметим, что в случае применимости малоуглового приближения концентрация частиц должна быть постоянной. Согласно как результатам численного моделирования, так и аналитическим оценкам (97) поверхностная плотность возрастает как $1/\rho$ при малых ρ , что ещё раз подтверждает необходимость учёта искривления траекторий частиц при рассеянии.

При известном распределении частиц перед последним "ударом" использование отображения (86) для последнего удара позволяет найти все характеристики рассеяния, что и будет сделано в последующих разделах.

7.3. Стохастическая динамика

Третьим важным свойством отображения (89) является появление стохастической динамики. В разделе 6 отме-

чено, что динамика рассеяния частиц в сильном поле накачки оказывается очень сложной, стохастической. Этот же факт демонстрирует отображение (89). Действительно, с одной стороны, оно является глобально притягивающим. С другой стороны, центральная часть отображения локально неустойчива. В результате происходит перемешивание частиц. Это и представляет собой один из критериев стохастической динамики. Кулоновский центр при этом играет роль сложного стохастического аттрактора.

Необычность кулоновского аттрактора состоит в постоянной потере частиц из-за рассеяния на большие углы. Частицы, попавшие вследствие притяжения к иону при многократных осцилляциях (при регулярной динамике) или вследствие диффузии Арнольда (стохастического "блуждания" частицы при стохастической динамике) в малую окрестность иона, испытывают сильноугловое рассеяние и приобретают скорость, сравнимую с осциляторной. В результате такие частицы, с одной стороны, вылетают из области аттрактора, а с другой — дают вклад в столкновительный ток и, соответственно, в когерентное излучение. Поскольку при рассеянии на большие углы частицы приобретают скорость, направленную против мгновенного направления осцилляторной скорости, следует ожидать появления интенсивной генерации столкновительного тока (см. раздел 8.1) и, следовательно, когерентного излучения, возрастающего с увеличением области стохастичности, т.е. с увеличением интенсивности поля накачки.

Кроме того, может происходить накопление частиц в аттракторе (рис. 18). При численных вычислениях это выражается в появлении сечения захвата, отличного от нуля. Данный эффект соответствует так называемой динамической рекомбинации в сильных полях. Сечение (или степень) рекомбинации возрастает с уменьшением скорости потока, $v \rightarrow 0$, или частоты поля, $\Omega \rightarrow 0$. Отметим, что появление захваченных потенциалом частиц означает необходимость выхода за рамки приближения парных электрон-ионных столкновений и учёта "столкновений" с "нейтральными" атомами (т.е. трёхчастичных столкновений). Однако до тех пор пока доля захваченных частиц мала по сравнению с долей частиц, дающих основной вклад в эффективное сечение (именно это демонстрируют численные расчёты), для описания процессов энергообмена можно пользоваться приближением парных столкновений.

У отображения (89) есть и стационарные точки, переходящие сами в себя через одну или несколько итераций (частица возвращается в эти точки через один или

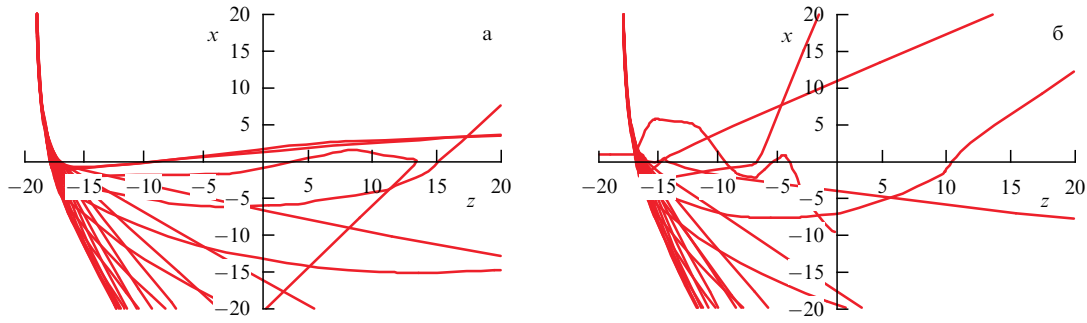


Рис. 19. Набор дрейфовых траекторий для частиц с различными начальными фазами, летящих (а) на границе и (б) внутри области притяжения. Параметры частиц $\Omega = 0,25$ и $v = 0,5$, поперечное падение, ЛП.

несколько пролётов над ионом). Найти эти точки аналитически не составляет труда. Для точки $\rho_1^{(1)}$, переходящей в себя через одну итерацию (см. рис. 18), имеем

$$2\rho_1^{(1)} = \frac{2\alpha\pi}{\rho_1^{(1)}} \Rightarrow \rho_1^{(1)} = \sqrt{\alpha\pi}. \quad (98)$$

Для точек $\rho_1^{(2)}$ и $\rho_2^{(2)}$, переходящих в себя через две итерации, находим

$$\begin{cases} \rho_1^{(2)} + \rho_2^{(2)} = \frac{2\alpha\pi}{\rho_1^{(2)}}, \\ \rho_1^{(2)} - \rho_2^{(2)} = \frac{2\alpha\pi}{\rho_2^{(2)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1^{(2)} = \frac{\sqrt{2\alpha\pi}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}, \\ \rho_2^{(2)} = \sqrt{\alpha\pi}\sqrt{\sqrt{2}+1} \end{cases} \quad (99)$$

и т.д.

Траектория, соответствующая стационарной точке $\rho_1^{(1)}$, приведена на рис. 18. Электрон начинает движение с малой дрейфовой скоростью в точке $-r_{osc}$, пролетает над ионом и рассеивается на малый угол по полной скорости. После чего электрон приходит в точку $+r_{osc}$ со скоростью, противоположной начальной скорости. Движение повторяется назад.

К сожалению, все стационарные точки отображения оказываются неустойчивыми. Малое изменение начальных условий "уводит" частицу с периодической траектории. Тем не менее, согласно результатам специально проведённых численных расчётов, большинство частиц остаётся "захваченным" в течение многих периодов поля (см. рис. 18). В действительности, численные расчёты показывают, что *все* частицы уходят из области рассеяния. Но доля частиц, находящихся вблизи иона больше некоторого времени (например, больше 20 времён пролёта осцилляторного радиуса $t_{pass} > 20r_{osc}/v$), быстро возрастает с уменьшением дрейфовой скорости v .

Таким образом, можно говорить о новом квазистационарном состоянии электрона в "атоме", реализующемся только в присутствии сильной ЭМ-волны накачки. Размер этого "атома" равен нескольким r_E . В работе [61] такие высоковозбуждённые "атомы" исследовались с точки зрения задачи ионизации в поле сильной ЭМ-волны. Существование таких состояний, по-видимому, может заметно снизить скорость ионизации в сверхсильных низкочастотных полях ($\Omega \ll 1$) и способствовать увеличению генерации когерентного излучения, основанного на эффекте Коркума [62], — излучения при рассеянии только что оторвавшегося от иона в результате ионизации электрона, вернувшегося к иону. Недавно

проведённые экспериментальные и аналитические исследования эффекта Коркума [63] подтверждают важность учёта возвратов электрона к иону.

7.4. Особенности поперечного рассеяния

В общем случае влёта частиц поперёк электрического поля при ЛП ($\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_{osc}$) для определения эффективного сечения необходимо использовать полное отображение (86). При малых скоростях, $v \ll \Omega$ (или $b_v \geq r_{osc} \gg b_{osc}$), можно применять упрощённое одномерное отображение (89). Соответственно, и результаты будут близки к описываемым выше. В противоположном предельном случае, $b_{osc} < b_v < r_{osc}$, динамика частицы другая, однако, как и ранее, для определения эффективного сечения необходимо учитывать рассеяние на большие углы.

Для того чтобы оценить эффективное сечение в случае $b_{osc} < b_v < r_{osc}$, рассмотрим процесс рассеяния частицы. На рисунке 19 изображены частицы, налетающие на ион перпендикулярно полю, осциллирующему вдоль оси z . Начальные прицельные параметры частиц ρ примерно равны резерфордскому радиусу $b_v \gg b_{osc}$, так что частицы рассеиваются на покоящемся ионе¹² с изменением угла по дрейфовой скорости на величину, большую, чем $\pi/2$.

После первого столкновения, мало изменяющего энергию частиц, частицы движутся по прямой, проходя за полпериода поля расстояние порядка $\pi r_a = \pi v/\Omega$. Через период частица в точке $z = r_{osc} - \pi r_a$ сталкивается с "возвращающимся" ионом, имеющим скорость $v_* = \sqrt{2\pi v v_{osc}} \gg v$. Происходит второе столкновение, изменяющее энергию частицы до величины порядка $v_*^2 \simeq 2\pi v v_{osc} v$. Заметим, что фактически ко второму столкновению частицы попадают в режим продольного рассеяния, описанный в разделе 7.1, поскольку поперечная скорость таких частиц мала. Это также означает, что в действительности частица может испытывать не одно, а много столкновений, прежде чем существенно изменит свою энергию и покинет область рассеяния (см. рис. 19).

Однако необходимо учесть, что такое изменение энергии получают не все частицы, а лишь те, которые попали в окрестность $b_* = 1/v_*^2$ иона при втором столкновении. В силу условия $b_* \ll b_v$ это возможно только для частиц из полосы шириной b_* . Последнее позволяет оценить эффективное сечение как произведение пло-

¹² Речь идёт о движении вблизи точек остановки, где ион практически неподвижен большую часть периода [60].

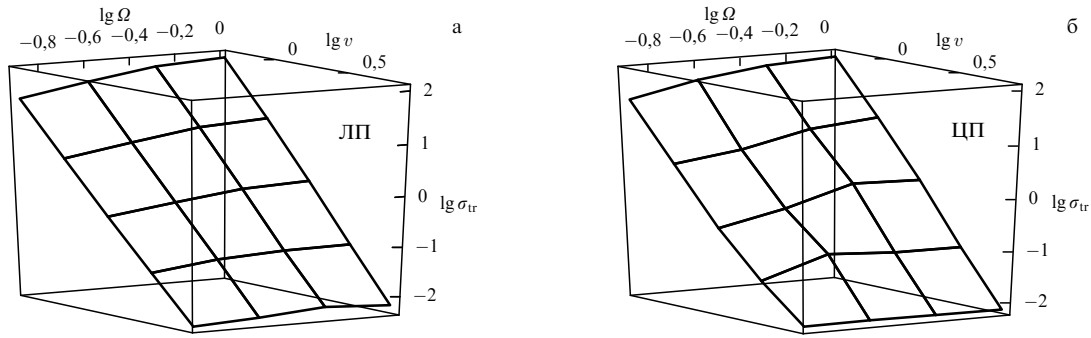


Рис. 20. Зависимость логарифма транспортного сечения σ_{tr} от скорости v и частоты Ω для поля накачки с ЛП (а) и ЦП (б).

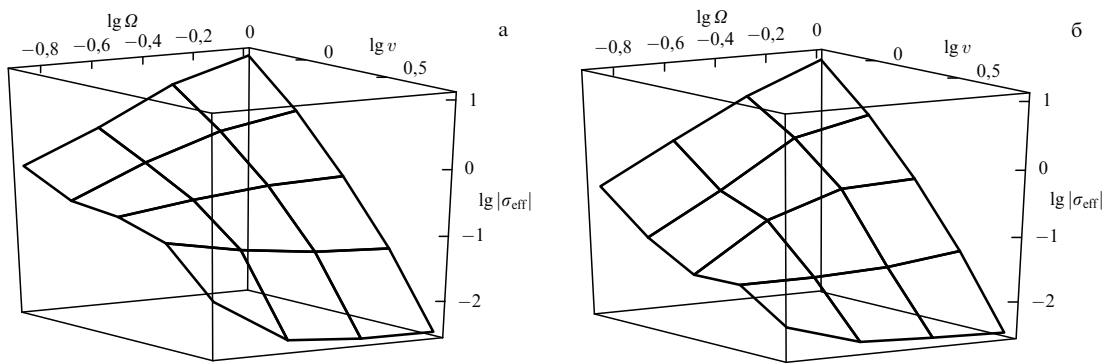


Рис. 21. Зависимость логарифма модуля эффективного сечения σ_{eff} от скорости v и частоты Ω для поля накачки с линейной (а) и циркулярной (б) поляризациями.

щади, с которой собираются частицы, $b_v b_*$ на относительное изменение их энергии $2\pi v v_{osc}/v_{osc}^2$:

$$\sigma_{eff} = \frac{2\pi v v_{osc}}{v_{osc}^2} b_v b_* = 2\pi b_v b_{osc}. \quad (100)$$

Точно такой же результат даёт и численное интегрирование при поперечном падении.

8. Сечения столкновений. Излучение при столкновениях

Перейдём теперь к обсуждению средних по периоду моментов интеграла столкновений: транспортного σ_{tr} и эффективного σ_{eff} сечений.

Рассмотрим вначале транспортное сечение σ_{tr} (30), ответственное за изменение направления импульса электрона при рассеянии на ионе. На рисунке 20 представлены результаты численного интегрирования транспортного сечения в случае линейно и циркулярно поляризованного поля накачки в двойном логарифмическом масштабе [38, 39]. Из рисунка видно, что внешнее поле практически не влияет на транспортное сечение. Исключением является область $v \simeq v_{osc}$. Транспортное сечение в этой области возрастает за счёт значительного вклада *точек остановки* — точек, в которых полная скорость электрона $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{osc}$ близка к нулю. При большой тепловой скорости, $v \gg v_{osc}$, сечение σ_{tr} близко к значению при нулевом поле, поскольку влиянием поля накачки в этом случае можно пренебречь. Для малых скоростей, $v \ll v_{osc}$, сечение снова пропорционально $1/v^4$, вследствие того что основной вклад в сечение дают далёкие частицы, для которых влияние внешнего поля

на траекторию также мало. Таким образом, для транспортного сечения σ_{tr} по результатам расчётов можно использовать следующую аппроксимацию:

$$\sigma_{tr} \approx \frac{4\pi A}{v^4}, \quad v \ll v_{osc} \text{ и } v \gg v_{osc} \quad (101)$$

(где A — логарифмический фактор), верную как для линейно, так и для циркулярно поляризованной волны накачки. По-видимому, формула (101) верна и для произвольной поляризации волны накачки.

Перейдём теперь к обсуждению более важного эффективного сечения (23), характеризующего обмен энергией между электронами и полем накачки. На рисунке 21 изображена величина $\lg |\sigma_{eff}|$ в зависимости от логарифма скорости v и частоты Ω . Рассмотрим вначале случай линейной поляризации (рис. 21а).

