Сентябрь 2015 г. **Том 185, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Редукция массива матриц рассеяния

И.А. Садовский

Подход с применением матриц рассеяния широко используется в волновой и квантовой физике. Как правило, при таком подходе берётся комбинация из нескольких матриц рассеяния. Рассмотрены произвольные массивы из соединённых между собой матриц рассеяния. Дано формальное выражение для редуцированной матрицы рассеяния. Приведены примеры успешного применения подобного подхода.

Ключевые слова: матрица рассеяния, редукция, баллистический режим, двухбарьерный потенциал, эффект Ааронова – Бома

PACS numbers: 72.10.Bg, **73.23.–b**, 74.78.Na DOI: 10.3367/UFNr.0185.201509c.0941

Содержание

1. Введение

Развитие электронной инженерии за два последних десятилетия позволило создавать структуры размером в несколько тысяч или даже в несколько сотен атомов. Иногда удаётся формировать когерентные структуры, в которых длина любого неупругого рассеяния превышает размер системы. Они могут быть созданы на основе двумерного электронного газа в гетероструктурах [1, 2], специально изготовленных нанопроволок [3], графена [4] или углеродных нанотрубок [5]. Такие системы чрезвычайно удобны для манипулирования отдельными квантовыми состояниями (например, с использованием резонансов типа Фабри – Перо [6 – 8]) и создания приборов, в которых важна нелокальность квантовой механики [9, 10].

Когерентные системы удобно описывать с помощью матриц рассеяния [11]. Кроме того, подобный подход широко используется в волновой физике, в частности, для расчёта приборов, работающих в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне [12]. В этой области матрицы рассеяния давно превратились в инженерный инструмент. В квантовой электронике подобная систематизация фактически отсутствует. В этой статье мы излагаем систематический подход с использованием матриц рассеяния для расчёта цепей, состоящих из рассеивателей, соединённых между собой произвольным образом.

И.А. Садовский. Materials Science Division,
Argonne National Laboratory,
9700 S. Cass Avenue, Argonne, Illinois 60637, USA
E-mail: ivan.sadovsky@gmail.com

Статья поступила 31 марта 2015 г.

2. Массив из матриц рассеяния

Рассмотрим некий набор матриц рассеяния $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots\}$, связывающих входящие $|\mathrm{I}_\alpha\rangle$ и выходящие $|\mathrm{O}_\alpha\rangle$ состояния, $|\mathrm{O}_\alpha\rangle = \mathcal{S}_\alpha|\mathrm{I}_\alpha\rangle$. Каждая из матриц $\mathcal{S}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) является унитарной, $\mathcal{S}_\alpha^\dagger\mathcal{S}_\alpha = 1$, и имеет размер $n_\alpha \times n_\alpha$. Введём понятие матрицы рассеяния большой системы, или *большой* матрицы рассеяния $\mathcal{S}$, размером $n \times n$, где $n = \sum_\alpha n_\alpha$, связывающей все входящие $|\mathrm{I}\rangle$ и все выходящие $|\mathrm{O}\rangle$ состояния,

$$|\mathrm{I}\rangle = \mathcal{S}|\mathrm{O}\rangle\,, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{S} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1 & & & \\ & \mathcal{S}_2 & & \\ & & \mathcal{S}_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad |\mathrm{I}\rangle \equiv \begin{bmatrix} |\mathrm{I}_1\rangle \\ |\mathrm{I}_2\rangle \\ |\mathrm{I}_3\rangle \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |\mathrm{O}\rangle \equiv \begin{bmatrix} |\mathrm{O}_1\rangle \\ |\mathrm{O}_2\rangle \\ |\mathrm{O}_3\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2}$$

(см. схематическое изображение каналов рассеяния на рис. 1а). Как и матрицы рассеяния $\mathcal{S}_\alpha$, большая матрица рассеяния $\mathcal{S}$ — унитарная, но не обязательно симметричная.

