

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Е.М. ЛИФШИЦА

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

Стохастическая космология,
теории возмущений и гравитация Лифшица

И.М. Халатников, А.Ю. Каменщик

Дан обзор работ Е.М. Лифшица по гравитации и космологии, а также более поздних работ, основанных на его идеях. Основными темами обсуждения являются стохастическая космология анизотропной Вселенной, а также изотропной Вселенной со скалярным полем, квазиизотропное (градиентное) разложение в космологии, гравитация и космология Хоравы – Лифшица.

Ключевые слова: гравитация, космология, хаос, теория возмущений

PACS numbers: 04.20. – q, 04.60. – m, 98.80. – k

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201509f.0948

Содержание

1. Введение (948).
 2. Колебательное приближение к сингулярности и стохастическая космология (950).
 3. Стохастическая космология Фридмана (953).
 4. Квазиизотропное разложение в космологии (956).
 5. Квантовая теория поля и квантовая гравитация в точке Лифшица (958).
 6. Заключение (961).
- Список литературы (962).

1. Введение

Имя Евгения Михайловича Лифшица известно не только физикам во всём мире, но и более широкой публике в связи со знаменитым курсом теоретической физики, написанным им в соавторстве с его другом и учителем Львом Давыдовичем Ландау. В этом обзоре, посвящённом 100-летней годовщине со дня рождения Е.М. Лиф-

шица, нам хотелось бы поподробнее остановиться на тех направлениях в теоретической физике, в области гравитации и космологии, которые были созданы им и другими членами школы Ландау. Кроме того, мы обсудим некоторые неожиданные тенденции в современной физике, связанные с его именем.

Сперва обсудим стохастическую, или хаотическую, космологию. Как хорошо известно, в современной физике изучение хаоса стало весьма популярным, а хаотические явления были обнаружены в различных областях, причём порой в достаточно простых системах (см., например, [1–4]). Любопытно, что один из первых примеров стохастического, или хаотического, поведения был открыт именно в космологии. Изучение хаоса в космологии исходно связывалось с проблемой так называемой начальной сингулярности. Позже стало ясно, что стохастические свойства космологических моделей не обязательно связаны с сингулярностью и могут возникать в таких простых системах, как вселенные Фридмана.

Прежде всего напомним, что Р. Пенроуз и С. Хокинг доказали невозможность, при определённых условиях, безграничного продолжения геодезических [5–7]. Данный факт интерпретировался как указание на существование сингулярности общего решения уравнений Эйнштейна. Однако теоремы Пенроуза и Хокинга не позволяли описать конкретную аналитическую структуру сингулярности. Аналитическое поведение общего решения уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности было изучено в работах Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [8–11] и В.А. Белинского, Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [12–14]. Авторы этих статей обнаружили загадочное явление колебательного приближения к сингулярности, которое также стало известно как *модель перемешанного мира* [15]. Использование модели замкну-

И.М. Халатников. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация
E-mail: khalat@itp.ac.ru
А.Ю. Каменщик. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация;
Dipartimento di Fisica e Astronomia
and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
via Irnerio 46, 40126 Bologna, Italy
E-mail: kamenshchik@bo.infn.it

Статья поступила 30 мая 2015 г.

той однородной, но анизотропной Вселенной с тремя степенями свободы (космологическая модель типа IX по Бьянки) выявило, что Вселенная приближается к сингулярности таким образом, что её сжатие вдоль двух осей сопровождается расширением вдоль третьей оси, причём оси меняются ролями согласно сложному закону, имеющему хаотический характер [13, 14, 16, 17].

Изучение динамики Вселенной вблизи космологической сингулярности стало бурно развивающейся областью современной теоретической и математической физики. В первую очередь следует отметить обобщение колебательного приближения к космологической сингулярности для многомерных космологических моделей. Было замечено [18–20], что в пространствах, размерность которых не выше десяти, приближение к космологической сингулярности имеет хаотический характер, в то время как в пространствах с более высокой размерностью Вселенная после прохождения конечного числа колебаний входит в монотонный режим сжатия казнеровского типа [21].

Космологические исследования, основанные на моделях суперструн, выявили новые свойства динамики в окрестности сингулярности [22–24]. Во-первых, было показано, что в этих моделях существуют механизмы смены казнеровских эпох, вызванные не гравитационными взаимодействиями, а влиянием других полей, присутствующих в таких теориях. Во-вторых, было доказано, что космологические модели, основанные на шести основных суперструнных моделях плюс модель $D = 11$ супергравитации, демонстрируют хаотическое колебательное приближение к сингулярности. В-третьих, была обнаружена связь между космологическими моделями с колебательным приближением к сингулярности и специальным подклассом бесконечномерных алгебр Ли [25] — так называемых гиперболических алгебр Каца–Мути.

Тем временем в космологической науке в начале 1980-х годов произошла новая революция, связанная с рождением так называемой инфляционной космологии [26–28]. Теория горячей Вселенной, начавшей свою эволюцию из сингулярности под названием Большой взрыв [29], хорошо согласовывалась с наблюдательными данными, особенно после того, как в 1960-х годах Пензиасом и Вильсоном было открыто реликтовое излучение. Однако при этом теория страдала от некоторых фундаментальных недостатков, таких как проблема плоскостности, однородности, горизонта событий и др. Разработанная в целях решения этих вопросов теория космологической инфляции основывалась на допущении, что в начале космологической эволюции Вселенная прошла через стадию квазиэкспоненциального расширения. Подобное расширение может быть обеспечено наличием эффективной космологической постоянной. Однако для выхода из инфляционной стадии, которая должна быть достаточно короткой, необходимо обеспечить медленную эволюцию этой эффективной константы, которая не является константой. По этой причине стали популярными модели Фридмана однородной и изотропной Вселенной, заполненной скалярным полем, обычно называемым инфлатоном.

Динамика подобных моделей детально изучалась в работах [30, 31] с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений. Было ясно, что замкнутая сжимающаяся вселенная Фридмана, заполненная

массивным скалярным полем, иногда избегает падения в сингулярность и совершает отскок. В статье Д. Пейджа [32] было проанализировано предложение, что бесконечно отскакивающие траектории в замкнутой вселенной Фридмана, заполненной скалярным полем, образуют фрактальное множество. Таким способом стохастическое поведение было изучено в рамках очень простых космологических моделей. Гипотеза Пейджа далее рассматривалась в статьях [33, 34], где были представлены дополнительные аргументы в пользу стохастичности динамики моделей Фридмана.

Также возник другой вопрос, обсуждавшийся в контексте изучения стохастического поведения в космологии, а именно поиск тех или иных инвариантных характеристик хаотичности. Хорошо известно, что общая теория относительности является репараметризационно-инвариантной теорией, и при изучении гравитационных явлений важно иметь величины, независимые от выбора системы координат. Одним из таких инвариантных инструментов, полезных при изучении хаотичности в космологии, является так называемая топологическая энтропия. В статье [35] эта величина была использована при изучении простейшей модели замкнутой вселенной Фридмана со скалярным полем, потенциал которого содержит только массивный член. В статье [36] топологическая энтропия и другие характеристики применялись при изучении модели перемешанного мира, а в статье [37] топологическая энтропия была вычислена для семейства более сложных моделей Фридмана.

Если считать космологию не просто математическим приложением общей теории относительности, а сравнивать её предсказания с наблюдательными данными, то не следует ограничиваться изучением вселенных Фридмана или Бьянки. Поэтому рассмотрение космологических решений уравнений Эйнштейна требует развития пертурбативных методов. Замечательно, что первая статья, посвящённая развитию теории линейных космологических возмущений на фоне пространств Фридмана, была написана Е.М. Лифшицем [38] ещё в 1946 г. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах [8, 9]. Впоследствии в этой области была проведена огромная работа. В частности, отметим калибровочно-инвариантную теорию космологических возмущений [39–41].

Хотя теория линейных космологических возмущений в основном справедлива на фоне пространств Фридмана, другой асимптотический метод, развитый Е.М. Лифшицем и И.М. Халатниковым в статье [42], так называемое квазиизотропное разложение решений уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности, может использовать в качестве нулевого приближения более широкий класс фоновых пространств. Подобное разложение тоже подробно изучалось, иногда под именем "градиентное разложение" [43–45]. В некотором смысле это разложение можно обобщить на всю Вселенную, не ограничиваясь окрестностью сингулярности.

Недавно было обнаружено новое явление — космическое ускорение [46, 47]. Это открытие стимулировало поиск так называемой тёмной энергии, способной объяснить космическое ускорение [48, 49]. Альтернативный или, скорее, дополнительный способ объяснения космического ускорения состоит в построении некоторой модифицированной теории гравитации. Дополнительным стимулом построения модифицированной теории гравитации является тот факт, что квантовая теория

стандартной гравитации неперенормируема. Среди разных теорий модифицированной гравитации есть совершенно неожиданно возникшая теория Хоравы–Лифшица [50], восходящая к двум старым статьям Лифшица, посвящённым теории фазовых переходов [51, 52]. Её основная идея основана на гипотезе, что при больших значениях импульса пропагатор гравитона может быть лоренц-неинвариантным, причём его пространственная часть ведёт себя отлично от временной части. Так можно добиться перенормируемости теории, не сталкиваясь с такими неприятными объектами, как тахионы или духи. И хотя нарушение лоренц-инвариантности для многих исследователей является слишком радикальным шагом, само по себе замечательно, что старые работы Лифшица [51, 52], далёкие от гравитационных тематик, стимулировали возникновение новой моды в такой современной области, как квантовая гравитация.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 обсуждаются основные свойства колебательного приближения к сингулярности в релятивистской космологии с акцентом на его стохастическую природу; раздел 3 посвящён изучению стохастичности космологии Фридмана; в разделе 4 представлены новые результаты изучения квазиизотропных разложений; в разделе 5 будет дан краткий обзор гравитации Хоравы–Лифшица, а в разделе 6 приведены заключительные комментарии.

2. Колебательное приближение к сингулярности и стохастическая космология

Одним из первых точных решений, построенных в рамках общей теории относительности, было решение Казнера [21] для космологической модели типа I по Бьянки, описывающее гравитационное поле в пустом пространстве с евклидовой метрикой, зависящей от времени,

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (1)$$

где показатели p_1, p_2 и p_3 удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (2)$$

Упорядочивание показателей,

$$p_1 < p_2 < p_3, \quad (3)$$

позволяет выбрать следующую параметризацию [3]:

$$p_1 = -\frac{u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \quad (4)$$

По мере того как параметр u изменяется в интервале $u \geq 1$, показатели p_1, p_2 и p_3 пробегает все допустимые значения:

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (5)$$

Выбор интервала $u < 1$ не меняет диапазоны значений p_1, p_2, p_3 , поскольку

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u). \quad (6)$$

Введённый в начале 1960-х годов параметр u оказался весьма полезным, и его свойства нашли применение в различных областях исследований. Например, в недавней статье [53] установлена связь между параметром Лифшица–Халатникова u и инвариантами, возникающими в классификации пространств Эйнштейна по Петрову [54].

