

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Современные результаты асимптотических исследований моделей динамо

Е.П. Попова

*В настоящее время разработаны модели генерации и эволюции магнитного поля Солнца, звёзд и галактик, описывающие большой наблюдательный материал. Несмотря на то что в последние десятилетия были достигнуты большие успехи в численных исследованиях задач магнитной гидродинамики и было подробно исследовано множество отдельно взятых задач, для прояснения физической картины механизма генерации магнитных полей в теории динамо используют асимптотические подходы. Представлены современные асимптотические подходы и результаты моделирования солнечной, звёздной и галактической магнитной активности, полученные с их помощью.*

**Ключевые слова:** теория динамо, Солнце, звёзды, галактики

PACS numbers: 52.30.Cv, 96.60.Hv, 96.60.Q–

DOI: 10.3367/UFNr.2016.02.037727

## Содержание

1. Введение (577).
2. Квазиклассический метод для исследования модели звёздного динамо (579).
  - 2.1. Квазиклассический метод для исследования модели линейного  $\alpha\Omega$ -динамо в одномерном случае.
  - 2.2. Квазиклассический метод для исследования модели нелинейного  $\alpha\Omega$ -динамо в одномерном случае.
  - 2.3. Квазиклассический метод для исследования модели линейного  $\alpha\Omega$ -динамо в двумерном случае.
  - 2.4. Квазиклассический метод для исследования модели линейного  $\alpha\Omega$ -динамо с меридиональными потоками в однослойной и двухслойной средах.
  - 2.5. Другие модели динамо.
3. Маломодовый подход в звёздном динамо. Нелинейное динамо с дипольной и квадрупольной симметриями магнитного поля для однослойной и двухслойной сред (586).
4. Асимптотические методы для исследования модели галактического динамо (589).
  - 4.1. Квазиклассическое приближение для динамо в тонком диске (осесимметричные решения).
  - 4.2. Адиабатическое приближение для модели галактического динамо.
  - 4.3. Квазиклассическое приближение для нелинейного динамо.
  - 4.4. No-z-приближение для исследования модели галактического динамо.
5. Заключение (594).

## Список литературы (594).

Е.П. Попова. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: popovaelp@mail.ru

Статья поступила 15 мая 2015 г., после доработки 8 февраля 2016 г.

## 1. Введение

Впервые предположение о наличии магнитного поля Земли было высказано в 1600 г. в книге *О магните* [1] английского врача и натурфилософа У. Гильберта. В ней он описал опыт с шаром из магнитной руды и маленькой железной стрелкой, связал поведение магнитной стрелки компаса с наличием у Земли магнитного поля и предположил, что Земля представляет собой большой магнит.

Магнитное поле Солнца было обнаружено Д. Хэйлом в 1908 г. [2], а поля других звёзд были открыты на полвека позже Г. Бэбкоком [3].

Наличие магнитного поля нашей Галактики стало обсуждаться в середине XX в. Магнитное поле в межзвёздной среде Галактики изучалось Х. Альфвен, Э. Ферми, В.Л. Гинзбург, С.И. Сыроватским и другими выдающимися учёными [4–14]. Первые предположения о присутствии магнитных полей в близлежащих галактиках были сделаны в 1958 г. на основе наблюдений поляризации света звёзд в галактике Андромеды (M31) [15]. В 1970 г. оптические наблюдения Большого и Малого Магеллановых Облаков [16, 17] дали возможность сделать предположение о наличии магнитных полей в этих галактиках. Первые измерения магнитного поля галактики M31 были опубликованы в работе [18]. Дальнейшие результаты исследований магнитных полей галактик можно найти в [19–21].

Космические исследования позволили открыть магнитные поля различных планет (см., например, работу [22] и ссылки в ней).

Впервые объяснить существование магнитных полей Земли и Солнца попытался Дж. Лармор в 1919 г. [23], предложив концепцию динамо, согласно которой поддержание магнитного поля небесного тела происходит

под действием гидродинамического движения электропроводящей среды.

Однако возникла трудность при использовании теории динамо, когда в 1934 г. Т. Каулинг доказал теорему о невозможности поддержания аксиально-симметричного магнитного поля посредством течения жидкости [24]. Большинство изучаемых небесных тел считались аксиально-симметричными, и на основании этого можно было сделать предположение, что их поле тоже будет аксиально-симметричным, и тогда его генерация с помощью процесса динамо будет невозможна согласно этой теореме. Позже было показано, что не у всех уравнений с аксиальной симметрией, описывающих процесс генерации магнитного поля, решение будет аксиально-симметричным. В моделях динамо, которые стали разрабатываться с 1950-х гг., уравнения с аксиальной симметрией имели неаксиально-симметричные решения. Первые математические модели динамо были предложены в работах [25, 26].

В 1955 г. Ю. Паркер [27] построил модель динамо, в которой магнитное поле Солнца рассматривалось в виде бегущих волн. В работе [27] магнитное поле было представлено в виде составляющих: более сильного тороидального (или азимутального) поля, вытянутого вдоль параллелей и в основном расположенного ближе к солнечному экватору, и полоидального поля, вытянутого вдоль меридианов и расположенного в полярных областях. Тороидальное магнитное поле получается из полоидального под действием дифференциального вращения, находящегося внутри конвективной зоны Солнца. Обратный процесс превращения тороидального магнитного поля в полоидальное осуществляется в результате действия  $\alpha$ -эффекта, который состоит в нарушении зеркальной симметрии конвекции во вращающемся теле. Согласно работе [27]  $\alpha$ -эффект возникает вследствие того, что сила Кориолиса при действии на поднимающиеся и расширяющиеся (опускающиеся и сжимающиеся) вихри приводит к преобладанию правых вихрей в северном полушарии (левых вихрей в южном полушарии). Электродвижущая сила, возникающая в результате действия электромагнитной индукции Фарадея, после усреднения по пульсациям скорости приобретает компоненту, параллельную среднему магнитному полю. Она и замыкает цепь самовозбуждения в динамо.

На рисунке 1 представлена схема работы дифференциального вращения  $\Omega$  и  $\alpha$ -эффекта. На рисунке 1а показано, как дифференциальное вращение вытягивает силовые линии поля вдоль широт, на рис. 1б — как происходит закрутка силовых линий поля, на рис. 1в — как возникает полоидальное поле.

Ю. Паркер предложил (в эвристической форме) проводить усреднение уравнений магнитной гидродинамики

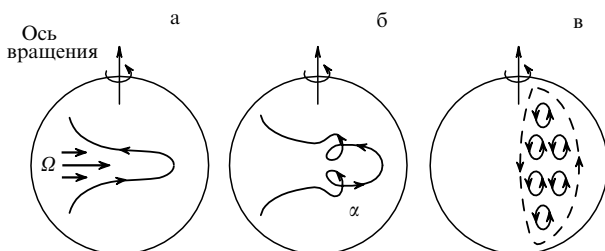


Рис. 1. Схема работы дифференциального вращения  $\Omega$  и  $\alpha$ -эффекта.

по составляющим среднего магнитного поля. Кроме того, он объединил этот приём с эффектом несимметричного поднимания петель, т.е. с несимметричными мелко-масштабными движениями в конвективной зоне Солнца [27, 28].

В 1961 г. Г. Бэбкок предложил модель динамо, которая не содержала решения уравнений магнитной гидродинамики. Она была лишь достаточно широким обобщением наблюдений Солнца с применением известных к началу 1960-х гг. теоретических разработок [3, 29].

Следующий важный шаг в создании динамо-теорий солнечных циклов сделал Р. Лейтон [30]. В отличие от Г. Бэбкока, удовлетворившегося построением чисто качественной модели, он создал полуквантитативную модель цикла солнечной активности. В основе модели Р. Лейтона лежит усиление магнитного поля дифференциальным вращением. Его модель во многом сходна с моделью Г. Бэбкока. Согласно модели Бэбкока [3, 29] и Лейтона [30], принято считать, что  $\alpha$ -эффект является нелокальным в пространстве и встречается вблизи солнечной поверхности. Механизм образования  $\alpha$ -эффекта в этой модели отличается от механизма образования  $\alpha$ -эффекта, который был предложен в модели Паркера. В дальнейшем теорию  $\alpha$ -эффекта развили М. Штейнбек, Ф. Краузе и К.-Х. Редлер [31].

В 1993 г. Ю. Паркером была предложена модель динамо [32], в которой два механизма генерации компонент магнитного поля пространственно разделены:  $\alpha$ -эффект действует в турбулентном конвективном слое, а дифференциальное вращение — ближе к дну конвективной зоны. Согласно [32] тороидальное поле генерируется под действием дифференциального вращения в основании конвективной зоны — тахоклине. Из-за магнитной плавучести оно становится неустойчивым и поднимается в зону конвекции, действующей как фильтр, который позволяет самому сильному полю подниматься к поверхности Солнца и проявляться там в виде активных областей. Более слабые поля захватываются конвекцией и преобразуются под действием  $\alpha$ -эффекта в полоидальное поле, которое в результате турбулентной накачки опускается вниз в область тахоклина, и цикл магнитной активности повторяется снова.

Теория динамо оказалась применима для объяснения генерации и эволюции магнитного поля не только Солнца, но и других небесных тел (звёзд, планет и галактик).

Магнитные поля в теории динамо усреднены по определённым образом заданному пространственно-временному масштабу. Этот масштаб выбирается таким образом, чтобы все случайные колебания величин механической скорости среды, магнитного и электрического полей были усреднены, но в то же время была выявлена структура пространственного распределения этих величин внутри небесных тел. Распространение магнитного поля в пространстве осуществляется за счёт турбулентной магнитной диффузии. Решения таких уравнений могут иметь осциллирующий характер, при этом наличие осцилляций возможно во времени и в пространстве. Примером циклической магнитной активности являются солнечные циклы.

В работах [2, 4–14, 33–82] были исследованы уравнения для магнитного поля в турбулентно движущейся среде в различных конкретных приложениях. Например, П. Робертсом и Х. Йошимурой созданы первые модели

генерации крупномасштабных магнитных полей для планетарного и солнечного динамо, в работах Я.Б. Зельдовича исследованы мелкомасштабные магнитные поля, а С.И. Брагинским построены модели генерации земного магнитного поля.

Изучение явления динамо стало одной из тех областей физики, которая сформировалась уже в компьютерную эпоху. Поэтому она ярко выявила совершенно новые взаимоотношения между физикой и математикой. Сейчас не стоит доказывать, что внедрение численных методов чрезвычайно расширило инструментарий физики. Гораздо полезнее обратить внимание на обратную сторону проблемы — попытка работать, опираясь только на компьютерные методы физики и игнорируя традиционные методы теоретической физики, достаточно быстро заводит в тупик просто из-за невозможности исследовать параметрическое пространство даже достаточно скромной размерности без понимания роли отдельных параметров и их комбинаций.

Особенно ярко эта общезначимая (и общематематическая тоже) ситуация проявилась при изучении динамо. В самом деле, при отсутствии близкого физического родства между задачей динамо и задачами квантовой механики существует простая формальная аналогия между этими областями физики, позволяющая истолковывать задачи динамо как квантово-механические задачи для своеобразных систем. Поскольку квантовая механика возникла и развилась как раз перед компьютерной эпохой, в ней очень подробно развиты аналитические методы, помогающие далее истолковывать результаты квантовой химии и других областей науки, опирающихся на квантовую механику. Поэтому естественно заимствовать методы аналитического исследования явления динамо именно из богатого арсенала квантовой механики. При этом мы немедленно обнаруживаем, что сравнительно небольшое изменение уравнений (уравнения динамо в простейшем случае четвертого порядка, а уравнение Шрёдингера — второго) открывает новый мир самых разнообразных явлений.

В настоящем обзоре представлены асимптотические методы исследования моделей динамо, разработанные в последние десятилетия. Методы и найденные на их основе решения задач динамо могут представлять интерес как для физического, так и для астрофизического сообществ.

## 2. Квазиклассический метод для исследования модели звёздного динамо

### 2.1. Квазиклассический метод для исследования модели линейного $\alpha\Omega$ -динамо в одномерном случае

Для моделирования магнитной активности звёзд обычно используют механизм  $\alpha\Omega$ -динамо, в котором предполагается, что вклад  $\alpha$ -эффекта в генерацию тороидального магнитного поля пренебрежимо мал. Отметим, что режим генерации  $\alpha\Omega$ -динамо в первом приближении характерен не только для звёзд, но и для спиральных галактик и планет.

Для таких моделей критерием корректности описания генерации магнитного поля небесных тел является существование незатухающих решений уравнений динамо. А для воспроизведения циклической активности Солнца важно показать, что в рамках таких моделей

возможно воспроизвести 11-летний цикл магнитной активности, в течение которого волна крупномасштабного магнитного поля движется от полюсов к экватору в каждом полушарии. То есть задача в данном случае состоит в выявлении незатухающего, осциллирующего решения уравнений динамо, которое отвечает волне, движущейся в направлении, соответствующем наблюдениям.

Таким образом, аналитические оценки простейших моделей динамо, основная цель которых состоит в аналитическом выявлении самоподдерживающейся генерации волн магнитного поля и в исследовании их поведения, позволяют оценить применимость таких моделей к описанию магнитной активности небесных тел и служат ориентиром для дальнейшего более сложного численного моделирования.

Уравнения динамо являются формально аналогичными уравнению Шрёдингера в квантовой механике. Для решения уравнения Шрёдингера были разработаны разнообразные математические методы [83], которые можно применять и для уравнений динамо. Исследования показали, что квантово-механические методы приобретают новые черты в случае их применения к теории динамо.

Довольно большое количество работ посвящено построению и исследованию решений уравнений динамо с помощью асимптотического метода, аналогичного методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) в квантовой механике [84]. Возможность использования такого метода основана на том, что для решений уравнений электродинамики средних полей можно построить асимптотические разложения по безразмерным числам, характеризующим интенсивность генерации. В работе [85] на примере искусственного потока с экспоненциальным частичным растяжением, имитирующим стационарный случайный поток проводящей жидкости, рассматривалась модель кинематического динамо при большом магнитном числе Рейнольдса  $R_m$ . Оказалось, что в таком случае амплитуда магнитных полей, имеющих периодическую зависимость только от одной координаты, растёт со временем экспоненциально и неограниченно. Каждая фурье-гармоника отклонения от этого растущего поля вначале быстро возрастает с увеличением скорости, не зависящей от  $R_m$ , в течение интервала времени  $t_* \approx t_0 \ln R_m$ , а затем очень быстро затухает. В работе [86] использовалось приближение максимально эффективной генерации, которое является разновидностью квазиклассического асимптотического разложения (см., например, [84]). В [86] предполагалось, что распределение источников генерации магнитного поля достигает максимума в некоторой точке  $x_0$  и генерируемое магнитное поле сосредоточено в окрестности  $x_0$ , размер которой определяется безразмерным динамо-числом, а магнитное поле вдали от точки  $x_0$  переносится туда диффузией из окрестностей максимума генерации. В работе [87] показано, что асимптотическое решение в таком случае правильно передаёт свойства точного решения уравнений динамо для неосциллирующих или медленно осциллирующих режимов. Однако когда старшая собственная функция задачи динамо является быстроосциллирующим решением, которое соответствует динамо-волне (волне магнитного поля), приближение максимально эффективной генерации не передаёт точные детали решения [88].

В работах [82, 89, 90] на примере простейшего линейного одномерного  $\alpha\Omega$ -динамо рассматривается модификация приближения максимально эффективной генерации, которая даёт корректное асимптотическое решение в случае бегущей динамо-волны. Несмотря на то что эти работы относятся к 1995 и 1999 годам, для асимптотического исследования в них была выбрана простейшая однослойная модель динамо Паркера 1955 г., а не двухслойная модель 1993 г. Авторы надеялись, что, с одной стороны, такая модель позволит учесть основные физические принципы эволюции магнитного поля, а с другой стороны, она довольно проста для построения нового асимптотического метода, и тем самым удастся получить разумный результат, не прибегая к более сложным математическим изысканиям.