Пусть все эти матрицы соединены в цепь неким произвольным образом (рис. 1б). Каждое соединение (внутренний канал) в массиве матриц рассеяния будет описываться двумя индексами, соответствующими некоторым входу и выходу большой матрицы рассеяния $\mathcal{S}$. Такое

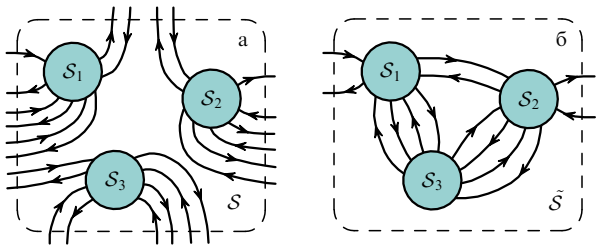

Рис. 1. (а) Большая матрица рассеяния $\mathcal{S}$. (б) Редуцированная матрица рассеяния $\tilde{\mathcal{S}}$.

соединение уменьшает эффективный размер большой матрицы рассеяния $\mathcal{S}$ на единицу по обеим размерностям. Случай из p соединений можно описать, задав два списка индексов, $\{o\}$ и $\{i\}$, длиной p, таких, что выход o_1 большой матрицы рассеяния $\mathcal{S}$ соединён с её входом i_1, а выход o_2 — с входом i_2 и т.д. Обозначим векторы входящих и выходящих состояний, соответствующих индексам $\{o\}$ и $\{i\}$, как $|\mathrm{LI}\rangle$ и $|\mathrm{LO}\rangle$. Оставшиеся элементы из $|\mathrm{I}\rangle$ и $|\mathrm{O}\rangle$ объединим во "внешние" состояния $|\mathrm{EI}\rangle$ и $|\mathrm{EO}\rangle$. Уменьшенная таким образом матрица $\tilde{\mathcal{S}}$ связывает внешние состояния:

$$|\mathrm{EI}\rangle = \tilde{\mathcal{S}}|\mathrm{EO}\rangle\,. \tag{3}$$

Мы будем называть матрицу $\tilde{\mathcal{S}}$ *редуцированной* матрицей рассеяния.

3. Редукция большой матрицы рассеяния

3.1. Последовательная редукция

Сначала опишем, что будет происходить с большой матрицей рассеяния $\mathcal{S} = \{S_{kl}\}$ с элементами S_{kl} при соединении одного входа (с индексом i) с одним выходом (с индексом o). Обозначим амплитуды на входе большой матрицы рассеяния как I_l, а на выходе — как O_k, так что

$$O_k = \sum_l S_{kl} I_l\,. \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно соединённые контакты,

$$O_o = \sum_{l,\,l\neq i} S_{kl} I_l + S_{oi} I_i\,.$$

Соединение означает равенство соответствующих амплитуд на входе и выходе, $I_i = O_o$. Принимая это во внимание, получаем уравнение для амплитуды в соединении

$$I_i = O_o = \frac{1}{1 - S_{oi}} \sum_{l,\,l\neq i} S_{kl} I_l\,. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), находим для $k \neq o$

$$O_k = \sum_{l,\,l\neq i} \tilde{S}_{kl} I_l\,, \tag{6}$$

где элементы редуцированной матрицы рассеяния $\tilde{\mathcal{S}}$ даются выражением

$$\tilde{S}_{kl} = S_{kl} + \frac{S_{ki} S_{ol}}{1 - S_{oi}}\,. \tag{7}$$

В этом уравнении мы "пропускаем" i-й столбец и o-ю строку изначальной матрицы $\mathcal{S}$, поэтому редуцированная таким образом матрица имеет высоту и ширину, меньшие на единицу по сравнению с таковыми в оригинальной матрице. Повторяя процедуру p раз, можно редуцировать изначальную большую матрицу рассеяния до размера $(n-p)\times(n-p)$.

Описанный способ целесообразно применять для небольшого количества соединений. В случае большого количества соединённых каналов можно обобщить данный метод и выписать выражение для редуцированной матрицы рассеяния в матричном виде, соответствующем последовательному применению описанной процедуры.

3.2. Матричная редукция

Для случая p соединённых каналов представим матрицу рассеяния $\mathcal{S}$ в блочном виде, обозначив её как $\hat{\mathcal{S}}$. Мы можем сделать это простой перестановкой элементов в больших векторах входящих и выходящих состояний и соответствующей перестановкой строк и столбцов в большой матрице рассеяния (как известно, унитарность при этом сохраняется). Потребуем, чтобы в большом векторе входящих и выходящих состояний все соединённые элементы были в конце вектора и их порядок соответствовал порядку соединения. В результате получим