В случае космологических моделей типа VIII или IX по Бьянки казнеровский режим (1), (2) перестаёт быть решением уравнений Эйнштейна, однако можно построить обобщённые решения Казнера [10–14]. Можно построить своеобразную теорию возмущений, в которой казнеровское решение (1), (2) является приближением нулевого порядка, а роль поправок играют те слагаемые в уравнениях Эйнштейна, которые зависят от пространственных компонент тензора кривизны (очевидно, что такие слагаемые отсутствуют в космологии типа I по Бьянки). Подобная теория возмущений эффективна в окрестности сингулярности или, иными словами, при $t \rightarrow 0$. Замечательной особенностью этих возмущений является то, что их присутствие вызывает переход от казнеровского режима с одним набором параметров к казнеровскому режиму с другим набором параметров.

Метрика обобщённого решения Казнера в синхронной системе отсчёта может быть представлена в виде

$$ds^2 = dt^2 - (a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta) dx^\alpha dx^\beta, \quad (7)$$

где

$$a = t^{p_l}, \quad b = t^{p_m}, \quad c = t^{p_n}. \quad (8)$$

Трёхмерные векторы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ определяют направления, вдоль которых пространственные расстояния изменяются во времени согласно степенным законам (8). Пусть $p_l = p_1, p_m = p_2, p_n = p_3$, так что

$$a \sim t^{p_1}, \quad b \sim t^{p_2}, \quad c \sim t^{p_3}, \quad (9)$$

т.е. Вселенная сжимается по направлениям, заданным векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, и расширяется вдоль $\mathbf{l}$. Было показано, что возмущения, порождённые членами с пространственной кривизной, заставляют переменные a, b и c перейти в другой казнеровский режим, задаваемый следующими формулами:

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_2}, \quad c \sim t^{p'_3}, \quad (10)$$

где

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1| - p_2}{1-2|p_1|}, \quad p'_n = -\frac{p_3 - 2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (11)$$

Таким образом, влияние возмущения приводит к смене одной "казнеровской эпохи" на другую, так что отрицательная степень переменной t перебрасывается от направления $\mathbf{l}$ к направлению $\mathbf{m}$. Во время перехода функция $a(t)$ достигает максимума, а функция $b(t)$ — минимума. Следовательно, ранее убывавшая величина b теперь возрастает, величина a убывает, $c(t)$ остаётся убывающей функцией. Ранее растущее возмущение, ставшее причиной перехода от режима (9) к режиму (10), постепенно затухает и обращается в нуль. Затем начи-

нает расти другое возмущение, что приводит к новой смене одной казнеровской эпохи на другую, и т.д.

Подчеркнём, что именно тот факт, что возмущение приводит к подобному изменению динамики, которое его гасит, позволяет так успешно пользоваться теорией возмущений. Отметим, что эффект смены казнеровских режимов присутствует уже в космологических моделях, более простых, чем модели типа IX и VIII по Бьянки. На самом деле, во Вселенной типа II по Бьянки присутствует лишь один тип возмущений, связанный с пространственной кривизной, и он приводит к однократной смене казнеровского режима (один отскок). Данный факт был известен Е.М. Лифшицу и И.М. Халатникову с начала 1960-х годов, и они обсуждали эту тему с Л.Д. Ландау, который высоко оценил её значимость (незадолго до аварии). Результаты работы по изучению динамики модели типа IX по Бьянки были доложены И.М. Халатниковым во время его выступления в январе 1968 г. на семинаре Анри Пуанкаре в Париже. Присутствовавший на нём Джон А. Уиллер указал, что динамика Вселенной типа IX по Бьянки является нетривиальным примером хаотической динамической системы. Позже Кип Торн распространил препринт с текстом этого доклада.

Возвращаясь к правилам, по которым происходит перебрасывание отрицательной степени параметра времени с одного направления на другое, можно показать, что их можно удобным образом выразить с помощью параметризации (4):

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u), \quad (12)$$

тогда

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (13)$$

Наибольшая из двух положительных степеней остаётся положительной.

Последовательные замены (13), которым сопутствует перебрасывание отрицательной степени между направлениями **l** и **m**, продолжают до тех пор, пока не исчерпается целая часть u , т.е. пока u не станет меньше единицы. Затем, согласно уравнению (6), значения $u < 1$ переходят в $u > 1$, и в этот момент либо p_l , либо p_m становятся отрицательными и p_n становится наименьшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая последовательность замен перекинет отрицательную степень между направлениями **n** и **l** или между **n** и **m**. Подчеркнём, что полезность параметра Лифшица – Халатникова u связана с тем, что он позволяет закодировать достаточно сложные закономерности переходов между различными казнеровскими режимами (11) с помощью таких простых правил, как $u \rightarrow u-1$ и $u \rightarrow 1/u$.

Следовательно, эволюция нашей модели в направлении сингулярной точки состоит из последовательных периодов (называемых эрами), в которых расширение и сжатие масштабных факторов вдоль осей осциллируют, в то время как масштабный фактор вдоль третьей оси монотонно убывает, а объём уменьшается почти как $\sim t$. При переходе от одной эры к другой координатные оси, вдоль которых расстояния монотонно уменьшаются, меняются местами. Порядок, согласно которому пары осей меняются местами, и очередность, согласно которой эры различной продолжительности следуют одна за другой, приобретают стохастический характер.

Каждой (s -й) эре соответствует убывающая последовательность значений параметра u . Эта последовательность имеет вид $u_{\max}^{(s)}, u_{\max}^{(s)} - 1, \dots, u_{\min}^{(s)}$, где $u_{\min}^{(s)} < 1$. Введём обозначения:

$$u_{\min}^{(s)} = x^{(s)}, \quad u_{\max}^{(s)} = k^{(s)} + x^{(s)}, \quad (14)$$

т.е. $k^{(s)} = [u_{\max}^{(s)}]$ (квадратные скобки обозначают наибольшее целое $\leq u_{\max}^{(s)}$). Число $k^{(s)}$ определяет продолжительность эры. Для следующей эры получаем

$$u_{\max}^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}}, \quad k^{(s+1)} = \left\lfloor \frac{1}{x^{(s)}} \right\rfloor. \quad (15)$$

Распределение продолжительностей $k^{(s)}$ последовательных эр (измеряемых числом содержащихся в них казнеровских эпох) приобретает асимптотически стохастический характер. Случайная природа этого процесса обусловлена правилами (14), (15), которые определяют переходы от одной эры к другой в бесконечной последовательности значений u . Если вся эта бесконечная последовательность начинается с некоторого исходного значения $u_{\max}^{(0)} = k^{(0)} + x^{(0)}$, то длины серий $k^{(0)}, k^{(1)}, \dots$ — это числа, возникающие в разложении в непрерывную дробь:

$$k^{(0)} + x^{(0)} = k^{(0)} + \frac{1}{k^{(1)} + \frac{1}{k^{(2)} + \dots}}. \quad (16)$$

Последовательность эр можно описать статистически, если вместо заданного начального значения $u_{\max}^{(0)} = k^{(0)} + x^{(0)}$ рассмотреть распределение $x^{(0)}$ на интервале $[0, 1]$ согласно некоторому вероятностному закону. Тогда мы также получим некоторые распределения значений $x^{(s)}$, на которых обрывается каждая s -я серия. Можно показать, что с увеличением s эти распределения стремятся к некоторому стационарному (независящему от s) распределению вероятностей $w(x)$, в котором начальное значение $x^{(s)}$ полностью "забыто":

$$w(x) = \frac{1}{(1+x) \ln 2}. \quad (17)$$

Из уравнения (17) следует, что вероятностное распределение длин ряда k даётся выражением

$$W(k) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}. \quad (18)$$

Более того, можно точно вычислить распределения вероятностей для других описывающих последовательные эры параметров, таких как параметр δ , задающий соотношение между амплитудами логарифмов функций a, b, c и логарифмического времени [17]. Давайте вкратце опишем этот сюжет в развитии описания космологической стохастичности, введённой в статье И.М. Халатникова, Е.М. Лифшица, К.М. Ханина, Л.Н. Щура и Я.Г. Синая [17].

Во-первых, было замечено, что с формальной точки зрения возникает детерминистская динамическая модель, описываемая системой трёх обыкновенных дифференциальных уравнений (пространственные компоненты уравнений Эйнштейна) плюс дополнительное условие (временная компонента уравнений Эйнштейна), поэто-

му фазовое пространство системы является пятимерным, а не шестимерным. Таким образом, помимо принципиальной космологической значимости данной модели, мы имеем здесь специфическую модель спонтанного возникновения стохастичности в детерминистской системе.

Во-вторых, переход от одной казнеровской эры к другой может быть описан преобразованием интервала $[0, 1]$ в самого себя, а именно

$$Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}, \quad x_{s+1} = \left\{ \frac{1}{x_s} \right\}, \quad (19)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Это преобразование принадлежит к классу так называемых расширяющих преобразований интервала $[0, 1]$, т.е. является преобразованием $x \sim f(x)$ с $|f'(x)| > 1$. Такие преобразования обладают свойством экспоненциальной нестабильности: если взять две изначально близкие точки, то при последовательных преобразованиях данного типа расстояние между ними экспоненциально возрастает. Хорошо известно, что экспоненциальная нестабильность приводит к появлению у системы ярко выраженных стохастических свойств.

Для количественного рассмотрения стохастических свойств переходов между казнеровскими эрами удобно ввести ряд новых обозначений. Определим логарифмическое время:

$$\Omega = -\ln t. \quad (20)$$

Параметры α , β и γ — это логарифмы масштабных факторов:

$$\alpha = \ln a, \quad \beta = \ln b, \quad \gamma = \ln c. \quad (21)$$

Далее будут обсуждаться статистические свойства последовательности эр. Индекс s нумерует эры начиная с произвольно выбранной начальной эры ($s = 0$). Символ Ω_s обозначает начальный момент s -й эры (определённый как момент, когда масштабная функция, монотонно убывавшая в течение предыдущей эры, начинает расти). Исходные амплитуды пары из числа функций α, β, γ , осциллирующей в данной эре, обозначим как $\delta_s \Omega_s$; величины δ_s (пробегающие значения от 0 до 1) описывают эти амплитуды в единицах соответствующей величины Ω_s . Правила перехода от одной эры к другой определяются следующими рекуррентными формулами:

$$\frac{\Omega_{s+1}}{\Omega_s} = 1 + \delta_s k_s \left(k_s + x_s + \frac{1}{x_s} \right) \equiv \exp \xi_s, \quad (22)$$

$$\delta_{s+1} = 1 - \frac{(k_s/x_s + 1) \delta_s}{1 + \delta_s k_s (k_s + x_s + 1/x_s)}. \quad (23)$$

В результате итераций получаем выражение

$$\frac{\Omega_s}{\Omega_0} = \exp \sum_{p=1}^s \xi_p. \quad (24)$$

Величины δ_s имеют стабильное стационарное статистическое распределение $P(\delta)$ и стабильное (небольшие относительные флуктуации) среднее значение. Распределение $P(\delta)$ можно точно вычислить аналитически. Так как нам интересны статистические свойства в стационар-

ном пределе, разумно ввести так называемое естественное расширение преобразования (19) путём продолжения в область произвольных отрицательных значений индексов. Иными словами, можно перейти от односторонней бесконечной последовательности $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, подчинённой неравенствам (19), к двойной бесконечной последовательности $X = (\dots, x_i, x_0, x_1, x_2, \dots)$, подчинённой таким же неравенствам при любом $-\infty < s < \infty$.