При больших скоростях, $v \gg v_{osc}$, зависимость эффективного сечения от скорости v и частоты Ω аппроксимируется формулой

$$\sigma_{eff} \approx \frac{4\pi A}{v^4} \Leftrightarrow v_{eff} \approx \frac{A}{v^3}, \quad v \gg v_{osc}, \quad (102)$$

аналогичной формуле, получающейся в рамках малоуглового приближения [3–5, 33]. Это связано с тем, что основной вклад в интеграл для σ_{eff} в данном случае дают дальние малоугловые столкновения ($r_a \gg b_v$). Следовательно, величины транспортного и эффективного сечений должны быть одного порядка, что и подтверждается численно. Зависимость сечения σ_{eff} от угла θ (рис. 22а) также хорошо согласуется с малоугловым приближением:

$$\sigma_{eff} \approx 2 - 3 \cos^2 \theta, \quad v \gg v_{osc}. \quad (103)$$

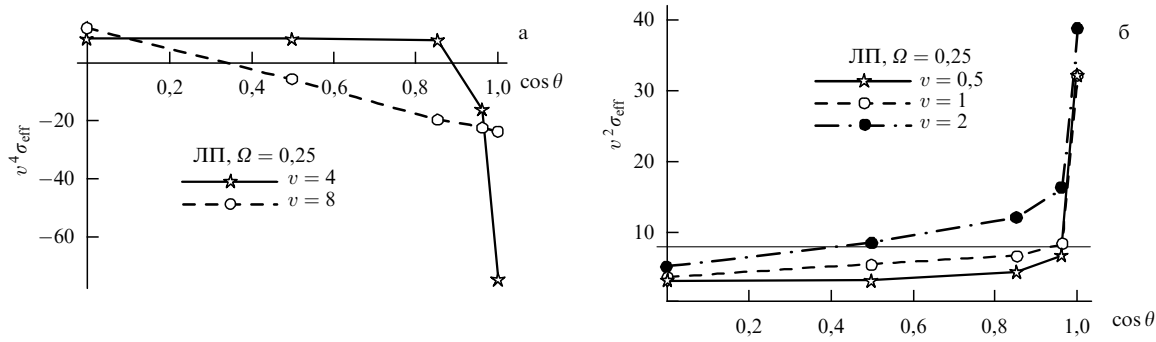


Рис. 22. Зависимость эффективного сечения σ_{eff} от угла θ для ЛП-поля накачки в условиях $v \geq v_{\text{osc}}$ (а) и $v \leq v_{\text{osc}}$ (б) для $\Omega = 0,25$.

В области сильного поля, $v \ll v_{\text{osc}}$ и $v > \Omega$, численное интегрирование даёт оценку для эффективного сечения в виде

$$\sigma_{\text{eff}} \approx \frac{\Omega^2}{v^2} = b_v b_{\text{osc}} \Leftrightarrow v_{\text{eff}} \approx \frac{1}{v v_{\text{osc}}^2}, \quad v \ll v_{\text{osc}}. \quad (104)$$

Заметим, что здесь величина v_{eff} в $v_{\text{osc}}/v \gg 1$ раз превышает частоту столкновений, получающуюся при обобщении малоуглового приближения для случая сильных полей [3, 13]:

$$v_{\text{trad}} \sim \frac{A}{v_{\text{osc}}^3}, \quad v \ll v_{\text{osc}}. \quad (105)$$

Причины столь сильного расхождения результатов численного интегрирования и традиционных моделей обсуждаются в разделе 6.

Более того, в случае продольного ($\theta = 0$) влёта частиц эффективное сечение значительно возрастает:

$$\sigma_{\text{eff}} \approx \frac{1}{v^2}, \quad v \ll v_{\text{osc}}, \quad \theta = 0. \quad (106)$$

Другими словами, наблюдается сильная анизотропия σ_{eff} (рис. 22б), исчезающая при высоких частотах. Ширина центрального максимума $\delta\theta$ может быть оценена как

$$\delta\theta \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{\text{eff}}(\theta=0)}} \approx \Omega \ll 1. \quad (107)$$

Легко увидеть, что ширина $\delta\theta$ стремится к нулю с возрастанием амплитуды поля накачки ($\Omega \rightarrow 0$).

Другой особенностью эффективного сечения в области сильного поля является его положительность при всех углах θ (ср. с (103)), связанная с тем, что энергия рассеивающегося электрона мала по сравнению с осцилляторной энергией. Как следствие, столкновения с потерей энергии незначительно уменьшают σ_{eff} . Наоборот, столкновения с набором энергии (особенно не малоугловые (см. раздел 6)) значительно увеличивают эффективное сечение.

Такие же зависимости получаются и при использовании формулы (97) для эффективной плотности частиц $n(\rho)$. Действительно, изменение энергии частицы в зависимости от прицельного параметра ρ можно найти по формуле

$$\Delta w = \frac{4v_{\text{osc}}^2}{1 + \rho^2/b_{\text{osc}}^2}, \quad (108)$$

которая даёт однозначную связь между изменением энергии частицы и прицельным параметром ρ . В данном случае полагается, что основной вклад вносит только последний удар (см. рис. 13), а "мягкие" удары приводят лишь к изменению пространственного распределения частиц. В результате сечение находится как интеграл¹³:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{v_{\text{osc}}^2} \int_0^{r_a} n(\rho) \rho d\rho \frac{4v_{\text{osc}}^2}{1 + \rho^2/b_{\text{osc}}^2} \underset{r_a \gg b_{\text{osc}}}{\approx} 4\pi \frac{v_{\text{osc}}}{v} b_{\text{osc}}^2 A + 4\pi^2 b b_{\text{osc}} \underset{b \gg \sqrt{b_{\text{osc}} b_v A}}{\approx} 4\pi^2 b b_{\text{osc}}, \quad (109)$$

и эффективная частота столкновений

$$v_{\text{eff}} = 4\pi v n_i \sigma_{\text{eff}} \approx 4\pi n_i v_{\text{osc}} b_{\text{osc}}^2 A + 4\pi^2 n_i v b b_{\text{osc}} \underset{b \gg \sqrt{b_{\text{osc}} b_v A}}{\approx} 4\pi^2 n_i v b b_{\text{osc}} \propto \frac{1}{v v_{\text{osc}}^2}. \quad (110)$$

Здесь $b = 1/\Omega^2 v^2$ для продольного падения (97) и $b = b_v = 1/v^2$ для поперечного (100).

Количественно похожие результаты получаются и в случае ЦП-поля накачки (рис. 21б). Вновь при высоких скоростях, $v \gg v_{\text{osc}}$, наблюдается хорошее согласие с малоугловым приближением (102). При малых скоростях интегральная величина эффективного сечения описывается формулой (104). Однако угловая зависимость $\sigma_{\text{eff}}(\theta)$ принципиально иная. Она более плавная (рис. 23а), а величина $\sigma_{\text{eff}}(\theta = \pi/2)$ при ЦП больше, чем при ЛП. Сравнение двух графиков приведено на рис. 23б. Снова, как и в случае ЛП, с возрастанием частоты Ω анизотропия σ_{eff} исчезает.

Следствиями столь заметного увеличения частоты столкновений (104) в сильных полях по сравнению с таковой в традиционных (малоугловых) представлениях являются: 1) величина получаемой плазмой энергии за счёт столкновений не будет убывать с возрастанием амплитуды поля; 2) темп нагрева плазмы

$$Q = v_{\text{eff}} \frac{p_{\text{osc}}^2}{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (111)$$

определяется только температурой и не зависит от интенсивности поля накачки. Также можно оценить, пользуясь формулой (104), что нагрев плазмы до осцил-

¹³ В действительности изменение энергии частиц с прицельными параметрами $\rho \geq r_a$ экспоненциально малое, поэтому интегрирование следует ограничить областью $\rho < r_a$.

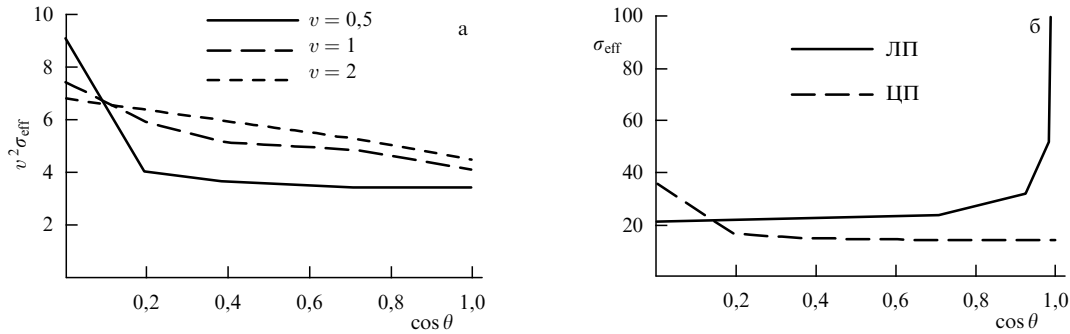


Рис. 23. (а) Зависимость эффективного сечения σ_{eff} от угла θ для ЦП-поля накачки в условиях $v \ll v_{\text{osc}}$ при различных частотах Ω . (б) Сравнение зависимостей σ_{eff} от угла при линейно и циркулярно поляризованном поле накачки для $\Omega = 0,25$, $v = 0,5$.

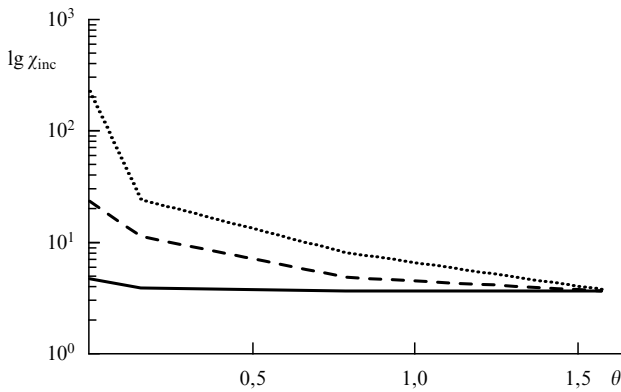


Рис. 24. Зависимость сечения некогерентного излучения от угла между начальной скоростью пучка и вектором поля для $v = 1$ при разных амплитудах волны накачки: $\Omega = 1$ (случай слабого поля) — сплошная кривая, $\Omega = 0,316$ — штриховая, $\Omega = 0,1$ — пунктирная.

ляторной температуры происходит в 4–5 раз быстрее, чем в рамках традиционных моделей.

Излучение при столкновениях. Перейдём к обсуждению результатов интегрирования некогерентного тормозного излучения (31) и столкновительного тока (29), ответственного за когерентное тормозное излучение. Рассмотрим вначале некогерентное излучение. Численное интегрирование формулы (31) показывает [40, 64], что полное (проинтегрированное по углу падения) некогерентное излучение с логарифмической точностью не зависит от амплитуды поля накачки и хорошо аппро-

ксимируется формулой вида

$$\chi_{\text{inc}} \approx \frac{A}{v^2}, \quad (112)$$

где A — логарифмический фактор, т.е. остаётся справедливой формула традиционных моделей слабого поля [49]. Ситуация здесь похожа на ситуацию с транспортным сечением (101), которое также слабо изменяется с возрастанием амплитуды поля. Так же как и в транспортном сечении σ_{tr} , появляется сильная анизотропия сечения излучения χ_{inc} (рис. 24). Излучение при продольном падении ($\theta = 0$) можно аппроксимировать формулой

$$d\chi_{\text{inc}} \approx \frac{A}{\Omega^2 v^2} d\phi. \quad (113)$$

При этом ширина центрального максимума снова определяется формулой (107).

Значительно более интересно появление столкновительного тока и вызванного им когерентного тормозного излучения. Рассмотрим вначале случай ЛП, изображённый на рис. 25 в логарифмическом масштабе. При больших скоростях, $v \geq v_{\text{osc}}$, столкновительный ток мал, что вполне соответствует используемому в рамках традиционных моделей предположению о случайности (некоррелированности) моментов столкновения электронов с ионом:

$$\chi_{\text{coh}} = 0, \quad v \geq v_{\text{osc}}. \quad (114)$$

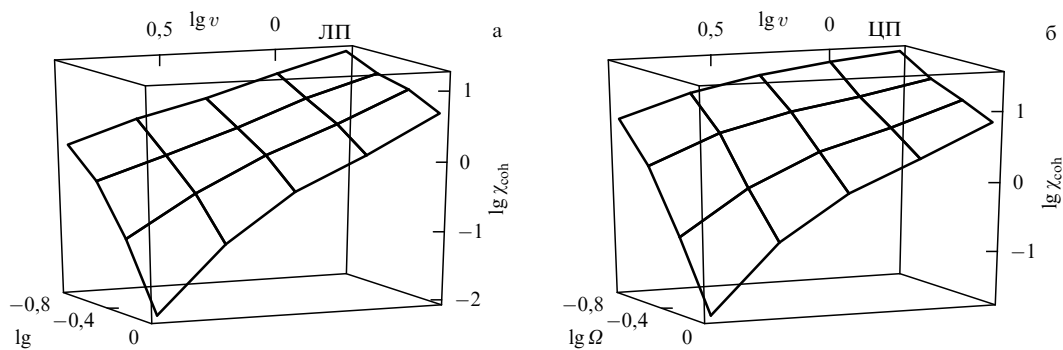


Рис. 25. Зависимость сечения когерентного излучения от скорости v и частоты Ω для линейно (а) и циркулярно (б) поляризованного поля накачки.

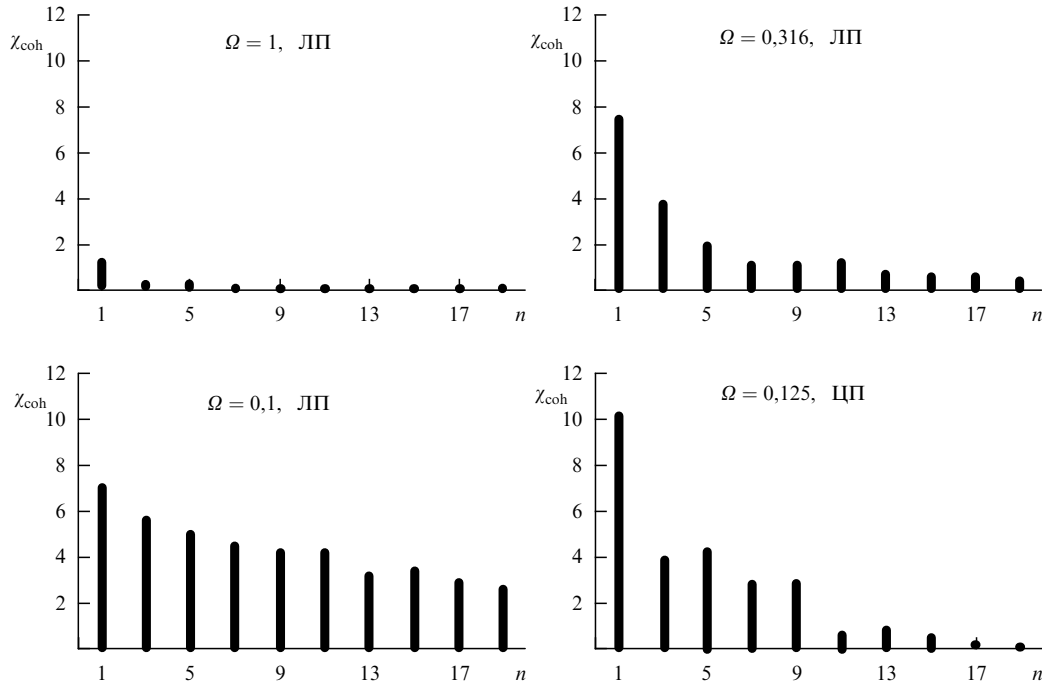


Рис. 26. Зависимости сечения когерентного излучения от номера излучаемой гармоники для разных частот поля накачки Ω при $v = 1$.

В области сильного поля, $v \ll v_{\text{osc}}$, $r_a > b_{\text{osc}}$, численное интегрирование даёт оценку для χ_{coh} вида

$$\chi_{\text{coh}} \sim \frac{1}{\Omega v n}. \quad (115)$$

Частотный спектр представляет собой плато с числом гармоник порядка v_{osc}/v (рис. 26). Когерентное излучение, как и ожидалось, полностью исчезает при $v > v_{\text{osc}}$. Наличие в спектре когерентной компоненты тока, в основном нечётных гармоник, обусловлено тем, что группировка реализуется дважды в течение одного полупериода вблизи максимумов полной скорости электронов (см. рис. 12). Это означает, что в течение каждого пика группировки электроны рассеиваются в направлении, противоположном мгновенной осцилляторной скорости. То есть столкновительный ток на каждом периоде представляется в виде двух пиков противоположной полярности, сдвинутых на полпериода.

