

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Коэффициенты Френеля для параметрического рентгеновского (черенковского) излучения

А.В. Шагин

*Обсуждается параметрическое рентгеновское (черенковское) излучение (ПРИ), которое рассматривается как результат дифракции в кристалле виртуальных фотонов, связанных с релятивистской заряженной частицей, движущейся через кристалл. Получены формулы для коэффициентов Френеля для ПРИ в кинематическом приближении, обсуждаются условия применимости такого приближения. Показано построение варианта кинематической теории ПРИ с использованием коэффициентов Френеля. Получены аналитические выражения для частоты, ширины спектрального пика, дифференциального по углам выхода излучения в рефлекс ПРИ и его поляризации с помощью коэффициентов Френеля. Показано, что эти выражения хорошо согласуются с результатами кинематической теории ПРИ Тер-Микаеляна и результатами экспериментальных исследований основных свойств излучения в рефлекс ПРИ.*

**Ключевые слова:** параметрическое рентгеновское излучение, коэффициенты Френеля, виртуальные фотоны, дифракция в кристалле

PACS numbers: 41.20.Jb, **41.60. – m**, 42.25.Bs, 61.80.Cb

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508g.0885

## Содержание

1. Введение (885).
  2. Отражение рентгеновского излучения от одной кристаллографической плоскости (886).
  3. Угловое и спектральное распределение виртуальных фотонов, сопровождающих движущуюся в среде релятивистскую заряженную частицу (886).
  4. Испускание параметрического рентгеновского излучения из кристалла (887).
  5. Частота спектрального пика параметрического рентгеновского излучения (887).
  6. Ширина спектрального пика параметрического рентгеновского излучения (888).
  7. Коэффициенты Френеля для параметрического рентгеновского излучения (888).
  8. Дифференциальный выход параметрического рентгеновского излучения (888).
  9. Линейная поляризация излучения в рефлекс параметрического рентгеновского излучения (890).
  10. О применимости кинематического приближения для описания рефлекса параметрического рентгеновского излучения (890).
  11. Результаты и обсуждение (892).
  12. Заключение (893).
- Список литературы (893).

А.В. Шагин. Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
ул. Победы 85, 308015 Белгород, Российская Федерация;  
Национальный научный центр Харьковский физико-технический институт, ул. Академическая 1, 61108 Харьков, Украина  
E-mail: shchagin@kipt.kharkov.ua

Статья поступила 5 сентября 2014 г., после доработки 15 января 2015 г.

## 1. Введение

Обычно коэффициенты Френеля рассматриваются и применяются в оптике реальных фотонов (см., например, [1]). Кроме того, в соответствии с методом эквивалентных фотонов Вайцеккера – Вильямса [2] их можно использовать для описания трансформации виртуальных фотонов, которые связаны с быстрой заряженной частицей, в реальные фотоны. Например, в работах [3–5] получены коэффициенты Френеля для переходного излучения, возникающего при пересечении быстрой заряженной частицей границы двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями.

Параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) возникает, когда релятивистская заряженная частица пересекает семейство кристаллографических плоскостей в кристалле. М.Л. Тер-Микаелян предложил кинематическую теорию для описания ПРИ в классическом приближении (см. формулы (28.157)–(28.160) в книге [6], а также [7]). Тер-Микаелян называл это излучение "резонансным излучением" [6], но в более поздней литературе обычно употребляется термин "параметрическое рентгеновское излучение" (parametric X-ray radiation — PXR), по аналогии с оптическим параметрическим черенковским излучением [8], которое возникает при пересечении заряженной частицей среды, состоящей из периодически расположенных слоёв веществ с различными диэлектрическими проницаемостями. В настоящей статье мы будем использовать термин ПРИ, как общепринятый в современной литературе.

Результаты классических расчётов [6] подтверждены квантовым расчётом Х. Нитты (H. Nitta) [9]. Справедливость кинематической теории для описания основных

свойств ПРИ, испущенного под большими углами к траектории частицы, подтверждена также во многих экспериментальных исследованиях (см., например, обзоры некоторых таких исследований в [10, 11]). Отметим, что, в отличие от обычного излучения Вавилова – Черенкова, ПРИ испускается при скорости частицы, меньшей фазовой скорости распространения излучения в веществе кристалла.