Последовательность X эквивалентна последовательности целых чисел $K = (\dots, k_1, k_0, \dots)$, построенной по правилу $k_s = [1/x_{s-1}]$. Ноборот, каждый элемент из X определяется целым числом из K как бесконечная непрерывная дробь:

$$x_s = \frac{1}{k_{s+1} + \frac{1}{k_{s+2} + \dots}} \equiv x_{s+1}^+. \quad (25)$$

Определение x_s^+ можно записать в виде

$$x_s^+ = [k_s, k_{s+1}, \dots]. \quad (26)$$

Введём также величины, которые определяются непрерывной дробью с обратной (в направлении убывания значений индексов) последовательностью знаменателей:

$$x_s^- = [k_{s-1}, k_{s-2}, \dots]. \quad (27)$$

Далее преобразуем рекуррентное соотношение (23), введя новое обозначение $\eta_s = (1 - \delta_s)/\delta_s$. Тогда (23) можно представить в виде

$$\eta_{s+1} x_s = \frac{1}{\eta_s x_{s-1} + k_s}. \quad (28)$$

Путём итераций получаем бесконечную непрерывную дробь:

$$\eta_{s+1} x_s = [k_s, k_{s-1}, \dots] = x_{s+1}^-. \quad (29)$$

Отсюда получаем $\eta_s = x_s^-/x_s^+$ и окончательно

$$\delta_s = \frac{x_s^+}{x_s^+ + x_s^-}. \quad (30)$$

Данное выражение для δ_s содержит лишь две (вместо трёх) случайные величины x_s^+ и x_s^- , каждая из которых принимает значения в интервале $[0, 1]$.

Из определения (27) следует $1/x_{s+1}^- = x_s^- + k_s = x_s^- + [1/x_s^+]$. Следовательно, сдвиг целой последовательности на один шаг направо означает совместное преобразование x_s^+ и x_s^- согласно:

$$x_{s+1}^+ = \left\{ \frac{1}{x_s^+} \right\}, \quad x_{s+1}^- = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_s^+} \right] + x_s^-}. \quad (31)$$

Это взаимно однозначное отображение в единичном квадрате. Таким образом, имеется взаимно однозначное преобразование двух величин вместо не взаимно однозначного преобразования (85) одной величины. Величины x_s^+ и x_s^- обладают совместным стационарным распределением $P(x^+, x^-)$. Так как преобразование (31) взаимно однозначно, условие стационарности данного распределения выражается уравнением

$$P(x_s^+, x_s^-) = P(x_{s+1}^+, x_{s+1}^-) J, \quad (32)$$

где J — якобиан преобразования. Нормированное решение этого уравнения имеет вид

$$P(x^+, x^-) = \frac{1}{(1 + x^+ x^-)^2 \ln 2}. \quad (32)$$

Интегрирование данного решения по x^+ или x^- даёт функцию $w(x)$ (17).

Согласно формуле (30) величина δ_s выражается в терминах случайных величин x_s^+ и x_s^- , поэтому, зная их совместное распределение, можно вычислить статистическое распределение $P(\delta)$ путём интегрирования $P(x^+, x^-)$ по одной из трёх переменных при постоянном значении δ .

Симметрия функции (33) относительно переменных x^+ и x^- приводит к равенству $P(\delta) = P(1 - \delta)$, т.е. функция $P(\delta)$ симметрична по отношению к точке $\delta = 1/2$. Имеем

$$P(\delta) d\delta = d\delta \int_0^1 P\left(x^+, \frac{x^+ \delta}{1 - \delta}\right) \left(\frac{\partial x^-}{\partial \delta}\right)_{x^+} dx^+. \quad (34)$$

Беря этот интеграл, получим окончательное выражение:

$$P(\delta) = \frac{1}{(|1 - 2\delta| + 1) \ln 2}. \quad (35)$$

Среднее значение $\langle \delta \rangle = 1/2$ является прямым следствием симметрии функции $P(\delta)$. Поэтому среднее значение начальной (в каждой эре) амплитуды осцилляций функций α, β, γ возрастает как $\Omega/2$.

Таким образом, на основе статистического анализа эволюции в окрестности сингулярности [16, 17] мы убедились, что стохастичность и вероятностные распределения параметров возникают в общей теории относительности уже на классическом уровне.

В завершение этого раздела сделаем историческое отступление. В 1968 г. непрерывная дробь (16) была показана И.М. Лифшицу (на тот момент Л.Д. Ландау уже не стало), и он сразу заметил, что данную формулу можно вывести в случае стационарного распределения значений x (17). Позднее выяснилось, что эта формула была получена в XIX в. Карлом Ф. Гауссом, который описал её в письме одному из своих коллег, но публиковать не стал.

3. Стохастическая космология Фридмана

В предыдущем разделе стохастичность обсуждалась в модели перемешанного мира. Однако уже простая изотропная замкнутая модель Фридмана–Робертсона–Уокера демонстрирует некоторые признаки хаотического поведения, которые следует учитывать при построении непротиворечивых квантовых космологических теорий [35].

Изучение классической динамики замкнутой изотропной космологической модели имеет долгую историю. Во-первых, было замечено, что в такой модели с минимально взаимодействующим массивным скалярным полем существует возможность избежать сингулярности при сжатии [55, 56]. Во-вторых, были рассмотрены избегающие сингулярности периодические траектории [57]. В статье [32] показано, что набор бесконечно отскакивающих неперiodических траекторий имеет фрактальный характер. Позднее этот результат в других терминах был воспроизведён в наших статьях [33, 34, 58, 59].

Здесь мы кратко опишем подход, предложенный в [33]. Основная идея состоит в том, что в замкнутой изотропной модели с минимально взаимодействующим массивным скалярным полем все траектории обладают точкой максимального расширения. Геометрическое место точек максимального расширения на конфигурационной плоскости (a, ϕ) , где a — космологический радиус, а ϕ — это скалярное поле, может быть определено аналитически. Тогда траектории можно классифицировать согласно расположению их точек максимального расширения. Область точек максимального расширения локализована внутри так называемой евклидовой, или "классически запрещённой", области. Численные исследования показывают, что рассматриваемая область обладает квазипериодической структурой: зоны, соответствующие падению в сингулярность, перемешиваются с зонами, в которых находятся точки максимального расширения траекторий, обладающих так называемым отскоком или точкой минимального сжатия. Тогда, рассматривая подструктуры этих зон с точки зрения возможности иметь два отскока, можно видеть, что данная подструктура повторяет на качественном уровне структуру всей области возможных точек максимального расширения. Продолжение этого процесса *ad infinitum* даёт фрактальное множество бесконечно отскакивающих траекторий.

Существование множества периодических траекторий можно продемонстрировать аналогичным образом. Все периодические траектории содержат отскоки, перемешанные с последовательностями осцилляций значения скалярного поля ϕ . Важно отметить, что какие-либо ограничения на продолжительность последовательности осцилляций здесь отсутствуют. В статье Корниша и Шелларда [35] для этого случая вычислена топологическая энтропия и показано, что она положительна. Вычисления работы [35] были воспроизведены в статье [37], где было показано, как можно обобщить их для более сложных случаев. Ниже мы вкратце опишем результаты работы [37].

Во-первых, выпишем действие простейшей космологической модели со скалярным полем:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{m_P^2}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}, \quad (36)$$

где m_P — масса Планка, Λ — космологическая постоянная. Уравнения движения замкнутой изотропной Вселенной имеют вид

$$\frac{m_P^2}{16\pi} \left(\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \right) + \frac{a\dot{\phi}^2}{8} - \frac{m^2 \phi^2 a}{8} - \frac{m_P^2}{8\pi} \Lambda a = 0, \quad (37)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{\phi}\dot{a}}{a} + m^2 \phi = 0. \quad (38)$$

Первый интеграл движения системы равен

$$-\frac{3}{8\pi} m_P^2 (\dot{a}^2 + 1) + \frac{a^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2 + \frac{m_P^2}{8\pi} \Lambda \right) = 0. \quad (39)$$

Когда космологическая постоянная равна нулю, вид границы евклидовой области определяется уравнением, которое легко выводится из (39):

$$m^2 a^2 \phi^2 = \frac{3}{4\pi} m_P^2. \quad (40)$$

В этой модели, изучавшейся во многих статьях [32, 33, 35, 57], присутствуют периодические траектории с произвольным числом осцилляций скалярного поля.

Изученное в работе [34] включение положительной космологической постоянной приводит к двум возможностям: если Λ мала по сравнению с массой скалярного поля m , то качественное поведение такое же, как в модели без космологической постоянной; если космологическая постоянная порядка m^2 , то хаотическая динамика исчезает скачкообразным образом [34].

Если к рассмотрению добавить гидродинамическую материю, подчинённую уравнению состояния

$$p = \gamma \epsilon, \quad (41)$$

где p — давление, ϵ — плотность энергии, а γ является константой ($\gamma = 0$ соответствует пылевидной материи, $\gamma = 1/3$ — излучению, а $\gamma = 1$ описывает безмассовое скалярное поле), то в этом случае вид границы евклидовой области будет определяться уравнением

$$m^2 a^2 \phi^2 = \frac{3}{4\pi} m_P^2 - \frac{D}{a^q}, \quad (42)$$

где D — константа, характеризующая величину данного типа материи во Вселенной, а $q = 3(\gamma + 1) - 2$. Численные вычисления показывают, что здесь опять возможно лишь ограниченное число осцилляций. Более того, структура периодических траекторий значительно усложняется. Действительно, имеется следующая закономерность: длинные последовательности осцилляций могут иметь место после отскока, за которым следует короткая последовательность осцилляций, а поведение траектории после коротких последовательностей менее ограничено. Конкретные законы, управляющие структурой траекторий, зависят от параметров рассматриваемой модели. Однако, как будет показано далее, вычисление топологической энтропии в этом случае также возможно.

Давайте найдём топологическую энтропию для некоторых из рассмотренных случаев. Топологическая энтропия определяет увеличение числа периодических орбит по мере возрастания периода. Пусть $N(k)$ — число периодических орбит длиной k . Определим топологическую энтропию следующим образом:

$$H_T = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N(k). \quad (43)$$

Значение $H_T > 0$ соответствует хаотической динамике.

Длину орбиты можно описать числом символов. С этой целью давайте в общих чертах повторим вычисления работы [35]. Было предложено использовать дискретную классификацию орбит с помощью двух символов:

A — отскок траектории;

B — пересечение линии $\phi = 0$.