В случае ЦП-поля накачки наблюдаются качественно и количественно похожие эффекты (см. рис. 25). Вновь при высоких скоростях столкновительный ток отсутствует (114). При малых скоростях применима формула (115) с учётом всех оговорок, приведённых ниже неё. Частотный спектр также похож на спектр в случае ЛП (см. рис. 26). Заметим, что это единственный известный авторам механизм генерации когерентного излучения в плазме с циркулярно поляризованным полем накачки.

9. Ускорение частиц при столкновениях

Столкновения приводят не только к нагреву фоновой плазмы и генерации излучения, но и к появлению быстрых частиц. В нерелятивистском случае максимальный импульс частиц ограничен величиной $2p_{\text{osc}} = 2mca$. (Здесь введено часто используемое обозначение для нормированного вектора-потенциала $a \equiv p_{\text{osc}}/(mc) = eA/(mc^2)$.) Однако при ионизации [65] в релятивистски

сильных полях ($a \gg 1$) частицы могут иметь импульс порядка $p_{\text{osc}}^2/(mc) = mca^2$. Возникает вопрос: какова максимальная энергия после мгновенного упругого столкновения, которую может приобрести частица с кинематическим импульсом, равным осцилляторному?

Ответ тривиально получается из формул для движения заряженной частицы в поле плоской монохроматической ЭМ-волны [49]:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{q} + \mathbf{p}_{\text{osc}}, \quad p_{\parallel} = \frac{p_0^2 + q^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p}_{\text{osc}} + p_{\text{osc}}^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}, \quad (116)$$

где $p_0 = mc$ — импульс покоя, $\mathbf{q}$, α — интегралы движения, $\mathbf{p}_{\perp}$, $p_{\parallel}$ — кинематические импульсы частицы поперёк и вдоль волнового вектора в лабораторной системе координат.

Рассматривая скачкообразное изменение импульса частицы ("инжекцию" частицы с новыми импульсами) и учитывая сохранение в адиабатическом приближении (см. раздел 9.2) усреднённого по фазе импульса после прохождения волнового пакета, легко получить ответ на поставленный выше вопрос. Максимальной энергии после столкновения соответствует "рождение" частицы с начальными импульсами $p_{\perp} = 0$, $p_{\parallel} = p_{\text{osc}}$, что в свою очередь соответствует $\mathbf{q} = -\mathbf{p}_{\text{osc}}$ и $\alpha \approx p_0^2/(2p_{\text{osc}})$. Продольный импульс, усреднённый по фазе волны (т.е. дрейфовый), имеет вид

$$\langle p_{\parallel} \rangle \approx \frac{p_{\text{osc}}^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{2\alpha} = \frac{p_{\text{osc}}(p_{\text{osc}}^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle)}{p_0^2}. \quad (117)$$

Выражая (117) через величину a ,

$$H_{\text{max}} = c\langle p \rangle_{\text{max}} \approx mc^2 a(a^2 + \langle a^2 \rangle) \sim 2mc^2 a^3,$$

получим возрастание максимальной энергии, пропорциональное a^3 [66]. Интересно, что в релятивистском

случае с возрастанием амплитуды ЭМ-волны p_{osc} порог по энергии увеличивается даже быстрее, чем в нерелятивистском случае ($H_{\text{nonrel}}^{\text{max}} \leq 2p_{\text{osc}}^2/p_0$).

Вообще говоря, отсюда можно получить и достаточно неожиданный результат о возможности ещё более сильного ускорения частицы в поле ЭМ-волны. Пусть частица рассеялась (например, на ионе) и приобрела импульс $\mathbf{p}$. Тогда, вновь используя формулы (116), (117), найдём, что средний по фазе импульс

$$\langle \mathbf{p}_{\perp} \rangle = \mathbf{q}, \quad \langle p_{\parallel} \rangle = p_{\parallel} - \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{2(p_{\parallel} - w)}. \quad (118)$$

Интегралы движения $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{p}_{\text{osc}}$ и $\alpha = w - p_{\parallel}$, а энергия $w = (p^2 + p_0^2)^{1/2}$. В качестве значения $\mathbf{p}_{\text{osc}}$ берутся значения осциллирующего импульса в момент рассеяния.

Полагая, что $\mathbf{p}_{\perp} = 0$ (частица рассеялась вдоль $\mathbf{k}$), а импульс достаточно велик, $p \gg p_0$, сразу получим, что средний импульс (и, следовательно, конечная энергия частицы) станет в a^2 раз больше, чем после рассеяния! Такой процесс можно назвать "кулоновским ускорителем".

Однако возникают вопросы: в какой степени усреднённый по фазе импульс сохраняется после прохождения волнового пакета и каковы ограничения по возрастанию энергии? Для ответа на эти вопросы удобно перейти к каноническим переменным, в которых гамильтониан задачи не зависит от быстро осциллирующего внешнего поля. В нерелятивистском случае такую систему координат называют дрейфовой. Сохраним это название и в общем релятивистском случае.

9.1. Дрейфовые координаты

в релятивистски сильной электромагнитной волне

Вид дрейфовых координат в релятивистском случае и переход к ним нетривиальны. В качестве исходного возьмём гамильтониан свободного движения в поле электромагнитного волнового пакета в обобщённых координатах (в этом случае не только привычные канонические импульсы $\mathbf{P}$ и координаты $\mathbf{r}$, но и время ct и энергия H являются канонически сопряжёнными координатой и импульсом соответственно (см., например, [67])):

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{p}_{\text{osc}}(\mathbf{r}, t))^2 + p_0^2 - H^2}{2p_0}. \quad (119)$$

Роль времени для такого обобщённого гамильтониана играет параметр s — "собственное" время, так что уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}}, & \frac{d\mathbf{P}}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}, & \frac{dH}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что величина $H = -[(\mathbf{P} + \mathbf{p}_{\text{osc}})^2 + p_0^2]^{1/2}/p_0$ отрицательна для возрастающего времени, $dt/ds = -H/p_0 > 0$. Заметим, что использование обобщённых координат [49, 67] позволило представить гамильтониан в простой квадратичной форме без использования громоздких коренных зависимостей. Гамильтониан $\mathcal{H}$ обладает важным свойством — он тождественно равен нулю на траектории движения. Действительно, гамильтониан $\mathcal{H}$ постоянен, поскольку в нём нет явной зависимости от параметра s , кроме того,

эта постоянная равна нулю в силу выражения для энергии частицы в релятивистском случае.

Для перехода к дрейфовым координатам необходимо провести каноническое преобразование, исключаящее явную зависимость от быстрой фазы из гамильтониана свободного движения $\mathcal{H}$. При этом собственно свободное движение в дрейфовых координатах в поле плоской однородной ЭМ-волны должно представлять собой прямую линию с сохранением импульса частицы. В общем виде производящая функция такого преобразования может быть найдена из решения уравнения Гамильтона — Якоби для нашего гамильтониана и собственного времени s . Фактически эта задача давно решена [49]. Однако, поскольку нас интересуют и неадиабатические поправки, мы приведём необходимые выкладки, немного модифицировав процедуру. Выберем систему координат, в которой ось x сонаправлена с волновым вектором ЭМ-волны $\mathbf{k}$. В этой лабораторной системе координат гамильтониан примет вид

$$2p_0\mathcal{H} = (\mathbf{P}_{\perp} + \mathbf{p}_{\text{osc}}(x - t))^2 + P_x^2 + p_0^2 - H^2, \quad (120)$$

где для краткости временная координата ct по-прежнему обозначается как t .

В сопровождающей системе координат $\{\xi, \eta\}$,

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad P_x = P_{\xi} + P_{\eta}, \quad H = P_{\eta} - P_{\xi},$$

гамильтониан может быть записан как¹⁴:

$$2p_0\mathcal{H} = (\mathbf{P}_{\perp} + \mathbf{p}_{\text{osc}}(\xi))^2 + p_0^2 + 4P_{\xi}P_{\eta}. \quad (121)$$

Далее, проводя каноническое преобразование с помощью производящей функции

$$F = \bar{\mathbf{p}}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\text{osc}}(\xi, \bar{p}_{\eta})) + \bar{p}_{\eta}\eta + \bar{p}_{\xi}\xi - \int \frac{p_{\text{osc}}^2 - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{4\bar{p}_{\eta}} d\xi \quad (122)$$

(угловые скобки подразумевают усреднение по координате ξ , т.е. по фазе волны) и учитывая определение

$$r_{\text{osc}} = \int \frac{p_{\text{osc}}}{2P_{\eta}} d\xi, \quad (123)$$

получим замену переменных вида

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_{\perp} &= \mathbf{P}_{\perp}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\text{osc}}, \quad \bar{p}_{\eta} = P_{\eta}, \\ \bar{\eta} &= \eta + \frac{1}{4P_{\eta}^2} \int (p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle) d\xi, \\ \bar{p}_{\xi} &= P_{\xi} - \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{4P_{\eta}}, \quad \bar{\xi} = \xi, \end{aligned} \quad (124)$$

тогда не зависящий от координат гамильтониан принимает вид

$$2p_0\mathcal{H} = \bar{p}_{\perp}^2 + p_0^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle + 4\bar{p}_{\xi}\bar{p}_{\eta}. \quad (125)$$

Следует отметить, что каноническое преобразование с помощью выражений (122), (123) можно выполнить при произвольной (не обязательно гармонической) зависимости вектора-потенциала $\mathbf{A} = -c\mathbf{p}_{\text{osc}}/e$ от координаты ξ .

¹⁴ Это каноническая замена переменных с производящей функцией $F_{\xi} = \bar{\mathbf{p}}_{\perp}\mathbf{r}_{\perp} + \bar{p}_{\xi}(x - t) + \bar{p}_{\eta}(x + t)$.

Наконец, возвращаясь к привычным координатам x, t , получим связь для импульсов $\mathbf{p}$ в дрейфовой и $\mathbf{P}$ в лабораторной системах координат, а также выражение для гамильтониана [66]:

$$\mathbf{p}_\perp = \mathbf{P}_\perp, \quad p_x = P_x - \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{2(p_x + h)}, \quad (126)$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_\perp^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle - h^2}{2p_0}. \quad (127)$$

Здесь специально выделено слагаемое $\langle p_{\text{osc}}^2 \rangle$, которое соответствует эффективному "утяжелению" частицы в релятивистски сильных полях. Данное слагаемое может плавно зависеть от координат, что соответствует появлению пондеромоторного потенциала. Обратим внимание на то, что выражения для дрейфовых импульсов (126) совпадают с усреднёнными по фазе волны кинематическими импульсами (118) (напомним, что дрейфовая "энергия" h отрицательна).

Отметим ряд интересных особенностей дрейфовых координат в релятивистском пределе. В релятивистском случае амплитуда осцилляций по координате и импульсу, в отличие от таковой в нерелятивистском, существенно зависит от энергии частицы. Это легко увидеть из (123), поскольку p_η в общем случае определяется энергией частицы, а не только её массой покоя. Кроме того, реальное время частицы $t(s)$ течёт неравномерно вследствие периодического изменения импульса частицы во внешнем поле. Так что "дрейфовое" (равномерное) время у разных осциллирующих частиц оказывается различным. Это означает, что невозможно ввести, как это делается в нерелятивистском случае, дрейфовую систему координат в едином (лабораторном, реальном) времени t для всех частиц.

Для частицы, движущейся в поле только одной волны, гамильтониан (127) можно представить в более привычном виде: $h = -(p^2 + p_0^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle)^{1/2}$, выразив импульс h явно. Напомним, что в качестве гамильтониана может выступать любая каноническая переменная (чаще импульс), выраженная как функция от остальных канонических переменных. Такой вид гамильтониана встречается во многих работах по усреднённому описанию движения частицы в поле волны (см., например, [65, 68] и цитируемую там литературу). Появление в уравнении дополнительного потенциала $\mathcal{V}$ (например, кулоновского потенциала иона) усложнит вид гамильтониана (127):

$$\mathcal{H} = \frac{p_\perp^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle - h^2}{2p_0} + \frac{2h\mathcal{V} - \mathcal{V}^2}{2p_0} + \mathcal{V} \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{2p_0(p_x + h)}, \quad (128)$$

и уже не позволит записать гамильтониан в привычном виде, поскольку выразить импульс h оказывается значительно труднее. С другой стороны, использование обобщённого гамильтониана (128) в численном моделировании позволяет исключить ошибки в определении дрейфового импульса при расчёте столкновений частиц с релятивистскими скоростями [69].

9.2. Условия адиабатичности

Ещё одно отличие предложенного нами подхода от усреднённого описания состоит в возможности рассмат-

ривать поле волнового пакета, а не только плоской монохроматической волны. Как отмечалось в разделе 9.1, формулы (126) и (127) совершенно не изменятся при наличии произвольной зависимости от "продольной" координаты ξ . Введение дополнительной зависимости от остальных координат приведёт к появлению осциллирующих слагаемых в дрейфовом импульсе $p_{\perp, \eta} = P_{\perp, \eta} - \delta p_{\perp, \eta}$ и гамильтониане

$$\mathcal{H} = \frac{p_\perp^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle - h^2}{2p_0} + \delta p_\eta \frac{p_x - h + 2\mathcal{U}}{p_0} + \delta \mathbf{p}_\perp \frac{2\mathbf{p}_\perp - 2\mathbf{p}_{\text{osc}} + \delta \mathbf{p}_\perp}{2p_0}, \quad (129)$$

где

$$\delta p_i = \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r_i} d\xi, \quad \mathcal{U} = \frac{2\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_{\text{osc}} + p_{\text{osc}}^2 - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{4p_\eta}. \quad (130)$$

Эти слагаемые малы по сравнению с длиной волны излучения в случае плавной зависимости от поперечных координат, что позволяет оценить неадиабатические поправки к усреднённому описанию по теории возмущений. Более того, если окажется, что такие поправки несущественны, то мы можем продолжить цепочку канонических преобразований и найти поправки к дрейфовому гамильтониану во втором порядке и т.д. [70].

Условия адиабатического приближения при движении в волновом пакете легко найти и из общих соображений. Действительно, изменение импульсов будет адиабатически (экспоненциально) малым, если собственное время пролёта пакета вдоль координат $\mathbf{r}_{\perp, \eta}$ много больше собственного времени пролёта периода поля. Эти времена легко оценить: $s_0 = \lambda/v_\xi$ — собственное время пролёта периода поля, $s_1 = L_\perp/v_\perp$, $s_2 = L_\parallel/v_\eta$ — собственные времена пролёта по поперечной и "продольной" координатам. Скорости пролёта в собственном времени определяются по стандартным формулам $dr_i/ds = v_i = \partial \mathcal{H}/\partial p_i$ и имеют вид (как следует из (125))

$$v_\perp = \frac{p_\perp}{p_0} \approx a, \quad v_\xi = \frac{2p_\eta}{p_0}, \quad v_\eta = \frac{2p_\xi}{p_0}.$$

Учитывая дополнительно связь импульсов $p_{\text{max}} \approx p_\xi \approx p_{\text{osc}}^2/p_\eta \gg p_0$ для ультрарелятивистского случая, условия адиабатичности можно записать в следующем простом виде [66]:

$$p_{\text{max}} \ll \frac{2L_\perp}{\lambda} p_{\text{osc}}, \quad p_{\text{max}} \ll \sqrt{\frac{L_\parallel}{\lambda}} p_{\text{osc}}. \quad (131)$$

По сути, это те же условия, которые ранее приводились другими авторами [65], но выраженные через максимальный импульс частицы.

Физический смысл условий (131) довольно прозрачен. Сверхбыстрая частица движется почти вместе с волной, и из-за релятивистского замедления ей необходимо большее собственное время для прохождения осцилляций поля по сравнению с таковым в нерелятивистском случае. Вместе с тем вылет поперёк пакета происходит так же быстро, как и в нерелятивистском случае. Именно по этой причине обычное нерелятивистское условие адиабатичности $L_\perp, L_\parallel \gg \lambda$ заменяется условием (131), содержащим импульс частицы. Аналогичным образом могут быть получены и условия нарушения адиабатичности

при распространении волнового пакета в среде (например, в плазме). В этом случае ограничение фактически состоит в невозможности превышения скоростью частицы групповой скорости волны.