$$\hat{\mathcal{S}} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{\mathrm{E,E}} & \mathcal{S}_{\mathrm{E,L}} \\ \mathcal{S}_{\mathrm{L,E}} & \mathcal{S}_{\mathrm{L,L}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} |\mathrm{EO}\rangle \\ |\mathrm{LO}\rangle \end{bmatrix} = \mathcal{S} \begin{bmatrix} |\mathrm{EI}\rangle \\ |\mathrm{LI}\rangle \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Записанная таким образом матрица $\hat{\mathcal{S}}$ связывает внешние выходящие состояния редуцированной системы $|\mathrm{EO}\rangle$ с её внешними входящими $|\mathrm{EI}\rangle$ состояниями. В уравнении (8) фигурируют также амплитуды соединений $|\mathrm{LO}\rangle$ и $|\mathrm{LI}\rangle$, равные друг другу, $|\mathrm{LO}\rangle = |\mathrm{LI}\rangle$. Имея это в виду, мы можем получить редуцированную матрицу рассеяния $\tilde{\mathcal{S}}$ размером $(n-p)\times(n-p)$, связывающую внешние выходящие состояния с внешними входящими, $|\mathrm{EO}\rangle = \tilde{\mathcal{S}}|\mathrm{EI}\rangle$,

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_{\mathrm{E,E}} + \mathcal{S}_{\mathrm{E,L}}(1 - \mathcal{S}_{\mathrm{L,L}})^{-1}\mathcal{S}_{\mathrm{L,E}}\,, \tag{9}$$

где 1 обозначает единичную матрицу размером $n \times n$. Полученный результат сводится к выражению (7) в случае одного канала. Редуцированная матрица $\tilde{\mathcal{S}}$, составленная с помощью формулы (9), является унитарной, $\tilde{\mathcal{S}}^\dagger\tilde{\mathcal{S}} = 1$, блок $\mathcal{S}_{\mathrm{L,L}}$ — квадратный по построению, а член $(1 - \mathcal{S}_{\mathrm{L,L}})^{-1}$ отвечает за полюсы редуцированной матрицы рассеяния.

3.3. Условие квантования

Рассмотрим частный случай, в котором число соединений совпадает с размером большой квадратной матрицы рассеяния, $p = n$. Физически это отвечает случаю отсутствия входящих извне и выходящих вовне каналов, а значит, волновая функция будет равна нулю на бесконечности. Как известно из квантовой механики, в такой системе энергетические уровни будут квантоваться. Полученное в разделе 3.2 выражение (9) даёт условие квантования:

$$\det\,(1 - \mathcal{S}_{\mathrm{L,L}}) = 0\,, \tag{10}$$

где $\mathcal{S}_{\mathrm{L,L}}$ совпадает с изначальной большой матрицей рассеяния $\mathcal{S}$ с точностью до перестановок строк и столбцов.

4. Примеры использования

Проиллюстрируем, как с помощью представленного в разделе 3 метода описать два известных эффекта.

4.1. Двухбарьерный потенциал

Рассмотрим двухбарьерный потенциал: два одинаковых точечных рассеивателя с амплитудой прохождения t и амплитудой отражения r, находящихся на некотором расстоянии L друг от друга. Матрица рассеяния каждого барьера даётся выражением

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} r & t \\ t & r \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы применить описанный выше формальный подход, введём матрицы рассеяния размером 1×1, соответствующие движению частицы с энергией E между барьерами слева направо и справа налево. Они сводятся к набору одной и той же фазы:

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \exp(\mathrm{i}kL),$$

где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. (Обычно две последние матрицы записываются в виде одной диагональной, но для наглядности мы разбили её на две.) Большая матрица рассеяния двухбарьерного потенциала даётся выражением

$$\mathcal{S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} r & t & & & & \\ t & r & & & & \\ \hline & & r & t & & \\ & & t & r & & \\ \hline & & & & \exp(\mathrm{i}kL) & \\ \hline & & & & & \exp(\mathrm{i}kL) \end{array}\right] \end{array}.$$

Согласно формуле (8), переставим строки и столбцы этой матрицы так, чтобы внутренним соединениям соответствовали элементы в правом нижнем блоке. Траектории и нумерация входных и выходных каналов представлены на рис. 2. Для матрицы $\hat{\mathcal{S}}$ получаем

$$\hat{\mathcal{S}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} r & & t & & & \\ & r & & & & t \\ \hline & & & \exp(\mathrm{i}kL) & & \\ & t & & & & r \\ t & & r & & & \\ & & & & \exp(\mathrm{i}kL) & \end{array}\right] \end{array}.$$