Для простейшей модели со скалярным полем существует единственное правило запрета: две буквы A не могут стоять рядом, что означает невозможность иметь два последовательных отскока без промежуточных осцилляций.

Пусть $Q(k)$ обозначает число "слов" (траекторий) длиной k , начинающихся на A и заканчивающихся на A, которые удовлетворяют приведённому выше правилу, а $P(k)$ пусть будет числом слов, начинающихся на A и заканчивающихся на B. Тогда можно записать следующие

рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} Q(k+1) &= P(k); \\ P(k+1) &= Q(k) + P(k). \end{aligned} \quad (44)$$

Из уравнений (44) легко получить соотношение на $P(k)$:

$$P(k+1) = P(k) + P(k-1). \quad (45)$$

Простое вычисление показывает, что

$$P(2) = 1, \quad P(3) = 1, \quad (46)$$

а уравнение (45) задаёт ряд чисел Фибоначчи. Напомним, как найти выражение общего члена ряда Фибоначчи. $P(k)$ можно искать в виде линейной комбинации членов вида λ^k , где λ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \lambda^{k-1} \\ \text{или эквивалентного уравнения} \\ \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (47)$$

так как мы ищем только ненулевые корни. Фиксируя $P(k)$ в виде

$$P(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k, \quad (48)$$

где λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения (47) и удовлетворяют условиям (46), можно найти

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} + (-1)^{k-2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{k-1} \right]. \quad (49)$$

Подставляя (49) в определение топологической энтропии (43), получим

$$H_T = \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) > 0, \quad (50)$$

где выражение $(1+\sqrt{5})/2$ — это знаменитое золотое сечение. Очевидно, что при вычислении топологической энтропии существенную роль играет лишь наибольший корень уравнения (47).

Перейдём к более сложному случаю космологической модели со скалярным полем и отрицательной космологической постоянной. Как отмечалось выше, периодические траектории в такой модели могут иметь лишь ограниченное число осцилляций скалярного поля ϕ . Данное правило скрыто в запрете иметь более n стоящих подряд букв B, где число n зависит от параметров модели.

Рекуррентные соотношения теперь имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(k+1) &= P(k), \\ P(k+1) &= Q(k) + P(k) - Q(k-n) \theta(k-n), \end{aligned} \quad (51)$$

где θ -функция определена обычным образом. Рассмотрим предел $k \rightarrow \infty$, что позволяет вместо $\theta(k-n)$ подставить число 1. Тогда можно записать рекуррентное соотношение

$$P(k+1) = P(k) + P(k-1) - P(k-n-1), \quad (52)$$

которое в свою очередь приводит к уравнению для топологической энтропии:

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n + 1 = 0, \quad (53)$$

где топологическая энтропия равна логарифму наибольшего корня уравнения (53),

$$H_T = \ln \lambda. \quad (54)$$

При небольших значениях n наибольший корень уравнения (53) можно найти аналитически:

— в случае $n = 1$ имеем $\lambda = 1$ и топологическая энтропия равна нулю, а хаотическое поведение отсутствует, что очевидно с физической точки зрения;

— в случае $n = 2$ получим

$$\lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} + \frac{(1/2(9 + \sqrt{69}))^{1/2}}{3^{2/3}} \approx 1,32; \quad (55)$$

— в случае $n = 3$ можно получить

$$\lambda = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{29}{2} - \frac{3\sqrt{93}}{2} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{29}{2} + \frac{3\sqrt{93}}{2} \right)^{1/2} \approx 1,47. \quad (56)$$

Для более высоких значений n величину λ можно найти численно, например, для $n = 4$ $\lambda \approx 1,53$.

Для больших n можно найти асимптотическое значение наибольшего корня λ :

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}\{(1 + \sqrt{5})/2\}^n}. \quad (57)$$

Как уже упоминалось ранее, в модели со скалярным полем и материей или в модели с комплексным скалярным полем и ненулевым классическим зарядом [60–64] управляющие структурой правила достаточно сложны. Тем не менее топологическую энтропию можно вычислить и в этих случаях. Ниже мы рассмотрим пример частного характера, однако описанный алгоритм может быть использован для разных наборов правил.

Итак, давайте сформулируем правила для нашей модели.

1. Число букв В не превышает 19.

2. За последовательностью с 19 буквами В (и буквой А) может идти последовательность лишь с 1 буквой В.

3. За последовательностью с 18 буквами В может идти последовательность с 1 или 2 буквами В.

4. За последовательностью с 17 буквами В может идти последовательность с 1, 2 или 3 буквами В.

...

5. За последовательностью с 1 буквой В может идти последовательность лишь с n буквами В, при $0 \leq n \leq 19$.

Заметим, что приведённая выше система правил обладает замечательным свойством симметрии по отношению к числу $n_C = 10$, что значительно упрощает дальнейшие вычисления. Подобные симметричные правила дают хорошую аппроксимацию при описании реальной физической ситуации. Значение n_C очевидным образом является функцией параметров рассматриваемой модели. Более детальное численное исследование приводит к усложнению этих правил, однако все они могут быть представлены в виде системы рекуррентных соотношений. Далее мы увидим, что уже симметричная система правил приводит к достаточно сложному уравнению топологической энтропии.

Теперь давайте введём следующие обозначения:

$Q(k)$ — это число слов, начинающихся и заканчивающихся на А,

$Q_1(k)$ — это число слов, начинающихся на А и заканчивающихся последовательностью с 1 буквой В,

$Q_2(k)$ — это число слов, начинающихся на А и заканчивающихся последовательностью с 2 буквами В,

...

$Q_{19}(k)$ — это число слов, начинающихся на А и заканчивающихся последовательностью с 19 буквами В.

В данном случае система рекуррентных соотношений имеет следующий вид:

$$Q(k+1) = Q_1(k) + Q_2(k) + \dots + Q_{19}(k),$$

$$Q_1(k) = Q(k-1),$$

$$Q_{19}(k) = Q_1(k-20),$$

$$Q_d(k) = Q_{d-1}(k-1) - Q_{21-d}(k-d-1), \quad 2 \leq d \leq 10,$$

$$Q_d(k) = Q_{d+1}(k+1) + Q_{20-d}(k-d-1), \quad 11 \leq d \leq 18. \quad (58)$$

Решая эту систему относительно $Q(k)$, находим следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} Q(k+1) = & Q(k-1) + Q(k-2) + Q(k-3) + Q(k-4) + \\ & + Q(k-5) + Q(k-6) + Q(k-7) + Q(k-8) + \\ & + Q(k-9) + Q(k-10) + Q(k-13) + 2Q(k-14) + \\ & + 3Q(k-15) + 4Q(k-16) + 5Q(k-17) + 6Q(k-18) + \\ & + 7Q(k-19) + 8Q(k-20) + 9Q(k-21) - 9Q(k-24) - \\ & - 16Q(k-25) - 21Q(k-26) - 24Q(k-27) - \\ & - 25Q(k-28) - 24Q(k-29) - 21Q(k-30) - \\ & - 16Q(k-31) - 9Q(k-32) - 8Q(k-36) - \\ & - 21Q(k-37) - 36Q(k-38) - 50Q(k-39) - \\ & - 60Q(k-40) - 63Q(k-41) - 56Q(k-42) - \\ & - 36Q(k-43) + 36Q(k-47) + 84Q(k-48) + \\ & + 126Q(k-49) + 150Q(k-50) + 150Q(k-51) + \\ & + 126Q(k-52) + 84Q(k-53) + 36Q(k-54) + \\ & + 28Q(k-59) + 84Q(k-60) + 150Q(k-61) + \\ & + 200Q(k-62) + 210Q(k-63) + 168Q(k-64) + \\ & + 84Q(k-65) - 84Q(k-70) - 224Q(k-71) - \\ & - 350Q(k-72) - 400Q(k-73) - 350Q(k-74) - \\ & - 224Q(k-75) - 84Q(k-76) - 56Q(k-82) - \\ & - 175Q(k-83) - 300Q(k-84) - 350Q(k-85) - \\ & - 280Q(k-86) - 126Q(k-87) + 126Q(k-93) + \\ & + 350Q(k-94) + 525Q(k-95) + 525Q(k-96) + \\ & + 350Q(k-97) + 126Q(k-98) + 70Q(k-105) + \\ & + 210Q(k-106) + 315Q(k-107) + 280Q(k-108) + \\ & + 126Q(k-109) - 126Q(k-116) - 336Q(k-117) - \\ & - 441Q(k-118) - 336Q(k-119) - 126Q(k-120) - \\ & - 56Q(k-128) - 147Q(k-129) - 168Q(k-130) - \\ & - 84Q(k-131) + 84Q(k-139) + 196Q(k-140) + \\ & + 196Q(k-141) + 84Q(k-142) + 28Q(k-151) + \\ & + 56Q(k-152) + 36Q(k-153) - 36Q(k-162) - \\ & - 64Q(k-163) - 36Q(k-164) - 8Q(k-174) - \\ & - 9Q(k-175) + 9Q(k-185) + 9Q(k-186) + \\ & + Q(k-197) - Q(k-208), \end{aligned} \quad (59)$$

которое в свою очередь даёт уравнение на топологическую энтропию:

$$\begin{aligned} & x^{209} - x^{207} - x^{206} - x^{205} - x^{204} - x^{203} - x^{202} - x^{201} - \\ & - x^{200} - x^{199} - x^{198} - x^{195} - 2x^{194} - 3x^{193} - \\ & - 4x^{192} - 5x^{191} - 6x^{190} - 7x^{189} - 8x^{188} - 9x^{187} + \\ & + 9x^{184} + 16x^{183} + 21x^{182} + 24x^{181} + 25x^{180} + \\ & + 24x^{179} + 21x^{178} + 16x^{177} + 9x^{176} + 8x^{172} + \\ & + 21x^{171} + 36x^{170} + 50x^{169} + 60x^{168} + 63x^{167} + \\ & + 56x^{166} + 36x^{165} - 36x^{161} - 84x^{160} - 126x^{159} - \\ & - 150x^{158} - 150x^{157} - 126x^{156} - 84x^{155} - 36x^{154} - \\ & - 28x^{149} - 84x^{148} - 150x^{147} - 200x^{146} - 210x^{145} - \\ & - 168x^{144} - 84x^{143} + 84x^{142} + 224x^{137} + \\ & + 350x^{136} + 400x^{135} + 350x^{134} + 224x^{133} + \\ & + 84x^{132} + 56x^{126} + 175x^{125} + 300x^{124} + 350x^{123} + \\ & + 280x^{122} + 126x^{121} - 126x^{115} - 350x^{114} - \\ & - 525x^{113} - 525x^{112} - 350x^{111} - 126x^{110} - \\ & - 70x^{103} - 210x^{102} - 315x^{101} - 280x^{100} - 126x^{99} + \\ & + 126x^{92} + 336x^{91} + 441x^{90} + 336x^{89} + 126x^{88} + \\ & + 56x^{80} + 147x^{79} + 168x^{78} + 84x^{77} - 84x^{69} - \\ & - 196x^{68} - 196x^{67} - 84x^{66} - 28x^{57} - \\ & - 56x^{56} - 36x^{55} + 36x^{46} + 64x^{45} + 36x^{44} + \\ & + 8x^{34} + 9x^{33} - 9x^{23} - 9x^{22} - x^{11} + 1 = 0. \quad (60) \end{aligned}$$

Возникающий в результате численного решения уравнения (60) наибольший корень равен $\lambda \approx 1,61771$. Соответственно, логарифм этого корня даёт топологическую энтропию.