9.3. Изменение энергии при мгновенном ударе

Выпишем соотношения для энергии при резком скачкообразном изменении полного импульса частицы вследствие упругого столкновения. Пусть до столкновения частица имела кинематический импульс $\{h, \mathbf{p}\}$ в лабораторной системе координат, а сразу после мгновенного (на масштабе периода поля) упругого столкновения приобрела импульс $\{h, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}\}$. В качестве важного примера таких столкновений могут служить электрон-ионные столкновения при пренебрежении изменением импульса иона (бесконечно тяжёлый ион). Как известно, рассеяние частиц на кулоновском потенциале иона в отсутствие внешних полей происходит с сохранением энергии частиц [49]. Это следует непосредственно из стационарности соответствующего гамильтониана взаимодействия частиц.

Найдём изменение дрейфового импульса частицы $\Delta\mathbf{p}$. Изменение поперечного дрейфового импульса частицы в точности равно $\Delta\mathbf{p}_\perp = \delta\mathbf{p}_\perp$. Кроме того, поскольку p_η не преобразуется при переходе к дрейфовым координатам, получим

$$\Delta p_\eta = \frac{\delta p_x}{2} = \frac{\Delta p_x + \Delta h}{2}.$$

Изменение оставшейся компоненты импульса $\Delta p_\xi = (\Delta p_x - \Delta h)/2$ надо выразить с учётом формул перехода к дрейфовым координатам (124):

$$\Delta p_\xi = \frac{\delta p_x}{2} - \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2(\mathbf{p}_\perp + \delta\mathbf{p}_\perp)\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{4(p_\eta + \delta p_x/2)} + \frac{p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle}{4p_\eta}.$$

Откуда для изменения энергии находим

$$\Delta h = \frac{1}{2(p_x + h + \delta p_x)} \times \left[2\delta\mathbf{p}\mathbf{p}_{\text{osc}} - \frac{\delta p_x}{p_x + h} (p_{\text{osc}}^2 + 2\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_{\text{osc}} - \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle) \right]. \quad (132)$$

В нерелятивистском пределе $p_x, |h - p_0| \ll p_0$ мы получаем хорошо известное выражение для изменения энергии:

$$\Delta h = -\frac{\Delta\mathcal{E}}{c} \simeq \frac{\delta\mathbf{p}\mathbf{p}_{\text{osc}}}{p_0}, \quad (133)$$

отражающее тот факт, что изменение энергии частицы — это работа, совершённая над ней полем. Максимальное изменение энергии при этом получается при рассеянии частицы назад, когда $\delta\mathbf{p} = -2\mathbf{p}_{\text{osc}}$. Здесь и далее, если не оговорено особо, мы считаем начальный дрейфовый импульс малым по сравнению с осцилляторным импульсом. Между тем в случае релятивистского движения легко увидеть, что возможно заметное изменение энергии и при рассеянии вбок (вдоль $\mathbf{k}$ — особенно при $\delta p_x \sim p_0, p_x$) из-за изменения "массы" частицы и, соответственно, осцилляторной траектории, поскольку в релятивистском случае амплитуда осцилляций зависит от величины дрейфового импульса частицы.

Проанализируем выражение (132). Можно заметить, что выражение в квадратных скобках ограничено по амплитуде и не может превышать величины порядка p_{osc}^2 . Это непосредственно следует из малости начальных дрейфовых импульсов, $p \ll p_{\text{osc}}$, и оценки для энергии $h \approx p_{\text{osc}} \gg p_0$. Полагая изменение импульса вдоль $\mathbf{k}$ малым ($\delta p_x \ll h \approx p_{\text{osc}}$), мы сразу приходим к ограничению максимальной получаемой энергии величиной порядка p_{osc} , как и отмечалось ранее.

Однако пусть частица рассеялась почти на 90° от своей начальной скорости ($\delta\mathbf{p}_\perp = -\mathbf{p}_{\text{osc}}$) и полетела вдоль волнового вектора ЭМ-волны. Тогда в знаменателе (132) окажется малая величина $2(p_x + h + \delta p_x) \approx \approx p_0^2/p_{\text{osc}} \ll p_{\text{osc}}$. В результате максимальная возможная энергия частиц будет порядка

$$\Delta h_{\text{max}} = \frac{p_{\text{osc}}}{p_0^2} (p_{\text{osc}}^2 + \langle p_{\text{osc}}^2 \rangle) \approx \frac{2p_{\text{osc}}^3}{p_0^2} \gg p_{\text{osc}}. \quad (134)$$

Это и есть полученная ранее оценка (117).

Отметим, что иногда более удобно использовать формулы для дрейфовых координат, чем выражения для изменения импульсов. В частности, формулы для дрейфовых координат позволяют довольно легко получить распределение частиц по энергии после столкновения. Кроме того, дрейфовые координаты удобны при численном моделировании столкновений частиц в релятивистски сильных полях.

9.4. Распределение сверхбыстрых частиц

Найдём распределение по энергии сверхбыстрых частиц, появляющихся при электрон-ионных столкновениях в единицу времени. Для этого необходимо вычислить интеграл

$$g(h) = n_i \iint n(\rho) v \delta(h - \Delta h) \rho \, d\rho \, d\phi, \quad (135)$$

где $n_i = n_e/Z$ — концентрация ионов, $n(\rho)$ — плотность частиц перед последним ударом, h — изменение дрейфовой энергии при релятивистском кулоновском соударении.

Плотность частиц перед последним ударом можно определить из следующих соображений. Заметим, что релятивистски сильные лазерные поля соответствуют условиям:

$$p_{\text{osc}} = \frac{eA}{c} \gg mv_T = \sqrt{\frac{mT}{2}}, \quad r_{\text{osc}} \approx \frac{c}{\omega} \gg b_{\text{osc}} \approx \frac{e^2 Z}{p_{\text{osc}} c}. \quad (136)$$

Приближённые выражения для радиуса осцилляций r_{osc} и резерфордского радиуса b_{osc} (в отличие от таковых в (81)) даны для случая ультрарелятивистских интенсивностей $p_{\text{osc}} \gg mc$.

Будем считать, что рассеяние частиц в релятивистски сильных полях происходит в два этапа и концентрация частиц перед последним, жёстким, ударом $n(\mathbf{r})$ равна (97). В релятивистски сильных полях распределение (97), по-видимому, сохранится, так как это простейший вид распределения в условиях, когда частицы с окружности собираются в точку. Поскольку в релятивистском случае остаётся справедливым закон увеличения рассеянного импульса с уменьшением прицельного параметра, рас-

пределение (97) будет иметь место в силу кинематических причин. Вид распределения (97) подтверждают и численные расчёты столкновений в релятивистски сильных полях (см. раздел 10).

Для определения изменения импульса, входящего в выражение (132) для h , воспользуемся точными формулами рассеяния релятивистской частицы на кулоновском центре [49]. Использование этих формул оправдано тем, что последний, "жёсткий", удар происходит на временных и пространственных масштабах, много меньших масштабов ЭМ-волны (периода и длины волны). Естественно, это верно для столкновений вдали от точек остановки частицы (когда полная скорость частицы равна нулю), отсутствующих в релятивистски сильных полях. Величина продольного¹⁵ импульса δp_x имеет вид

$$\delta p_x = p_{\text{osc}} \cos \phi \sin \theta(\rho), \quad (137)$$

где угол рассеяния

$$\theta = \pi - \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2/\rho^2}} \arccos \frac{-\beta \sqrt{p_{\text{osc}}^2 + p_0^2}}{\sqrt{p_{\text{osc}}^2 \rho^2 + p_0^2 \beta^2}}. \quad (138)$$

Здесь β — характерный параметр задачи рассеяния,

$$\beta = \frac{e^2 Z}{p_{\text{osc}} c} \approx b_{\text{osc}} \quad p_{\text{osc}} \gg p_0.$$

Отметим важную особенность рассеяния с релятивистскими скоростями. При малых прицельных параметрах $\rho \sim \beta$ становится возможным рассеяние вперёд. Более того, при уменьшении прицельного параметра, $\rho \rightarrow \beta$, рассеяние приобретает быстро осциллирующий характер вследствие стремления знаменателя $(1 - \beta^2/\rho^2)^{1/2}$ к нулю в формуле для угла рассеяния (138). Частицы, имеющие прицельный параметр $\rho < \beta$, падают на кулоновский центр и далее не рассматриваются.

В случае, когда интерес представляет рассеяние в ультрарелятивистских полях ($p_{\text{osc}} \gg p_0$), выражение для угла рассеяния (138) упрощается:

$$\theta = \pi - \frac{2}{\sqrt{1 - \eta^2}} \arccos(-\eta), \quad (139)$$

где $\eta = \beta/\rho \geq 1$. При этом интеграл (135) для циркулярно¹⁶ поляризованной электромагнитной волны примет вид

$$g(h) = v n_e n_i \iint \delta \left(h - \frac{p_{\text{osc}}(2 + \cos \theta)}{1 - \sin \theta \cos \phi + \mu} \right) \frac{b \eta}{\beta} \frac{d\eta d\phi}{\eta^3}, \quad (140)$$

где μ — малый параметр задачи, $\mu = p_0^2/(2p_{\text{osc}}^2) = 1/(2a^2) \ll 1$. Для вычисления такого интеграла необходимо выразить параметр интегрирования η через h . Однако аналитически это сделать довольно сложно из-за

¹⁵ Изменение остальных компонент для интересующих нас частиц будет малым.

¹⁶ Аналогичным образом можно записать выражения для произвольно поляризованной волны, но появится дополнительный интеграл по зависимости от фазы поля в момент столкновения. Циркулярная поляризация отличается тем, что модуль осцилляторной скорости не зависит от фазы поля, что приводит к снятию одного интегрирования.

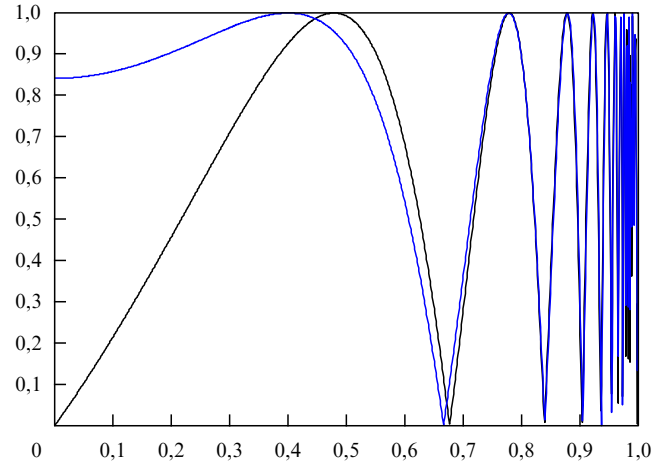


Рис. 27. (В цвете онлайн.) Функция $\sin \theta$ для (139) (чёрная кривая) и (141).

трансцендентного характера зависимости угла рассеяния от η (139).

Рассмотрим подробнее величину $\sin \theta$ (рис. 27). Основной интерес для нас представляют энергии порядка $h \sim p_{\text{osc}}/\mu$, что соответствует значениям $|\sin \theta| \approx 1$. При этом ввиду быстро осциллирующего характера этой функции представляется возможным заменить её некоторой похожей функцией более простого вида. В качестве примера такой функции можно взять (см. рис. 27)

$$\theta = \sin \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right). \quad (141)$$

Очевидно, что при этом область малых значений $\eta \ll 1$, ответственных за относительно малое изменение энергии, будет описываться неправильно, т.е. мы должны ограничиться энергиями $h \geq 2p_{\text{osc}}$.

В результате интеграл (140) примет вид

$$g(h) \approx 2v n_e n_i \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{b \eta_k}{\beta} \frac{\partial \theta^*}{\partial h} \frac{1}{\eta_k^4} \frac{4\pi^2 d\phi}{(\theta^* + \pi(k+1))^3} \approx \\ \approx v n_e n_i \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{2}{\pi \eta_1^4} \frac{b \eta_1}{\beta} \int \frac{\partial \theta^*}{\partial h} d\phi. \quad (142)$$

Здесь η_k — значение $\eta \in (0, 4, 1)$, при котором $\sin \theta = 1$, θ^* — угол рассеяния, при котором аргумент δ -функции в интеграле (140) обращается в нуль:

$$\theta^* \approx \arcsin \frac{1 + \mu - 2p_{\text{osc}}/h}{|\sin \phi|}. \quad (143)$$

Заметим, что из этого выражения легко вновь получить ограничение на максимальную энергию исходя из области определения функции арксинус: $h \leq 2p_{\text{osc}}/\mu$.

Окончательно распределение частиц по энергиям принимает вид

$$g(h) = v n_e n_i \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{2}{\pi \eta_1^4} \frac{b \eta_1}{\beta} \frac{p_{\text{osc}}}{h^2} K \left[1 - \left(1 + \mu - 2 \frac{p_{\text{osc}}}{h} \right)^2 \right], \quad (144)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При выделении зависимости от основных парамет-

ров плазмы распределение по энергиям приобретает следующий простой вид:

$$g(h) \sim \frac{n_i^2 Z^3 A}{h^2}, \quad (145)$$

где A — логарифмический множитель. Последняя формула удобна для экспериментальных оценок. Например, меняя тип газа (т.е. величину Z), получим кубичную зависимость от заряда иона. Кроме того, явно виден степенной закон убывания $g(h)$ с возрастанием энергии частиц. Отметим, что вследствие высокой энергии такие частицы практически не будут сталкиваться в плазме в дальнейшем, что сохранит их закон распределения. Зависимость от плотности газа (величины n_i) не столь очевидна, так как высокие концентрации приведут к нарушению условий адиабатичности (131).

На самом деле оценку (145) можно получить из совсем простых соображений. Предположим, что частица рассеивается изотропно, если её прицельный параметр мал, $\rho \sim \beta$ (см. рис. 27). Тогда с учётом формул (97) и (118) распределение по энергиям принимает простой вид для высокоэнергетичных частиц, $p > p_{\text{osc}}$:

$$g(h) = 2\pi n_i n_e b \beta \int \delta\left(h - \frac{p_{\text{osc}}}{1 + \mu - \cos \vartheta}\right) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Здесь ϑ — угол между волновым вектором и кинематическим импульсом частицы после столкновения, $p_x = p_{\text{osc}} \cos \vartheta$. Интеграл легко вычисляется с помощью определения δ -функции, если энергия частицы удовлетворяет условиям $h > p_{\text{osc}}$, $h < 2p_{\text{osc}} a^2$:

$$g(h) = 4\pi n_i n_e b \beta \frac{p_{\text{osc}}}{h^2} \sim \frac{n_i^2 Z^3}{h^2}. \quad (146)$$

Интересно, что в результате грубого предположения об изотропии рассеяния утратился логарифмический множитель (ср. с (145)), но зависимость от основных параметров осталась правильной.

10. Столкновения

в релятивистски сильных полях

Динамика рассеяния электронов в релятивистских и сильных нерелятивистских полях во многом схожа. Точно так же имеют место эффекты притяжения и группирования [69]. Соответственно, остаётся в силе утверждение о неприменимости прямолинейного приближения для описания столкновений в таких полях. А именно, в сильных полях, $\Omega \ll 1$, необходимо учитывать стадию притяжения — участок движения, на котором электрон в осциллирующем поле притягивается в малую окрестность иона с больших прицельных расстояний. Энергия электрона на этом этапе почти не меняется, но заметно изменяется его положение в пространстве относительно иона. И только потом происходит сильный ("жёсткий", последний) удар электрона о ион со значительным изменением энергии и направления скорости электрона.