Возможность применения коэффициентов Френеля, которые описывают дифракцию реальных фотонов в кристаллах, для описания ПРИ обсуждалась в [11–13]. Однако выражения для коэффициентов Френеля для ПРИ с учётом свойств налетающей заряженной частицы получены не были. В настоящей статье получены аналитические выражения для коэффициентов Френеля для ПРИ. Кроме того, мы выводим выражения для частоты, ширины спектрального пика, дифференциального по углам выхода ПРИ и его поляризации с помощью коэффициентов Френеля и сравниваем эти выражения с результатами кинематической теории ПРИ и экспериментальными результатами. Обсуждаются также условия применимости кинематического приближения.

## 2. Отражение рентгеновского излучения от одной кристаллографической плоскости

Рассеяние электромагнитных волн электронами среды предполагается томсоновским. Различные способы вывода амплитудного коэффициента отражения (амплитудного коэффициента Френеля) рентгеновского излучения от одной кристаллографической плоскости описаны, например, в книгах [14, 15]. Амплитудный коэффициент Френеля (далее — коэффициент Френеля)  $q_g$  для отражения первого порядка описывается формулой (см. (6.1) в [14] и (IV.3) в [15])

$$q_g = -i \frac{\lambda d A r_0}{v_c \sin \phi} |S_g|, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны рентгеновского излучения,  $d$  — расстояние между кристаллографическими плоскостями,  $r_0 = e^2/(m_e c^2) = 2,82 \times 10^{-13}$  см — классический радиус электрона,  $m_e$  — масса электрона,  $v_c$  — объём ячейки кристалла,  $\phi$  — угол между направлением распространения падающего излучения и кристаллографической плоскостью,  $0 < \phi \leq \pi/2$ ,  $S_g$  — структурная амплитуда семейства кристаллографических плоскостей, которое описывается вектором обратной решётки  $\mathbf{g}$ ,  $g = |\mathbf{g}| = 2\pi/d$ ,  $A r_0$  — длина рассеяния [15]. Множитель  $A$  в зависимости от направления линейной поляризации падающего излучения принимает значения

$$A_{\perp} = 1, \quad A_{\parallel} = -\cos(2\phi), \quad (2)$$

где  $A_{\perp}$  и  $A_{\parallel}$  — соответственно множители для излучения, поляризованного перпендикулярно и параллельно плоскости дифракции. Плоскость дифракции проходит через направление распространения падающего излучения и вектор  $\mathbf{g}$ .

Используя выражения (см., например, формулы (2.35) и (3.102) в [16])

$$|S_g| = |\chi_g(\omega)| \frac{\pi v_c}{\lambda^2 r_0} \quad (3)$$

и  $\lambda = 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon})$ , получаем коэффициенты Френеля (1) для перпендикулярной и параллельной поляризаций как функции компоненты Фурье диэлектрической восприимчивости  $\chi_g(\omega)$  кристалла и угловой частоты излучения  $\omega$ :

$$q_{g\perp}(\omega) = -i \frac{\pi\omega\sqrt{\varepsilon}}{cg \sin \phi} |\chi_g(\omega)|, \quad (4)$$

$$q_{g\parallel}(\omega) = i \frac{\pi\omega\sqrt{\varepsilon} \cos(2\phi)}{cg \sin \phi} |\chi_g(\omega)|,$$

где  $c$  — скорость света,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. Отметим, что множители, описываемые выражениями (2), должны быть равны между собой в аксиально-симметричном случае дифракции в направлении назад, при  $2\phi = \pi$ . Это подтверждает правильность знака  $A_{\parallel}$  в (2).

## 3. Угловое и спектральное распределение виртуальных фотонов, сопровождающих движущуюся в среде релятивистскую заряженную частицу

Рассмотрим некоторые свойства виртуальных фотонов, сопровождающих заряженную частицу, движущуюся в среде с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  и фактором Лоренца  $\gamma \gg 1$ , где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad V = |\mathbf{V}|.$$

Угловое распределение  $J_v$  нормированной спектральной плотности виртуальных фотонов, сопровождающих релятивистскую заряженную частицу, движущуюся в среде (см. (1.24) в [12]), в приближении малых углов отклонения от направления вектора скорости частицы  $\mathbf{V}$  при условиях  $\gamma \gg 1$ ,  $\hbar\omega \ll \gamma mc^2$ , где  $m$  — масса частицы, имеет вид (см. (4) в [17])

$$J_v = \frac{dN_v}{d\Omega d\omega/\omega} = \frac{\alpha z^2}{\pi^2} \frac{\delta_{v\perp}^2 + \delta_{v\parallel}^2}{(\gamma_{\text{eff}}^{-2} + \delta_{v\perp}^2 + \delta_{v\parallel}^2)^2}, \quad (5)$$