Описанная выше схема применима ко многим физическим моделям с различными наборами правил запрета, задающих структуру периодических траекторий.

4. Квазиизотропное разложение в космологии

Квазиизотропное решение уравнений Эйнштейна вблизи космологической сингулярности было построено Лифшицем и Халатниковым [42] в начале 1960-х годов в случае Вселенной, заполненной излучением с уравнением состояния $p = \varepsilon/3$. В статье [43] было предложено обобщение квазиизотропного решения уравнений Эйнштейна вблизи космологической сингулярности для произвольной одножидкостной космологической модели. Это решение впоследствии было обобщено на случай Вселенной, заполненной двумя идеальными баротропными жидкостями [44, 45].

Для выяснения физического смысла квазиизотропного решения давайте вспомним, что оно является наиболее общим пространственно-неоднородным обобщением пространства-времени Фридмана, которое вблизи космологической сингулярности $t = 0$ локально подобно пространству Фридмана (в частности, значения тензора Вейля гораздо меньше значений тензора Римана). С другой стороны, его глобальная структура весьма неоднородна и оно может иметь достаточно сложную пространственную топологию. Как показано в [42, 43] (см. также [65, 66]), такое решение содержит три произвольные функции пространственных координат. С точки зрения геометрии Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ), эти три степени свободы соответствуют

растущей моде (неубывающие возмущения метрики) адиабатических возмущений и неубывающей моде гравитационных волн (с двумя поляризациями) в случае, когда отклонения пространственно-временной метрики от метрики ФРУ нельзя считать малыми. То есть квазиизотропное решение не является общим решением уравнений Эйнштейна с баротропной жидкостью. Поэтому не следует ожидать, что данное решение возникнет в процессе общего гравитационного коллапса (в частности, внутри горизонта чёрной дыры). Общее решение вблизи сингулярности пространственноподобной кривизны (при $p < \varepsilon$) имеет совершенно другую структуру, состоящую из бесконечной последовательности анизотропных вакуумных эрканеро-ского типа со степенными показателями, зависящими от пространственных координат (см. раздел 2).

По этой причине на протяжении примерно 20 лет квазиизотропное решение не привлекало большого внимания. После появления успешных инфляционных моделей (т.е. таких, которые обеспечивают "изящный выход" из инфляции) и теории генерации возмущений во время инфляции у квазиизотропного решения началась новая жизнь, потому что немедленно стало понятно, что возмущения скалярной компоненты метрики (без подгонки начальных условий) в конце инфляции остаются малыми в конечной области пространства, которая гораздо меньше, чем весь возникший в результате инфляции причинно-связанный объём пространства. По всей видимости, квазиизотропное решение может быть использовано для глобального описания той части пространства-времени, которая принадлежит к "одной постинфляционной Вселенной". Такая Вселенная определяется как связная часть пространства-времени, в котором описывающая момент окончания инфляции гиперповерхность $t = t_f(\mathbf{r})$ является пространственноподобной, и поэтому посредством координатного преобразования может быть представлена как поверхность постоянного (нулевого) синхронного времени. Это напрямую следует из вывода порождённых во время инфляции возмущений, данного в работе [67] (см. там уравнение (17)), который также справедлив в случае больших возмущений. Таким образом, при использовании в данном контексте квазиизотропное решение описывает *промежуточный* асимптотический режим во время постинфляционного расширения Вселенной. Возникающее при этом синхронное время t является собственным по причине *окончания* инфляции, а область применения решения определяется на промежутке времени от $t = 0$ вплоть до того момента в будущем, когда вклад пространственных градиентов становится существенным. На достаточно больших масштабах этот момент может отодвигаться на довольно поздние времена и даже превосходить текущий возраст Вселенной. Отметим также, что аналог квазиизотропного решения *до окончания* инфляции задаётся квази-де-ситтеровским решением общего вида, найденным в работе [68]. Оба решения гладко сшиваются на гиперповерхности окончания инфляции.

В последние десятилетия были разработаны несколько иные версии квазиизотропного разложения, которые известны как длинноволновое или градиентное разложение [69–74].

Исходно метод квазиизотропного разложения разрабатывался в контексте теории возмущений в окрестности космологической сингулярности, где параметр космиче-

ского времени был параметром разложения. Однако если заметить, что следующий порядок квазиизотропного разложения содержит старшие степени пространственных производных метрических коэффициентов, то оказывается возможным обобщить рассмотрение квазиизотропного разложения. Поэтому можно построить естественное обобщение квазиизотропного разложения уравнений Эйнштейна, которое будет верно не только в окрестности космологической сингулярности, но и в любой момент времени. В этом случае простые алгебраические уравнения, решения которых определяют старшие порядки квазиизотропного приближения в окрестности сингулярности, заменяются дифференциальными уравнениями, в которых зависимость метрики от времени может быть достаточно сложной по сравнению со степенным поведением коэффициентов исходного квазиизотропного разложения.

Давайте покажем, как это работает в случае Вселенной, заполненной баротропной жидкостью [45]. Рассмотрим Вселенную с жидкостью, подчинённую уравнению состояния $p = w\varepsilon$. Пространственная метрика имеет вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} t^\kappa + c_{\alpha\beta}, \quad (61)$$

где

$$\kappa = \frac{4}{3(1+w)}. \quad (62)$$

Обратная метрика равна

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} t^{-\kappa} - c^{\alpha\beta} t^{-2\kappa}. \quad (63)$$

Следовательно, имеют место следующие формулы для внешней кривизны:

$$K_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \kappa t^{\kappa-1} + \dot{c}_{\alpha\beta}, \quad (64)$$

$$K_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \kappa + \dot{c}_\alpha^\beta t^{-\kappa} - c_\alpha^\beta \kappa t^{-\kappa-1}, \quad (65)$$

$$K = \frac{3\kappa}{t} + \dot{c} t^{-\kappa} - c \kappa t^{-\kappa-1}, \quad (66)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{3\kappa}{t^2} + \ddot{c} t^{-\kappa} - 2\dot{c} \kappa t^{-\kappa-1} + c \kappa (\kappa + 1) t^{-\kappa-2}, \quad (67)$$

$$K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha = \frac{3\kappa^2}{t^2} + 2\dot{c} \kappa t^{-\kappa-1} - 2c \kappa^2 t^{-\kappa-2}. \quad (68)$$

С помощью формул (67), (68) получаем

$$R_0^0 = \frac{3\kappa(2-\kappa)}{4t^2} - \frac{\ddot{c} t^{-\kappa}}{2} + \frac{\dot{c} \kappa t^{-\kappa-1}}{2} - \frac{c \kappa t^{-\kappa-2}}{2}. \quad (69)$$

Далее, воспользовавшись уравнением Эйнштейна в низшем порядке рассматриваемого разложения, получаем плотность энергии рассматриваемой жидкости:

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{4}{3(1+w)^2 t^2}. \quad (70)$$

С помощью нулевой компоненты закона сохранения тензора энергии-импульса можно найти соотношение между первой поправкой к плотности энергии $\varepsilon^{(1)}$ и следом первой поправки к метрике c :

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{c \kappa t^{-\kappa-2}}{2}. \quad (71)$$

Далее, воспользовавшись стандартным выражением для скалярной кривизны R и 00-компонентой уравнений Эйнштейна в виде $R_0^0 - (1/2) R = T_0^0$, в первом порядке квазиизотропного разложения получим следующее уравнение:

$$\frac{P}{2} + \frac{1}{4} K^{(0)} K^{(1)} - \frac{1}{8} (K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha)^{(1)} = \varepsilon^{(0)}. \quad (72)$$

Объединяя (72) и (71), получаем дифференциальное уравнение для c :

$$\dot{c} = \frac{c(\kappa-1)}{t} - \frac{\bar{P} t}{\kappa}. \quad (73)$$

Интегрируя (73), находим

$$c = \frac{\bar{P} t^2}{\kappa(\kappa-3)} = -\frac{9(1+w)^2 \bar{O} t^2}{4(5+9w)}. \quad (74)$$

Чтобы теперь найти бесследовую часть первой поправки к метрике $\tilde{c}_{\alpha\beta}$, воспользуемся бесследовой частью "пространство-пространство" компоненты уравнений Эйнштейна, которая в первом порядке разложения в случае одной жидкости имеет особенно простой вид:

$$\tilde{R}_\alpha^\beta = -\tilde{P}_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{K}_\alpha^\beta}{\partial t} - \frac{3\kappa}{4t} \tilde{K}_\alpha^\beta = 0. \quad (75)$$

(Заметим, что бесследовая часть внешней кривизны $\tilde{K}_\alpha^\beta$ не содержит членов нулевого порядка.) Уравнение (75) можно представить в виде

$$\frac{\partial \tilde{K}_\alpha^\beta}{\partial t} + \frac{3\kappa}{2t} \tilde{K}_\alpha^\beta = -2\tilde{P}_\alpha^\beta t^{-\kappa}. \quad (76)$$

Интегрируя (76), находим

$$\tilde{K}_\alpha^\beta = -\frac{4}{\kappa+2} \tilde{P}_\alpha^\beta t^{-\kappa+1}. \quad (77)$$

С помощью соотношения

$$\tilde{c}_\alpha^\beta = t^\kappa \int \tilde{K}_\alpha^\beta dt \quad (78)$$

приходим к выражению

$$\tilde{c}_\alpha^\beta = \frac{4}{\kappa^2-4} \tilde{P}_\alpha^\beta t^2 = -\frac{9(1+w)^2}{(3w+1)(3w+5)} \tilde{P}_\alpha^\beta t^2. \quad (79)$$

Можно видеть, что выражения (74) и (79), выполняющиеся в произвольный момент времени, совпадают с соотношениями, которые верны в окрестности космологической сингулярности ($t=0$) [43] и получены с помощью алгебраического метода [42]. Общее выражение для первой поправки к метрике одножидкостного случая задаётся формулой (37) из работы [43]. Метрика $b_{\alpha\beta}$ работы [43] соответствует $c_{\alpha\beta}$ настоящего обзора, а в уравнении для параметра состояния символ k используется вместо w . Формула (37) в работе [43] содержит опечатку: перед вторым членом в скобках в правой части этого уравнения должен стоять множитель $1/4$. На первый взгляд, первая поправка к метрике (37) содержит полюс при $3k+1=0$, однако вычисление следа данной метрики показывает, что полюс сокращается, присутствуя только в её анизотропной части.

Таким образом, в случае Вселенной, заполненной струнным газом, $w = -1/3$, квазиизотропное разложение не работает, потому что выражение для $\tilde{c}_{\alpha\beta}$ становится сингулярным.