Далее, следуя описанной методике, вычисляем обратную матрицу:

$$(1 - \mathcal{S}_{\mathrm{L,L}})^{-1} = \frac{1}{1 - r^2 \exp(2\mathrm{i}kL)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & \exp(\mathrm{i}kL) & r\exp(2\mathrm{i}kL) & r\exp(\mathrm{i}kL) \\ r^2\exp(\mathrm{i}kL) & 1 & r\exp(\mathrm{i}kL) & r \\ r & r\exp(\mathrm{i}kL) & 1 & r^2\exp(\mathrm{i}kL) \\ r\exp(\mathrm{i}kL) & r\exp(2\mathrm{i}kL) & \exp(\mathrm{i}kL) & 1 \end{bmatrix},$$

и, подставляя её в выражение (9), получаем известный результат для двухбарьерного потенциала [11, 13]:

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \dfrac{t^2\exp(\mathrm{i}kL)}{1 - r^2\exp(2\mathrm{i}kL)} & r + \dfrac{rt^2\exp(\mathrm{i}kL)}{1 - r^2\exp(2\mathrm{i}kL)} \\ r + \dfrac{rt^2\exp(\mathrm{i}kL)}{1 - r^2\exp(2\mathrm{i}kL)} & \dfrac{t^2\exp(\mathrm{i}kL)}{1 - r^2\exp(2\mathrm{i}kL)} \end{bmatrix}.$$

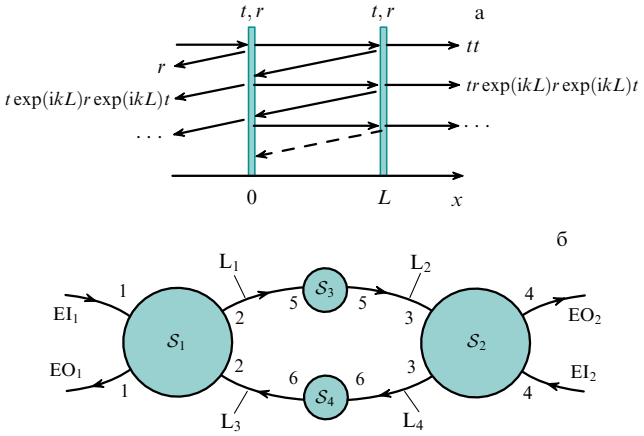

Рис. 2. Интерферометр Фабри – Перо. (а) Структура и траектории в двухбарьерном потенциале. (б) Эквивалентный массив из матриц рассеяния.

Заметим, что этот результат для двухбарьерного потенциала можно довольно просто обобщить для случая многобарьерного потенциала с помощью рекурсивной постановки. В случае последовательно соединённых рассеивателей целесообразно также применять трансфер-матрицы, связывающие состояния слева и справа от каждого рассеивателя: результирующая трансфер-матрица системы находится последовательным перемножением всех трансфер-матриц системы. Однако при более сложной топологии соединения рассеивателей такой подход невозможен.

4.2. Эффект Ааронова – Бома

Для того чтобы продемонстрировать рассматриваемый подход в немного более сложной топологии, применим его к описанию известного эффекта Ааронова – Бома [14]. Рассмотрим систему, состоящую из когерентного проводника, замкнутого в кольцо (рис. 3а). Кольцо пронизывает магнитный поток Φ. Для простоты ограничимся классической ситуацией без отражения назад и, соответ-

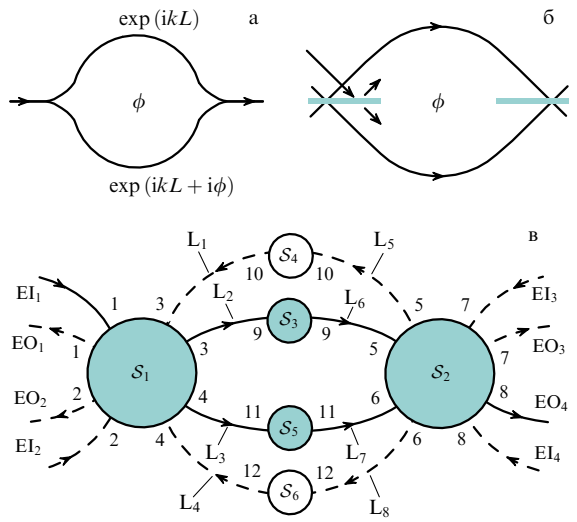

Рис. 3. Эффект Ааронова – Бома. (а) Классическая схема. (б) Реализация безотражательных рассеятелей. (в) Эквивалентный массив из матриц рассеяния.