Эффект притяжения, который носит чисто кинематический характер, связан с притяжением осциллирующего электрона к иону. При этом на этапе притяжения существенно наличие двух условий, сохраняющихся и в релятивистском случае: притягивающего центра иона и периодического внешнего поля. Несмотря на то что

осцилляции частицы будут очень сложными, качественный характер столкновений не изменится. Более того, поскольку эффект определяется дрейфовой скоростью¹⁷ налетающих электронов, характерные масштабы и зависимости остаются теми же, что и в нерелятивистских полях. Фактически изменится только характер последнего ("жёсткого") удара электрона о ион. Именно в этом случае приходится применять релятивистские формулы для задачи рассеяния [49].

Покажем, например, наличие эффекта притяжения в релятивистски сильных полях (ср. с рассмотрением в разделе 7). Из точных формул рассеяния релятивистской частицы в поле иона [49] следует простая связь изменения импульса частицы $\Delta p_{\perp}$ с её прицельным параметром ρ :

$$\Delta p_{\perp} = \frac{p_{\text{osc}} b_{\text{osc}}}{\rho} \ll p_{\text{osc}}. \quad (147)$$

Однако для $b_{\text{osc}} = e^2 Z / p_{\text{osc}} v_{\text{osc}}$ надо подставлять релятивистское выражение, учитывающее связь скорости и импульса электрона, $v_{\text{osc}} = p_{\text{osc}} c / (p_{\text{osc}}^2 + p_0^2)^{1/2}$. Найдя отсюда величину изменения поперечной скорости $\Delta v_{\perp} = \Delta p_{\perp} c / (p_{\text{osc}}^2 + p_0^2)^{1/2}$, легко увидеть, что частицы с мгновенным прицельным параметром $\rho_1 = \sqrt{2\pi} r_E$ через период поля $2\pi/\omega$ точно попадут в ион. Отметим, что определение (52) величины r_E сохраняет такой же вид, как и в нерелятивистском случае, но с подстановкой релятивистских выражений для радиуса осцилляций и резерфордовского радиуса:

$$r_{\text{osc}} = \frac{p_{\text{osc}} c}{\omega \sqrt{p_{\text{osc}}^2 + p_0^2}}, \quad b_{\text{osc}} = \frac{e^2 Z \sqrt{p_{\text{osc}}^2 + p_0^2}}{p_{\text{osc}}^2 c}. \quad (148)$$

Аналогичным образом можно найти мгновенные прицельные параметры, при которых электрон попадёт в ион за две, три и т.д. осцилляции. Причём выражения для этих параметров будут в точности такими же, как и в нерелятивистском случае.

Таким образом, все выводы нерелятивистской задачи рассеяния остаются в силе с учётом релятивистского определения параметров задачи рассеяния (148). Результаты численного моделирования подтверждают данное утверждение. Так, распределение частиц перед "жёстким" ударом имеет такую же особенность (рис. 28), как и в нерелятивистском случае (97). Некоторое уменьшение числа частиц связано с появлением конечной ширины осцилляций по координате вдоль направления распространения волны. В результате режим "продольных" столкновений в линейно поляризованном поле, когда частицы движутся вдоль оси симметрии электрического поля и находятся в максимально удачных для набора энергии условиях, сменяется режимом рассеяния, подобным таковому в циркулярно поляризованной волне. При этом максимальное значение коэффициента b уменьшается, но его зависимость от угла падения частиц θ становится более плавной, так что интегральное значение $\int b \sin \theta d\theta$ остаётся почти постоянным. Величина b оказывается слабо зависящей от угла падения частиц и примерно равной $b_v = e^2 Z / (mv^2)$. Именно такая картина

¹⁷ При типичных параметрах плазмы с температурой от нескольких электронвольт до нескольких сотен электронвольт дрейфовую скорость электронов можно считать нерелятивистской.

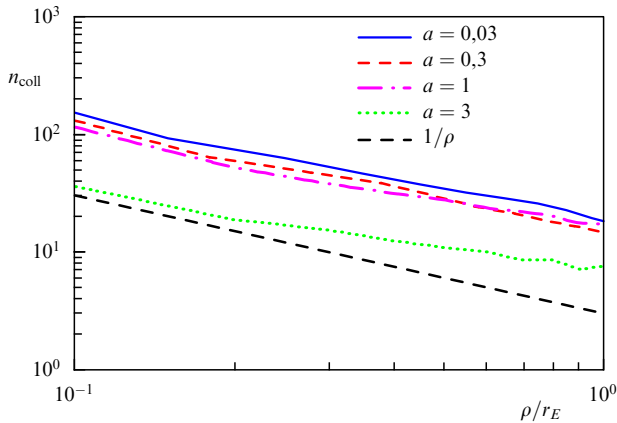


Рис. 28. Зависимость плотности перед жёстким ударом от расстояния до иона для различных значений a . Нижней штриховой линией показана модельная зависимость.

наблюдается в зависимости эффективного (энергетического) сечения столкновений от углов падающих частиц с возрастанием параметра a (см. раздел 10.1).

Несмотря на довольно простой вид распределения частиц перед последним ударом (97), динамика рассеивающихся частиц довольно сложна. Это иллюстрирует рис. 29, на котором показана величина изменения энергии в зависимости от начальных прицельных параметров при различных углах влёта и амплитудах поля накачки a . Более тёмные области соответствуют большему изменению энергии. В нерелятивистском случае, $a \approx 0$, видны концентрические кольца при продольном падении частиц

и гантелеобразное распределение при поперечном. С увеличением амплитуды поля накачки начинают "смазываться" кольца при продольном падении, что соответствует появлению "восьмёрки" в осцилляторном движении электрона — переходу к режиму рассеяния, подобному режиму рассеяния в циркулярно симметричном случае. Эта "восьмёрка" хорошо видна на рис. 29б для поперечного рассеяния. Кроме того, осцилляторный радиус несколько уменьшается по сравнению с таковым в нерелятивистском случае (в полном соответствии с (148)). Наконец, в ультрарелятивистском поле накачки ($a = 3$) динамика ещё более усложняется — различие между продольным и поперечным падением частиц становится несущественным. Частицы начинают набирать больше энергии (более тёмный цвет на рис. 29, линии утолщаются), что отражает увеличение осцилляторного резерфордовского радиуса b_{osc} с возрастанием $a > 1$ в соответствии с формулой (148).

10.1. Джоулев нагрев

Совершенно аналогично ведут себя и интегральные характеристики рассеяния. Рассмотрим вначале энергетическое сечение рассеяния (23), которое можно оценить из простых аналитических соображений. Будем считать, что основной вклад в нагрев при последнем ударе вносят малоугловые столкновения с изменением импульса (147). Плотность частиц перед последним ударом о ион известна из результатов численного моделирования (97). Тогда сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma_{\text{eff}} \approx \int_{b_{\text{osc}}}^{\infty} n(\rho) \frac{\Delta p_{\perp}^2}{p_{\text{osc}}^2} \rho d\rho = b_v b_{\text{osc}} \sim \frac{\sqrt{1+a^2}}{T_e p_{\text{osc}}^2}. \quad (149)$$

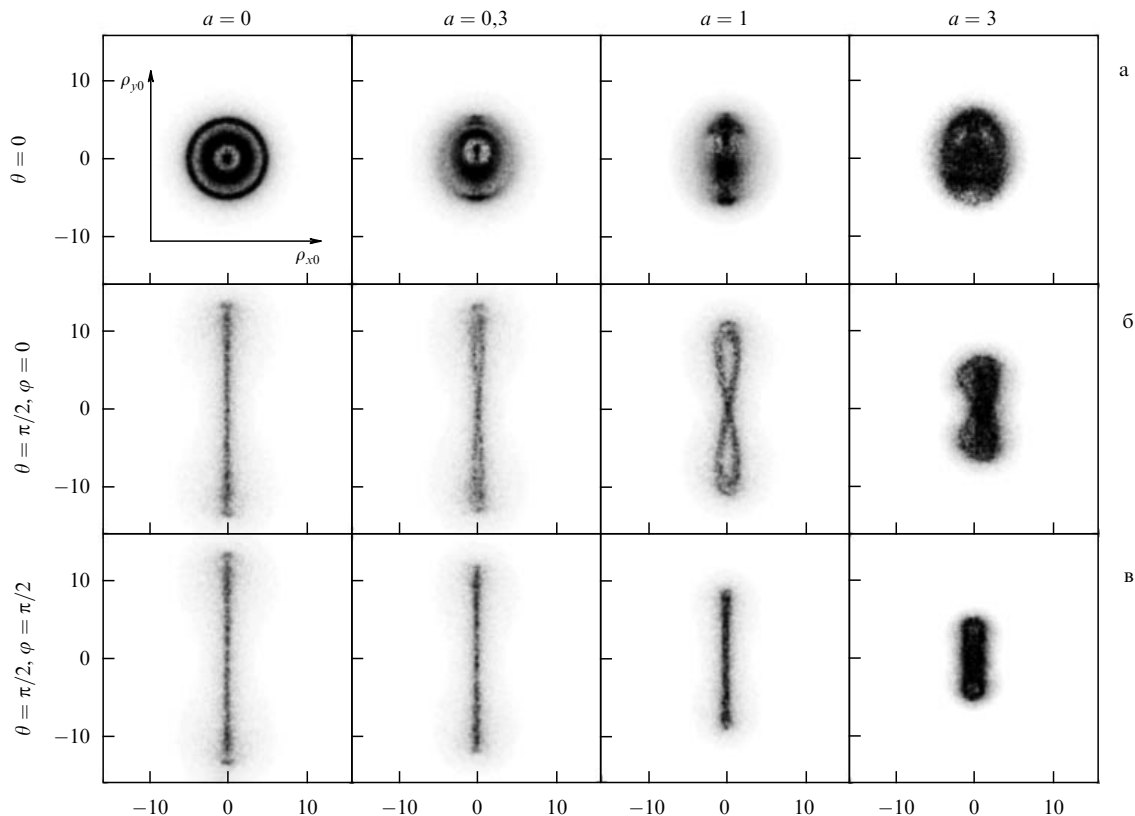


Рис. 29. Зависимость изменения энергии от прицельных параметров, нормированных на осцилляторный радиус, для различных углов влёта и значений параметра a при $\Omega = 0,3$.

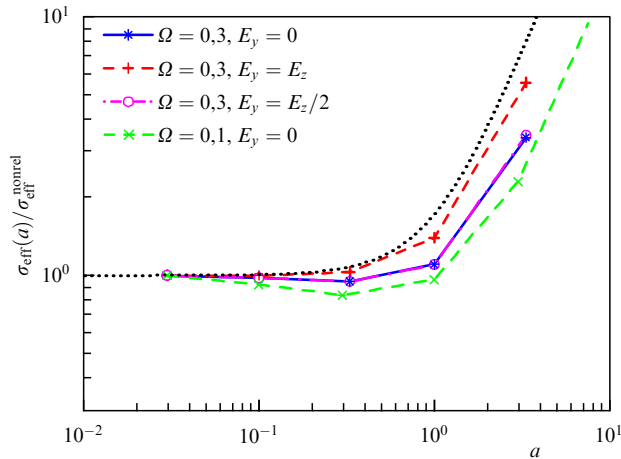


Рис. 30. (В цвете онлайн.) Зависимость интегрального эффективного сечения рассеяния от a для различных поляризаций (линейной ($E_y = 0$), циркулярной ($E_y = E_z$), эллиптической ($E_y = E_z/2$)) поля накачки и значений параметра Ω . Пунктирной кривой показана модельная зависимость $\sqrt{1+a^2}$.

Результаты численного моделирования полностью подтверждают оценку (149). Из рисунка 30 видно, что при дорелятивистских интенсивностях, $a < 1$, сечение столкновений почти постоянно. При релятивистских интенсивностях ($a \geq 1$) сечение начинает возрастать пропорционально $\sqrt{1+a^2}$. Причём такая зависимость имеет место для всех поляризаций поля накачки.

Зависимость эффективного сечения от углов влёта рассеивающихся частиц представлена на рис. 31 для линейно поляризованного поля накачки. В нерелятивист-

ском пределе ($a \approx 0$) видна сильная анизотропия сечения в зависимости от угла θ между импульсом частиц и направлением электрического поля. Анизотропия связана с тем, что все частицы, движущиеся вдоль поля, попадают в благоприятный режим многократного рассеяния на ионе. Напротив, только относительно малая доля частиц испытывает многократные столкновения при влёте перпендикулярно электрическому полю.

Переход от осцилляций по синусоиде к осцилляциям по "восьмёрке" при учёте релятивистских эффектов приводит к трём следствиям. Во-первых, всё большая доля частиц начинает испытывать многократные столкновения при влёте под углом к электрическому полю, что приводит к уширению зависимости сечения рассеяния от угла θ . Во-вторых, продольное падение ($\theta = 0$) становится всё менее выделенным по сравнению с падением под углами, отличными от нулевого, и только часть электронов при этом испытывает многократные удары о ион. Как следствие, величина сечения при $\theta = 0$ уменьшается. Фактически происходит переход к режиму столкновений в циркулярно поляризованном поле. В-третьих, появляется слабая зависимость сечения от угла ϕ между направлением начального импульса частиц и волновым вектором поля накачки. Наконец, в ультрарелятивистских полях ($a \gg 1$) сечение возрастает как целое пропорционально $\sqrt{1+a^2}$. При этом темп нагрева dT/dt также не зависит от амплитуды ЭМ-волны из-за "уменьшения" передаваемой (осцилляторной) энергии $\sim \sqrt{1+a^2} - 1$, за исключением переходной области $a \sim 1$.

10.2. Генерация быстрых частиц

Исходя из соображений, подобных изложенным в разделе 10.1, можно получить также распределение частиц

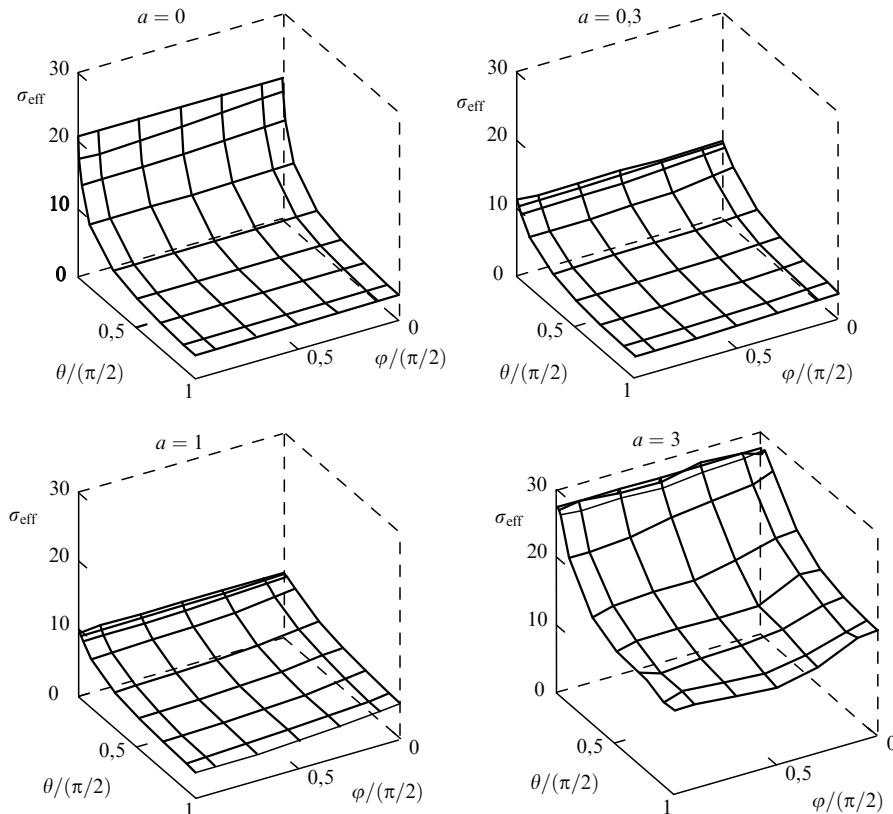


Рис. 31. Зависимость эффективного сечения от углов влёта при различных значениях a , указанных на рисунке, и $\Omega = 0,3$.