В заключение рассмотрим специальный случай, когда метрика $a_{\alpha\beta}$ имеет конформно плоский вид:

$$a_{\alpha\beta} = \exp[\rho(x)] \delta_{\alpha\beta}. \quad (80)$$

В этом случае пространственный тензор Риччи имеет вид

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (\rho_{,\alpha} \rho_{,\beta} - 2\rho_{,\alpha\beta}) - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} (\rho^{\mu}_{,\mu} + 2\rho^{\mu}_{,\mu}) \quad (81)$$

или

$$\bar{P}_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{4} (\rho_{,\alpha} \rho^{\beta} - 2\rho^{\beta}_{,\alpha}) - \frac{1}{4} \delta_{\alpha}^{\beta} (\rho^{\mu}_{,\mu} + 2\rho^{\mu}_{,\mu}). \quad (82)$$

Соответственно,

$$\bar{P} = -2\rho^{\mu}_{,\mu} - \frac{1}{2} \rho^{\mu}_{,\mu}, \quad (83)$$

и бесследовая часть тензора Риччи равна

$$\tilde{\bar{P}}_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{4} (\rho_{,\alpha} \rho^{\beta} - 2\rho^{\beta}_{,\alpha}) + \frac{1}{12} \delta_{\alpha}^{\beta} (2\rho^{\mu}_{,\mu} - \rho^{\mu}_{,\mu}). \quad (84)$$

Если

$$\rho = A_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}, \quad (85)$$

то

$$\bar{P} = -4A_{\mu}^{\mu} - 2A_{\mu\nu} A_{\alpha}^{\mu} x^{\nu} x^{\alpha}, \quad (86)$$

$$\tilde{\bar{P}}_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{3} x^{\gamma} x^{\nu} (3A_{\alpha\gamma} A_{\nu}^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} A_{\mu\gamma} A_{\nu}^{\mu}). \quad (87)$$

Следовательно, легко увидеть, что если метрика в низшем порядке квазиизотропного разложения имеет определяемый уравнениями (80) и (85) гауссов вид, то уже её первая поправка $c_{\alpha\beta}$, определяемая тензорами кривизны (86) и (87), не имеет гауссова вида благодаря присутствию квадратичных по x^{μ} членов перед гауссовой экспонентой.

5. Квантовая теория поля и квантовая гравитация в точке Лифшица

Считается общепринятым, что полная теория элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий должна включать в себя квантовую гравитацию. С другой стороны, квантовая гравитация является неперенормируемой теорией (см., например, [75]). Основным препятствием при попытке добиться пертурбативной перенормируемости общей теории относительности в $3+1$ измерениях является тот факт, что постоянная гравитационного взаимодействия (константа Ньютона) является размерной с отрицательной размерностью $[G_N] = -2$ в массовых единицах. Так же как и любой пропагатор в квантовой теории поля, пропагатор гравитона имеет следующий степенной закон по отношению к 4-импульсу $k_{\mu} = (\omega, \mathbf{k})$:

$$\frac{1}{k^2}, \quad (88)$$

где $k = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2}$. При вычислении диаграмм Фейнмана с растущим числом петель необходимо постоянно вводить новые контрчлены растущей степени по кривизне.

Добавление в лагранжиан определённых членов старшего порядка по кривизне улучшает ультрафиолетовое поведение теории. При этом квадратичные по кривизне слагаемые не только дают новые взаимодействия (с безразмерной константой связи), но и модифицируют пропагатор. Опуская тензорную структуру рассматриваемого пропагатора, можно записать

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{1}{k^2 - G_N k^4}. \quad (89)$$

Легко видеть, что при высоких энергиях основной вклад в пропагатор даёт член $1/k^4$. Это решает проблему ультрафиолетовых расхождений. Тем не менее возникает новый вопрос: пересуммированный пропагатор (89) имеет два полюса,

$$\frac{1}{k^2 - G_N k^4} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - 1/G_N}. \quad (90)$$

Один из полюсов описывает безмассовые гравитоны, а другой соответствует духовым возбуждениям, что ведёт к нарушению унитарности.

Несколько лет назад П. Хорава ввёл в рассмотрение новый класс моделей гравитации [50], который он назвал "квантовая гравитация в точке Лифшица". Возникновение этого подхода было инспирировано опубликованными в 1941 г. работами Е.М. Лифшица [51, 52], посвящёнными фазовым переходам второго рода и критическим явлениям. Характеристическим свойством модели гравитации Хоравы–Лифшица является анизотропия между пространством и временем. Степень анизотропии определяется динамическим критическим показателем z , таким что

$$\mathbf{x} \rightarrow b\mathbf{x}, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (91)$$

Подобный анизотропный скейлинг — это обычное явление в теории конденсированного состояния. Прототипом класса моделей такого рода является теория скаляра Лифшица в $D+1$ измерениях, описываемая действием

$$S = \int dt d^D x \{ (\dot{\Phi})^2 - (\Delta \Phi)^2 \}, \quad (92)$$

где Δ — пространственный лапласиан. Критический показатель в данном случае $z = 2$. В действие можно добавить следующий член

$$-c^2 \int dt d^D x \partial_i \Phi \partial_i \Phi, \quad (93)$$

где явным образом введена скорость света c . Под влиянием этой деформации теория перетекает в инфракрасную точку $z = 1$, в которой на больших расстояниях восстанавливается лоренц-инвариантность.

В работе [50] рассмотрены теории, скейлинговые свойства которых на малых расстояниях отвечают сильной анизотропии между пространством и временем с $z > 1$. Это улучшает поведение теории на малых расстояниях. Действительно, пропагатор для таких гравитонов

пропорционален

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 \mathbf{k}^2 - G(\mathbf{k}^2)^z}. \quad (94)$$

При высоких энергиях основной вклад в пропагатор даёт анизотропный член $1/(\omega^2 - G(\mathbf{k}^2)^z)$. При подходящем z рассматриваемая модификация улучшает поведение на малых расстояниях и теория становится перенормируемой по индексу. Член $c^2 \mathbf{k}^2$ важен при низких энергиях, когда теория естественным образом перетекает в точку $z = 1$.

В отличие от упоминавшихся ранее релятивистских теорий со старшими производными, производные по времени старшего порядка здесь не возникают и проблема духовых возбуждений и неунитарности отсутствует. В случае $3 + 1$ гравитации перенормируемость достигается выбором $z = 3$.

Теперь рассмотрим лагранжиан гравитационной теории, инвариантной относительно (91). Как обычно, введём $D + 1$ разбиение метрики рассматриваемого многообразия на пространственную метрику g_{ij} и функции хода N и сдвига N_i [76]. Будем строить кинетический член лагранжиана, квадратичный по временным производным $\dot{g}_{ij}$ и инвариантный относительно диффеоморфизмов, сохраняющих выбранное разбиение метрики, т.е. относительно диффеоморфизмов по отношению к $D + 1$ разбиению. Такой кинетический член зависит от второй фундаментальной формы (внешняя кривизна):

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \quad (95)$$

где ∇_i — ковариантная производная, построенная по пространственной метрике. Тогда кинетический член в действии выражается как

$$S_K = \frac{2}{\kappa^2} \int dt d^D x \sqrt{g} N (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2). \quad (96)$$

В общей теории относительности требование инвариантности относительно всех пространственно-временных диффеоморфизмов означает, что $\lambda = 1$.

Потенциальный член в действии, который должен зависеть лишь от пространственной части метрики и её пространственных производных, имеет вид

$$S_V = \int dt d^D x \sqrt{g} N V[g_{ij}]. \quad (97)$$

При рассмотрении высокоэнергетического режима теории особое внимание следует уделить членам с размерностью, равной размерности кинетического члена. В случае $D = 3$ и $z = 3$ таких членов много. Некоторые из них квадратичны по кривизне,

$$\nabla_k R_{ij} \nabla^k R^{ij}, \quad \nabla_k R_{ij} \nabla^i R^{jk}, \quad R \Delta R, \quad R^{ij} \Delta R_{ij}, \quad (98)$$

и они модифицируют пропагатор. Другие члены, такие как

$$R^3, \quad R_j^i R_k^j R_i^k, \quad R R_{ij} R^{ij}, \quad (99)$$

кубичны по кривизне и входят только во взаимодействие. Весь список независимых операторов очень велик, что

означает быстрое нарастание числа констант взаимодействия. Для уменьшения числа независимых констант необходимо потребовать инвариантность теории относительно дополнительной симметрии. Сам способ наложения данного ограничения вполне характерен для теории критических явлений.

Пусть потенциальный член имеет специальный вид:

$$S_V = \frac{\kappa^2}{8} \int dt d^D x \sqrt{g} N E^{ij} G_{ijkl} E^{kl}, \quad (100)$$

где тензор E^{ij} возникает как вариация,

$$\sqrt{g} E^{ij} = \frac{\delta W[g_{kl}]}{\delta g_{ij}}, \quad (101)$$

некоторого действия W , а тензор G_{ijkl} обратен обобщённой суперметрике Девитта,

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl}. \quad (102)$$

Говорят, что теории, потенциал которых имеет вид (100) для некоторого W , удовлетворяют "условию детального баланса". Системы, удовлетворяющие условию детального баланса, имеют более простое квантовое поведение, чем системы общего вида. Перенормировка таких теорий может быть сведена к более простой перенормировке ассоциированной теории, описываемой действием W .

Будем строить теорию, удовлетворяющую условию детального баланса, скейлинг которой на малых расстояниях $z = 3$, что в $3 + 1$ измерениях приводит к перенормируемости по индексу. Таким образом, E^{ij} обязан быть третьего порядка по пространственным производным. Оказывается, существует единственный такой тензор: это тензор Коттона

$$C^{ij} = \varepsilon^{ikl} \nabla_k \left(R_l^j - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right), \quad (103)$$

являющийся вариацией действия

$$W = \int d^3 x \varepsilon^{ijk} \left(\Gamma_{il}^m \partial_j \Gamma_{km}^l + \frac{2}{3} \Gamma_{il}^n \Gamma_{jm}^l \Gamma_{kn}^m \right). \quad (104)$$

Теперь можно выписать полное действие для $z = 3$ теории гравитации в $3 + 1$ измерениях,

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3 x \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\kappa^2}{2w^4} C_{ij} C^{ij} \right\} = \\ = \int dt d^3 x \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\kappa^2}{2w^4} \times \right. \\ \left. \times \left(\nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} - \nabla_i R_{jk} \nabla^j R^{ik} - \frac{1}{8} \nabla_i R \nabla^i R \right) \right\}, \quad (105) \end{aligned}$$

которое зависит от трёх констант: κ , w и λ . К нему можно добавить релевантные члены, дающие правильный инфракрасный предел теории. Было показано, что, как и гравитон в общей теории относительности, поле метрики при специальных значениях параметра $\lambda = 1/3$ или $\lambda = 1$ описывает две степени свободы.