ственно, резонансов, рассмотренных ранее. Это можно реализовать с помощью зеркального отражения, как показано на рис. 3б.

Естественно ожидать, что матрицы рассеяния $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ должны иметь размер 3×3. Однако такими матрицами нельзя описать случай без отражения назад. Это легко увидеть, если параметризовать такую матрицу рассеяния минимальным набором независимых параметров [15, 16]. Для создания рассеивателя-вилки без отражения назад нужно рассмотреть матрицу рассеяния 4×4, как показано на рис. 3в. Нужный нам вид такой матрицы легко получить, если потребовать: 1) отсутствия обратного рассеяния со всех каналов; 2) отсутствия рассеяния с верхнего провода в нижний и наоборот; 3) симметричности при рассеянии слева направо и справа налево. Эти условия дают выражения для матриц рассеяния левого и правого "тройников":

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & r & t \\ & & t & r \\ \hline r & t & & \\ t & r & & \end{array}\right].$$

Поток Φ моделируется дополнительной фазой $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ (где Φ_0 — квант магнитного потока) в матрице рассеяния верхнего плеча $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = f \equiv \exp(\mathrm{i}\phi + \mathrm{i}kL)$ по отношению к нижнему $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_6 = g \equiv \exp(\mathrm{i}kL)$. Собирая все эти матрицы в большую матрицу рассеяния $\mathcal{S} = \mathrm{diag}\{\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_6\}$ и переставляя её строки и столбцы в соответствии с требованиями формулы (8), получим

$$\hat{\mathcal{S}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 9 \\ 11 \\ 4 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 7 & 8 & 10 & 3 & 4 & 12 & 5 & 9 & 11 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccccccc} & & & & & r & t & & & & & \\ & & & & & t & r & & & & & \\ & & & & & & & & r & & & t \\ & & & & & & & & t & & & r \\ \hline r & t & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & f & & \\ & & & & & & & & & & g & \\ t & r & & & & & & & & & & \\ & & & & f & & & & & & & \\ & & r & t & & & & & & & & \\ & & t & r & & & & & & & & \\ & & & & & & & g & & & & \end{array}\right] \end{array}.$$

Далее, подставляя блоки матрицы $\hat{\mathcal{S}}$ в формулу (9), находим редуцированную матрицу рассеяния:

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} & & fr^2 + gt^2 & (f+g)\,rt \\ & & (f+g)\,rt & gr^2 + ft^2 \\ fr^2 + gt^2 & (f+g)\,rt & & \\ (f+g)\,rt & gr^2 + ft^2 & & \end{bmatrix},$$

Видно, что нужная нам амплитуда прохождения даётся выражением $a = gr^2 + ft^2 = \exp(\mathrm{i}kL)[r^2 + t^2\exp(\mathrm{i}\phi)]$. Для симметричного случая, $t = 1/\sqrt{2}$ и $t = -\mathrm{i}/\sqrt{2}$, соответствующая вероятность $A = |a|^2 = (1 - \cos\phi)/2$ даёт нам известный результат для эффекта Ааронова – Бома.

5. Заключение

В волновой физике, в частности в физике ускорителей, метод, аналогичный описанному выше, называется техникой согласования мод [17]. Использование этой техники позволяет моделировать части волноводов с помощью специализированного программного обеспечения. Например, типичной системой является последовательное соединение двух волноводов с большим числом каналов. В этом случае непрерывность продольных и поперечных полей даёт систему линейных уравнений, напоминающих определение большой матрицы рассеяния (1), (2). Более общая процедура "сшивания" двух матриц рассеяния для описания СВЧ-приборов (иными словами, добавления одного элемента в конструкцию волновода) представлена в работе [18]. Такая процедура напоминает пошаговую редукцию, описанную в разделе 3.

Отметим, что процедура редуцирования матрицы рассеяния может быть применена к гибридным системам со сверхпроводящими частями [19] посредством рассмотрения полного или частичного андреевского отражения. Детально электрические цепи с андреевским отражением рассмотрены в работе [20].