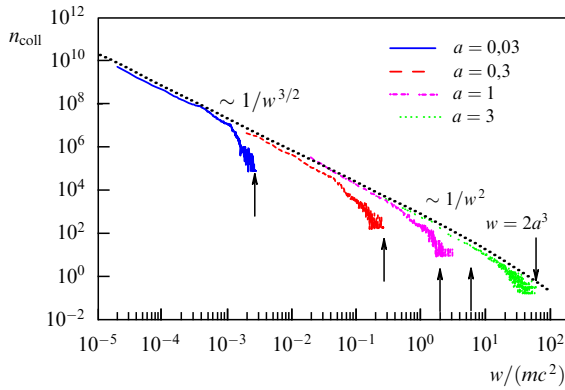


Рис. 32. (В цвете онлайн.) Распределение частиц по изменению энергии для различных величин a при $\Omega = 0,3$. Пунктирная линия (лежащая выше всех других кривых) — модельная зависимость (150). Стрелки снизу показывают энергию частиц с максимальным изменением импульса $2p_{osc}$.

по энергии $w = c((p_0^2 + p^2)^{1/2} - p_0)$ (рис. 32). При относительно малом изменении импульса, $w \ll mc^2$, функция распределения частиц убывает как $\sim 1/w^{3/2}$. Наоборот, при больших энергиях, $w \gg mc^2$, эта функция становится пропорциональной $\sim 1/w^2$ и ограниченной сверху энергией $2a^2 p_{osc} c \gg p_{osc} c$. Поведение функции распределения частиц по энергии как при малом, так и при большом изменении импульса находится в полном согласии с теоретическими представлениями.

Действительно, при $p < p_{osc}$ можно воспользоваться формулой (147) для вычисления распределения

$$g(\mathbf{q}) = n_i n_e v_{Te} \int \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_+) d^2 p d\phi.$$

Используя определение δ -функции, получим распределение по энергиям в виде

$$g(\Delta p_\perp) = n_i n_e v_{Te} \frac{n(\rho) \rho}{d\Delta p_\perp/d\rho},$$

где прицельный параметр

$$\rho = \frac{b_{osc} p_{osc}}{\Delta p_\perp} = \frac{b_{osc} p_{osc} c}{\sqrt{w^2 + 2wcp_0}}$$

должен быть выражен через конечные импульс $\Delta p_\perp$ или энергию w (полагается, что $w \gg T_e$), концентрация $n(\rho)$ частиц перед жёстким ударом определяется формулой (97). Поскольку доля быстрых частиц мала, фоновую плазму можно рассматривать как "источник", а её параметры считать неизменными. Более того, быстрые частицы вследствие их большой энергии не испытывают столкновений в дальнейшем. В результате для распределения по энергиям находим [71]

$$g(p) \sim \frac{1}{p^3} \quad \text{или} \quad g(w) \sim \frac{w + p_0}{(w^2 + 2p_0 w)^{3/2}} \sim \begin{cases} \frac{1}{w^{3/2}}, & w \ll mc^2, \\ \frac{1}{w^2}, & w \gg mc^2. \end{cases} \quad (150)$$

В экспериментах [72–74] получено именно такое распределение рассеянных частиц, т.е. распределение по импульсам (150). Из рисунка 33 видно хорошее согласие

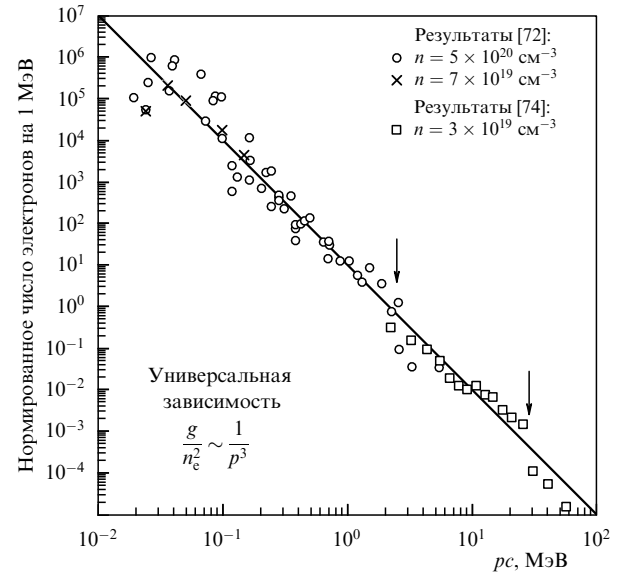


Рис. 33. Сравнение экспериментальных результатов [72–74] и теоретической зависимости (150) (сплошная линия) распределения горячих электронов по "энергетическому импульсу" pc . Стрелки показывают величину отсечки $2p_{osc}$.

теоретической зависимости (150) с экспериментальными данными. Отметим, что на рис. 33 объединены четыре разные серии экспериментальных измерений [72–74]. Рисунок 33 показывает ещё один признак именно столкновительных горячих электронов. Столкновительный нагрев имеет естественный верхний порог для импульса электронов — $2p_{osc}$. Соответствующие максимальные энергии отмечены на рис. 33 стрелками. Видно, что они отвечают резкому уменьшению числа наблюдаемых горячих электронов¹⁸. Важно подчеркнуть, что рис. 33 показывает зависимость от "энергетического импульса" pc , а не от энергии частицы. Эти величины равны только в ультрарелятивистском случае [72, 73]. Возможность такой интерпретации экспериментальных результатов обусловлена также тем фактом, что в работе [74] использовались магнитные сцинтилляторы, которые измеряют именно импульс частиц, а не их энергию. Принимая всё это во внимание, можно заключить, что в распределениях, полученных в работе [74], имелась ошибка в калибровке.

В другом предельном случае, $p_0 \leq p_{osc} < w/c < a^2 p_{osc}$, связь энергии и импульса линейна: $w = pc$. Распределение таких сверхбыстрых частиц по импульсам, которое было найдено ранее (145), пропорционально $\sim 1/p^2$. Направление вылета частиц почти параллельно волновому вектору ЭМ-волны. Соответственно, закон распределения частиц по энергии имеет вид

$$g(w) \sim \frac{1}{p^2} \frac{dp}{dw} = \frac{1}{w^2}, \quad w \gg p_{osc}. \quad (151)$$

Причём максимальная энергия частиц ограничена величиной $2p_{osc}^3/p_0^2$. Именно такой "хвост" демонстрируют и результаты численных расчётов (см. рис. 32).

¹⁸ Следует отметить, что частицы с гораздо более высокой энергией (до p_{osc}^2/m или $p_{osc}^3/m^2 c$) могут появиться при электрон-ионных столкновениях в ультрарелятивистском случае.

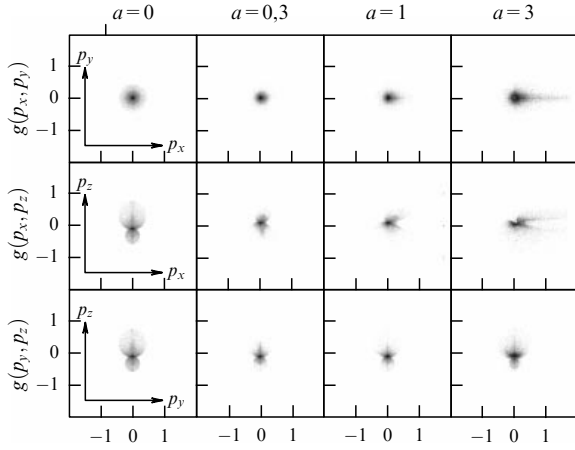


Рис. 34. Распределение частиц по изменению импульса для различных величин a . Показаны распределения в плоскостях $p_x \times p_y$, $p_x \times p_z$ и $p_y \times p_z$. Импульсы нормированы на осцилляторный импульс.

Рисунок 34 показывает изменение углового распределения рассеянных частиц с возрастанием параметра a . Градацией цвета показана плотность рассеянных электронов (чем больше частиц с данным импульсом, тем темнее цвет) в зависимости от проекций импульса при разных величинах нормированного вектора-потенциала a . Видно, что в нерелятивистском случае ($a = 0,03 \simeq 0$) распределение рассеянных электронов почти изотропно поперёк электрического поля волны, хотя присутствует и малая часть электронов, рассеивающихся вдоль электрического поля волны с $p_z \neq 0$. При возрастании a распределение электронов становится анизотропным и при $a \geq 1$ появляется заметный "хвост", направленный в сторону распространения ЭМ-волны — в область $p_x > 0$. Фактически в этом хвосте и сосредоточены сверхэнергичные электроны (151) с энергией $w > p_{\text{osc}}$ — так называемый эффект a^3 .

В эксперименте [75] наблюдались электроны с энергиями в несколько сотен мегаэлектронвольт именно с таким законом распределения (151). На рисунке 35 видны как степенное распределение электронов по энергиям, так и излом, связанный с неадиабатичностью движения в волновом пакете для электронов со слишком большими энергиями (131). Исчезновение этого излома при

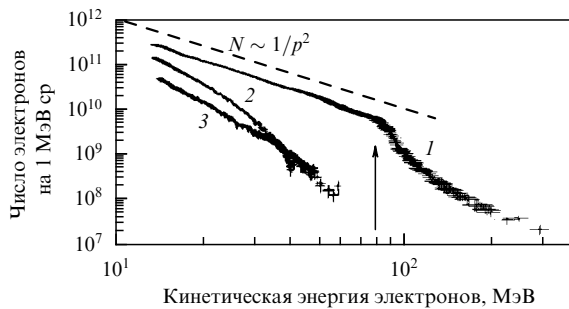


Рис. 35. Зависимость распределения электронов от энергии при $n_e = 5,4 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (кривая 1), $n_e = 7,7 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (кривая 2), $n_e = 83 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (кривая 3) [75]. Видны излом при переходе к неадиабатическому режиму (указанный стрелкой) и исчезновение этого излома при возрастании концентрации. Штриховая линия соответствует закону $1/p^2$. Стрелкой обозначена граница адиабатичности (131).

увеличении концентрации может быть связано с тем, что в плотной плазме исчезает эффект притяжения, поскольку становится несправедливым приближение парных столкновений.

Помимо графического сравнения данных эксперимента и теоретической кривой, можно найти и сравнить темп нагрева (температуру после импульса) и число (величину заряда) быстрых электронов. Темп нагрева в нерелятивистском и релятивистском случаях легко получить, полагая $b = b_v$:

$$Q \simeq 4\pi n_i n_e m c^3 b_c^2 \frac{c}{v}. \quad (152)$$

Здесь $b_c = e^2 Z / (m c^2)$ — резерфордский радиус для $p = m c$, равный при $Z = 1$ классическому радиусу электрона.

Отметим, что темп нагрева (152) не зависит от амплитуды ЭМ-поля как в нерелятивистском, так и в релятивистском случаях. Размерная оценка темпа нагрева единицы объёма

$$Q = 10^{13} \frac{nZ}{\sqrt{T}} [\text{эВ см}^{-3} \text{ с}^{-1}] \quad (153)$$

озволяет оценить температуру плазмы после прохождения ЭМ-импульса. В частности, для импульсов длительностью 1 пс (что соответствует условиям эксперимента [72, 73]) формула (153) даст температуру электронов порядка нескольких сотен электронвольт, что соответствует экспериментальным данным (200–600 эВ).

11. Интеграл столкновений в сильных полях

Формально интеграл столкновений имеет вид (17). Однако его непосредственное использование затруднено ввиду сложного, стохастического вида траекторий тестовых частиц. Выражение (17) можно упростить, приняв во внимание особенности динамики частиц в сильных полях. Динамика таких частиц представляет собой подтягивание к иону практически без изменения модуля дрейфовой скорости, резкий "жёсткий" удар о ион и уход из области рассеяния.

Импульс ушедших частиц практически не изменяется. Это позволяет заменить конечный импульс $\mathbf{p}(t = +\infty)$ импульсом после жёсткого удара. Кроме того, заменяя переменную интегрирования $\mathbf{r}_0$ координатой перед жёстким ударом $\mathbf{r}_c$, получим

$$\langle w_{ei}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t) \rangle = \frac{n_i}{T} \int J(\mathbf{r}_c, \mathbf{p}_0) (\delta(\mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} - \mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p})) d^3 r_c. \quad (154)$$

Здесь $\delta\mathbf{p}$ — малое изменение импульса частицы на стадии подтягивания к иону, $J(\mathbf{r}_c, \mathbf{p}_0)$ — якобиан перехода¹⁹ от $\mathbf{r}_0$ к $\mathbf{r}_c$, $\Delta\mathbf{p}$ — изменение импульса при жёстком ударе,

$$\Delta\mathbf{p} = - \left(\frac{2\rho m P / b}{1 + \rho^2 / b^2} + \frac{2mP}{1 + \rho^2 / b^2} \right)_{\rho \gg b} \approx -2mP \frac{\rho}{b} \frac{b}{\rho}, \quad (155)$$

где $\rho = \mathbf{R}_c - \mathbf{P}(\mathbf{R}_c, \mathbf{P}) / |\mathbf{P}|^2$ и $b = e^2 Z / (m P^2)$ — прицельный параметр перед жёстким ударом и резерфордский

¹⁹ Заметим, что в случае многопоточности в динамике частиц (что имеет место в сильных полях) в якобиане должно проводиться суммирование по участкам неоднозначности.

радиус, определённый по полной скорости частицы. Как и ранее, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$ — полные координата и импульс в момент удара. В случае малых скоростей, $p \ll p_{\text{osc}}$, для линейно поляризованной волны накачки, $\mathbf{E} = E\mathbf{z}_0$, выражения для ρ , $\mathbf{P}$ упрощаются:

$$\mathbf{P} \simeq \mathbf{z}_0 p_{\text{osc}}(z), \quad \rho \simeq x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0. \quad (156)$$

Для вычисления якобиана можно воспользоваться тем фактом, что физический смысл якобиана — концентрация частиц в новых переменных, которая уже была найдена в разделе 7. В общем случае концентрацию для линейно поляризованного поля можно представить в виде

$$J(\mathbf{r}_c, \mathbf{p}_0) = n_0 \left(1 + \frac{p}{p_{\text{osc}}} \frac{a(\mathbf{p}_0)}{\rho} \right) \approx \alpha(\mathbf{p}_0) \frac{b_{\text{osc}}}{\rho}, \quad (157)$$

где $\alpha(\mathbf{p}_0) \sim p_{\text{osc}}/p \gg 1$ — множитель, описывающий анизотропию эффекта притяжения в зависимости от скорости частицы до рассеяния (начальной скорости). Кроме того, ввиду малости изменения скорости частиц на стадии притяжения можно положить $\delta\mathbf{p} \approx 0$. В результате выражение для ядра столкновений примет вид

$$\langle w_{\text{ei}} \rangle = \frac{n_i}{T} \int J(\mathbf{r}_c, \mathbf{p}_0) \left(\delta(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}(\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_0) - \mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}) \right) d^3r_c. \quad (158)$$

Такое пренебрежение изменением скорости частиц не существенно при рассмотрении энергообмена с полем в случае, когда характерное изменение энергии частиц сравнимо с начальной энергией или больше её (например, при описании частиц на хвосте функции распределения), но может вносить погрешности в транспортные характеристики рассеяния, в которые, как и в слабых полях, основной вклад дают дальние малоугловые столкновения.