Уравнения модели  $\alpha\Omega$ -динамо Паркера 1955 г. [27] формально можно получить из полной системы уравнений электродинамики средних полей [31] в предположении, что динамо-волна распространяется в тонкой сферической оболочке (например, в инверсном слое).

При выводе этих уравнений [91] проводится усреднение магнитного поля по радиусу в пределах некоторой сферической оболочки, где и происходит работа динамо, и отбрасываются члены, описывающие эффекты кривизны вблизи полюса.

В этом случае уравнения динамо имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -D \cos \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}. \quad (2)$$

Здесь  $B$  — тороидальное магнитное поле,  $A$  пропорционально тороидальной компоненте векторного потенциала, которая определяет полоидальное магнитное поле,  $\theta$  — широта, которая отсчитывается от экватора,  $t$  — время, измеряющееся в единицах диффузионного времени  $R^2/\beta$ . Расстояния измеряются в единицах радиуса конвективной зоны  $R$  (для определённости будем использовать внутренний радиус),  $\beta$  — коэффициент турбулентной диффузии. Слагаемое  $\alpha B$  описывает вклад  $\alpha$ -эффекта в генерацию магнитного поля, а  $D \cos \theta \partial A / \partial \theta$  — дифференциального вращения. Множитель  $\cos \theta$  отвечает уменьшению длины параллели вблизи полюса. Уравнения (1), (2) выписаны в безразмерных переменных, так что амплитуды  $\alpha$ -эффекта, градиента угловой скорости и коэффициент турбулентной диффузии объединены в безразмерное динамо-число  $D$ . Такая модель является  $\alpha\Omega$ -приближением. В диффузионных членах опущены эффекты кривизны и для простоты предполагается, что радиальный градиент угловой скорости не меняется с  $\theta$ . По соображениям симметрии ( $\alpha(-\theta) = -\alpha(\theta)$ ) уравнения (1), (2) можно рассматривать лишь для одного (северного) полушария с условиями антисимметрии (дипольная симметрия) или симметрии (квадрупольная симметрия) на экваторе. Поскольку магнитное поле Солнца имеет дипольную симметрию, в работах по генерации магнитного поля обычно ограничиваются дипольной симметрией.

На рисунке 2 схематически показана структура солнечного магнитного поля с дипольной симметрией (рис. 2а) и с квадрупольной (рис. 2б). Штриховые линии соответствуют полоидальному полю, а сплошные — тороидальному.

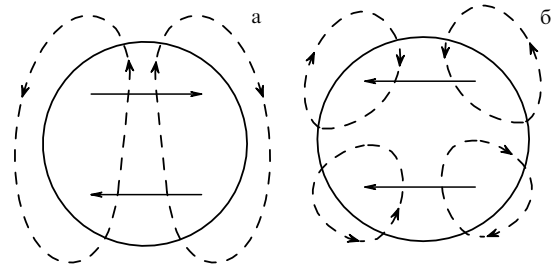


Рис. 2. Структура солнечного магнитного поля с дипольной симметрией (а) и с квадрупольной (б). Штриховые линии соответствуют полоидальному полю, сплошные — тороидальному.

В работе [82] показано, что решение системы (1), (2) можно искать в виде разложения по степеням динамо-числа  $D$ :

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \exp(i|D|^{1/3} S + \gamma t) (f_0 + |D|^{-1/3} f_1 + \dots), \quad (3)$$

где

$$\gamma = |D|^{2/3} \Gamma + |D|^{1/3} \Gamma_1 + \dots, \quad (4)$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots \quad (5)$$

Здесь  $S$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\mu_1$ ,  $v_1$  — гладкие функции и  $|D| \gg 1$ .  $S$  — аналог действия в квантовой механике, а его производная  $k = S'$  соответствует импульсу, или волновому вектору, который в данном случае является комплексным. Комплексное  $\gamma$  определяет собственное значение, его действительная часть даёт скорость роста, а мнимая — длительность цикла активности. Множители  $|D|^{2/3}$  в комплексной скорости роста и  $|D|^{1/3}$  в действии выбраны так, чтобы дифференциальное вращение,  $\alpha$ -эффект, собственное значение и диссипация оказались одного порядка и вошли в старший член асимптотического разложения. Выражение (3) является аналогом волновой функции в квантовой механике. Отметим, что в рассматриваемой модели  $\alpha$ -эффект соответствует потенциалу в квантовой механике, а  $\gamma$  — энергетическим уровням.

Подставляя выбранный вид искомого решения в уравнения Паркера и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $|D|$ , получим в главном порядке линейную однородную систему уравнений для определения функций  $S$ ,  $\mu$ ,  $v$  и константы  $\Gamma$ . Условием разрешимости для этой системы является дисперсионное соотношение для частоты динамо-волны и её волнового вектора, т.е. уравнение Гамильтона – Якоби:

$$[\Gamma + k^2]^2 - i\hat{\alpha}k = 0, \quad (6)$$

где  $\hat{\alpha} = \alpha \cos \theta$ .

Основная часть проблемы построения асимптотического решения уравнений динамо заключается в исследовании уравнения (6). Уравнение (6) является уравнением четвёртой степени относительно  $k(x)$  и имеет при заданном значении  $\hat{\alpha}$  четыре различных комплексных решения.

На рисунке 3 изображены корни  $k$  уравнения (6) на комплексной плоскости как функции параметра  $\theta$ . Точки поворота (в которых конец одной ветви решения совпа-

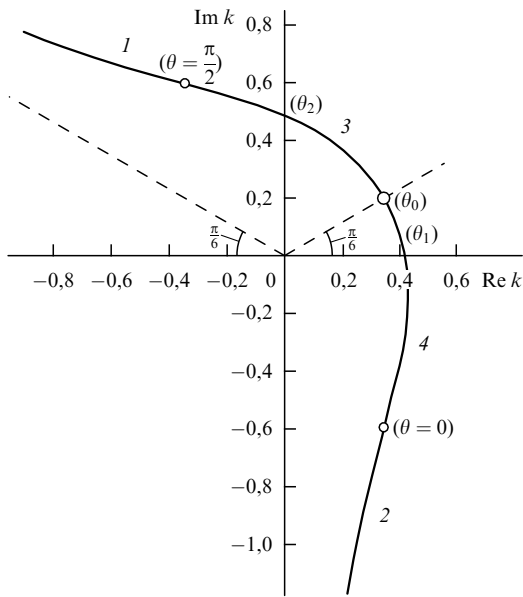


Рис. 3. Четыре ветви импульса  $k$  на комплексной плоскости для заданного значения  $\Gamma_0$  [82].

дает с концом другой ветви) обозначены кружками. Соответствующие им значения переменной  $\theta$  указаны в скобках. Каждая ветвь пронумерована.

В работе [82] показано, что волне, распространяющейся от полюса к экватору, соответствуют две ветви (3 и 4 на рис. 3) уравнения (6), которые сшиваются гладко.

Поведение динамо-волн в рамках простейших обобщений  $\alpha\Omega$ -динамо детально исследовано в работах [90] (вблизи полюсов) и [92] (вблизи экватора). В [90] показано, что вблизи полюсов появляются падающая и отражённая от них волны, и получено точное решение уравнений  $\alpha\Omega$ -динамо вблизи полюсов. Там же было показано, что амплитуда отражённой волны меньше по сравнению с амплитудой падающей волны. Существующие волны, падающей на полюс, было подтверждено наблюдениями [93].

Согласно [90], для построения решения вблизи полюсов необходимо сшить ветви 3 и 1 (см. рис. 3), т.е. надо найти  $\Gamma_1$ , при которой происходит сшивка ветвей. Для этого надо построить асимптотическое разложение более высокого порядка по сравнению с приведённым в [94–96]. В работе [90] было получено выражение для  $\Gamma_1$ , которое является аналогом правила квантования Бора–Зоммерфельда в квантовой механике.

В работе [82] показано, что максимум полученного решения расположен не в точке поворота  $\theta_0$ , в которой максимальны источники генерации, а в точке  $\theta_1$ , положение которой для любой функции  $\hat{\alpha}$  определяется соотношением  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}(\theta_1)/\hat{\alpha}_* \approx 0,8052$ , где  $\hat{\alpha}_*$  — максимальное значение функции  $\hat{\alpha}$ . Точка  $\theta_1$  определяется из следующих условий:  $\text{Im } k = 0$ , а  $\text{Im } S(\theta)$  минимальна. Для простейшей формы  $\alpha = \sin \theta$  значение  $\theta_1$  равно 0,468, т.е. примерно  $26,8^\circ$ .

Физический смысл такого результата состоит в том, что максимум решения смещён от точки максимума генерации по ходу динамо-волны. Амплитуда волны растёт быстрее всего в точке  $\theta_0$ , но продолжает расти и при своём дальнейшем распространении, а эффекты диссипации начинают преобладать над эффектами генера-

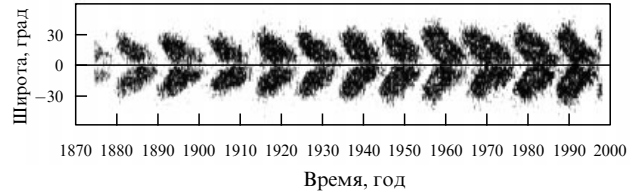


Рис. 4. Баттерфляй-диаграмма солнечных пятен (<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>).

ции за точкой  $\theta_1$ . Отметим, что и при наблюдениях пятен на поверхности Солнца, являющиеся трассерами динамо-волны тороидального поля, возникают на низких широтах от 0 до  $30^\circ$ . На рисунке 4 показано наблюдаемое широтно-временное распределение солнечных пятен (так называемая баттерфляй-диаграмма).

В работе [82] показано, что динамо-волна распространяется в основной части исследуемой области от полюса к экватору, так же как и при наблюдениях. В точке  $\theta_2 > \theta_0$  при любой функции  $\alpha(\theta)$ , определяемой соотношением  $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}(\theta_2)/\hat{\alpha}_* \approx 0,3445$ , величина  $\text{Re } S(\theta)$  меняет знак и при  $\theta > \theta_2$  динамо-волна распространяется в противоположном направлении. Для  $\alpha = \sin \theta$  параметр  $\theta_2 = 1,39 \approx 80^\circ$ , что соответствует наблюдениям [93]. Такая динамо-волна имеет намного меньшую амплитуду по сравнению с динамо-волной, распространяющейся к экватору, и затухает при распространении к полюсу. Отношение  $R$  амплитуд магнитного поля в точке наибольшей амплитуды  $\theta_1$  и в точке изменения направления распространения динамо-волны  $\theta_2$  имеет следующий вид:

$$R = \exp \left( |D|^{1/3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{Im } k(\theta) d\theta \right). \quad (7)$$

Для динамо-числа Солнца  $|D| \sim 10^3 - 10^4$  получим  $R \approx 7,1 - 68$ . Это близко к наблюдаемому соотношению, которое составляет 20–50 [97]. Порог возбуждения, т.е. величина динамо-числа  $|D|_{\text{cr}}$ , при которой начинается генерация магнитного поля, для  $\alpha(\theta) = \sin \theta$  составляет  $|D|_{\text{cr}} = 40,4$ . Это значение существенно меньше значения  $|D|_{\text{cr}}$ , известного из численных расчётов, поэтому нужно считать, что порог возбуждения на самом деле определяется условиями применимости уравнений (1), (2).

В работе [92] в приближении Паркера было исследовано поведение динамо-волны вблизи солнечного экватора. Для изучения поведения динамо-волн вблизи экватора используется вторая из четырёх ветвей  $k(\theta)$ , получаемых из уравнения (6). Асимптотический анализ показал, что динамо-волна, возникшая в средних широтах северного полушария, достигая экватора, не исчезает, а проникает в южное полушарие, где распространяется уже в полярном направлении и при этом быстро затухает. Аналогично ведёт себя и динамо-волна в южном полушарии. Угловое расстояние, до которого эти волны проникают в противоположное полушарие, может достигать величины порядка десятка градусов. Можно предположить, что такое явление особенно отчётливо наблюдалось на заключительной фазе минимума Маундера [98, 99]. На баттерфляй-диаграммах этого периода цикл солнечной активности проявлялся в виде одной динамо-волны, распространявшейся по южному полушарию, а динамо-волна в северном полушарии была подавлена. На баттерфляй-диаграммах видно, как

волна активности слегка забегает из южного полушария в северное. Если это явление связано с полученным эффектом, то полярность пятен в северном полушарии должна быть та же, что и в южном. Однако наблюдательные данные о полярности пятен того времени отсутствуют. Согласно современным наблюдательным данным для 22-летних циклов, слабую волну, проникающую из южного полушария, практически невозможно увидеть из-за наличия сильной основной волны северного полушария. Однако существуют трассеры активности, распространяющиеся от экватора к полюсу (например, линии далёкого ультрафиолета (см., например, [100])), а также существуют активные области, нарушающие закон полярности Хэйла [101]. Возможно, эти явления можно связать с эффектом проникновения динамо-волн из одного полушария в другое. В работе [92] показано, что дипольная магнитная конфигурация растёт быстрее квадрупольной, а комплексные скорости роста дипольной и квадрупольной конфигураций близки. В [92] предполагается, что это указывает на возможность длительного существования недипольной конфигурации, если она так или иначе образовалась. Авторы [92] связывают этот эффект с длительным существованием конфигурации со смешанной чётностью в конце минимума Маундера, хотя и не раскрывают причин её зарождения.

## 2.2. Квазиклассический метод для исследования модели нелинейного $\alpha\Omega$ -динамо в одномерном случае

Для исследования более реалистичных моделей генерации магнитного поля Солнца желательно перейти от линейных моделей к нелинейным. В работах [102–104] исследуются уравнения  $\alpha\Omega$ -динамо с нелинейным  $\alpha$ -эффектом в предположении, что толщина конвективной оболочки мала по сравнению с её радиусом.

Простейшая нелинейная задача динамо, периодические свойства решений которой исследовались в работах [102–104], имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha(B)B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \lambda^{-2} \mu^2 A, \quad (8)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \lambda^{-2} \mu^2 B. \quad (9)$$

Здесь  $B$  — тороидальное магнитное поле,  $A$  — векторный потенциал,  $\theta$  — широта, которая отсчитывается от полюса,  $t$  — время.  $D = R_x R_\omega \bar{G} \sin \bar{\theta}$ , где  $\bar{\theta}$  — широта, вблизи которой сосредоточена динамо-волна,  $R_x$  и  $R_\omega$  — амплитуды соответственно  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения. Нормировка величин такая же, как и в уравнениях (1), (2). Функция  $\bar{G} = G(\bar{\theta})$  определяется как мера радиального градиента углового вращения. Малый безразмерный параметр  $\lambda = h/R$ , где  $h$  — толщина конвективной зоны,  $R$  — её внутренний радиус,  $\mu$  — радиальное волновое число. Величина  $\mu^{-1}$  является характерным размером распределения магнитного поля (так же как и его потенциала) в радиальном направлении. При уменьшении такого характерного размера увеличивается вклад диффузии магнитного поля в радиальном направлении и затрудняется его генерация механизмом динамо. При умеренных динамо-числах, характерных для солнечного динамо,  $\mu^{-1}$  имеет величину порядка толщины конвективной зоны. Таким образом, рассматриваемая модель учитывает диффузионный перенос магнитного поля поперёк конвективной зоны.

В рассматриваемой задаче тороидальная компонента магнитного поля  $B$  намного больше полоидальной, следовательно, можно считать, что  $\alpha$ -эффект зависит только от тороидальной компоненты магнитного поля. В работах [102–104] были рассмотрены две формы нелинейности:

$$\alpha(B) = \alpha_0 \left( 1 - \frac{B^2}{B_0^2} \right), \quad (10)$$

$$\alpha(B) = \frac{\alpha_0}{1 + B^2/B_0^2}. \quad (11)$$

$B_0$  определяет величину магнитного поля, при которой становятся существенными нелинейные эффекты. При приведении к безразмерному виду будем считать, что  $\alpha_0 = \alpha_* = 1$ .