где  $dN_v$  — количество виртуальных фотонов в телесном угле  $d\Omega$ ;  $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры;  $z$  — заряд частицы в единицах заряда электрона  $-e$ ;  $\hbar$  — постоянная Планка;  $\delta_{v\perp}, \delta_{v\parallel} \ll 1$  — малые углы между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы  $\mathbf{V}$  в произвольно выбранных взаимно перпендикулярных направлениях,  $(\delta_{v\perp}^2 + \delta_{v\parallel}^2)^{1/2}$  — угол между вектором  $\mathbf{V}$  и направлением распространения излучения,  $\gamma_{\text{eff}} = (\gamma^{-2} + |\chi_0|)^{-1/2}$  — эффективный релятивистский фактор [18] с учётом продольного эффекта плотности Тер-Микаеляна [6, 7] (далее — эффекта плотности),  $\chi_0$  — диэлектрическая восприимчивость, при частоте излучения  $\omega$ , превышающей частоты атомных переходов и вне резонансных частот,  $|\chi_0| = 1 - \varepsilon = (\omega_p/\omega)^2$ ;  $\varepsilon$  — средняя диэлектрическая проницаемость,  $\omega_p$  — плазменная частота в среде. Отметим, что фазовая скорость распространения рентгеновского излучения в среде обычно превышает скорость света,  $c/\sqrt{\varepsilon} > c$ , так как  $\varepsilon < 1$ .

Из формулы (5) видно, что виртуальные фотоны симметрично распределены вокруг вектора скорости

частицы  $\mathbf{V}$ . Максимум распределения (5) находится под углом  $\gamma_{\text{eff}}^{-1}$  относительно вектора скорости частицы  $\mathbf{V}$ , а в центре распределения имеется провал, и при  $\delta_{v\perp}, \delta_{v\parallel} = 0$  число виртуальных фотонов равно нулю. Для получения распределения виртуальных фотонов частицы, движущейся в вакууме, в выражении (5)  $\gamma_{\text{eff}}$  надо заменить величиной  $\gamma$ . Угловое распределение виртуальных фотонов расширяется при переходе частицы из вакуума в вещество и сужается при её выходе из вещества в вакуум, поскольку  $\gamma_{\text{eff}}^{-1} > \gamma^{-1}$ . Перестройка поля частицы сопровождается переходным излучением [3–5], а формула (5) описывает распределение в стационарном состоянии.

Спектральное распределение виртуальных фотонов не имеет особенностей. Из (5) видно, что число виртуальных фотонов, приходящихся на единичный интервал частот, монотонно уменьшается с возрастанием частоты в произвольном направлении излучения,  $dN_v/(d\Omega d\omega) \sim 1/\omega$ .

#### 4. Испускание параметрического рентгеновского излучения из кристалла

Рассмотрим дифракцию виртуальных фотонов, т.е. испускание реальных квантов ПРИ при прохождении заряженной частицы с релятивистским фактором  $\gamma \gg 1$  через семейство кристаллографических плоскостей кристалла, которое описывается вектором обратной решётки  $\mathbf{g}$ . Количество квантов ПРИ  $dN_{\text{PXR}}$ , испущенное в телесный угол  $d\Omega$ , при прохождении частицы через  $M$  кристаллографических плоскостей в кинематическом приближении может быть представлено с помощью интерференционной функции  $I = \sin^2(Mx)/\sin^2 x$  [1, 15], где величина  $x$  описывается выражениями (8), (9), приведёнными в разделе 5, в виде

$$Y_{\text{PXR}} = \frac{dN_{\text{PXR}}}{d\Omega} = \int \left[ |q_{g\perp}(\omega)|^2 I(x) J_{v\perp} + |q_{g\parallel}(\omega)|^2 I(x) J_{v\parallel} \right] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (6)$$

Здесь  $J_{v\perp}$  и  $J_{v\parallel}$  — распределения виртуальных фотонов с перпендикулярной и параллельной поляризацией соответственно в приближении малых углов,

$$J_{v\perp} = \left( \frac{dN_v}{d\Omega d\omega/\omega} \right)_{\perp} = \frac{\alpha z^2}{\pi^2} \frac{\delta_{v\perp}^2}{(\gamma_{\text{eff}}^{-2} + \delta_{v\perp}^2 + \delta_{v\parallel}^2)^2}, \quad (7)$$

$$J_{v\parallel} = \left( \frac{dN_v}{d\Omega d\omega/\omega} \right)_{\parallel} = \frac{\alpha z^2}{\pi^2} \frac{\delta_{v\parallel}^2}{(\gamma_{\text{eff}}^{-2} + \delta_{v\perp}^2 + \delta_{v\parallel}^2)^2},$$

где  $\delta_{v\perp}, \delta_{v\parallel} \ll 1$  — малые углы относительно вектора скорости заряженной частицы  $\mathbf{V}$  в плоскостях, перпендикулярной и параллельной плоскости дифракции соответственно. В случае ПРИ под плоскостью дифракции подразумевается плоскость, в которой лежат векторы обратной решётки кристалла и скорости налетающей частицы. Полное число виртуальных фотонов выражается суммой  $J_v = J_{v\perp} + J_{v\parallel}$  (см. формулу (5)).