Релевантные члены могут удовлетворять детальному условию баланса. Добавим к действию W следующий

член:

$$\mu \int d^3x \sqrt{g} (R - 2\Lambda_W). \quad (106)$$

В этом случае действие будет иметь вид

$$S = \int dt d^3x \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\kappa^2}{2w^4} C_{ij}C^{ij} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 \mu}{2w^2} \varepsilon^{ijk} R_{il} \nabla_j R_k^l - \frac{\kappa^2 \mu^2}{8} R_{ij}R^{ij} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 \mu^2}{8(1-3\lambda)} \left(\frac{1-4\lambda}{4} R^2 + \Lambda_W R - 2\Lambda_W^2 \right) \right\}. \quad (107)$$

На больших расстояниях основной вклад в потенциал дают два последних члена в (107): скаляр пространственной кривизны и константный член. В итоге теория перетекает в инфракрасную точку $z = 1$.

Подводя итог, можно сказать, что, основываясь на старых работах Е.М. Лифшица [51, 52], П. Хоравы придумал новую квантовую гравитацию, в которой лоренц-инвариантность возникает лишь на относительно больших расстояниях, а в ультрафиолетовом режиме она отсутствует. Такая теория перенормируема и не страдает от присутствия дубов.

Идея нарушать лоренц-инвариантность на очень малых расстояниях в целях достижения ультрафиолетовой перенормируемости теорий со старшими производными также использовалась вне гравитационного контекста. В статье [77] рассматривались перенормируемые теории поля, в том числе скалярные поля и поля Янга–Миллса со старшими производными в действии. Присутствие старших производных меняет соответствующие дисперсионные соотношения, а эффективная скорость света в ультрафиолетовом пределе теории может возрастать до бесконечности. Это позволило авторам работы [77] объяснить наблюдаемые задержки по времени во вспышках гамма-излучения.

Достаточно большой объём работ связан с приложениями гравитации Хоравы–Лифшица к космологии (см. обзор [78]). Тут есть ряд интересных космологических следствий гравитации Хоравы–Лифшица. Давайте рассмотрим некоторые из них.

Во-первых, заметим, что действие гравитации Хоравы–Лифшица инвариантно относительно пространственных диффеоморфизмов, зависящих от пространственно-временных координат, а также относительно зависящих только от времени репараметризаций. Это означает, что вместо четырёх локальных связей первого рода, которые присутствуют в общей теории относительности (они соответствуют вариации действия по отношению к функциям хода и сдвига), теперь есть три локальные связи, соответствующие трём компонентам функции сдвига и глобальной связи, соответствующей функции хода. Отсутствие одной локальной связи означает, что аналог 00-компоненты уравнений Эйнштейна отсутствует [78]. В случае вселенной Фридмана это означает, что мы не можем использовать первое уравнение Фридмана и должны использовать второе уравнение, содержащее временную производную параметра Хаббла $H = \dot{a}/a$. У второго уравнения есть первый интеграл, дающий первое уравнение Фридмана, но при этом содержащий дополнительную константу. Появление

константы эквивалентно возникновению субстанции, которая гравитационно ведёт себя как пылевидная материя. Таким образом, возникает что-то вроде тёмной материи, но без самой тёмной материи. Данный эффект присутствует уже в плоской модели Фридмана.

Далее, следуя статье [78], запишем общее действие для $z = 3$ теории Хоравы–Лифшица, забыв про детальное условие баланса и добавив члены с младшими производными. Такое действие имеет следующий вид:

$$I = I_{\text{kin}} + I_{z=3} + I_{z=2} + I_{z=1} + I_{z=0} + I_m, \\ I_{\text{kin}} = \frac{1}{16\pi G} \int N dt \sqrt{g} d^3x (K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2), \\ I_{z=3} = \int N dt \sqrt{g} d^3x (c_1 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} + c_2 \nabla_i R \nabla^i R + \\ + c_3 R_i^j R_j^k R_k^i + c_4 R R_i^j R_j^i + c_5 R^3), \\ I_{z=2} = \int N dt \sqrt{g} d^3x (c_6 R_i^j R_j^i + c_7 R^2), \\ I_{z=1} = c_8 \int N dt \sqrt{g} d^3x R, \\ I_{z=0} = c_9 \int N dt \sqrt{g} d^3x, \quad (108)$$

где I_m — это действие материи.

Для вселенной Фридмана с произвольной кривизной k второе уравнение Фридмана для теории с действием (108) имеет вид

$$-\frac{3\lambda-1}{2} (2\dot{H} + 3H^2) = 8\pi G P - \frac{\alpha_3 k^3}{a^6} - \frac{\alpha_2 k^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} - \Lambda, \quad (109)$$

где

$$\alpha_3 = 192\pi G (c_3 + 3c_4 + 9c_5), \quad \alpha_2 = 32\pi G (c_6 + 3c_7), \quad (110)$$

а P — давление вещества. Первый интеграл этого уравнения равен

$$\frac{3(3\lambda-1)}{2} H^2 = 8\pi G \left(\rho + \frac{C}{a^3} \right) - \frac{\alpha_3 k^3}{a^6} - \frac{3\alpha_2 k^2}{a^4} - \frac{3k}{a^2} + \Lambda, \quad (111)$$

где ρ — это плотность энергии вещества, а C — это упомянутая выше константа интегрирования эффективной тёмной материи.

Далее, удобно переписать уравнение (111) как условие сохранения энергии:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2}{3\lambda-1} V(a) = 0, \quad (112)$$

где

$$V(a) = \frac{\alpha_3 k^3}{6a^4} + \frac{\alpha_2 k^2}{2a^2} + \frac{k}{2} - \frac{\Lambda}{6} a^2 - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho a^2 + \frac{C}{a} \right). \quad (113)$$

Вид потенциала $V(a)$ полностью определяет поведение системы. При $\lambda > 1/3$ Вселенная может иметь только такие значения a , при которых потенциал $V(a) \leq 0$. В

точках, где $V(a) = 0$, Вселенная имеет точки возврата, т.е. точки минимального сжатия (отскоки) или точки максимального расширения.

Таким образом, различные космологические режимы соответствуют специальному выбору коэффициентов при членах со старшими степенями пространственной кривизны. Давайте приведём ряд интересных примеров.

1. Если потенциал $V(a)$ равен нулю лишь при одном значении космологического радиуса $a = a_0$, причём при $a < a_0$ потенциал $V(a) > 0$, а при $a > a_0$ потенциал $V(a) < 0$, то Вселенная имеет решение с отскоком. А именно, в начале эволюции Вселенная сжимается, а после отскока расширяется.

2. Если потенциал $V(a_1) = V(a_2) = 0$ для некоторых значений a_1 и a_2 , причём $V(a) < 0$ при $a_1 < a < a_2$ и $V(a) > 0$ при $a > a_2$ или $a < a_1$, то у Вселенной есть точки минимального сжатия и максимального расширения, а её эволюция периодична.

3. Если $V(a_0) = 0$, причём в этой точке функция $V(a)$ имеет локальный максимум, то возникает нестабильная статическая Вселенная.

4. Если в точке a_0 функция $V(a)$ имеет локальный минимум, равный нулю, то возникает стабильная статическая Вселенная.

Космология Хоравы–Лифшица обладает ещё одним интересным свойством: она позволяет предсказать масштабно-инвариантные космологические возмущения, не требуя существования инфляционной стадии расширения [78]. Напомним, что дисперсионное соотношение для стандартных линейных космологических возмущений имеет вид

$$\omega^2 = c_s^2 \frac{k_c^2}{a^2}, \quad (114)$$

где c_s — это скорость звука и k_c — это сопутствующее волновое число.

Если рассматриваемая мода удовлетворяет $\omega^2 \gg H^2$, где $H = \dot{a}/a$ — постоянная Хаббла, то эволюция модели не чувствует расширения Вселенной и данная мода осциллирует обычным способом. Если $\omega^2 \ll H^2$, то расширение Вселенной происходит настолько быстро, что хаббловское трение замораживает эту моду, делая её практически постоянной. Генерация космологических возмущений из квантовых флуктуаций является осцилляцией, за которой сразу следует замораживание. Таким образом, условие генерации космологических возмущений имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^2}{\omega^2} \right) > 0. \quad (115)$$

Если стандартное дисперсионное соотношение (114) верно, то для расширяющейся Вселенной уравнение (115) даёт $\ddot{a} > 0$. Следовательно, генерация космологических возмущений из квантовых флуктуаций требует ускоренного расширения Вселенной, т.е. инфляции.

В гравитации Хоравы–Лифшица с критическим индексом z дисперсионное соотношение для возмущений в ультрафиолетовой области имеет вид

$$\omega^2 = M^2 \left(\frac{k_c^2}{M^2 a^2} \right)^z, \quad (116)$$

где M задаёт некоторый энергетический масштаб. При подстановке (116) в условие (115) получаем для расширяющейся Вселенной следующее неравенство:

$$\frac{d^2 a^z}{dt^2} > 0. \quad (117)$$

Очевидно, что для больших значений z , например для $z = 3$, условие (117) не требует ускорения Вселенной. Действительно, для этого достаточно уже степенного расширения $a \sim t^p$, где $p > 1/z$. Таким образом, в космологии Хоравы–Лифшица спектр космологических возмущений можно генерировать без инфляции.

В заключение этого раздела хотелось бы добавить, что в контексте гравитации Хоравы–Лифшица практически все традиционные вопросы космологии были рассмотрены заново. Восходящая к пионерской работе Лифшица [38] 1946 г. теория линейных возмущений рассматривалась, например, в работе [79]. Квазиизотропное (градиентное) разложение в космологии Хоравы–Лифшица со скалярным полем рассматривалось в работе [80]. Также можно отметить интерес к изучению колебательного приближения к сингулярности и стохастических явлений в космологии Хоравы–Лифшица [81–83]. По всей видимости, вопрос о наличии или отсутствии подобного рода стохастичности до сих пор не получил своего окончательного решения и требует проведения дальнейших исследований.

6. Заключение

В настоящем обзоре был рассмотрен ряд новых направлений развития теоретической физики, связанных с гравитацией и космологией, так или иначе основанных на некоторых ранних работах Е.М. Лифшица. А именно, рассмотрены такие направления, как: колебательное приближение к сингулярности и стохастичность в анизотропной и изотропной космологии, квазиизотропное разложение и так называемые гравитация и космология Хоравы–Лифшица.

Порой такое развитие оказывается несколько неожиданным и совершенно изумительным. Например, изучение колебательного приближения к сингулярности и стохастические явления в приложении к космологическим моделям, основанным на теориях суперструн, выявили связи между космологическим бильярдом и свойствами бесконечномерных алгебр Каца–Мули.

Идея анизотропии между пространством и временем, оказавшаяся полезной при описании фазовых переходов второго рода и критических явлений в работе Лифшица, написанной в 1941 г., привела к возникновению теории гравитации Хоравы–Лифшица, которая на квантовом уровне выглядит как перенормируемая теория, а её космологические приложения обладают многими интересными свойствами и эффектами.