Периодические решения уравнений (8), (9) можно найти в кинематическом приближении, когда  $\alpha$  считается не зависящим от  $B$ . В этом случае решение имеет вид гармонической динамо-волны:

$$A = |D|^{-2/3} a(\xi) B_0, \quad B = b(\xi) B_0, \quad (12)$$

где  $a = a_* \exp(i\xi)$ ,  $b = b_* \exp(i\xi)$  — безразмерные функции,  $B_0$  — единица измерения магнитного поля, которая в кинематическом приближении может быть выбрана произвольным образом,

$$\xi = (\omega - i\gamma)t + k\theta, \quad (13)$$

$\omega$ ,  $\gamma$  и  $k$  — вещественные константы.

Подставив (12) и (13) в (8), (9), получим

$$\gamma = |D|^{2/3} \Gamma, \quad \omega = |D|^{2/3} \Omega, \quad k = |D|^{2/3} K. \quad (14)$$

Тогда три первых члена в каждом из уравнений (8), (9) будут иметь один и тот же порядок. Последний член в этих уравнениях имеет тот же порядок при условии

$$D^{1/3} \lambda \sim 1. \quad (15)$$

Если  $D^{1/3} \lambda \gg 1$ , то последний член в уравнениях (8), (9) можно отбросить и уравнения (8), (9) перейдут в уравнения (1), (2). В случае  $D^{1/3} \lambda \ll 1$  генерация динамо-волн в уравнениях (8), (9) невозможна, так как динамо-число становится ниже критического. Поэтому достаточно рассмотреть случай (15). Будем считать, что  $D = \lambda^{-3}$ , так как величину  $\mu$  всегда можно перенормировать соответствующим образом. Подставляя (15) и величину  $D = \lambda^{-3}$  в (8), (9), получим, что скорость роста  $\Gamma$  уменьшается по сравнению со случаем динамо Паркера из раздела 2.1 на величину  $\mu^2$ . Решая задачу на собственные векторы и собственные значения, получим

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|K|}{2}} - K^2 - \mu^2, \quad |K| = 2\Omega^2, \quad \frac{a_*}{b_*} = \frac{1}{\Omega(i-1)}. \quad (16)$$

В данном приближении динамо-волна имеет те же асимптотические свойства, что и динамо-волна в модели динамо (1), (2), но с одним исключением, которое состоит в том, что кривая  $\Gamma(K)$  смещена на величину  $\mu^2$  в область отрицательных значений  $\Gamma$ . Максимальная скорость роста для задачи (8), (9) равна  $\Gamma_{\max} = (3/8)(1/2)^{1/3} - \mu^2$ .

Этот результат означает, что в конвективной оболочке могут генерироваться только волны определённого диапазона длин. Для каждого значения  $\mu$  существуют верхние и нижние пределы волновых чисел. Для случая алгебраического подавления спиральности в работе [103] рассмотрены асимптотические свойства нелинейных динамо-волн в установившемся нелинейном режиме в предположении, что соотношения (12), (14) выполнены и  $D = \lambda^{-3}$ . Считалось, что единица измерения магнитного поля  $B_0$  не произвольна, а задаётся условием равномерного распределения. Решение предполагается периодическим с периодом  $0 < \xi \leq 2\pi$ .

Нелинейные уравнения в таком случае примут вид

$$\Omega \frac{\partial a}{\partial \xi} = \alpha(b)b + K^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \mu^2 a, \quad (17)$$

$$\Omega \frac{\partial b}{\partial \xi} = -K \frac{\partial a}{\partial \xi} + K^2 \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} - \mu^2 a. \quad (18)$$

В работе [103] показано, что решение задачи можно искать в виде  $a(\xi) = a_1 \sin \xi + a_2 \cos \xi$ ,  $b(\xi) = b_1 \sin \xi$ .

В [103] было получено, что генерация магнитного поля происходит почти одинаково для обеих форм нелинейностей (10) и (11). Амплитуда динамо-волны имеет конечную величину, максимум волны достигается при некотором значении  $K$ , которое увеличивается с ростом  $\mu$ . Величина максимума убывает с ростом  $\mu$ . При  $\mu$ , превосходящем некоторое максимальное значение  $\mu_{\max} \approx 0,55$ , генерации не происходит. В рассмотренном приближении могут генерироваться динамо-волны только с нулевым средним значением. Отметим, что в модели (1), (2) могут существовать волны как с нулевым, так и с ненулевым средним значением. Такой результат означает возможность генерации динамо-волн смешанной чётности, нарушающих экваториальную асимметрию в солнечном цикле. В модели (1), (2) могут существовать волны со сколь угодно малым волновым числом  $K$ , а в нелинейной модели (8), (9) существует нижний порог длины волны и волны с волновым числом, меньшим некоторого критического значения, генерироваться не могут. В этом и проявляется влияние конечной толщины конвективной оболочки.

В работе [102] система (8), (9) с алгебраическим подавлением спиральности исследуется в случае динамо-числа  $D(\theta)$ , зависящего от широты  $\theta$ . Также в [102] показано, что динамо-волна сконцентрирована в ограниченном диапазоне широт  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . Она разрушается с конечной амплитудой на высокой широте  $\theta_2$ , где  $D$  достигает порогового значения  $D_T$ , которое фиксирует частоту динамо-волн при постоянной величине  $\mu$ . На более низких широтах  $\theta < \theta_2$  амплитуда магнитного поля зависит от  $D(\theta)$ , которое, в отличие от  $\mu$ , может меняться в течение временного масштаба, гораздо большего по сравнению с периодом цикла. Амплитуда волны убывает с уменьшением значения широты и становится равной нулю на низкой широте  $\theta_1$ , где  $D$  становится меньше порогового,  $D_P < D_T$ , и может вызвать генерацию только линейной волны. Для модели характерны две важные особенности. Во-первых, амплитуда динамо-волны зависит от величины динамо-числа, а частота практически не зависит. Таким образом, различие в амплитудах 11-летних циклов солнечной активности может быть связано с флуктуациями  $\alpha$ -эффекта или дифферен-

циального вращения, амплитуды которых входят в динамо-число. Во-вторых, динамо-волна полностью нелинейна, так как  $D_T - D_P = O(D_P)$ . Было показано, что динамо-волна является стабильной, за исключением случаев, когда она имеет малую амплитуду на низких широтах, близких к  $\theta_1$ . Численные исследования подтвердили аналитические результаты.

### 2.3. Квазиклассический метод для исследования модели линейного $\alpha\Omega$ -динамо в двумерном случае

В работе [105] с помощью метода, аналогичного ВКБ, исследована двумерная задача линейного  $\alpha\Omega$ -динамо. Система уравнений в этом случае для генерации осесимметричного магнитного поля в дифференциально вращающемся сферическом слое имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \beta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial (A \cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \beta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial (B \cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rB)}{\partial r^2} + \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial (rA \cos \theta)}{\partial r} - \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial (rA \cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (20)$$

Здесь обозначения такие же, как и в задаче (1), (2). Поле, угловая скорость  $\Omega$  и  $\alpha$ -эффект зависят от радиуса  $r$  и широты  $\theta$  в сферической системе координат с центром в центре Солнца (звезды). Значение  $\theta = 0$  соответствует экватору. Как и в задаче (1), (2), предполагается, что вклад  $\alpha$ -эффекта в генерацию тороидального магнитного поля пренебрежимо мал.

Решение системы (19), (20) можно искать в виде волн. В этом случае оно ищется в форме, аналогичной (3):

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(r, \theta) \\ \hat{B}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(r, \theta) \\ |D|^{2/3} B(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(r, \theta) \\ \nu(r, \theta) \end{pmatrix} \exp(|D|^{2/3} \Gamma t + i|D|^{1/3} S(r, \theta)). \quad (21)$$

При подстановке выбранного вида искомого решения в уравнения (19), (20) получаем алгебраическую систему уравнений для  $\mu$  и  $\nu$ . Условие разрешимости этой системы является дисперсионное соотношение для частоты динамо-волны и её волнового вектора, т.е. уравнение Гамильтона – Якоби:

$$\left[ \Gamma + (S_r)^2 + \frac{1}{r^2} (S_\theta)^2 \right]^2 = i r \alpha \cos \theta (G S_\theta + F S_r). \quad (22)$$

Здесь  $G = (1/r) \partial \Omega / \partial r$ ,  $F = -(1/r) \partial \Omega / \partial \theta$ ,  $\Gamma$  — собственное значение ведущей моды,  $S_r$  и  $S_\theta$  — частные производные от  $S$ .

Решение уравнения (22) должно соответствовать гладкому решению уравнений (19), (20) с затуханием на бесконечности, т.е. вдали от области генерации. Для того чтобы исследовать задачу, необходимо найти стационарную точку для (22) [106]. Процедура выделения решения, удовлетворяющего рассматриваемым условиям, была предложена в работах [107, 108].

Для поиска стационарной точки необходимо заменить  $\Gamma$  на новую функцию  $\gamma(r, \theta, S_r, S_\theta)$ . Константа  $\Gamma$  существует только для ограниченного набора аргументов  $(r, \theta)$  и функций  $S$ . Функция  $\gamma$  определяется на

многообразии  $(r, \theta, S_r, S_\theta)$ , которое можно рассматривать как набор её аргументов. Для множества аргументов  $(r_0, \theta_0, S_{r0}, S_{\theta0})$  выполняются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial S_r} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial S_\theta} = 0. \quad (23)$$

Решение системы уравнений (23) определяет искомые собственные значения и собственные решения уравнения (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma(r_0, \theta_0, S_{r0}, S_{\theta0}), \\ S_r(r_0, \theta_0) &= S_{r0}, \quad \theta(S_{r0}, \theta_0) = S_{\theta0}. \end{aligned} \quad (24)$$

В работе [105] показано, что асимптотические решения на основе такого приближения дают достаточно корректное качественное объяснение имеющихся солнечных наблюдений. Они согласуются также и с результатами численного анализа. Основной особенностью решения, полученного с использованием двумерной модели, является его соответствие закону Йошимуры, согласно которому динамо-волна распространяется вдоль линии постоянной угловой скорости.

В [105] для случая больших динамо-чисел было построено решение, основанное на реалистичном описании внутреннего вращения с использованием данных, полученных методами гелиосейсмологии. Анализ показал существование двух центров генерации динамо-волн: на низких и на высоких широтах. Волна, генерирующаяся на низких широтах, распространяется к экватору, а волна, генерирующаяся на высоких широтах, — к полюсу. Этот результат согласуется с результатами работы [109]. Максимумы обеих волн сдвинуты в направлении распространения. Относительная величина источников генерации на высоких широтах примерно в три раза больше, чем на низких. Положение максимума источника генерации волны, распространяющейся к экватору, находится под конвективной зоной в точке  $(r = 0,66, \theta = 12^\circ)$ . Для волны, распространяющейся к полюсу, максимум расположен в точке  $(r = 0,68, \theta = 68^\circ)$ . В работе [105] показано, что полученное асимптотическое решение качественно и в значительной степени количественно одинаково для различных допустимых профилей  $\alpha$ -эффекта.

В работах [110–112] аналогичные модели динамо изучались с помощью асимптотических методов ВКБ в предположении, что максимумы решений соответствуют максимумам источников генерации (с помощью метода максимально эффективной генерации). Авторы использовали только первые два условия в (23). В работе [110] в случае произвольных скоростей углового вращения были исследованы основные свойства генерируемых волн магнитного поля. Оказалось, что динамо-волны распространяются вдоль поверхностей одинакового вращения, а максимумы их амплитуд сдвинуты в направлении движения от максимумов интенсивности источников генерации. Так же как и в работе [105], получены две динамо-волны, расходящиеся от средних широт к полюсам и экватору. При возрастании магнитного поля в одной из волн происходит уменьшение амплитуды магнитного поля в другой. Широты, на которых расположен максимум и точка разбегания волн к полюсам и экватору, зависят от соотношения между радиальным и широтным градиентами угловой скорости вращения.

## 2.4. Квазиклассический метод для исследования модели линейного $a\Omega$ -динамо с меридиональными потоками в однослойной и двухслойной средах

Многочисленные наблюдения показывают, что в конвективной зоне Солнца присутствуют крупномасштабные течения вещества. В работе [113] сделана оценка скорости меридиональной циркуляции, а также получен широтный профиль течения и изучена его изменчивость во время цикла. В работе [114] на основе доплеровских измерений было установлено, что на поверхности конвективной зоны вещество течёт к полюсам. В работе [115] гелиосейсмологические данные выявляют течение к полюсам до глубин около 12 тыс. км и довольно медленное сходящееся течение к области широт с наибольшей частотой образования солнечных пятен. Анализ движения солнечных пятен в [116–123] показал, что вещество растекается от широт максимальной активности пятнообразования. В [118–123] были проведены исследования меридиональных течений по смещениям солнечных пятен. Туоминен показал, что пятна на широтах меньше  $16^\circ$  движутся к экватору, а пятна, расположенные на более высоких широтах — к полюсу, причём скорость последних возрастает с увеличением широты. В работах [124, 125] показано, как неоднородность, присутствующая в распределении трассеров по широте, влияет на определение результирующего меридионального течения.

В [126] показана ключевая роль меридиональных потоков в динамике крупномасштабных магнитных полей. Согласно [70, 72, 127], движение зоны пятнообразования к экватору, которое наблюдается на Солнце, объясняется переносом тороидального магнитного поля меридиональным течением в глубоких слоях Солнца. Движение полоидального поля к полюсам, согласно [128–130], может быть вызвано меридиональным течением на солнечной поверхности. В работах [131, 132] предполагается, что меридиональная циркуляция является одним из факторов формирования неоднородного вращения Солнца и звёзд.

Исследования модели динамо Паркера для однослойной среды в работах [94–96] показали, что меридиональные потоки вещества, направленные против распространения динамо-волн, способны существенно увеличить длительность цикла активности.

Уравнения Паркера для однослойной среды с учётом меридиональной циркуляции имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial \theta} = \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(VB)}{\partial \theta} = -D \cos \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}. \quad (26)$$

Здесь обозначения такие же, как и в задаче (1), (2);  $V$  — меридиональная циркуляция, которая может зависеть от широты. Решение системы (25), (26) можно искать в форме, аналогичной (3):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ |D|^{2/3} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \exp(|D|^{2/3} \gamma t + i|D|^{1/3} S). \quad (27)$$

Будем считать, что меридиональная циркуляция входит в старший член асимптотического разложения, тогда

$$V = |D|^{1/3} \nu(\theta). \quad (28)$$



При подстановке выбранного вида искомого решения в уравнения Паркера получаем алгебраическую систему уравнений для  $\mu$  и  $v$ . Условием разрешимости для этой системы является дисперсионное соотношение для частоты динамо-волны и её волнового вектора, т.е. уравнение Гамильтона – Якоби:

$$[G + ikv + k^2]^2 - i\hat{\alpha}k = 0, \quad (29)$$

где  $\hat{\alpha} = \alpha \cos \theta$ .

Для того чтобы построить решение системы (25), (26) и исследовать поведение динамо-волны при различных видах меридиональной циркуляции, в [96] уравнение (29) было исследовано методом, аналогичным [82], который описан в разделе 2.1.

В работе [96] рассматривались случаи, когда  $v = \text{const}$ ,  $v = \tilde{v} \sin(2\theta)$ ,  $v = \tilde{v}/\sin(2\theta)$ . Также там было показано, что существует диапазон значений меридиональной циркуляции, укладывающийся в диапазон, допустимый наблюдениями (порядка нескольких метров в секунду), при которых длительность цикла солнечной активности, полученная в модели (25), (26), имеет один порядок с наблюдаемой. Существует величина меридиональной циркуляции, при превышении которой динамо-волны переходят в стационарно растущие конфигурации магнитного поля. Меридиональная циркуляция не изменяет направление распространения динамо-волны на противоположное. На конфигурацию динамо-волн существенно влияет широтная зависимость скорости движения вещества, что открывает принципиальную возможность восстановления профиля меридиональной циркуляции по данным о солнечной активности.