Заметим, что описанный метод редукции в принципе не требует унитарности изначальных матриц рассеяния. Скажем, в примере с эффектом Ааронова – Бома, приведённом в разделе 4.2, мы могли бы ограничиться только нужными нам траекториями и описать "разделитель" и "смеситель" матрицами размером 1×2 и 2×1 соответственно. Такой подход даёт тот же самый результат для нужной нам амплитуды рассеяния, но, строго говоря, не учитывает сохранения потока, а значит, не требует унитарности матриц. Этот метод расчёта удобен тем, что в определённых ситуациях он существенно сокращает вычисления, но способ проверки вычислений с помощью проверки унитарности редуцированной матрицы рассеяния в нём отсутствует.

Итак, в настоящей статье мы продемонстрировали систематический подход для нахождения матриц рассеяния систем мезоскопического размера. Мы привели аналитический результат для редуцированной матрицы рассеяния и показали применение изложенного подхода к известным физическим системам. Основным преимуществом описанной методики является то, что она может быть легко применена для численных расчётов сложных систем.

6. Приложение. Численная реализация

Формулы (8) и (9) наглядно описывают процедуру редукции. Для этого была введена сплошная индексация входящих и выходящих каналов. На практике удобнее использовать составную индексацию, в которой от-

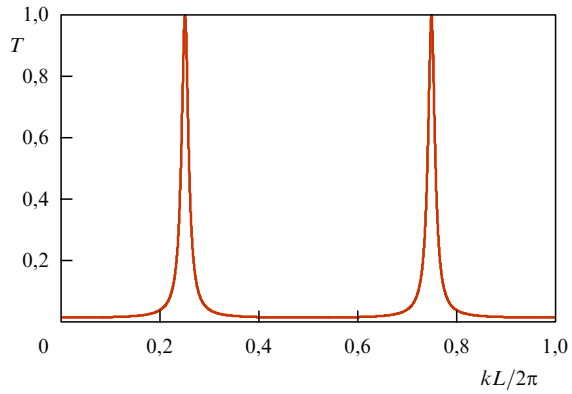

Рис. 4. Прозрачность двухбарьерного потенциала как функция фазы kL.

```
function [Os,Is] = reduceScatteringMatrix(Ss,Ls,Is)
  Ns = zeros(length(Ss),1); Ms = zeros(length(Ss),1);
  nz = 0;
  for s=1:length(Ss)-1,
    Ns(s+1) = Ns(s) + size(Ss{s},1);
    Ms(s+1) = Ms(s) + size(Ss{s},2);
    nz = nz + numel(Ss{s});
  end
  N = Ns(end) + size(Ss{end},1);
  M = Ms(end) + size(Ss{end},2);

  S = sparse([],[],[],N,M,nz);
  I = zeros(M,1);  O = zeros(N,1);
  for s = 1:length(Ss),
    S(Ns(s)+1:Ns(s)+size(Ss{s},1), ...
      Ms(s)+1:Ms(s)+size(Ss{s},2)) = Ss{s};
    I(Ms(s)+1:Ms(s)+size(Ss{s},2)) = Is{s};
  end

  LOi = NaN(length(Ls),1); LIi = NaN(length(Ls),1);
  for l = 1:length(Ls),
    L = Ls{l};
    n = L(1); i = L(2); m = L(3); j = L(4);
    po = Ns(n)+i; pi = Ms(m)+j;
    O(po) = NaN; I(pi) = NaN;
    LOi(l) = po; LIi(l) = pi;
  end

  u = (speye(length(Ls)) - S(LOi,LIi)) \ ...
    (S(LOi,~isnan(I))*I(~isnan(I)));

  O(~isnan(O)) = S(~isnan(O),LIi)*u + ...
    S(~isnan(O),~isnan(I))*I(~isnan(I));

  O(LOi) = u;  I(LIi) = u;

  Os = cell(1,length(Ss));
  for s = 1:length(Ss),
    Is{s} = I(Ms(s)+1:Ms(s)+size(Ss{s},2));
    Os{s} = O(Ns(s)+1:Ns(s)+size(Ss{s},1));
  end
end
```

Листинг 1. Редукция матрицы рассеяния, реализованная на MATLAB.