В завершение нашего обзора давайте кратко упомянем ещё одну статью Лифшица, которая одновременно связана с квантовой теорией поля, гравитацией и физической конденсированного состояния. Имеется в виду теория макроскопических ван-дер-ваальсовых сил между твёрдыми телами [84]. Хорошо известно, что вакуумная энергия в квантовой теории поля всегда расходится. При рассмотрении стандартных процессов рассеяния про вакуумный вклад можно забыть, вычитая его посред-

ством перехода к нормальному упорядочиванию. В 1948 г. Казимир осознал, что если электромагнитное поле удовлетворяет некоторым специальным граничным условиям, то его вакуумная энергия отличается от соответствующей вакуумной энергии в пространстве Минковского, и разница между двумя плотностями может быть конечной [85]. А именно, им рассматривались две бесконечные проводящие пластины, и было показано, что данная разница отрицательна, что означает наличие притягивающей силы. Это явление, получившее название эффекта Казимира, наблюдалось экспериментально. Впоследствии роль энергии Казимира в космологии изучалась многими авторами (см., например, [86]).

В опубликованной в 1956 г. статье [84] Е.М. Лифшиц рассмотрел другой аспект эффекта Казимира. А именно, Казимир рассматривал идеальный проводник, полностью непрозрачный для электромагнитного поля. Следовательно, на проводящих плоскостях поперечная компонента электрического поля исчезает. Исследование Лифшица было основано на том факте, что идеальных проводников не существует и диэлектрическая проницаемость (бесконечная в случае идеального проводника) на самом деле зависит от частоты электромагнитного поля, и для высоких частот эта характеристика стремится к единице, а материал становится прозрачным для электромагнитных полей. Формулы этого эффекта, с учётом тепловых, а также квантовых флуктуаций, составили основу нового направления в физике, которое иногда называется макроскопическими силами Ван-дер-Ваальса [87]. Данный подход к эффекту Казимира также очень популярен теперь, а соответствующие взаимодействия, порождаемые квантовыми и тепловыми флуктуациями, называются силами Казимира – Лифшица [88 – 90].

Работа была частично поддержана грантом РФФИ 14-02-00894.

Список литературы

1. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
2. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **19** 25 (1978)
3. Mandelbrot B *The Fractal Geometry of Nature* (New York: W.H. Freeman, 1977)
4. Gutzwiller M *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag, 1990)
5. Penrose R *Structure of Space-Time* (New York: W.A. Benjamin, 1968); Пенроуз Р *Структура пространства-времени* (М.: Мир, 1972)
6. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973); Хокинг С, Эллис Дж *Крупномасштабная структура пространства-времени* (М.: Мир, 1977)
7. Hawking S W, Penrose R *Proc. R. Soc. London A* **314** 529 (1970)
8. Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **80** 391 (1963); Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **6** 495 (1964)
9. Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Adv. Phys.* **12** 185 (1963)
10. Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Phys. Rev. Lett.* **24** 76 (1970)
11. Лифшиц Е М, Халатников И М *Письма в ЖЭТФ* **11** 200 (1970); Lifshitz E M, Khalatnikov I M *JETP Lett.* **11** 123 (1970)
12. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **56** 1701 (1969); Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **29** 911 (1969)
13. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970); Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **13** 745 (1971)
14. Belinskii V A, Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Adv. Phys.* **31** 639 (1982)
15. Misner C W *Phys. Rev. Lett.* **22** 1071 (1969)
16. Лифшиц Е М, Лифшиц И М, Халатников И М *ЖЭТФ* **59** 322 (1970); Lifshitz E M, Lifshitz I M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **32** 173 (1971)
17. Khalatnikov I M et al. *J. Stat. Phys.* **38** 97 (1985)
18. Demaret J, Henneaux M, Spindel P *Phys. Lett. B* **164** 27 (1985)
19. Demaret J et al. *Phys. Lett. B* **175** 129 (1986)
20. Demaret J, de Rop Y, Henneaux M *Int. J. Theor. Phys.* **28** 1067 (1989)
21. Kasner E *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
22. Damour T, Henneaux M *Phys. Rev. Lett.* **85** 920 (2000)
23. Damour T et al. *Phys. Lett. B* **509** 323 (2001)
24. Damour T, Henneaux M, Nicolai H *Class. Quantum Grav.* **20** R145 (2003)
25. Кас В Г *Infinite Dimensional Lie Algebras* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
26. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980)
27. Guth A H *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981)
28. Linde A D *Phys. Lett. B* **129** 177 (1983)
29. Gamow G *Phys. Rev.* **70** 572 (1946)
30. Белинский В А, Гришук Л П, Зельдович Я Б, Халатников И М *ЖЭТФ* **89** 346 (1985); Belinskii V A, Grishchuk L P, Zel'dovich Ya B, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **62** 195 (1985)
31. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **93** 784 (1987); Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **66** 441 (1987)
32. Page D N *Class. Quantum Grav.* **1** 417 (1984)
33. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **06** 673 (1997)
34. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **07** 129 (1998)
35. Cornish N J, Shellard E P S *Phys. Rev. Lett.* **81** 3571 (1998)
36. Cornish N J, Levin J J *Phys. Rev. D* **55** 7489 (1997)
37. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Savchenko S V, Toporensky A V *Phys. Rev. D* **59** 123516 (1999)
38. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **16** 587 (1946)
39. Bardeen J M *Phys. Rev. D* **22** 1882 (1980)
40. Муханов В Ф *ЖЭТФ* **94** 1 (1988); Mukhanov V F *Sov. Phys. JETP* **67** 1297 (1988)
41. Sasaki M *Prog. Theor. Phys.* **76** 1036 (1986)
42. Лифшиц Е М, Халатников И М *ЖЭТФ* **39** 149 (1960); Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **12** 108 (1961)
43. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu, Starobinsky A A *Class. Quantum Grav.* **19** 3845 (2002)
44. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu, Martellini M, Starobinsky A A *JCAP*(03) 001 (2003)
45. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu, Starobinsky A A, arXiv: 1312.0237
46. Riess A G et al. *Astron. J.* **116** 1009 (1998)
47. Perlmutter S et al. *Astrophys. J.* **517** 565 (1999)
48. Sahni V, Starobinsky A *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000)
49. Sahni V, Starobinsky A *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 2105 (2006)
50. Ноґава Р *Phys. Rev. D* **79** 084008 (2009)
51. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **11** 255 (1941)
52. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **11** 269 (1941)
53. Bini D, Cherubini C, Jantzen R T *Class. Quantum Grav.* **24** 5627 (2007)
54. Петров А З *Пространства Эйнштейна* (М.: Физматгиз, 1961); Petrov A Z *Einstein Spaces* (Oxford: Pergamon Press, 1969)
55. Parker L, Fulling S A *Phys. Rev. D* **7** 2357 (1973)
56. Старобинский А А *Письма в Астрон. журн.* **4** 155 (1978); Starobinskii A A *Sov. Astron. Lett.* **4** 82 (1978)
57. Hawking S W, in *Relativity, Groups and Topology II. Proc. Les Houches 1983, Session XL* (Eds B S De Witt, R Stora) (Amsterdam: North-Holland, 1984) pp. 333–379
58. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Rep.* **288** 513 (1997)
59. Халатников И М, Каменщик А Ю *УФН* **168** 593 (1998); Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Usp.* **41** 525 (1998)
60. Khalatnikov I M, Mezhlumian A *Phys. Lett. A* **169** 308 (1992)
61. Khalatnikov I M, Schiller P *Phys. Lett. B* **302** 176 (1993)
62. Amendola L, Khalatnikov I M, Litterio M, Occhionero F *Phys. Rev. D* **49** 1881 (1994)
63. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Phys. Lett. B* **357** 36 (1995)

64. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **6** 649 (1997)
65. Comer G L et al. *Phys. Rev. D* **49** 2759 (1994)
66. Deruelle N, Langlois D *Phys. Rev. D* **52** 2007 (1995)
67. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **117** 175 (1982)
68. Старобинский А А *Письма в ЖЭТФ* **37** 55 (1983); Starobinskii A A *JETP Lett.* **37** 66 (1983)
69. Salopek D S, Bond J R *Phys. Rev. D* **42** 3936 (1990)
70. Salopek D S *Phys. Rev. D* **43** 3214 (1991)
71. Salopek D S, Stewart J M *Class. Quantum Grav.* **9** 1943 (1992)
72. Wands D et al. *Phys. Rev. D* **62** 043527 (2000)
73. Nambu Y, Taruya A *Class. Quantum Grav.* **13** 705 (1996)
74. Tanaka Y, Sasaki M *Prog. Theor. Phys.* **117** 633 (2007)
75. Weinberg S, in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979) p. 790
76. Arnowitt R, Deser S, Misner C W, in *Gravitation: an Introduction to Current Research* (Ed. L Witten) (New York: Wiley, 1962) Ch. 7, pp. 227–265; republished in: *Gen. Relat. Grav.* **40** 1997 (2008)
77. Chen B, Huang Q-G *Phys. Lett. B* **683** 108 (2010)
78. Mukohyama Sh *Class. Quantum Grav.* **27** 223101 (2010)
79. Gao X et al. *Phys. Rev. D* **81** 083508 (2010)
80. Gümrükçüoğlu A E, Mukohyama S, Wang A *Phys. Rev. D* **85** 064042 (2012)
81. Bakas I, Bourliot F, Lüst D, Petropoulos M *Class. Quantum Grav.* **27** 045013 (2010)
82. Myung Y S et al. *JHEP* (03) 085 (2010)
83. Maeda K, Misonoh Y, Kobayashi T *Phys. Rev. D* **82** 064024 (2010)
84. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **29** 94 (1955); Lifshitz E M *Sov. Phys. JETP* **2** 73 (1956)
85. Casimir H B G *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51** 793 (1948)
86. Ford L H *Phys. Rev. D* **11** 3370 (1975)
87. Дзялошинский И Е, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *УФН* **73** 381 (1961); Dzyaloshinskii I E, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Sov. Phys. Usp.* **4** 153 (1961)
88. Bordag M et al. *Phys. Rev. B* **74** 205431 (2006)
89. Antezza M et al. *Phys. Rev. A* **77** 022901 (2008)
90. Rosa F S S, Dalvit D A R, Milonni P W *Phys. Rev. Lett.* **100** 183602 (2008)

Stochastic cosmology, perturbation theories and Lifshitz gravity

I.M. Khalatnikov

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation
E-mail: khalat@itp.ac.ru*

A.Yu. Kamenshchik

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation;
Dipartimento di Fisica e Astronomia and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare,
via Irnerio 46, 40126 Bologna, Italy
E-mail: kamenshchik@bo.infn.it*

This paper reviews E.M. Lifshitz's work on gravity and cosmology and discusses later work by others who drew on his ideas. The major topics covered include the stochastic cosmology of an anisotropic universe and of an isotropic scalar field universe; the quasi-isotropic (gradient) expansion in cosmology; and Horava – Lifshitz gravity and cosmology.

Keywords: gravitation, cosmology, chaos, perturbation theory

PACS numbers: **04.20. – q, 04.60. – m, 98.80. – k**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201509f.0948

Bibliography — 90 references

Received 30 May 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (9) 948–963 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (9) (2015)