Результаты, полученные для задачи (25), (26) в работах [94–96], были подтверждены в [133] с помощью подхода, основанного на использовании функций Эйри. В работе [133] поведение асимптотического решения было исследовано более детально для режима, в котором магнитное поле является стационарно растущей конфигурацией.

Рассмотрение однослойной среды описывает односторонний поток вещества и не позволяет описать его возвращение. Для более адекватного описания в [134] рассматривается двухслойная среда, в которой слои имеют противоположно направленное меридиональное движение вещества и разные коэффициенты диффузии. Двухслойная модель позволяет сочетать некоторые эффекты двумерной модели, но при этом не усложнять асимптотику, которая возникает при исследовании двумерной задачи.

В случае двухслойной среды в уравнения Паркера [32] можно ввести меридиональную циркуляцию по аналогии с однослойной моделью. Тогда

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(VB)}{\partial \theta} = \beta \Delta B, \quad \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial \theta} = \alpha B + \beta \Delta A, \quad (30)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial(vb)}{\partial \theta} = D \cos \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} + \Delta b, \quad \frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial \theta} = \Delta a. \quad (31)$$

Здесь  $B, A, V(\theta)$  — магнитное поле, магнитный потенциал, меридиональная циркуляция в первом слое, где действует  $\alpha$ -эффект,  $b, a, v(\theta)$  — магнитное поле, магнитный потенциал, меридиональная циркуляция во втором слое, где действует дифференциальное вращение,  $D$  — динамо-число,  $\beta$  — отношение коэффициентов турбулентной диффузии первого и второго слоёв.

Граничные условия имеют вид

$$b = B, \quad a = A, \quad \frac{\partial b}{\partial r} = \beta \frac{\partial B}{\partial r}, \quad \frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r}. \quad (32)$$

В (30), (31) не учитывается эффект кривизны, и, следовательно, исходя из вида таких уравнений нельзя определить, какой слой внешний, а какой — внутренний. Однако, учитывая наблюдательные данные [114, 115, 118], можно считать, что вещество во внешнем слое движется от экватора к полюсам, т.е. против распространения динамо-волны, в приполярных областях переходит во внутренний слой и движется в нём по направлению от полюсов к экватору, переходя во внешний слой в приэкваториальной области. Следовательно, если положительная меридиональная циркуляция находится в каком-либо из слоёв, то можно считать, что этот слой внешний.

Аналогично, если меридиональная циркуляция имеет отрицательный знак в этом слое, то его можно считать внутренним. Подчёркнём, что знаки меридиональной циркуляции в каждом слое разные.

В модели (30), (31) предполагается, что магнитное поле имеет дипольную симметрию и динамо-волна распространяется от полюсов к экватору в обоих слоях. Толщина и плотность одного слоя может отличаться от толщины и плотности другого. Решение системы уравнений (30), (31) представимо в виде

$$B = \mu \exp(iD^{1/3}S\theta + \gamma D^{2/3}t - iD^{1/3}m_1r), \quad (33)$$

$$A = (v + v_1r) \exp(iD^{1/3}S\theta + \gamma D^{2/3}t - iD^{1/3}m_1r), \quad (34)$$

$$a = \zeta \exp(iD^{1/3}S\theta + \gamma D^{2/3}t + iD^{1/3}m_2r), \quad (35)$$

$$b = (\chi + \chi_1r) \exp(iD^{1/3}S\theta + \gamma D^{2/3}t - iD^{1/3}m_2r). \quad (36)$$

Здесь  $\gamma, v, v_1, \zeta, \chi, \chi_1, m_1, m_2$  — произвольные константы, а  $S = \int k d\theta$ .

Уравнение Гамильтона – Якоби с меридиональной циркуляцией имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \beta \sqrt{-\frac{\gamma + iVk}{\beta} - k^2} + \sqrt{-\gamma - ivk - k^2} \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{-\frac{\gamma + iVk}{\beta} - k^2} + \sqrt{-\gamma - ivk - k^2} \right) = \\ & = -\frac{4\hat{\alpha}k}{i\beta \sqrt{-\gamma - ivk - k^2} \sqrt{-(\gamma + iVk)/\beta - k^2}}. \quad (37) \end{aligned}$$

В работе [134] было исследовано уравнение (37) и получено, что интенсивная меридиональная циркуляция в слоях может приводить к замедлению распространения динамо-волн.

Рисунок 5 иллюстрирует соотношение значений меридиональной циркуляции  $V(\theta)$  и  $v(\theta)$  в слоях и соотношения коэффициентов турбулентной диффузии  $\beta$ , при котором модель даёт длительность цикла 22 года. Величина  $V(\theta)$  соответствует меридиональной циркуляции слоя, в котором преобладает  $\alpha$ -эффект,  $v(\theta)$  соответствует меридиональной циркуляции слоя, в котором преобладает дифференциальное вращение. Значения меридиональной циркуляции даны для динамо-чисел от  $-10^3$  до  $-10^4$ . Линиями уровня показано значение  $\beta$ . Для того чтобы длительность цикла составляла 22 года, как видно из рисунка, необходимо либо увеличение интенсивности

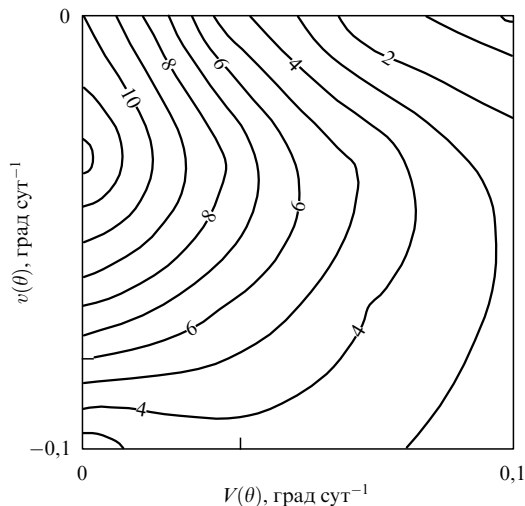


Рис. 5. Диаграмма соотношений  $\beta$ ,  $V(\theta)$  и  $v(\theta)$ , при которых модель даёт длительность цикла 22 года [134].

меридиональной циркуляции в обоих слоях, либо увеличение  $\beta$ . Чем интенсивнее меридиональное движение вещества во внешнем слое по сравнению с внутренним слоем, тем меньше может быть  $\beta$  для достижения длительности цикла 22 года. Если меридиональное движение вещества во внутреннем слое интенсивнее, чем во внешнем, то для достижения длительности цикла 22 года потребуется большее значение  $\beta$ , чем в предыдущем случае.

В случае, когда меридиональная циркуляция направлена против движения динамо-волны в слое, где действует преимущественно дифференциальное вращение, а в слое с  $\alpha$ -эффектом — вдоль распространения динамо-волны, картина распределения  $\beta$  в зависимости от  $V(\theta)$  и  $v(\theta)$  будет тождественна предыдущей. Другими словами, если значения  $V(\theta)$  и  $v(\theta)$  поменять местами, то зависимость длительности цикла от  $\beta$  не изменится.

Как и для случая отсутствия меридиональной циркуляции, при увеличении  $\beta$  при фиксированных  $V(\theta)$  и  $v(\theta)$  длительность цикла уменьшается. При этом происходит затухание амплитуды магнитного поля. С ростом  $\beta$  амплитуда затухает медленнее по сравнению с замедлением распространения динамо-волны.

### 2.5. Другие модели динамо

Отметим, что, кроме случая генерации осесимметричных мод магнитного поля в модели  $\alpha\Omega$ -динамо, можно рассматривать возможность генерации неосесимметричных мод. Помимо основного приближения  $\alpha\Omega$ -динамо, существуют модели  $\alpha^2$ - и  $\alpha^2\Omega$ -динамо. В модели  $\alpha^2$ -динамо пренебрегается влиянием дифференциального вращения на генерацию магнитного поля, а в модели  $\alpha^2\Omega$ -динамо считается, что генерация полоидального поля из тороидального происходит под действием не только дифференциального вращения, но и  $\alpha$ -эффекта. Однако рассмотрение таких моделей носит, скорее, чисто теоретический характер и представляет интерес для развития асимптотических методов [135–140].

В работе [135] исследовалась задача преимущественного возбуждения неосесимметричных магнитных полей в наблюдаемых спиральных галактиках, Солнце и планетах типа Урана и Нептуна в приближении  $\alpha\Omega$ -динамо с

помощью метода максимально эффективной генерации. Предполагалось, что в рассматриваемых небесных телах действие гидромагнитного динамо возможно в сравнительно тонких проводящих конвективных слоях. Для того чтобы в таких слоях возникло преимущественное возбуждение неосесимметричных мод по сравнению с осесимметричными, необходимо, чтобы градиент угловой скорости вращения в небесном теле был сравнительно мал и имел существенную составляющую, перпендикулярную слою.

Метод ВКБ применялся для асимптотического исследования моделей  $\alpha^2\Omega$ -динамо и  $\alpha^2$ -динамо (см., например, [136–140]).

В работе [136] построено асимптотическое решение системы уравнений, описывающих процесс одномерного линейного  $\alpha^2\Omega$ -динамо в тонкой турбулентной, дифференциально вращающейся конвективной звёздной оболочке. В работе [137] рассмотрена модуляция динамо-волн, связанная с локальным  $\alpha$ -эффектом, зависящим от широты, и с радиальным градиентом зонального дифференциального потока вещества.

### 3. Маломодовый подход в звёздном динамо. Нелинейное динамо с дипольной и квадрупольной симметриями магнитного поля для однослойной и двухслойной сред

Рассмотрим другой возможный способ получения упрощённых моделей, направленных на прояснение физики генерации магнитного поля звёзд. Предполагается, что возбуждаемое магнитное поле можно описать сравнительно небольшим числом параметров, что позволяет заменить уравнения динамо подходящим образом подобранной динамической системой не очень высокого порядка. Такой подход называется маломодовым и впервые был предложен в работе [141].

В работах [142–146] развит метод построения маломодового приближения уравнений динамо. В [145] предложен регулярный метод построения маломодового приближения уравнений динамо. Уравнения маломодовой модели получены в простейшем приближении алгебраического подавления спиральности. В [145] показано, что получаемая таким образом нелинейная модель динамо оказывается достаточно богатой и даёт надежду на описание широкого круга явлений генерации магнитного поля в сферических оболочках небесных тел (звёзд и планет).

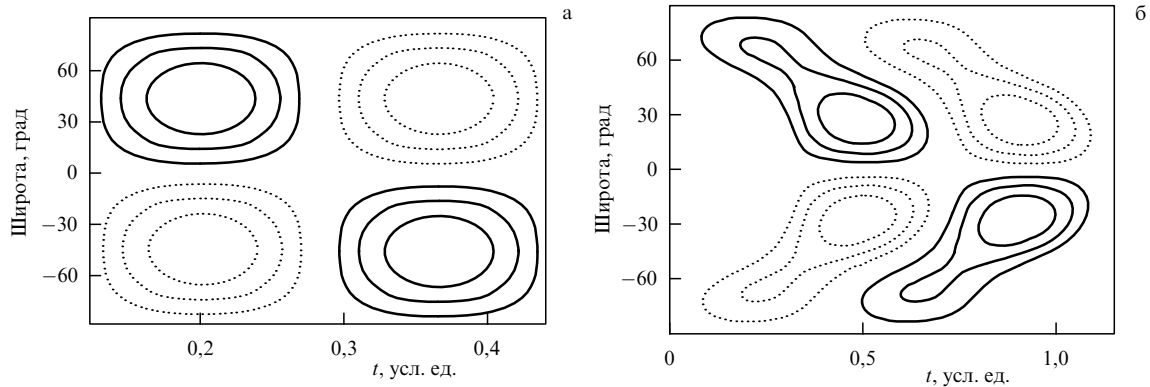
Простейшая система уравнений динамо Паркера в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\omega \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}, \quad (39)$$

где  $A$  и  $B$  являются функциями широты  $\theta$ , измеряемой от полюса, и времени  $t$ .

Согласно работе [144], маломодовое приближение состоит в следующем. Предполагается, что после начального периода роста магнитное поле в звезде стабилизируется, его рост прекращается и возникает режим, напоминающий автоколебания. Считается, что при этом система перестроилась так, что динамо стало маргинально устойчивым. В таком случае можно предполо-



**Рис. 6.** Теоретические бафтерфляй-диаграммы тороидального магнитного поля для полностью конвективной звезды (а) и звезды с тонкой конвективной оболочкой (б) [146]. Полюс с положительным знаком соответствуют сплошные линии, с отрицательным знаком — пунктирные. Время измеряется в условных безразмерных единицах.

жить, что решение представимо в виде суперпозиции небольшого числа подходящим образом подобранных мод свободного затухания. Отметим, что классическое объяснение Паркера, представленное выше, излагает работу динамо на языке эволюции двух мод свободного затухания под действием двух источников генерации, дифференциального вращения и спиральности.

Для начала необходимо рассмотреть случай свободного затухания, когда интенсивность источников генерации  $R_x, R_\omega = 0$ . Собственные решения здесь имеют вид  $\{\sin(k\theta), 0\}$ ,  $k = 1, 3, \dots$  (учтено условие дипольной симметрии для векторного потенциала  $A$ ) или  $\{0, \sin(k\theta)\}$ ,  $k = 2, 4, \dots$  (учтено условие дипольной симметрии для векторного потенциала  $B$ ). Идея метода состоит в поиске решения основной системы (38), (39) в виде ряда по собственным функциям задачи свободного затухания, при этом нужно ограничиться конечным числом членов. Скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  определяется как  $(x, y) = \int xy d\theta$ . Умножая первое уравнение на  $A$ , а второе — на  $B$  и учитывая ортогональность  $A$  и  $B$ , можно перейти к задаче на собственные функции и собственные значения матрицы  $W$ :

$$WC = \lambda C. \quad (40)$$

Элементы матрицы  $W$  имеют вид  $W_{ij} = \lambda_i^0$  при  $i = j$  и

$$W_{ij} = \int \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_i^* \hat{L} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_j.$$

Здесь  $\lambda_i^0$  — собственные значения задачи затухания, оператор  $\hat{L}$  имеет вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} R_x \cos \theta (\cdot) & \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial \theta^2} & R_\omega \sin \theta \frac{\partial (\cdot)}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

(точкой обозначено место, куда нужно поставить моду, на которую действует оператор). Решая задачу (40), можно получить набор собственных функций и собственных значений (скоростей роста)  $\lambda_i$ . На основании критерия, что первой должна возбуждаться осциллирующая мода, в работах [144, 145] показано, что основную роль в процессе генерации магнитного поля играют четыре

моды: две полоидальные и две тороидальные. Меняя числа  $R_x$  и  $R_\omega$ , получили, что генерация лидирующей моды (когда  $\text{Re } \lambda \approx 0$ ) происходит при параметрах  $R_x = 0,5$  и  $R_\omega = 575$ , при этом  $\text{Im } \lambda \approx 7,6i$ , а коэффициенты разложения для тороидального поля равны  $C_1^T = 0,72$ ,  $C_2^T = 0,38 + 0,58i$ , соответствующие коэффициенты разложения для полоидального поля равны  $C_1^P = 0,05 + 0,34i$ ,  $C_2^P = 0,1 + 0,56i$ .