Выражение для ядра столкновений (158) похоже на формулу (17), но имеет важное отличие: из подынтегрального выражения исключена *явная стохастичность* динамики частиц. На самом деле выражение (158) описывает стохастический режим, но неявным образом — через концентрацию частиц перед последним ударом $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0)$. При этом концентрацию надо вычислять точно, учитывая сложность стохастической динамики частиц. Можно поступить проще — взять некую аппроксимацию выражения (157) для концентрации перед последним ударом и использовать тот факт, что $J(\mathbf{r})$ входит в подынтегральное выражение и погрешности аппроксимации "сгладятся" при интегрировании.

Для вычисления диффузионной части интеграла столкновений при рассеянии на малые углы выражения (158) уже достаточно. Действительно, от (17) оно отличается только подынтегральным множителем $J \sim 1/\rho$, описывающим притяжение частиц на стадии нацеливания. В этом случае опять можно использовать метод возмущений по малоугловому рассеянию, но уже для притянувшихся частиц.

Выкладки при этом аналогичны таковым в [5, 76]. Интеграл столкновений принимает форму Ландау:

$$\text{St}_{\text{ei}}[f] = \frac{\partial}{\partial p_i} B_{ij} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_j},$$

где коэффициент B_{ij} определяется интегралом [77],

$$\begin{aligned} B_{ij} &= n_i \int_{b_{\text{osc}}}^{\infty} \frac{\alpha b_{\text{osc}}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial r_i} \frac{\partial V}{\partial r_j} \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t} dt d^3r = \\ &= \frac{2\pi\alpha n_i e^4 Z^2 m}{p_{\text{osc}}} \left(\delta_{ij} - \frac{P_i P_j}{|P|^2} \right) \int_{b_{\text{osc}}}^{\infty} \frac{b_{\text{osc}} dr}{r^2} \simeq \\ &\simeq \frac{\pi^2 \alpha n_i e^4 Z^2 m}{p_{\text{osc}}} \left(\delta_{ij} - \frac{P_i P_j}{|P|^2} \right). \end{aligned} \quad (159)$$

В выражение (159) входит расходящийся на нижнем пределе интеграл $\int_{b_{\text{osc}}}^{\infty} dr/r^2$. В качестве нижнего предела при его вычислении была взята величина резерфордовского радиуса по полной скорости $b \approx b_{\text{osc}}$ — предел разложения (155) изменения импульса при рассеянии на малые углы ($\rho \gg b \approx b_{\text{osc}}$).

Вид тензора (159) — это единственный вид простейшего дифференциального оператора, дающего корректный результат для частоты столкновений в сильных полях при предположении, что рассеяние происходит преимущественно поперёк электрического поля ЭМ-волны. Отметим, что точно такая же "диффузионная" часть получается и для мгновенного (не усреднённого по времени) интеграла столкновений. Однако в последнем случае полный импульс частицы P будет зависеть также от времени.

На самом деле расходимость на нижнем пределе в (159) является довольно сильной, т.е. вклад близких столкновений сопоставим с вкладом дальних, малоугловых, столкновений. Действительно, применяя метод моментов к (158), получим выражение для первого момента:

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = \frac{\pi^2 n_i e^4 Z^2 \alpha m}{p_{\text{osc}}^3} p_{\text{osc},i}(t) = \frac{\partial B_{ij}}{\partial p_j},$$

совпадающее с аналогичным выражением из (159). Однако уже для второго момента,

$$\frac{d\langle p_i p_j \rangle}{dt} = \frac{\pi^2 n_i e^4 Z^2 \alpha m}{p_{\text{osc}}} (\delta_{ij} + \delta_{iz} \delta_{jz}) \neq B_{ij},$$

получается выражение, соответствующее почти изотропному рассеянию, а не рассеянию поперёк (см. рис. 34 при $a = 0$) мгновенной (осцилляторной) скорости, как следовало бы из (159).

Основную сложность в (159) представляет расходящийся на нижнем пределе интеграл $\int_{b_{\text{osc}}}^{\infty} dr/r^2$. Эта расходимость связана с заметным вкладом частиц, рассеивающихся на большие углы. Поэтому для аккуратного (не оценочного) описания столкновений следует пользоваться полным интегралом (158).

Выпишем (158) в явной форме, учитывая группировку частиц вблизи фаз максимума осцилляторной скорости:

$$\begin{aligned} \langle w_{\text{ei}} \rangle &= \frac{v_{\text{osc}} n_i}{2\pi} \int J(\mathbf{r}, \mathbf{v}_0) \left[\delta \left(\delta\mathbf{p}_{\perp} - \frac{2p_{\text{osc}} b_{\text{osc}} \mathbf{p}}{\rho^2 + b_{\text{osc}}^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta \left(\delta p_z \pm \frac{p_{\text{osc}} b_{\text{osc}}^2}{\rho^2 + b_{\text{osc}}^2} \right) - \delta(\delta\mathbf{p}) \right] d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (160)$$

где $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}$. Знаки плюс и минус соответствуют группировкам электронов вблизи максимальных значений осцилляторного импульса по направлению их движения и против него, поскольку модуль осцилляторной

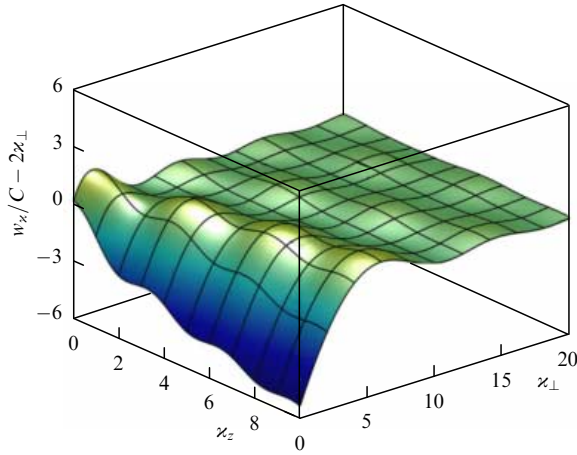


Рис. 36. Фурье-образ функции столкновений (161).

скорости $v_{\text{osc}}(t) \sim |\sin(\Omega^* t)|$ в линейно поляризованном поле дважды достигает максимума за период.

Для вычисления (160) перейдём к фурье-образу

$$w_x = \int \langle w(\delta \mathbf{p}) \rangle \exp\left(\frac{i \mathbf{x} \delta \mathbf{p}}{p_{\text{osc}}}\right) d^3 \delta \mathbf{p}.$$

В результате после замены $p \rightarrow b_{\text{osc}} \tan(\varphi/2)$ выражение (160) сводится к однократному интегралу:

$$w_x = C \int_0^\pi \frac{J_0(x_\perp \sin \varphi) \cos[x_\parallel(1 + \cos \varphi)] - 1}{1 + \cos \varphi} d\varphi, \quad (161)$$

где $C = v_{\text{osc}} \alpha n_i b_{\text{osc}}^2 / (2\pi)$. К сожалению, вычислить интеграл (161) аналитически не удастся. Результат численного интегрирования (161) представлен на рис. 36. Однако два важных случая допускают аналитическое вычисление.

Первый случай — разложение (161) при малых x :

$$w_x \approx -\frac{\pi C}{4} (2x_\parallel^2 + x_\perp^2) + \dots \quad (162)$$

Такое разложение соответствует диффузии в пространстве импульсов:

$$\frac{\partial^2 \tilde{B}_{ij} f(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{\pi^2 \alpha n_i e^4 Z^2 m}{4 p_{\text{osc}}} \left(\delta_{ij} + \frac{p_{\text{osc},i} p_{\text{osc},j}}{|p_{\text{osc}}|^2} \right). \quad (163)$$

Второй случай — разложение при $x_\perp \rightarrow \infty$. Численное интегрирование даёт линейную зависимость (см. рис. 36). Действительно, вторая производная от (161) имеет вид

$$\frac{d^2 w_x}{dx_\perp^2} = \pi \left(J_1^2\left(\frac{x_\perp}{2}\right) - J_0^2\left(\frac{x_\perp}{2}\right) \right) \xrightarrow{x_\perp \rightarrow \infty} 0.$$

Это означает, что w_x — линейная функция $x_\perp$ при $x_\perp \rightarrow \infty$. Более того, можно показать (см. рис. 36), что

$$w_x \approx 2x_\perp.$$

Используя эту зависимость и интеграл

$$\int_0^\infty r^2 J_0(kr) dr = -\frac{1}{k^3},$$

можно найти приближённое выражение для интеграла столкновений в сильных полях:

$$\langle w_{\text{ci}} \rangle \approx \frac{2C \delta(\Delta p_\parallel / p_{\text{osc}})}{\Delta p_\perp^3}. \quad (164)$$

Полагая импульс рассеянных электронов много большим их тепловой скорости, интеграл столкновений можно упростить, заменив функцию распределения $f(p_0)$ δ -функцией [77]:

$$\langle \text{St}[f]_{\text{hot}} \rangle = \int f(\mathbf{p}_0) F(\mathbf{p}) d^3 p_0, \quad F(\mathbf{p}) = \frac{2C p_{\text{osc}} \delta(p_\parallel)}{p_\perp^3}. \quad (165)$$

Это степенное распределение быстрых электронов, которое получено в разделе 10.2.

Поскольку скорость таких частиц после столкновения велика и, соответственно, частота столкновений для них пренебрежимо мала, имеет смысл говорить об "убегающих" электронах. Эти частицы в переменном ЭМ-поле практически не испытывают столкновений с ионами в дальнейшем и являются в некотором роде "потерянными" для процессов энергообмена, аналогично убегающим электронам, появляющимся при столкновениях в статическом поле [5]. Частоту потерь μ — частоту появления электронов в хвосте функции распределения — можно оценить по формуле

$$\mu \equiv \int_{p > p_T} F(\mathbf{p}) d^2 p = \frac{n_i p_{\text{osc}}}{\pi} b_{\text{osc}} b_v. \quad (166)$$

Распределение убегающих частиц в единицу времени в импульсном пространстве даётся выражением (165).

Итак, качественно интеграл столкновений можно представить в виде суммы двух членов — "диффузионного" и "генератора" быстрых частиц:

$$\text{St}_{\text{ci}}[f] = \frac{\partial^2 \tilde{B}_{ij} f(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} + \int f(\mathbf{p}_0) F(\mathbf{p}) d^3 p_0 - \mu f(\mathbf{p}). \quad (167)$$

Такое представление даёт правильные величины для темпа нагрева плазмы, числа и закона распределения быстрых частиц, появляющихся при столкновениях в плазме. Однако оно не вполне корректно с точки зрения кинетических особенностей рассеяния. В случае, когда основной интерес представляет кинетика, надо пользоваться интегральной формой (18) с ядром (160) или (161), если требуется аккуратно описать кинетику плазмы.

12. Область применимости

Выпишем условия применимости результатов, представленных в разделах 8–11, в размерном виде. В дальнейших формулах температура электронов T выражается в [эВ], мощность P — в $[10^{16} \text{ Вт см}^{-2}]$, все частоты — в $[10^{15} \text{ Гц}]$, длина волны λ — в [мкм], все остальные длины — в [см], концентрации n — в $[10^{18} \text{ см}^{-3}]$, длительность импульса τ — в $[10^{-15} \text{ с}]$.

Все расчёты проводились в области сильного поля при условиях, которые в размерном виде выражаются следующим образом:

$$v \ll v_{\text{osc}} \Leftrightarrow T \ll 6,7 \times 10^3 \frac{P}{\omega_0^2}, \quad (168)$$

$$\omega_0 \ll \omega_E \Leftrightarrow \omega_0 \ll 20 P^{3/8}. \quad (169)$$

Таблица 1. Предельные концентрации (в см⁻³)

	Формула	Оценочная формула
Плотная плазма при $v \gg v_{\text{osc}}$	$1/b_v^3$	$3 \times 10^{20} \frac{T^3}{Z^3}$
Плотная плазма при $v \ll v_{\text{osc}}$	$1/b_{\text{osc}}^3$	$9 \times 10^{31} \frac{P^3}{Z^3 \omega^6}$
Граница корреляционных эффектов ($r_E \ll r_D$)	$1/(r_E^2 b_v)$	$9 \times 10^{22} \frac{T \sqrt{P}}{Z^2}$
Область применимости численных результатов	$1/(r_{\text{osc}} \rho_{\text{attr}}^2)$	$6 \times 10^{17} \frac{T \omega^4}{P Z}$
Сильно разреженная плазма	$1/r_{\text{osc}}^3$	$2 \times 10^{16} \frac{\omega^6}{P^{3/2}}$

Другое важное условие — условие, накладываемое на длительность импульса. Длительность импульса τ должна быть больше времени пролёта характерной области взаимодействия с ионом (порядка двух осцилляторных радиусов) с дрейфовой скоростью²⁰:

$$\tau \gg \frac{v_{\text{osc}}}{v} \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow \tau \gg 510 \sqrt{\frac{P}{T}} \frac{1}{\omega_0^2}. \quad (170)$$

Ещё одно условие возникает из использованного нами классического описания. Можно показать, что оно эквивалентно следующему условию:

$$r_E \gg \lambda_{\text{osc}} = \frac{\hbar}{m v_{\text{osc}}} \Leftrightarrow P \gg 2,4 \times 10^{-6} \frac{\omega_0^4}{Z^2}. \quad (171)$$

Таким образом, с возрастанием поля условия применимости классического описания в задаче о парных столкновениях улучшаются. С качественной точки зрения дело заключается в том, что собственно энергообмен происходит в области с размером r_E , обратно пропорциональным корню из амплитуды поля (48). Поскольку длина волны де Бройля электрона, оценённая по осцилляторной скорости, уменьшается ещё быстрее ($\sim 1/E$), квантовые поправки должны быть несущественными, что и подтверждают результаты численного моделирования [42–44].

Условие, налагаемое на концентрацию, является наиболее жёстким. Формально приведённые результаты справедливы только в достаточно разреженной плазме, $n r_{\text{osc}}^3 \ll 1$ (табл. 1). Однако можно ожидать, что аналогичные эффекты имеют место и в более плотной плазме. Действительно, единственно существенным является то, чтобы в объёме, определяющем область притяжения — $r_{\text{osc}} \rho_{\text{attr}}^2$, имелось не более одного иона, так как нахождение другого иона на пути электрона, рассеивающегося на ионе, может существенным образом нарушить динамику и свести все корреляционные эффекты к минимуму [78]. В размерных переменных это условие имеет вид

$$n \leq 6 \times 10^{17} \frac{T \omega_0^4}{P Z} \simeq 8 \times 10^{18} \frac{T}{\lambda^4 P Z}. \quad (172)$$

²⁰ Необходимо заметить, что в численном расчёте наблюдалась заметная доля "захваченных" электронов — частиц, не покидающих область взаимодействия r_{osc} на время, существенно большее, чем время пролёта этой области $2r_{\text{osc}}/v_T$. Доля таких электронов увеличивается с возрастанием поля.