дельно фигурируют номер матрицы и номер α входа (выхода) в этой матрице. Такая индексация показана в функции из листинга 1, реализованной на MATLAB. Эта функция по заданному массиву из матриц рассеяния (`Ss`), массиву соединений (`Ls`) и массиву входящих состояний (`Is`) возвращает массив выходящих состояний (`Os`).

Примером применения может служить описанный выше двухбарьерный потенциал. Соответствующий программный код приведён в листинге 2.

Этот код вычисляет зависимость прозрачности двухбарьерного потенциала от фазы kL. Результат его работы показан на рис. 4.

```
kLs = 0:0.01:2*pi; Ts = NaN(size(kLs));
for e = 1:length(kLs),
  kL = kLs(e);
  Ss = cell(1,4); Ls = cell(1,4); Is = {};

  t = sqrt(0.1); r = 1i*sqrt(1-abs(t)^2);
  Ss{1} = [r t; t r];  Is{1} = [1; NaN];
  Ss{2} = [r t; t r];  Is{2} = [0; NaN];
  Ss{3} = exp(1i*kL);  Is{3} = NaN;
  Ss{4} = exp(1i*kL);  Is{4} = NaN;

  Ls{1} = [1 2  4 1];
  Ls{2} = [4 1  2 2];
  Ls{3} = [2 2  3 1];
  Ls{4} = [3 1  1 2];

  Os = reduceScatteringMatrix(Ss, Ls, Is);
  Ts(e) = abs(Os{2}(1))^2;
end
plot(kLs/(2*pi), Ts);
```

Листинг 2. Вычисление прозрачности двухбарьерного потенциала с помощью редукции матрицы рассеяния.

Список литературы

1. Kumar A et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 246808 (2010)
2. Hwang H Y et al. *Nature Mater.* **11** 103 (2012)
3. Gudiksen M S et al. *Nature* **415** 617 (2002)
4. Novoselov K S et al. *Nature* **490** 192 (2012)
5. Postma H W Ch et al. *Science* **293** 76 (2001)
6. Cleuziou J-P et al. *Nature Nanotechnol.* **1** 53 (2006)
7. Sadovskyy I A, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. B* **75** 195334 (2007)
8. Sadovskyy I A, Lesovik G B, Blatter G *Письма в ЖЭТФ* **86** 239 (2007); *JETP Lett.* **86** 210 (2007)
9. Hofstetter L et al. *Nature* **461** 960 (2009)
10. Burset P, Herrera W J, Yeyati A L *Phys. Rev. B* **84** 115448 (2011)
11. Лесовик Г Б, Садовский И А *УФН* **181** 1041 (2011); Lesovik G B, Sadovskyy I A *Phys. Usp.* **54** 1007 (2011)
12. Van Rienen U *Numerical Methods in Computational Electrodynamics: Linear Systems in Practical Applications* (Berlin: Springer, 2001)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
14. Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
15. Lesovik G B, Martin T, Blatter G *Eur. Phys. J. B* **24** 287 (2001)
16. Jarlskog C *J. Math. Phys.* **46** 103508 (2005)
17. Itoh T (Ed.) *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures* (New York: Wiley, 1989) pp. 592 – 621
18. Steinigke K "Wellenausbreitung in koaxial und exzentrisch geschichteten Rundholleiterstrukturen", Dissertation (Düsseldorf: Technischen Hochschule Darmstadt, 1992)
19. Sadovskyy I A, Lesovik G B, Vinokur V M, arXiv:1412.8145
20. Nazarov Yu V *Superlatt. Microstruct.* **25** 1221 (1999)

Reduction of the scattering matrix array

I.A. Sadovskyy
Materials Science Division, Argonne National Laboratory, 9700 S. Cass Avenue, Argonne, Illinois 60637, USA
E-mail: *ivan.sadovsky@gmail.com*

The scattering matrix approach is widely used in wave engineering and quantum physics. Usually, a combination of multiple scattering matrices is used. In this article we consider arbitrary arrays of interconnected scattering matrices and present a formal result for the reduced scattering matrix. We demonstrate this approach in two well-known scattering problems.

Keywords: scattering matrix, reduction, ballistic regime, double-barrier potential, Aharonov – Bohm effect

PACS numbers: 72.10.Bg, **73.23.–b**, 74.78.Na DOI: 10.3367/UFNr.0185.201509c.0941

Bibliography — 20 references *Received 31 March 2015*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (9) 941 – 945 (2015) *Physics – Uspekhi* **58** (9) (2015)