Критическое динамо-число, при котором наступает генерация в полностью конвективной звезде ( $|D| \approx 4500$ ), существенно выше, чем в классическом динамо Паркера ( $|D| \approx 290$ ). При этом реальные динамо-числа, полученные из численных экспериментов для полностью конвективных звёзд, составляют порядка 3000–5000. В работе [144] показано, что свойства решений динамической системы в звёздах с тонкими конвективными оболочками и в полностью конвективных звёздах заметно различаются. Это связано с различным строением спектра затухания в обоих случаях. Было показано, что, в отличие от спектра затухания для классического динамо Паркера, состоящего из одних синглетов, спектр затухания в полностью конвективной звезде состоит из чередующихся синглетов и дублетов. В [144] показано, что причина, по которой динамо в полностью конвективной звезде возбуждает стоячие волны, состоит в том, что широтная зависимость обеих мод, входящих в схему генерации, пропорциональна  $\sin(2\theta)$ , т.е. обе эти моды сосредоточены в одном широтном диапазоне. Для классического динамо Паркера в схему генерации входят две моды, широтные зависимости которых различны и пропорциональны  $\sin(2\theta)$  и  $\sin(4\theta)$ , поэтому волна может распространяться от максимума одной моды к максимуму другой. На рисунке 6 представлены теоретические бафтерфляй-диаграммы тороидального магнитного поля для полностью конвективной звезды (рис. 6а) и звезды с тонкой конвективной оболочкой (рис. 6б) [146]. Полюс с положительным знаком соответствуют сплошные линии, а с отрицательным знаком — пунктирные. Из рисунка видно, что волна в полностью конвективной звезде является стоячей, а в звезде с тонкой конвективной оболочкой — бегущей.

В работах [144, 146] показано, что в течение цикла пятна на звёздах с тонкими конвективными оболочками и на полностью конвективных звёздах распределяются по широте по-разному. Кроме того, модель предсказы-

вает существенное ослабление пятнообразования у полнотью конвективных звёзд на определённых фазах цикла.

В работе [145] была исследована динамическая система, полученная с помощью подстановки в уравнения динамо компонент полей, имеющих широтное распределение вида

$$A(\theta, t) = a_1(t) \sin \theta + a_2(t) \sin 3\theta,$$

$$B(\theta, t) = b_1(t) \sin(2\theta) + b_2(t) \sin(4\theta).$$

Динамическая система имеет вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{R_x b_1}{2} - a_1 - \xi^2 \frac{3R_x b_1}{8} (b_1^2 + 2b_2^2), \quad (41)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} = \frac{R_x}{2} (b_1 + b_2) - 9a_2 - \xi^2 \frac{3R_x (b_1 + b_2)}{8} (b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2), \quad (42)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = \frac{R_\omega}{2} (a_1 - 3a_2) - 4b_1, \quad (43)$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial t} = \frac{3R_\omega a_2}{2} - 16b_2. \quad (44)$$

В качестве граничных условий используются условия  $A(0) = B(0) = A(\pi) = B(\pi) = 0$ , что соответствует дипольной симметрии. В этой системе процесс самовозбуждения описывается линейными членами, а стабилизация за счёт нелинейного подавления спиральности — нелинейными. В систему в качестве управляющих параметров входят величины  $R_x$  и  $R_\omega$ , приведённые к безразмерному виду с помощью коэффициента турбулентной диффузии и геометрических параметров задачи и характеризующие амплитуду  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения.

В уравнениях (41)–(44) учтено, что генерация полоидального поля из тороидального происходит под действием дифференциального вращения, а вклад  $\alpha$ -эффекта пренебрежимо мал.

В рассматриваемой модели используется простейшая схема стабилизации роста магнитного поля, так называемое подавление спиральности. В рамках этой схемы считается, что  $\alpha = \alpha_0(\theta)/(1 + \xi^2 B^2) \approx \alpha_0(\theta)(1 - \xi^2 B^2)$ , где  $\alpha_0(\theta)$  — значение спиральности в немагнитной среде, а  $B_0 = \xi^{-1}$  — магнитное поле, при котором происходит существенное подавление  $\alpha$ -эффекта. Для определённости считаем, что  $\alpha_0(\theta) = \cos \theta$ .

В работе [145] численное исследование динамической системы (41)–(44) при различных значениях параметров  $R_x$  и  $R_\omega$  показало, что воспроизводятся разнообразные режимы генерации, напоминающие поведение магнитного поля в некоторых небесных телах. Были обнаружены стационарные осцилляции, напоминающие солнечный цикл, динамо-всплески магнитного поля, наблюдаемые в лабораторных экспериментах, хаотические возмущения, напоминающие наблюдения активности в некоторых звёздах, вассилляции (осцилляции относительно ненулевого значения), наблюдающиеся в различных небесных телах. Если из динамической системы исключить переменную  $a_1$ , то исчезают режимы вассилляции и хаотические режимы.

Исследование системы (41)–(44) показало, что волны, описывающие распространение тороидального

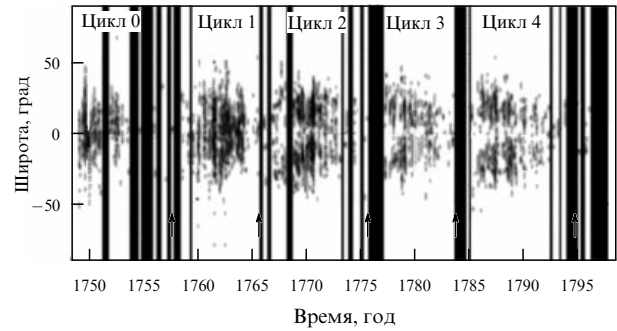


Рис. 7. Баттерфляй-диаграмма солнечных пятен для циклов с нулевого по четвёртый [147].

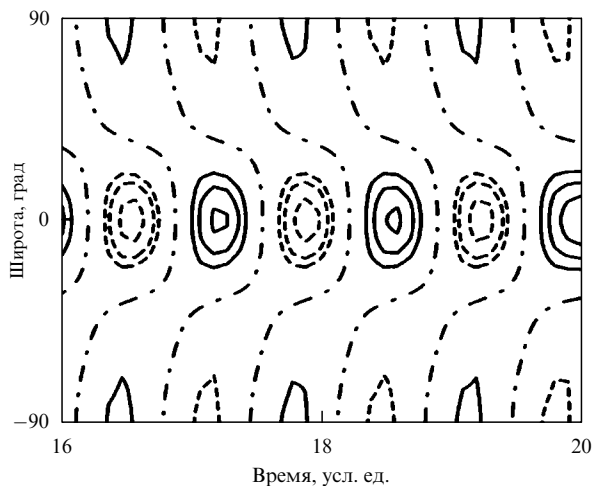
магнитного поля, являются бегущими. Это объясняется тем, что тороидальные моды  $b_1$  и  $b_2$  сдвинуты по фазе друг относительно друга так, что тороидальное поле в целом перемещается по широте. В то же время волна, характеризующая распространение полоидального магнитного поля, является практически стоячей и почти не распространяется в широтном направлении. Это связано с тем, что одна из мод в полоидальном спектре является доминирующей ( $a_2 \gg a_1$ ).

Согласно наблюдательным данным, магнитное поле Солнца в большинстве циклов имеет ярко выраженную дипольную симметрию. Однако тороидальное магнитное поле Солнца в циклах 0 и 1, скорее, имело симметрию, больше похожую на квадрупольную, чем на дипольную. В [147] можно видеть широтно-временные распределения солнечных пятен (баттерфляй-диаграммы) для циклов 0 и 1, в [148] обсуждается возможность реализации квадрупольной структуры тороидального поля в цикле 1. На рисунке 7 изображена баттерфляй-диаграмма солнечных пятен для циклов с нулевого по четвёртый [147]. Несмотря на то что симметрия магнитного поля Солнца в основном дипольная, кажется весьма вероятным, что магнитное поле других звёзд может иметь не только дипольную, но и квадрупольную симметрию. В [149] обсуждаются доказательства, что ни теория динамо, ни данные наблюдений не подтверждают того, что звёздные магнитные поля должны иметь только дипольную симметрию относительно звёздного экватора. Кроме этого, в [149] численно исследовались простейшие миграционные модели динамо и были найдены режимы генерации магнитных полей с недипольной симметрией и спонтанные переходы от одного типа симметрии к другому.

В работе [150] построена динамическая модель, основанная на  $\alpha\Omega$ -динамо, для случая квадрупольной симметрии магнитного поля.

В случае квадрупольной симметрии магнитного поля режим осцилляций возникает не только при учёте одной полоидальной и двух тороидальных мод, как в случае дипольной симметрии, но и при учёте двух полоидальных и одной тороидальной.

Согласно [150], в режиме осцилляций увеличение динамо-числа приводит к росту амплитуды магнитного поля в приэкваториальной области и вблизи полюсов. Приэкваториальная область на теоретических баттерфляй-диаграммах для тороидального магнитного поля выглядит как наблюдаемые кластеры пятен на экваторе в циклах солнечной активности 0 и 1 (см. [147]). На рисунке 8 показано широтно-временное распределение торо-



**Рис. 8.** Широтно-временное распределение тороидального магнитного поля при  $D = -120$ . Сплошными линиями показаны изолинии положительного магнитного поля, штриховыми — отрицательного. Время измеряется в условных безразмерных единицах. Штрихпунктирные линии — линии нулевого уровня [150].

идального магнитного поля в режиме осцилляций. Сплошными линиями показаны изолинии положительного магнитного поля, штриховыми — отрицательного. Время измеряется в условных безразмерных единицах. Штрихпунктирными линиями обозначены линии нулевого уровня. Отметим, что диапазон динамо-чисел, на котором реализуется режим осцилляций магнитного поля с дипольной симметрией, лежит внутри аналогичного диапазона для магнитного поля с квадрупольной симметрией.

С помощью динамической системы, полученной с использованием маломодового приближения, удалось смоделировать квазидвухлетний цикл солнечной активности [151–154]. В [155–164] на основе анализа наблюдательных данных показано, что квазициклические импульсы магнитной активности появляются с периодами около 0,5–2,0 лет на фоне 22-летнего солнечного цикла. На основе вейвлет-анализа данных для крупномасштабного магнитного поля за 1960–2000 гг. в [162] было показано, что колебание с двухлетним периодом довольно хаотично, однако и для этого цикла могут быть выделены волны, которые распространяются к полюсам. Для объяснения наличия двойного цикла солнечной активности в работе [165] было предложено использовать модель Паркера [32] для двухслойной среды. Формирование низкочастотных колебаний в конвективной зоне связано с крупномасштабным радиальным сдвигом  $\partial\Omega/\partial r$  угловой скорости  $\Omega$ , а высокочастотная составляющая цикла может появиться за счёт широтного сдвига  $\partial\Omega/\partial\theta$  или радиального сдвига угловой скорости  $\omega$  в приповерхностном регионе конвективной зоны. Однако наличие смешанного цикла может быть связано не только с этими факторами. В [151, 152] с помощью маломодового приближения показано, что если в широтном распределении поля учитывать три и больше мод тороидального поля и полоидального поля, то возникает режим, аналогичный одновременному присутствию 22-летнего и квазидвухлетнего циклов. При этом такой режим воспроизводится для реалистичных параметров (динамо-чисел, толщины конвективной зоны Солнца, меридиональных потоков).

В работах [153, 154] для моделирования двойного цикла солнечной активности с помощью маломодового приближения построена двухслойная модель динамо, в которой предполагается, что в верхнем слое конвективной зоны движение динамо-волны тормозится за счёт меридиональных потоков, направленных противоположно распространению тороидального магнитного поля, а в более глубоких слоях направления распространения динамо-волны и меридиональных потоков совпадают и волна имеет более короткий период, чем в верхнем слое. Были найдены диапазоны параметров (динамо-чисел и меридиональной циркуляции) для случаев, когда реализуются двойной (одновременное присутствие 22-летнего и квазидвухлетнего) и тройной (одновременное присутствие векового, 22-летнего и квазидвухлетнего) циклы. В работе [153] показано, что тройной цикл может реализовываться за счёт режимов с двумя гармониками в каждом слое и биений.

На рисунке 9 показаны разные режимы генерации старшей моды тороидального поля, которые возникали в описанных моделях. На рисунке 9а представлен режим осцилляций, на рис. 9б — режим васцилляций, на рис. 9в — динамо-всплески, на рис. 9г — цикл, аналогичный одновременному присутствию 22-летнего и квазидвухлетнего циклов. По вертикальной оси отложена амплитуда поля, по горизонтальной — время. Обе величины даны в условных безразмерных единицах.

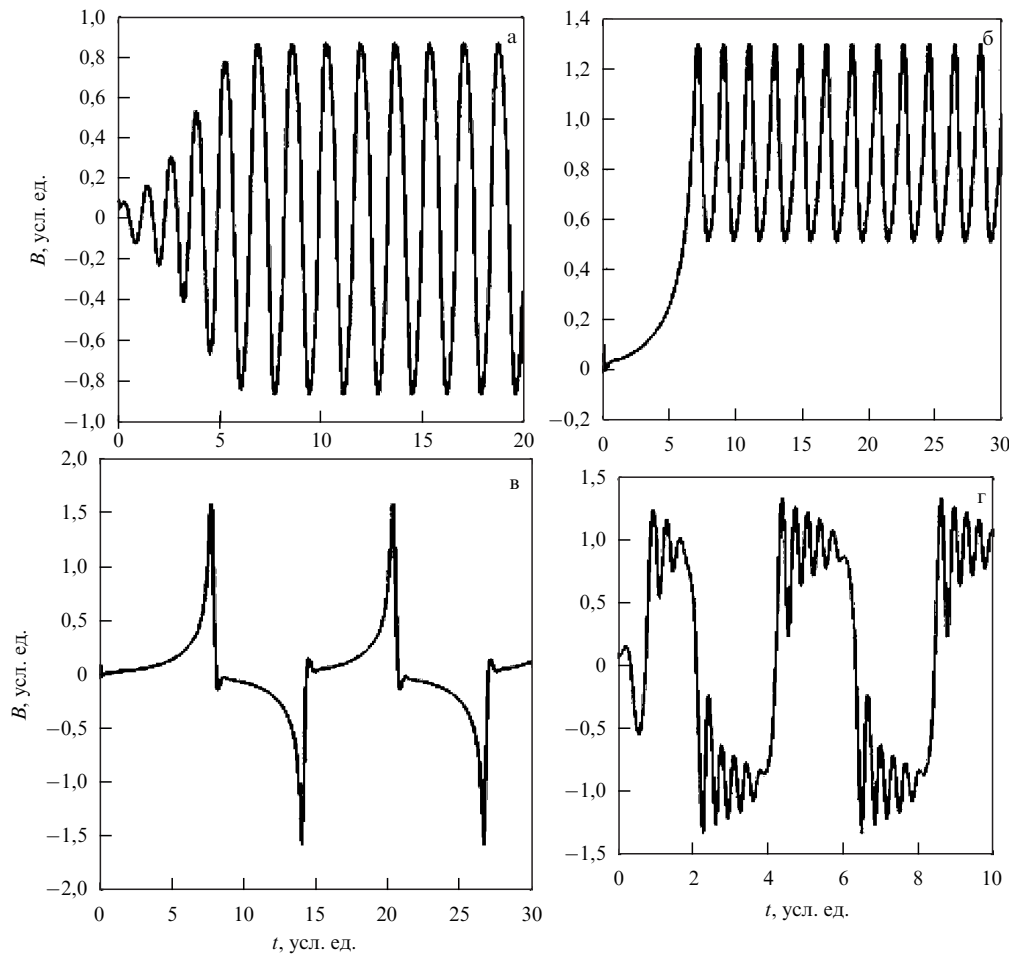
#### 4. Асимптотические методы для исследования модели галактического динамо

##### 4.1. Квазиклассическое приближение для динамо в тонком диске (осесимметричные решения)

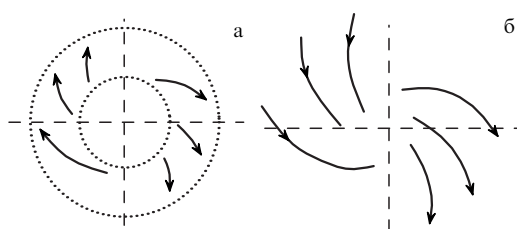
У некоторых галактик, например, у галактики М31 (Туманность Андромеды), распределение поля имеет вид кольца, расположенного на расстоянии около 10 кпк от центра галактики. У других галактик, например, М33 и М51, отчётливо выражена бисимметричная структура, имеющая вид спирали (рис. 10). Конфигурация поля некоторых галактик является более сложной, например, она может быть близка к осесимметричной в центральной и к бисимметричной во внешней частях галактики.