Использование кинематического приближения означает, что рассматривается только излучение, испущенное частицей, а его переотражение на кристаллографических плоскостях не учитывается.

#### 5. Частота спектрального пика параметрического рентгеновского излучения

Интерференционная функция в (6) описывает спектральные свойства ПРИ. Величина  $x$  — это половина разности фаз излучения, испущенного от соседних кристаллографических плоскостей [1, 15],  $x = 2\pi(a/\lambda)/2$ . Эту величину для ПРИ можно найти из рис. 1, используя разность путей волновых фронтов

$$a = \frac{d}{\sin \phi} \left( \frac{c}{V\sqrt{\epsilon}} - \cos \theta \right),$$

где  $\phi$  — угол между вектором скорости частицы и кристаллографической плоскостью.

Учитывая соотношение  $\lambda = 2\pi c/(\omega\sqrt{\epsilon})$ , получаем

$$x = \frac{\pi\omega}{gV\sin \phi} \left( 1 - \frac{V\sqrt{\epsilon}}{c} \cos \theta \right). \quad (8)$$

Пик первого порядка в интерференционной функции находится при  $x = \pi$ . Поэтому можно написать

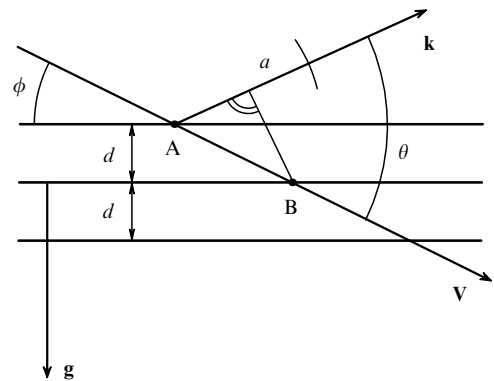
$$x = \frac{\pi\omega}{\omega_{\text{PXR}}} \quad (9)$$

и найти из (8), (9) частоту  $\omega_{\text{PXR}}$  спектрального пика ПРИ первого порядка:

$$\omega_{\text{PXR}} = \frac{gV\sin \phi}{1 - (V\sqrt{\epsilon}/c) \cos \theta}. \quad (10)$$

Формула (10) впервые была получена в [6] (см. там формулы (28.6) и (28.158)) из законов сохранения энергии и импульса. Кроме того, частоту (10) можно получить из схемы Гюйгенса для ПРИ, предложенной в [10] (см. также [20]).

Одним из замечательных свойств ПРИ является возможность плавной перестройки частоты спектрального пика ПРИ просто поворотом кристаллической мишени,



**Рис. 1.** Частица с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  пересекает семейство кристаллографических плоскостей под углом  $\phi$  и испускает излучение с волновым вектором  $\mathbf{k}$  под углом  $\theta$  относительно вектора  $\mathbf{V}$ . Кристаллографические плоскости, находящиеся на расстоянии  $d$  друг от друга, описываются вектором обратной решётки  $\mathbf{g}$ . Участок сферического волнового фронта излучения, испущенного из точки А (показан дугой на векторе  $\mathbf{k}$  в момент, когда частица достигает точки В), опережает волновой фронт излучения, испущаемого из точки В, на расстояние  $a = (c/\sqrt{\epsilon})\Delta t - d \cos \theta / \sin \phi$  за время  $\Delta t = d/(V \sin \phi)$  прохождения частицей пути между соседними кристаллографическими плоскостями, т.е. точками А и В.

установленной в пучке ускоренных частиц, т.е. посредством изменения угла  $\phi$  в (10). Плавная перестройка частоты спектрального пика ПРИ наблюдалась в различных экспериментах в области энергий квантов ПРИ от нескольких кэВ [18, 19] до 400 кэВ [21]. В указанных работах и была экспериментально подтверждена справедливость формулы (10).