Таблица 2. Характерные масштабы при электрон-ионных столкновениях

Величина	Обозначение*	Формула	Оценочная формула
Пространственные размеры			
Длина импульса	L	$c\tau$	$2,99 \times 10^{-5} \tau$
Радиус осцилляций	$r_{\text{osc}} = \frac{1}{\Omega^2}$	$\frac{eE}{m\omega^2}$	$3,41 \times 10^{-6} \frac{P^{1/2}}{\omega^2}$
Резерфордовский радиус по v_T	$b_v = \frac{1}{v^2}$	$\frac{Ze^2}{mv_T^2}$	$1,44 \times 10^{-7} \frac{Z}{T}$
Резерфордовский радиус по v_{osc}	$b_{\text{osc}} = \Omega^2$	$\frac{Ze^2}{mv_{\text{osc}}^2}$	$2,17 \times 10^{-11} \frac{Z\omega^2}{P}$
Радиус возврата	$r_E = 1$	$\sqrt{\frac{Ze}{E}}$	$8,61 \times 10^{-9} \frac{Z^{1/2}}{P^{1/4}}$
Радиус притяжения	$\rho_{\text{attr}} = \frac{1}{\Omega v}$	$\sqrt{b_v r_{\text{osc}}}$	$7,02 \times 10^{-7} \frac{P^{1/4} Z^{1/2}}{\omega T^{1/2}}$
Радиус когерентности	r_a	$\frac{2\pi c}{\omega_p}$	$3,34 \times 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{n}}$
Дебаевский радиус	r_D	$\frac{v_T}{\omega_p}$	$7,41 \times 10^{-7} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$
Комптоновская длина	λ_C	$\frac{h}{mc}$	$3,86 \times 10^{-11}$
Длина де Бройля по v_T	λ_v	$\frac{h}{mv_T}$	$2,76 \times 10^{-8} \frac{1}{\sqrt{T}}$
Длина де Бройля по v_{osc}	λ_{osc}	$\frac{h}{mv_{\text{osc}}}$	$3,39 \times 10^{-10} \frac{\omega}{\sqrt{P}}$
Скорости			
Тепловая скорость	$v_T = v$	$\sqrt{\frac{2T}{m}}$	$4,19 \times 10^7 \sqrt{T}$
Осцилляторная скорость	$v_{\text{osc}} = \frac{1}{\Omega}$	$\frac{eE}{m\omega}$	$3,41 \times 10^9 \frac{\sqrt{P}}{\omega}$
Нормировочная скорость	$v_E = 1$	$r_E \omega_E$	$1,71 \times 10^8 P^{1/8} Z^{1/4}$
Критическая скорость	$v_\Omega = \Omega$	$r_E \omega$	$8,61 \times 10^7 \frac{\sqrt{Z}\omega}{P^{1/4}}$
Частоты			
Частота поля	$\omega = \Omega$	$\frac{2\pi c}{\lambda}$	$\frac{1,88}{\lambda}$
Плазменная частота	$\omega_p = \sqrt{4\pi n}$	$\sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}$	$5,64 \times 10^{-2} \sqrt{n}$
Нормировочная частота	$\omega_E = 1$	$\sqrt{\frac{eE^3}{m^2 Z}}$	$19,9 \frac{P^{3/8}}{Z^{1/4}}$
* Для некоторых величин приведена их зависимость от параметров v и Ω в безразмерном виде.			

В более плотной плазме представленные в обзоре эффекты будут проявляться не полностью (окажутся ослабленными, изменится зависимость от параметров), однако будут иметь место при концентрациях вплоть до величин $n b_{\text{osc}} r_{\text{osc}}^2 \equiv n r_E^2 r_{\text{osc}} \leq 1$, хотя и в довольно слабом виде. В такой плазме соседние ионы не влияют на траекторию электрона в течение периода внешнего поля и позволяют электрону совершить одну осцилляцию и притянуться к иону с расстояний порядка $r_E = \sqrt{b_{\text{osc}} r_{\text{osc}}}$. Детальные расчёты для этого случая нами не проводились, но, согласно общим соображениям, должны наблюдаться усиление некогерентного тормозного излуче-

ния по сравнению с таковым в традиционных моделях в $r_{\text{osc}}/b_{\text{osc}}$ раз (по аналогии с увеличением эффективного сечения (см. раздел 8)) и появление слабого когерентного излучения (см. раздел 8). В ещё более плотной плазме ($nb_{\text{osc}}^3 \sim 1$) корреляционные эффекты полностью исчезают и становятся применимыми традиционные модели [79–84].

В завершение этого раздела приведём оценки для характерных величин (пространственных размеров, скоростей, частот) в размерном виде (табл. 2).

13. Заключение

В настоящем обзоре представлено современное состояние исследований электрон-ионных столкновений в сильных электромагнитных полях. Основное внимание уделено описанию классических столкновений с ионами электронов с нерелятивистскими и релятивистскими скоростями. Из наиболее важных включённых в обзор результатов следует выделить следующие.

Проведена классификация типов движения электронов и ожидаемых эффектов при рассеянии на ионе при наличии ЭМ-поля. Показано, что уравнение движения тестовых электронов и, соответственно, структура фазового пространства зависят от единственного безразмерного параметра, определяемого отношением потенциальной энергии на расстоянии осцилляторного радиуса от иона к осцилляторной энергии электрона.

Проведён анализ случая сильного поля в условиях, когда осцилляторная скорость заметно превышает дрейфовую. Получены аналитические и численные оценки эффективной частоты столкновений, интенсивности когерентного излучения гармоник, распределения быстрых частиц по энергии. Показано, что вопреки традиционным представлениям эффективность указанных процессов не ослабевает с возрастанием интенсивности поля накачки. Особенностью всех описанных эффектов является их слабая зависимость от поляризации поля накачки.

Получено общее выражение для интеграла парных электрон-ионных соударений в кинетическом уравнении для одночастичной функции распределения по дрейфовым координатам и скоростям электронов в поле произвольной ЭМ-волны. Для сильных ЭМ-полей выражение для интеграла столкновений представлено в виде суммы диффузионного члена и источника быстрых частиц.

Исследование условий применимости представленных в настоящем обзоре результатов показало, что они остаются справедливыми для прозрачной плазмы и произвольной (в том числе релятивистской) интенсивности ЭМ-волны.

Список литературы

1. Силин В П *ЖЭТФ* **38** 1771 (1960); Silin V P *Sov. Phys. JETP* **11** 1277 (1960)
2. Силин В П *ЖЭТФ* **41** 861 (1961); Silin V P *Sov. Phys. JETP* **14** 617 (1962)
3. Силин В П *ЖЭТФ* **47** 2254 (1964); Silin V P *Sov. Phys. JETP* **20** 1510 (1965)
4. Dawson J, Oberman C *Phys. Fluids* **5** 517 (1962)
5. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
6. Силин В П, Урюпин С А *ЖЭТФ* **81** 910 (1981); Silin V P, Uryupin S A *Sov. Phys. JETP* **54** 485 (1981)
7. Бункин Ф В, Федоров М В *ЖЭТФ* **49** 1215 (1965); Bunkin F V, Fedorov M V *Sov. Phys. JETP* **22** 844 (1966)
8. Pert G J *J. Phys. A* **5** 506 (1972)
9. Schlessinger L, Wright J *Phys. Rev. A* **20** 1934 (1979)
10. Rae S C, Burnett K *Phys. Rev. A* **46** 2077 (1992)
11. Pfalzner S *Appl. Phys. B* **55** 368 (1992)
12. Федоров М В *Электрон в сильном световом поле* (М.: Наука, 1991)
13. Shvets G, Fisch N J *Phys. Plasmas* **4** 428 (1997)
14. Mittleman M H *Introduction to the Theory of Laser-Atom Interactions* (New York: Plenum Press, 1993)
15. Pert G J *Phys. Rev. E* **51** 4778 (1995)
16. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)
17. Kostyukov I Yu, Rax J-M *Phys. Rev. E* **59** 1122 (1999)
18. Christov I P, Murnane M M, Kapteyn H C *Phys. Rev. Lett.* **78** 1251 (1997)
19. Kolbenstvedt H, Olsen H A *Phys. Rev.* **175** 11 (1968)
20. Faehl R J, Roderick N F *Phys. Fluids* **21** 793 (1978)
21. Jones R D, Lee K *Phys. Fluids* **25** 2307 (1982)
22. Polishchuk A Ya, Meyer-Ter-Vehn J *Phys. Rev. E* **49** 663 (1994)
23. Pert G J *J. Phys. B* **8** 3069 (1975)
24. Pert G J *J. Phys. B* **12** 2755 (1979)
25. Pert G J *J. Phys. A* **9** 1797 (1976)
26. Бункин Ф В, Казаков А Е, Федоров М В *УФН* **107** 559 (1972); Bunkin F V, Kazakov A E, Fedorov M V *Sov. Phys. Usp.* **15** 416 (1973)
27. Федоров М В *ЖЭТФ* **51** 795 (1966); Fedorov M V *Sov. Phys. JETP* **24** 529 (1967)
28. Pert G J *J. Phys. B* **29** 1135 (1996)
29. Reiss H R *Prog. Quantum Electron.* **16** 1 (1992)
30. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **46** 776 (1964); Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **19** 529 (1964)
31. Kroll N M, Watson K M *Phys. Rev. A* **8** 804 (1973)
32. Силин В П *ЖЭТФ* **111** 478 (1997); Silin V P *JETP* **84** 262 (1997)
33. Силин В П *ЖЭТФ* **114** 864 (1998); Silin V P *JETP* **87** 468 (1998)
34. Decker C D et al. *Phys. Plasmas* **1** 4043 (1994)
35. Wiesenfeld L *Phys. Lett. A* **144** 467 (1990)
36. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)
37. Fraiman G M, Mironov V A, Balakin A A *Phys. Rev. Lett.* **82** 319 (1999)
38. Фрайман Г М, Миронов В А, Балакин А А *ЖЭТФ* **115** 463 (1999); Fraiman G M, Mironov V A, Balakin A A *JETP* **88** 254 (1999)
39. Fraiman G M, Balakin A A *Physica D* **152–153** 731 (2001)
40. Fraiman G M, Balakin A A, Mironov V A *Plasma Phys.* **8** 2502 (2001)
41. Brantov A et al. *Phys. Plasmas* **10** 3385 (2003)
42. Rascol G et al. *Phys. Plasmas* **13** 103108 (2006)
43. Baumann C, Kull H-J, Fraiman G M *Phys. Rev. A* **92** 063420 (2015)
44. Серебряков Д А, Балакин А А, Фрайман Г М *Физика плазмы* **40** 807 (2014); Serebryakov D A, Balakin A A, Fraiman G M *Plasma Phys. Rep.* **40** 705 (2014)
45. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.: Гостехиздат, 1946); Bogoliubov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)
46. Балакин А А *Физика плазмы* **34** 1129 (2008); Balakin A A *Plasma Phys. Rep.* **34** 1046 (2008)
47. Langdon A B *Phys. Rev. Lett.* **44** 575 (1980)
48. Albritton J R *Phys. Rev. Lett.* **50** 2078 (1983)
49. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000)
50. Krainov V P *J. Phys. B* **33** 1585 (2000)
51. Крайнов В П *ЖЭТФ* **119** 1109 (2001); Krainov V P *JETP* **92** 960 (2001)
52. Balakin A A, Fraiman G M *Comput. Phys. Commun.* **164** 46 (2004)
53. Bell A R, Evans R G, Nicholas D J *Phys. Rev. Lett.* **46** 243 (1981)

54. Matte J P et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **30** 1665 (1988)
55. Epperlein E M, Rickard G J, Bell A R *Phys. Rev. Lett.* **61** 2453 (1988)
56. Stiefel E L, Scheifele G *Linear and Regular Celestial Mechanics; Perturbed Two-Body Motion, Numerical Methods, Canonical Theory* (Berlin: Springer-Verlag, 1971); Пер. на русск. яз.: Штифель Е, Шейфеле Г *Линейная и регулярная небесная механика* (М.: Наука, 1975)
57. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
58. Madey J M J *Nuovo Cimento B* **50** 64 (1979)
59. Fraiman G M, Kostyukov I Yu *Phys. Plasmas* **2** 923 (1995)
60. Балакин А А, Миронов В А, Фрайман Г М *Физика плазмы* **27** 491 (2001); Balakin A A, Mironov V A, Fraiman G M *Plasma Phys. Rep.* **27** 462 (2001)
61. Крайнов В П *ЖЭТФ* **138** 196 (2010); Krainov V P *JETP* **111** 171 (2010)
62. Corkum P B, Burnett N H, Ivanov M Y *Opt. Lett.* **19** 1870 (1994)
63. Yudin G L, Ivanov M Y *Phys. Rev. A* **63** 033404 (2001)
64. Балакин А А, Фрайман Г М *ЖЭТФ* **120** 797 (2001); Balakin A A, Fraiman G M *JETP* **93** 695 (2001)
65. Dodin I Y, Fisch N J, Fraiman G M *Письма в ЖЭТФ* **78** 238 (2003); *JETP Lett.* **78** 202 (2003)
66. Балакин А А, Фрайман Г М *ЖЭТФ* **130** 426 (2006); Balakin A A, Fraiman G M *JETP* **103** 370 (2006)
67. Charlier C L *Die Mechanik des Himmels* (Berlin: W. de Gruyter, 1927); Пер. на русск. яз.: Шарлье К *Небесная механика* (М.: Наука, 1966)
68. Токман М Д *Физика плазмы* **25** 160 (1999); Tokman M D *Plasma Phys. Rep.* **25** 140 (1999)
69. Балакин А А *Физика плазмы* **34** 330 (2008); Balakin A A *Plasma Phys. Rep.* **34** 296 (2008)
70. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И *Математические аспекты классической и небесной механики* (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 3, Под. ред. Р В Галекрелидзе) (М.: ВИНТИ, 1985); Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* (Berlin: Springer, 2006)
71. Balakin A A, Fraiman G M, Fisch N J *Письма в ЖЭТФ* **81** 3 (2005); *JETP Lett.* **81** 1 (2005)
72. Key M H et al. *Phys. Plasmas* **5** 1966 (1998)
73. Hatchett S P et al. *Phys. Plasmas* **7** 2076 (2000)
74. Koyama K, Saito N, Tanimoto M, in *ICPP 2000, Quebec, Canada* (2000) p. MP1.067, ICPP No. 4051
75. Mangles S P D et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 245001 (2005)
76. Balescu R *Statistical Mechanics of Charged Particles* (Amsterdam: North-Holland, 1965); Пер. на русск. яз.: Балеску Р *Статистическая механика заряженных частиц* (М.: Мир, 1967)
77. Balakin A A, Fraiman G M *Europhys. Lett.* **93** 35001 (2011)
78. Балакин А А, Толмачев М Г *Физика плазмы* **34** 716 (2008); Balakin A A, Tolmachev M G *Plasma Phys. Rep.* **34** 658 (2008)
79. Pfalzner S, Gibbon P *Phys. Rev. E* **57** 4698 (1998)
80. Mostovych A N et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 612 (1991)
81. Cauble R, Rozmus W *Phys. Fluids* **28** 3387 (1985)
82. Ichimaru S, Tanaka S *Phys. Rev. A* **32** 1790 (1985)
83. Bornath T et al. *Phys. Rev. E* **64** 026414 (2001)
84. Haberland H, Bonitz M, Kremp D *Phys. Rev. E* **64** 026405 (2001)

Electron–ion collisions in strong electromagnetic fields

A.A. Balakin, G.M. Fraiman

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: balakin@appl.sci-nnov.ru, fraiman@appl.sci-nnov.ru*

The current status of the problem of electron–ion collisions in strong electromagnetic fields is presented. The collision operator is expressed in terms of an integral over test particle trajectories for an arbitrary alternating field. The equation for test particles is analyzed. It is shown that none of the energy processes involved (Joule heating, bremsstrahlung and fast electron generation) diminishes as the electromagnetic field amplitude increases. The collision frequency, the momentum distribution of fast electrons and the electron–ion collision operator are calculated in the classical framework.

Keywords: electron–ion collisions in plasma, strong electromagnetic fields, collision operator

PACS numbers: 52.20.Dq, 52.20.Fs, 52.25.Dg, 52.50.Sw

Bibliography — 84 references

Received 24 October 2016, revised 20 February 2017

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (12) 1289–1328 (2017)

Physics – Uspekhi **60** (12) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.02.038075>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.02.038075>