На рисунке 11 изображены магнитные поля в спиральной галактике М51. Данные о магнитном поле получены с помощью комбинации из измерений на длине волны 6 см 100-метрового радиотелескопа в Эффельсберге и VLA (США). Контурные линии показывают общее радиоизлучение, которому пропорциональна напряжённость магнитных полей, штрихи показывают направление магнитных полей. Оптическое изображение получено космическим телескопом Хаббла.

Впервые модели динамо для среднего поля спиральных галактик были предложены в работах [166–168]. Такие модели являются локальными и для них выполняется условие постоянства значений производных поперёк диска. Теория галактического динамо в дальнейшем была расширена для двух- и трёхмерных случаев и применена к различным типам галактик [19, 20, 169]. Такие модели допускают асимптотическое исследование. В работах [61, 62, 170, 171] были развиты точные асимптотические решения для моделей  $\alpha\Omega$ -динамо в тонком диске.



**Рис. 9.** Режимы генерации старшей моды тороидального поля, которые возникали в описанных моделях: (а) режим осцилляций, (б) режим васцилляций, (в) динамо-всплески, (г) цикл, аналогичный одновременному присутствию 22-летнего и квазидвухлетнего циклов. По вертикальной оси отложена амплитуда поля, по горизонтальной — время. Обе величины даны в условных безразмерных единицах.



**Рис. 10.** Осесимметричная (а) и бисимметричная (б) структуры магнитных полей галактик.

Обычно модели галактического динамо рассматриваются в тонком, дифференциально вращающемся турбулентном диске, окружённом вакуумом. Уравнения динамо записываются в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с центром в центре диска, в которой ось  $z$  параллельна вектору галактической угловой скорости. Модели рассматриваются в безразмерных единицах:  $r$  и  $z$  измеряются в единицах радиуса диска  $r_0$  и его полутолщины  $h_0$  соответственно. Типичная величина  $r_0$  составляет 8,5 кпк, а  $h_0$  — примерно 0,5 кпк. Время измеряется в единицах времени турбулентной магнитной диффузии поперёк диска  $h_0^2/\beta$ . Типичная единица диффузионного времени составляет примерно  $7,5 \times 10^8$  лет.

Осесимметричное магнитное поле имеет три компоненты, которые выражаются через азимутальную компоненту крупномасштабного магнитного поля  $B_\varphi$  и векторный потенциал  $A_\varphi$ :

$$\mathbf{B} = \left( -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, B_\varphi, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right). \quad (45)$$

Уравнения генерации магнитного поля в безразмерных единицах имеют вид

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega g \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) \right), \quad (46)$$

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = R_\alpha \alpha B_\varphi + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right), \quad (47)$$

где  $R_\alpha$  и  $R_\omega$  — турбулентные магнитные числа Рейнольдса, характеризующие амплитуды средней спиральности и дифференциального вращения соответственно. В уравнениях (46), (47) предполагается, что дифференциальное вращение не зависит от  $z$ , кроме этого, в (46) пренебрегается вкладом средней спиральности  $\alpha$  в генерацию магнитного поля. В (46)  $g = r d\Omega/dr$  — мера дифференциального вращения. В солнечной окрестности галактики оценки средней спиральности, диф-

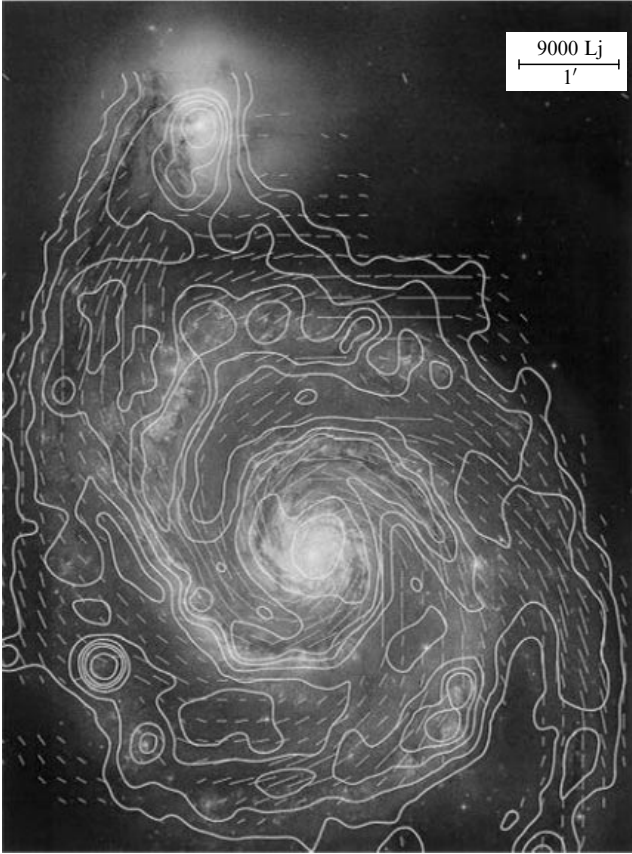


Рис. 11. Магнитные поля в спиральной галактике М51. Контурные линии показывают общее радиоизлучение, которому пропорциональна напряжённость магнитных полей, штрихи показывают направление магнитных полей. Оптическое изображение получено космическим телескопом Хаббла.

ференциального вращения и турбулентной диффузии дают значения, равные соответственно  $\alpha_0 \approx 10^5 \text{ см с}^{-1}$ ,  $g_0 \approx 10^{-15} \text{ с}^{-1}$  и  $\beta \approx 10^{26} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ . В уравнениях (46), (47)  $D = R_\alpha R_\omega$  — безразмерное динамо-число,  $\varepsilon^2 = h_0^2/r_0^2 \approx 10^{-3}$  — малый параметр, возникающий из-за большого различия вертикального и горизонтального размеров диска. Вследствие этого различия магнитное поле относительно быстро диффундирует в направлении  $z$ , перпендикулярном плоскости диска, за  $h_0^2/\beta \approx 5 \times 10^8$  лет и медленно вдоль радиуса за  $r_0^2/\beta \approx 5 \times 10^{11}$  лет. Отметим, что возраст галактик не превышает  $10^{10}$  лет.

Кинематическое, аксиально-симметричное асимптотическое решение в данном случае имеет форму

$$\begin{pmatrix} B_\varphi \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \exp(\Gamma t) \left[ Q(\varepsilon^{-1/3} r) \begin{pmatrix} \tilde{B}(r, z) \\ \tilde{A}(r, z) \end{pmatrix} + \dots \right]. \quad (48)$$

Здесь  $\Gamma = d \ln B/dt$  — скорость роста различных мод поля,  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  — нормированные функции, а  $Q$  — амплитуда решения, которая может быть найдена при заданном радиусе.

Локальное решение (в случае фиксированной точки  $r$ ) возникает в низшем порядке разложения по  $\varepsilon$ . Этому решению соответствует система уравнений, которую можно получить из (46), (47), положив  $\varepsilon = 0$ . Такая система содержит только производные по  $z$  с коэффициен-

тами, зависящими от  $r$  как от параметра:

$$\gamma(r) \tilde{B} = -R_\omega g(r) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial z^2}, \quad (49)$$

$$\gamma(r) \tilde{A} = R_\alpha \alpha(r, z) \tilde{B} + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}. \quad (50)$$

Здесь  $\gamma(r)$  — локальная скорость роста.

Граничные условия, часто применяемые на поверхности диска  $z = \pm h(r)$ , соответствуют вакууму вне круга. Для осесимметричных полей в низшем порядке по  $\varepsilon$  имеем

$$\tilde{B} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = 0 \quad (51)$$

при  $z = \pm h(r)$ . Поскольку  $\alpha$  является нечётной функцией  $z$ , генерируемые волны имеют либо квадрупольную симметрию, либо дипольную. Характер симметрии определяется следующими условиями [19]:

$$\tilde{A} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} = 0 \quad (52)$$

при  $z = 0$  — квадрупольная симметрия;

$$\tilde{B} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = 0 \quad (53)$$

при  $z = 0$  — дипольная симметрия. Чтобы исследовать поведение мод волн магнитного поля в тонком диске, можно рассмотреть уравнения (49), (50) в форме разложения по модам свободного затухания, т.е. в отсутствие источников генерации при  $R_\alpha$  и  $R_\omega = 0$ :

$$\gamma_n \tilde{B}_n = \frac{\partial^2 \tilde{B}_n}{\partial z^2}, \quad (54)$$

$$\gamma_n \tilde{A}_n = \frac{\partial^2 \tilde{A}_n}{\partial z^2}. \quad (55)$$

Здесь  $\gamma_n$  — скорость затухания  $n$ -й моды. Отметим, что  $\gamma_n < 0$ . Рассмотрим квадрупольные граничные условия, тогда ортонормированный базис функций будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_{2n} \\ \tilde{A}_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{h}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_{2n+1} \\ \tilde{A}_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{h}\right) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\gamma_{2n} = \gamma_{2n+1} = -\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (58)$$

Собственные значения являются двукратно вырожденными. Решение уравнений (49), (50) в этом случае представимо в форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \approx \exp(\gamma t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \begin{pmatrix} \tilde{B}_n \\ \tilde{A}_n \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где  $c_n$  — константы. Подставим полученный ряд в (49), (50), умножим на  $(\tilde{B}_k, \tilde{A}_k)$  и проинтегрируем по  $z$  от 0 до  $h$ .

Получим алгебраическую систему однородных уравнений для  $c_n$ , условие разрешимости которой даст алгебраическое уравнение для нахождения  $\gamma$ . Для исследования поведения волн достаточно рассмотреть набор с минимальным количеством мод, достаточным для генерации магнитного поля. В данной задаче минимальное количество мод равно двум, поэтому получаем систему двух уравнений для  $c_0$  и  $c_1$  и квадратное уравнение для  $\gamma$ . Положительное решение для  $\gamma$  такого уравнения имеет вид

$$\gamma = -\frac{1}{4}\pi^2 + i\sqrt{R_x R_\omega \int_0^h \alpha b_0 a_1 dz \int_0^h b_0 a_1 dz}. \quad (60)$$

В случае  $\alpha = \sin(\pi z/h)$  имеем  $\gamma = -\pi^2/4 + i\sqrt{D/\pi}$ . Для оценки точности уравнения (60) получим  $\gamma = 0$  при  $D = D_{cr} = -\pi^5/16 \approx -19$ . Точное значение получено в [19] и составляет  $D_{cr} = -8$ . Такое решение указывает на то, что доминирующая мода не осциллирует ( $\text{Im } \gamma = 0$ ).

Для дипольной симметрии аналогично получим  $\gamma = -n^2\pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Следовательно, младшая дипольная мода затухает в четыре раза быстрее, чем младшая квадрупольная. Причиной этого является то, что азимутальное поле с дипольной симметрией равно нулю не только при  $|z| = h$ , но и при  $z = 0$  и, значит, имеет меньшие масштабы, чем квадрупольное решение. Отсюда сразу следует, что квадрупольные моды должны быть доминирующими в дисках галактик. Отметим, что доминирующая симметрия в галактиках отличается от доминирующей симметрии в звёздах и планетах, в которых преобладает поле с дипольной симметрией. Этот результат подтверждается в наблюдениях.

В задачах дискового динамо часто используются вакуумные граничные условия в силу их относительной простоты. Кроме этого, они имеют локальную форму в низшем порядке разложения по  $\varepsilon$ . Однако это преимущество теряется, как только необходимо делать разложение более высокого порядка по  $\varepsilon$ , которое требуется для того, чтобы получить уравнение для распределения поля в зависимости от радиуса. В таком случае силовые линии магнитного поля могут выходить из диска при одном значении радиуса, проходить через окружающий диск вакуум и возвращаться в область диска при другом значении радиуса. Для случая уравнений динамо, зависящих от радиуса диска, вакуумные условия надо формулировать для разложения первого порядка по  $\varepsilon$ .

Если диск окружён вакуумом, то электрические токи вне диска отсутствуют, следовательно, потенциал магнитного поля выражается следующим образом:  $\mathbf{V} = -\nabla\Phi$ . В силу осевой симметрии азимутальное поле обращается в нуль вне диска. Поскольку магнитное поле должно быть непрерывным на границе диска, граничное условие на поверхности диска  $z = \pm h(r)$  записывается как

$$B_\varphi \Big|_{z=\pm h} = 0. \quad (61)$$

Вакуумные граничные условия для полоидального поля в локальных декартовых координатах были получены в работе [60]. В цилиндрической системе координат они имеют форму [170]

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{r} L(A_\varphi) = 0 \quad (62)$$

при  $z = \pm h(r)$ , где

$$L(A_\varphi) = \int_0^\infty W(r, r') \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} r' A_\varphi \right) dr',$$

$$W(r, r') = rr' \int_0^\infty J_1(kr) J_1(kr') dk$$

и  $J_1(x)$  — функция Бесселя. В работе [171] получена другая эквивалентная форма интегрального оператора  $L(A_\varphi)$ , включающая функцию Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Интегральная часть граничного условия может быть преобразована в нелокальное слагаемое в уравнении для  $Q$ . Такое уравнение становится интегродифференциальным уравнением вида [170]

$$[\Gamma - \gamma(r)]q(r) = \varepsilon p(r)L(q(r)), \quad (63)$$

где

$$q(r) = Q(r)\tilde{A}(h, r),$$

$$p(r) = \frac{\tilde{A}(h, r)\tilde{A}_*(h, r)}{\langle Y, Y_* \rangle}, \quad Y = \begin{pmatrix} \tilde{B}(r, z) \\ \tilde{A}(r, z) \end{pmatrix}.$$

Здесь звёздочка обозначает собственный вектор для сопряжённой задачи и  $\langle Y, Y_* \rangle = \int_0^h Y Y_* dz$ .

Решение уравнения (63) с граничными условиями  $q(0) = 0$  и  $q \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  является ещё одной задачей на собственные значения, для которой собственным значением является скорость роста  $\Gamma$ , а собственной функцией является  $q(r)$ , определяющая радиальный профиль собственной функции  $Q$ . В работе [171] вклад интегрального члена в уравнении (63) может быть описан как расширение радиальной диффузии.

#### 4.2. Адиабатическое приближение для модели галактического динамо

В [172] и [19] было сделано упрощение уравнения (63), которое состоит в пренебрежении слагаемым, содержащим  $\varepsilon$ , в граничном условии (62). Это делает граничное условие локальным и приводит к следующему уравнению для  $Q(r)$ :

$$[\Gamma - \gamma(r)]Q = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rQ \right), \quad (64)$$

аналогичному (63), в котором интегральный член заменён диффузионным оператором. Здесь  $\gamma(r)$  является аналогом потенциала в квантовой механике. Такой подход подобен адиабатическому приближению в квантовой теории, справедливому при  $\Delta\Gamma \ll \Delta\gamma(r)$ , где  $\Delta\Gamma$  — расстояние между соответствующими собственными значениями. Для галактического диска это условие выполнено:  $\Delta\Gamma \leq 0,4$ ,  $\Delta\gamma \approx 1$ .

Адиабатическое приближение состоит в пренебрежении любым нелокальным зацеплением между различными частями диска через гало, но включает в себя локальное диффузионное зацепление внутри диска. Такое упрощение значительно облегчает асимптотический анализ решений задач динамо в приближении тонкого диска для галактик и аккреционных дисков без учёта нелокальных эффектов. Уравнение (63) может быть решено аналитически или численно [19], но некоторые особенности решения теряются при пренебрежении нелокальными



эффектами. Наиболее серьёзная неточность состоит в том, что асимптотическое масштабирование решения зависит от  $\varepsilon$ , при этом радиальный масштаб становится равным  $\varepsilon^{-1/2}h_0$  вместо правильного значения  $\varepsilon^{-1/3}h_0$ . Однако такая разница вряд ли является существенной для реальных значений  $\varepsilon \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ . Отметим, что асимптотика в приближении тонкого диска является достаточно точной для  $\varepsilon < 10^{-1}$  [171, 172].

В работе [173] адиабатическое приближение применяется для расчёта турбулентного МГД динамо магнитных полей в тонких дисках. Адиабатический метод используется для исследования условий, при которых магнитные поля, создаваемые в диске, пронизывают весь диск или локализованы в его ограниченных областях. Задача рассмотрена для двух конкретных случаев кеплеровских дисков. В первом случае предполагается, что диффузия магнитного поля доминирует за счёт турбулентного перемешивания, вследствие чего динамо-число не зависит от расстояния от центра диска. Во втором случае динамо-число может меняться с изменением расстояния от центра диска. Локализация структур магнитного поля оказывается общим свойством динамо в дисках, за исключением особого случая стационарных режимов динамо с постоянным динамо-числом. В работе [173] обсуждаются последствия этого для динамического поведения динамо намагниченных аккреционных дисков. Результаты этих расчётов проверяются в контексте протосолнечного облака и аккреционных дисков вокруг компактных объектов.

Влияние нелокальных эффектов проявляется и в том, что решения уравнения (63) обладают степенными асимптотиками: вдали от активной области динамо  $q \sim r^{-4}$ , в то время как решения уравнения (64) имеют экспоненциальные асимптотики, типичные для уравнения диффузии. Это влияет на скорость распространения магнитных фронтов при кинематическом росте магнитного поля: с нелокальными эффектами фронты распространяются экспоненциально, в то время как локальная радиальная диффузия даёт только линейный характер распространения.

Пренебрежение нелокальными эффектами существенно не влияет на наблюдаемые величины. Отметим, что параметры спиральных галактик и их магнитных полей известны с довольно ограниченной точностью. Кроме того, гало спиральных галактик может быть описано как вакуум лишь очень приближённо. Конечная проводимость гало ослабляет нелокальные эффекты.

Построенная выше теория может быть расширена на случай неосесимметричных решений. В [19, 174, 175] построены асимптотические решения с помощью квазиклассического метода ВКБ для галактического динамо в случае  $|D| \gg 1$ . Подобные асимптотики для одномерных уравнений динамо (49), (50) обсуждаются в [33].

### 4.3. Квазиклассическое приближение для нелинейного динамо

Нелинейные асимптотические решения для уравнений (49), (50) при  $|D| \gg 1$  построены в [176] в предположении, что нелинейность значительно влияет на распределение магнитного поля по диску, а в низшем приближении стационарное состояние динамо устанавливается локально. Радиальное зацепление является существенным уже в кинематической стадии, когда это приводит к возникновению глобальной собственной функции со-

гласно (63) или (64). Нелинейные эффекты, скорее всего, влияют на глобальную собственную функцию, и поэтому должны влиять на радиальное уравнение. В работе [177] получен нелинейный аналог уравнения (64) с алгебраическим подавлением спиральности  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1 + \bar{B}^2/B_0^2}, \quad (65)$$

где  $B_0$  — уровень насыщения, наиболее часто отождествляющийся с состоянием, в котором величины магнитной и турбулентной плотностей кинетической энергии имеют одинаковый порядок. В результате магнитное поле может возрастать, когда  $\bar{B} \ll B_0$ . При приближении  $\bar{B}$  к  $B_0$  рост поля замедляется, поскольку уменьшается величина  $\alpha$ -эффекта. Нелинейную асимптотическую модель тонкого диска можно построить, заменив  $\gamma(r)$  в (63) и (64) на  $\gamma(r)(1 - Q^2/B_0^2)$ . В этом случае уравнение (64) с нелинейностью (65) примет вид

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = \gamma(r) \left( 1 - \frac{Q^2(r)}{B_0^2} \right) Q(r) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r Q(r) \right) \quad (66)$$

при условии, что локальное решение было нормировано таким образом, что  $Q$  представляет собой напряжённость поля, усреднённую поперёк диска при заданном радиусе. В [177] это уравнение выведено путём усреднения уравнений динамо в диске. Уравнение (66) и его неосесимметричный вариант широко применяются для моделирования галактического динамо (см., например, [20]).

Точный физический механизм насыщения динамо до сих пор остаётся неизвестным. В работе [178] механизм насыщения связывается с подавлением магнитным полем лагранжева хаоса в потоках газа. Этот механизм кажется разумным для конвективных систем (где потоки становятся случайными из-за внутренних причин, например, неустойчивостей) и вряд ли может эффективно применяться для галактик, где поток является случайным из-за случайности его движущей силы (взрывы сверхновых).

В работах [179, 180] предложены численные решения уравнений галактического динамо, которые расширяют рамки приближения тонкого диска и опираются на подход "вложенного диска". Вместо использования сложных граничных условий на поверхности диска, при таком подходе рассматривается диск, вложенный в гало, размер которого настолько большой, чтобы сделать несущественными граничные условия, создаваемые в удалённой границе гало. Поскольку турбулентная магнитная диффузия в гало галактик больше, чем в диске [177, 181], модели "вложенных дисков" совместимы с асимптотическими решениями в приближении тонкого диска, полученными с вакуумными граничными условиями, и подтверждают асимптотические результаты. Подход "вложенного диска" был также использован для изучения гало галактик, в которых интенсивно работает механизм динамо [182–185]. В дальнейшем были построены модели динамо в диске, в которых учитываются эффекты магнитной плавучести [186], аккреционные потоки [187] и внешние магнитные поля [188, 189].

В нелинейных моделях динамо для тонких дисков локальное решение не зависит от нелинейных эффектов, основная роль которых заключается в изменении радиальной структуры поля. Следовательно, можно ожидать,

что угол наклона магнитных силовых линий ( $p = \arctan(B_z/B_\varphi)$ ) слабо подвержен действию нелинейных эффектов. Это является важной особенностью решения, которую можно сравнить с данными наблюдений [172]. Однако влияние нелинейных эффектов на угол наклона магнитных силовых линий никогда не было изучено детально.

#### 4.4. No-z-приближение для исследования модели галактического динамо

No-z-приближение было предложено и развито в работах [190–192] для тонких галактических дисков. Основной особенностью этого приближения является замена производных магнитного поля по направлению, перпендикулярному галактическому диску, значениями напряжённости магнитного поля, отнесёнными к полутолщине диска  $h$  либо  $h^2$ . No-z-приближение широко применяется для объяснения галактических магнитных полей. Уравнения динамо (46), (47) в галактическом диске в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с началом координат в центре диска в данном приближении имеют вид

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right), \quad (67)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_x B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right). \quad (68)$$

Радиальное поле  $B_r$  получается из азимутального  $B_\varphi$  в результате действия  $\alpha$ -эффекта, а азимутальное из радиального — под действием дифференциального вращения. На эти поля действует турбулентная диффузия  $\eta$  и общее вращение  $\Omega$ ,  $\lambda = h/R$ . Третья компонента магнитного поля восстанавливается из условия соленайдальности. Время измеряется в единицах  $h^2/\eta$ , а расстояние — в единицах радиуса галактического диска  $r_0$ , угловая скорость отнесена к своему характерному значению  $\Omega_0$  и введены характерные числа  $R_x = \alpha_0 h/\eta$ ,  $R_\omega = \Omega_0 h^2/\eta$ , так что  $D = R_x R_\omega$ .

Уравнения (67), (68) обычно решают методом ВКБ или численно. Такой подход, на первый взгляд, кажется довольно грубым, однако он является вполне эффективным, так как структура магнитного поля поперёк тонкого диска является достаточно простой, по крайней мере, для низшей моды. Улучшение точности приближения обсуждается в работе [192]. В [190] эта модель применяется для изучения влияния спиральных рукавов галактических магнитных полей.

В [192] показано, что результаты асимптотического исследования уравнений линейного динамо (67), (68) и (46), (47) для дифференциального вращения Брандта и для галактики М31 (в области, где применимо приближение тонкого диска) довольно близки. Собственные функции в линейном приближении для этих случаев одинаковы. Скорости роста магнитного поля для двух приближений различаются, но поправочный коэффициент остаётся постоянным (в пределах 1%) при условии, что динамо-число не слишком велико. Введение множителя  $\pi^2/4$  и изменение  $\alpha_0$  в no-z-приближении от единицы до  $2/\pi$  улучшает результаты. Кроме того, расхождение может быть компенсировано изменением величины  $R_x$ , поскольку эта величина ещё точно не определена.

Нелинейные уравнения галактического динамо с алгебраическим подавлением спиральности являются более реалистичными. Расхождение между решениями уравнений (67), (68) и (46), (47) в нелинейном случае боль-

ше, чем в линейном для небольших динамо-чисел, и довольно хорошее для больших.

В [193] предполагается, что механизм динамо выполняется более эффективно в материальных рукавах галактик, при этом на генерируемое магнитное поле действует эффект запаздывания. Было получено, что в результате этого сгенерированное магнитное поле сосредоточено между рукавами. Для получения асимптотических решений использовался метод ВКБ с учётом эффекта запаздывания. На основе локальных уравнений по-z-приближения были получены явные выражения для скорости роста среднего магнитного поля и его радиальных и азимутальных распределений.

В работе [193] были построены локальное и глобальное асимптотические неосесимметричные решения для уравнений (67), (68), которые в силу их громоздкости здесь не приводим. В [193] теория динамо среднего поля была расширена в двух направлениях. Во-первых, были получены полуаналитические решения для осесимметричных и доминирующих неосесимметричных компонент ( $m = 0$  и  $m = \pm 2$  для  $\alpha$ -спирали с двумя рукавами). Во-вторых, были исследованы эффекты конечного времени релаксации  $\tau$  средней электродвижущей силы, связанного с конечным временем корреляции случайного потока.

Результаты, полученные асимптотически в работе [193], были подтверждены численно в [194].

## 5. Заключение

В работах, которые были представлены в обзоре, показано, что использование асимптотических разложений даёт реалистичные результаты, согласующиеся с данными наблюдений. С помощью асимптотических методов возможно получить аналитические зависимости различных характеристик волн магнитного поля от различных управляющих параметров моделей. Это позволяет понять, насколько тот или иной физический фактор способен повлиять на магнитную активность небесного тела. Такие оценки могут служить ориентиром для сложного численного моделирования.

Таким образом, асимптотические методы являются эффективным способом исследования поставленных задач, связанных с генерацией и эволюцией магнитных полей. Кроме того, результаты асимптотического моделирования являются полезными при тестировании численных алгоритмов.

Автор выражает благодарность Д.Д. Соколову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-17-10097).

## Список литературы

1. Gilbert G *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure. Physiologia Nova, Plurimis & Experimentis Demonstrata* (Londoni: Petrus Short, 1600); Пер. на англ. яз.: Gilbert W *De Magnete* (New York: Dover Publ., 1958); Пер. на русск. яз.: Гильберт В *О магните, магнитных телах и о большом магните — Земле. Новая физиология, доказанная множеством аргументов и опытов* (М.: Изд-во АН СССР, 1956)
2. Hale G E *Astrophys. J.* **28** 315 (1908)
3. Babcock H W *Astrophys. J.* **105** 105 (1947)
4. Alfvén H *On the Origin of the Solar System* (Oxford: Clarendon Press, 1954)
5. Alfvén H *Rev. Geophys. Space Phys.* **15** 271 (1977)
6. Alfvén H *Ark. Mat. Astron. Fys.* **27A** 1 (1937)
7. Chandrasekhar S, Fermi E *Astrophys. J.* **118** 113 (1953)
8. Гинзбург В Л *УФН* **51** 343 (1953)
9. Гинзбург В Л *ДАН СССР* **156** 43 (1964); *Ginzburg V L Sov. Phys. Dokl.* **9** 329 (1964)

10. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Oxford: Pergamon Press, 1970)
11. Гинзбург В Л, Озерной Л М *ЖЭТФ* **47** 1030 (1964); Ginzburg V L, Ozernoi L M *Sov. Phys. JETP* **20** 689 (1965)
12. Гинзбург В Л, Сыроватский С И *Происхождение космических лучей* (М.: Изд-во АН СССР, 1963); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L, Syrovatskii S I *The Origin of Cosmic Rays* (Oxford: Pergamon Press, 1964)
13. Гинзбург В Л, Усов В В *Письма в ЖЭТФ* **15** 280 (1972); Ginzburg V L, Usov V V *JETP Lett.* **15** 196 (1972)
14. Ginzburg V L, Zheleznyakov V V *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **13** 511 (1975)
15. Hiltner W A *Astrophys. J.* **128** 9 (1958)
16. Schmidt Th *Astron. Astrophys.* **6** 294 (1970)
17. Mathewson D S, Ford V L *Astron. J.* **75** 778 (1970)
18. Beck R *Astron. Astrophys.* **106** 121 (1982)
19. Ruzmaikin A A, Shukurov A M, Sokoloff D D *Magnetic Fields of Galaxies* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 133) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988)
20. Beck R et al. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34** 155 (1996)
21. Beck R, Wiebeinski R "Magnetic fields in galaxies", in *Planets, Stars and Stellar System* Vol. 5 *Galactic Structure and Stellar Populations* (Dordrecht: Springer, 2013) p. 641
22. Schubert G, Soderlund K M *Phys. Earth Planet. Interiors* **187** 92 (2011)
23. Larmor J *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.* 159 (1919)
24. Cowling T G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **94** 39 (1934)
25. Herzenberg A *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **250** 543 (1958)
26. Backus G *Ann. Physics* **4** 372 (1958)
27. Parker E N *Astrophys. J.* **122** 293 (1955)
28. Витинский Ю И *Солнечная активность* (М.: Наука, 1983)
29. Babcock H W *Astrophys. J.* **133** 572 (1961)
30. Leighton R B *Astrophys. J.* **156** 1 (1969)
31. Krause F, Rädler K-H *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (New York: Pergamon Press, 1980); Пер. на русск. яз.: Краузе Ф, Рэдлер К-Х *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо* (М.: Мир, 1984)
32. Parker E N *Astrophys. J.* **408** 707 (1993)
33. Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983); Пер. на русск. яз.: Зельдович Я Б, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *Магнитные поля в астрофизике* (М.—Ижевск: Инст. компьютер. исслед., РХД, 2006)
34. Dormy E, Soward A M (Eds) *Mathematical Aspects of Natural Dynamos* (New York: CRC Press/Taylor and Francis, 2007)
35. Roberts P H, Soward A M *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24** 459 (1992)
36. Soward A M *Adv. Space Res.* **12** 257 (1992)
37. Брагинский С И *Геоматнезизм и аэрономия* **7** 1050 (1967); Braginsky S I *Geomagn. Aeron.* **7** 851 (1967)
38. Cowling T G *Magnetohydrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1957)
39. Брагинский С И *ЖЭТФ* **47** 1084 (1964); Braginskii S I *Sov. Phys. JETP* **20** 726 (1965)
40. Брагинский С И *ЖЭТФ* **47** 2178 (1964); Braginskii S I *Sov. Phys. JETP* **20** 1462 (1965)
41. Seehafer N, Pipin V *Astron. Astrophys.* **508** 9 (2009)
42. Elsasser W M *Phys. Rev.* **69** 106 (1946)
43. Roberts P H, in *Mathematical Problems in the Geophysical Sciences* Vol. 2 (Lectures in Applied Mathematics, Vol. 14, Ed. W H Reid) (Providence, RI: American Mathematical Society, 1971) p. 129
44. Roberts P H, Soward A M *Astron. Nachr.* **296** 49 (1975)
45. Yoshimura H *Astrophys. J. Suppl.* **29** 467 (1975)
46. Yoshimura H *Astrophys. J.* **201** 740 (1975)
47. Yoshimura H *Astrophys. J.* **226** 706 (1978)
48. Yoshimura H *Astrophys. J.* **227** 1047 (1979)
49. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **7** 1466 (1937)
50. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **31** 154 (1956); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **4** 460 (1957)
51. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **48** 986 (1965); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **21** 656 (1965)
52. Зельдович Я Б *Астрофизика* **6** 319 (1970); Zel'dovich Ya B *Astrophysics* **6** 164 (1970)
53. Zel'dovich Ya B et al. *J. Fluid Mech.* **144** 1 (1984)
54. Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *ЖЭТФ* **78** 980 (1980); Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A *Sov. Phys. JETP* **51** 493 (1980)
55. Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A *Sov. Sci. Rev. E* **2** 333 (1983)
56. Иванова Т С, Рузмайкин А А *Астрон. журн.* **53** 398 (1976); Ivanova T S, Ruzmaikin A A *Sov. Astron.* **20** 227 (1976)
57. Иванова Т С, Рузмайкин А А *Астрон. журн.* **54** 846 (1977); Ivanova T S, Ruzmaikin A A *Sov. Astron.* **21** 479 (1977)
58. Иванова Т С, Рузмайкин А А *Астрон. журн.* **57** 127 (1980); Ivanova T S, Ruzmaikin A A *Sov. Astron.* **24** 75 (1980)
59. Roberts P H, Stix M *Astron. Astrophys.* **18** 453 (1972)
60. Soward A M *Astron. Nachr.* **299** 25 (1978)
61. Soward A M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **64** 163 (1992)
62. Soward A M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **64** 201 (1992)
63. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
64. Petrovay K *Astron. Nachr.* **328** 789 (2007)
65. Кичатинов Л Л *Астрон. журн.* **78** 934 (2001); Kitchatinov L L *Astron. Rep.* **45** 816 (2001)
66. Кичатинов Л Л, Олемской С В *Письма в Астрон. журн.* **37** 713 (2011); Kitchatinov L L, Olemskoy S V *Astron. Lett.* **37** 656 (2011)
67. Belvedere G, Kuzanyan K M, Sokoloff D D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **315** 778 (2000)
68. Brandenburg A, Subramanian K *Phys. Rep.* **417** 1 (2005)
69. Choudhuri A R *Astron. Astrophys.* **253** 277 (1992)
70. Choudhuri A R, Shussler M, Dikpati M *Astron. Astrophys.* **303** 29 (1995)
71. Dikpati M, Charbonneau P *Astrophys. J.* **518** 508 (1999)
72. Dikpati M, Gilman P A *Astrophys. J.* **559** 428 (2001)
73. Kitchatinov L L, Olemskoy S V *Astron. Nachr.* **332** 496 (2011)
74. Kitchatinov L L, Rudiger G, Kuker M *Astron. Astrophys.* **292** 125 (1994)
75. Kitchatinov L L, Olemskoy S V *Solar Phys.* **276** 3 (2012)
76. Pipin V V, Sokolov D D, Usoskin I G *Astron. Astrophys.* **542** 26 (2012)
77. Pipin V V, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **738** 104 (2011)
78. Pipin V V, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **776** 36 (2013)
79. Baliunas S L et al. *Astrophys. J.* **460** 848 (1996)
80. Belvedere G, Paterno L, Stix M *Astron. Astrophys.* **91** 328 (1980)
81. Кичатинов Л Л *Письма в Астрон. журн.* **28** 695 (2002); Kitchatinov L L *Astron. Lett.* **28** 626 (2002)
82. Kuzanyan K M, Sokoloff D D *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **81** 113 (1995)
83. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
84. Маслов В П, Федорюк М В *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Maslov V P, Fedoriuk M V *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics* (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1981)
85. Арнольд В И и др. *ЖЭТФ* **81** 2052 (1981); Arnold V I et al. *Sov. Phys. JETP* **54** 1083 (1981)
86. Ruzmaikin A et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **52** 125 (1990)
87. Sokoloff D, Shukurov A, Ruzmaikin A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **25** 293 (1983)
88. Isakov R et al. *Astrophys. Space Sci.* **80** 145 (1981)
89. Kuzanyan K M, Sokoloff D D *Astron. Astrophys.* **18** 129 (1999)
90. Galitski V M, Sokoloff D D *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **91** 147 (1999)
91. Соколов Д Д, Фьок М, Нем-Риб Э *Магнитная гидродинамика* **31** 19 (1995); Sokoloff D, Fioc M, Nesme-Ribes E *Magnetohydrodynamics* **31** 18 (1995)
92. Галицкий В М, Соколов Д Д, Кузаян К М *Астрон. журн.* **82** 378 (2005); Galitski V M, Sokoloff D D, Kuzanyan K M *Astron. Rep.* **49** 337 (2005)
93. Makarov V I, Sivaraman K R *Solar Phys.* **85** 215 (1983)
94. Попова Е П, Решетняк М Ю, Соколов Д Д *Астрон. журн.* **85** 183 (2008); Popova E P, Reshetnyak M Yu, Sokoloff D D *Astron. Rep.* **52** 157 (2008)
95. Popova H, Sokoloff D *Astron. Nachr.* **329** 766 (2008)
96. Попова Е П *Астрон. журн.* **86** 928 (2009); Popova E P *Astron. Rep.* **53** 863 (2009)
97. Контор Н Н, Хотиловская Т Г *Астрон. журн.* **65** 414 (1988); Kontor N N, Khotilovskaya T G *Sov. Astron.* **32** 211 (1988)
98. Ribes J C, Nesme-Ribes E *Astron. Astrophys.* **276** 549 (1993)
99. Sokoloff D D, Nesme-Ribes E *Astron. Astrophys.* **288** 293 (1994)
100. Benevolenskaya E E, Kosovichev A A, Schereer P H *Astrophys. J. Lett.* **554** 107 (2001)
101. Harvey K L, in *The Solar Cycle, Proc. of the National Solar Observatory, Sacramento Peak, 12th Summer Workshop* (ASP Conference Ser., Vol. 27, Ed. K L Harvey) (San Francisco, CA: ASP, 1992) p. 335
102. Meunier N et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **86** 249 (1997)
103. Кузаян К М, Соколов Д Д *Астрон. журн.* **73** 469 (1996); Kuzanyan K M, Sokoloff D D *Astron. Rep.* **40** 424 (1996)
104. Bassom A P, Kuzanyan K M, Soward A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **455** 1443 (1999)
105. Belvedere G, Kuzanyan K M, Sokoloff D D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **315** 778 (2000)
106. Huerre P, Monkewitz P A *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22** 473 (1990)
107. Soward A M, Jones C A *Mech. Appl. Math.* **36** 19 (1983)
108. Starchenko S V, Kono M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **82** 93 (1996)

109. Belvedere G M, Proctor M R E, Lanzafame G *Nature* **350** 481 (1991)
110. Рузмайкин А А, Старченко С В *Астрон. журн.* **64** 1057 (1987); Ruzmaikin A A, Starchenko S V *Sov. Astron.* **31** 552 (1987)
111. Ruzmaikin A A, Sokoloff D D, Starchenko S V *Solar Phys.* **115** 5 (1988)
112. Makarov V I, Ruzmaikin A A, Starchenko S V *Solar Phys.* **111** 267 (1987)
113. Hathaway D H *Living Rev. Solar Phys.* **7** 1 (2010)
114. Komm R W, Howard R F, Harvey J W *Solar Phys.* **147** 207 (1993)
115. Zhao J, Kosovichev A *Astrophys. J.* **603** 776 (2004)
116. Brajsa R, Wouhl H *Hvar Observatory Bull.* **24** 125 (2001)
117. Lustig L, Wouhl H *Astron. Astrophys.* **249** 528 (1991)
118. Tuominen J, Tuominen I, Kyrolainen J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **205** 691 (1983)
119. Tuominen J Z. *Astrophys.* **51** 91 (1961)
120. Tuominen J, Kyrolainen J *Solar Phys.* **79** 161 (1982)
121. Tuominen J *Astrophys. J.* **143** 266 (1966)
122. Tuominen J *Solar Phys.* **34** 15 (1973)
123. Tuominen J Z. *Astrophys.* **37** 145 (1955)
124. Олемской С В, Кичатинов Л Л *Письма в Астрон. журн.* **31** 793 (2005); Olemskoy S V, Kitchatinov L L *Astron. Lett.* **31** 706 (2005)
125. Олемской С В, Кичатинов Л Л *Изв. РАН. Сер. физ.* **70** 1427 (2006)
126. Ivanov E V, Obridko V N, Shelting B D, in *Solar Variability as an Input to the Earth's Environment: Intern. Solar Cycle Studies, ISCS Symp., 23–28 June 2003, Tatranská Lomnica, Slovak Republic* (ESA, SP-535, Ed. A Wilson) (Noordwijk: ESA Publ., 2003) p. 37
127. Bonanno A et al. *Astron. Astrophys.* **390** 673 (2002)
128. Обридко В Н, Шельтинг Б Д *Астрон. журн.* **80** 364 (2003); Obridko V N, Shelting B D *Astron. Rep.* **47** 953 (2003)
129. Durrant C J, Turner J P R, Wilson P R *Solar Phys.* **222** 345 (2004)
130. Ivanov E V, Obridko V N *Solar Phys.* **206** 1 (2002)
131. Кичатинов Л Л *Астрон. журн.* **81** 176 (2004); Kitchatinov L L *Astron. Rep.* **48** 153 (2004)
132. Kitchatinov L L, Rudiger G *Astron. Nachr.* **325** 496 (2004)
133. Soward A M et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **107** 667 (2013)
134. Попова Е П *Письма в Астрон. журн.* **37** 233 (2011); Popova E P *Astron. Lett.* **37** 210 (2011)
135. Старченко С В *Астрон. журн.* **72** 257 (1995); Starchenko S V *Astron. Rep.* **39** 227 (1995)
136. Bassom A P et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **99** 309 (2005)
137. Griffiths G L et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94** 85 (2001)
138. Менье Н, Нем-Риб Е, Соколов Д Д *Астрон. журн.* **73** 460 (1996); Meunier N, Nesme-Ribes E, Sokoloff D D *Astron. Rep.* **40** 415 (1996)
139. Ponty Y, Bassom A P, Soward A M, in *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge* (NATO Science Ser. II, Vol. 26, Eds P Chossat, D Armbruster, I Oprea) (Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001)
140. Starchenko S V *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **77** 55 (1994)
141. Ruzmaikin A A *Comments Mod. Phys.* **C** 9 85 (1981)
142. Kitiashvili I, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **688** 49 (2008)
143. Kitiashvili I, Kosovichev A G *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **103** 53 (2009)
144. Соколов Д Д, Нефедов С Н *Вычислительные методы и программирование* **8** 195 (2007)
145. Нефедов С Н, Соколов Д Д *Астрон. журн.* **87** 278 (2010); Nefedov S N, Sokoloff D D *Astron. Rep.* **54** 247 (2010)
146. Соколов Д Д и др. *Письма в Астрон. журн.* **34** 842 (2008); Sokoloff D D et al. *Astron. Lett.* **34** 761 (2008)
147. Arlt R *Solar Phys.* **255** 143 (2009)
148. Illarionov E et al. *Astron. Nachr.* **332** 590 (2011)
149. Moss D, Saar S H, Sokoloff D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **388** 416 (2008)
150. Попова Е П *Астрон. журн.* **90** 347 (2013); Popova E P *Astron. Rep.* **57** 310 (2013)
151. Popova H *Magnetohydrodynamics* **49** 59 (2013)
152. Попова Е П, Юхина Н А *Письма в Астрон. журн.* **39** 810 (2013); Popova E P, Yukhina N A *Astron. Lett.* **39** 729 (2013)
153. Popova E P, Potemina K A *Geomagn. Aeron.* **53** 941 (2013)
154. Popova E P, Potemina K A, Yukhina N A *Geomagn. Aeron.* **54** 877 (2014)
155. Obridko V N, Shelting B D *Adv. Space Res.* **40** 1006 (2007)
156. Benevolenskaya E *Solar Phys.* **161** 1 (1995)
157. Benevolenskaya E *Solar Phys.* **216** 325 (2003)
158. Krivova N A, Solanki S K *Astron. Astrophys.* **394** 701 (2002)
159. Richardson J D et al. *Geophys. Res. Lett.* **21** 1559 (1994)
160. Mursula K, Zieger B *Adv. Space Res.* **25** 1939 (2000)
161. Mursula K et al. *Solar Phys.* **221** 201 (2003)
162. Obridko V N et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **365** 827 (2006)
163. Обридко В Н, Шельтинг Б Д *Астрон. журн.* **78** 1146 (2001); Obridko V N, Shelting B D *Astron. Rep.* **45** 1012 (2001)
164. Apostolov E V *Bull. Astron. Inst. Czech.* **36** 97 (1985)
165. Benevolenskaya E E *Solar Phys.* **191** 247 (2000)
166. Parker E N *Astrophys. J.* **163** 252 (1971)
167. Вайнштейн С И, Рузмайкин А А *Астрон. журн.* **48** 902 (1971); Vainshtein S I, Ruzmaikin A A *Sov. Astron.* **15** 714 (1972)
168. Вайнштейн С И, Рузмайкин А А *Астрон. журн.* **49** 449 (1972); Vainshtein S I, Ruzmaikin A A *Sov. Astron.* **16** 365 (1972)
169. Widrow L M *Rev. Mod. Phys.* **74** 775 (2002)
170. Priklonsky V et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **93** 97 (2000)
171. Willis A P et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **98** 345 (2004)
172. Baryshnikova Yu et al. *Astron. Astrophys.* **177** 27 (1987)
173. Stepinski T F, Levy E H *Astrophys. J.* **379** 343 (1991)
174. Krasheninnikova Yu et al. *Astron. Astrophys.* **213** 19 (1989)
175. Starchenko S V, Shukurov A *Astron. Astrophys.* **214** 47 (1989)
176. Kvasz L, Sokoloff D D, Shukurov A M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **65** 231 (1992)
177. Poezd A, Shukurov A M, Sokoloff D D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **264** 285 (1993)
178. Cattaneo F, Hughes D W, Kim E *Phys. Rev. Lett.* **76** 2057 (1996)
179. Stepinski T F, Levy E H *Astrophys. J.* **331** 416 (1988)
180. Elstner D, Meinel R, Rudiger G *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **50** 85 (1990)
181. Sokoloff D, Shukurov A *Nature* **347** 51 (1990)
182. Brandenburg A et al. *Astron. Astrophys.* **259** 453 (1992)
183. Brandenburg A et al. *Astron. Astrophys.* **271** 26 (1993)
184. Brandenburg A, Moss D, Shukurov A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **276** 651 (1995)
185. Elstner D et al. *Astron. Astrophys.* **297** 77 (1995)
186. Moss D, Shukurov A, Sokoloff D *Astron. Astrophys.* **343** 120 (1999)
187. Moss D, Shukurov A, Sokoloff D *Astron. Astrophys.* **358** 1142 (2000)
188. Moss D, Shukurov A *Astron. Astrophys.* **372** 1048 (2001)
189. Moss D, Shukurov A *Astron. Astrophys.* **413** 403 (2004)
190. Mestel L, Subramanian K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265** 649 (1993)
191. Moss D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** 191 (1995)
192. Phillips A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94** 135 (2001)
193. Chamandy L, Subramanian K, Shukurov A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **433** 3274 (2013)
194. Chamandy L, Subramanian K, Shukurov A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **428** 3569 (2013)

### Current results on the asymptotics of dynamo models

**Н.П. Попова**

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation;*

*M.V. Lomonosov Moscow State University, D.V. Skobel'syn Institute of Nuclear Physics,*

*Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation*

*E-mail: popovaelp@mail.ru*

Magnetic field generation and evolution models are currently available for different celestial bodies that are capable of describing a large body of observational material. Despite recent decades of great successes in numerical magnetic hydrodynamics and in detailed research into some specific problems, asymptotic methods still need to be used to clarify the magnetic field generation mechanism in dynamo theory. In this review, current asymptotic methods are presented together with the results of their application to the simulation of solar, stellar and galactic magnetic activities.

**Keywords:** dynamo theory, Sun, stars, galaxies

PACS numbers: 52.30.Cv, 96.60.Hv, 96.60.Q–

Bibliography — 194 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **186** (6) 577–596 (2016)

DOI: 10.3367/UFN.2016.02.037727

*Received 15 May 2015, revised 8 February 2016*

*Physics – Uspekhi* **59** (6) (2016)

DOI: 10.3367/UFN.2016.02.037727