## 6. Ширина спектрального пика параметрического рентгеновского излучения

Используя (9), можно представить интерференционную функцию в виде

$$I = \frac{\sin^2(M\pi\omega/\omega_{\text{PXR}})}{\sin^2(\pi\omega/\omega_{\text{PXR}})}. \quad (11)$$

Максимальная величина функции (11) в пике при  $\omega = \omega_{\text{PXR}}$  равна  $M^2$ . Для того чтобы определить полную ширину спектрального пика ПРИ на половине высоты (full width at half maximum, FWHM), следует найти два решения,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , трансцендентного уравнения

$$I = \frac{M^2}{2} \quad (12)$$

и их разность  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . В результате получаем нормированную FWHM спектрального пика ПРИ:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{PXR}}} = 0,89 M^{-1}. \quad (13)$$

Отметим, что в работе [6] рассматривалось излучение из бесконечного кристалла и вместо интерференционной функции использовалась дельта-функция. Поэтому ширина спектрального пика ПРИ в [6] равна нулю.

Формула (13) с коэффициентом, равным единице, приведена в [12]. Результат (13) был также получен в [22], где ПРИ, испущенное из конечного прозрачного кристалла, рассматривалось просто как цуг волн с постоянной амплитудой. При этом количество осцилляций в цуге равнялось числу кристаллографических плоскостей  $M$ , которые пересекала частица.

Отметим, что выражение для нормированной FWHM спектрального пика ПРИ (13) получено для идеальных условий, без учёта эффектов многократного рассеяния частицы в кристалле, ослабления излучения в самом кристалле и углового разрешения эксперимента. Поэтому выражение (13) справедливо только для достаточно тонких прозрачных кристаллов и идеального углового разрешения. В иных условиях упомянутые эффекты могут приводить к уширению спектрального пика ПРИ.

Влияние реального экспериментального углового разрешения, геометрии эксперимента и ослабления излучения на ширину спектрального пика ПРИ исследовалось в [19, 23], а влияние многократного рассеяния — в [24]. Типичная нормированная ширина спектрального пика ПРИ в эксперименте с тонким кристаллом порядка  $10^{-2}$  [19], а наименьшую нормированную ширину величины до  $\sim 10^{-9}$  можно получить при генерации сфокусированного ПРИ частицей, движущейся в режиме каналирования в длинном изогнутом кристалле [25] (см. также [26]). При этом длина цуга ПРИ может составлять несколько сантиметров [25]. Таким образом, ответ на

вопрос, поставленный в названии статьи [23] "How narrow is the linewidth of parametric X-ray radiation?" ("Насколько узка ширина линии параметрического рентгеновского излучения?"), содержится в работе [25].

## 7. Коэффициенты Френеля для параметрического рентгеновского излучения

Для того чтобы найти выход ПРИ, вынесем из-под интеграла в (6) функции, медленно изменяющиеся в области частот вблизи  $\omega = \omega_{\text{PXR}}$ :

$$Y_{\text{PXR}} = \frac{dN_{\text{PXR}}}{d\Omega} = \left( |q_{\perp}(\omega_{\text{PXR}})|^2 J_{\perp} + |q_{\parallel}(\omega_{\text{PXR}})|^2 J_{\parallel} \right) \times \int \frac{\sin^2(M\pi\omega/\omega_{\text{PXR}})}{\sin^2(\pi\omega/\omega_{\text{PXR}})} \frac{d\omega}{\omega_{\text{PXR}}}. \quad (14)$$

Интеграл в правой части (14), взятый в области частот вблизи спектрального пика при  $\omega = \omega_{\text{PXR}}$ , равен числу кристаллографических плоскостей  $M$  [15], следовательно, справедливо соотношение

$$Y_{\text{PXR}} = \frac{dN_{\text{PXR}}}{d\Omega} = |F_{\perp}|^2 J_{\perp} + |F_{\parallel}|^2 J_{\parallel}, \quad (15)$$

где  $F_{\perp}$  и  $F_{\parallel}$  — коэффициенты Френеля для ПРИ с перпендикулярной и параллельной поляризацией соответственно,

$$F_{\perp} = \sqrt{M} q_{\perp}(\omega_{\text{PXR}}) = -i \frac{\sqrt{M} \pi |\chi_{\text{g}}(\omega_{\text{PXR}})|}{c/(V\sqrt{\epsilon}) - \cos \theta}, \quad (16)$$

$$F_{\parallel} = \sqrt{M} q_{\parallel}(\omega_{\text{PXR}}) = i \frac{\sqrt{M} \pi |\chi_{\text{g}}(\omega_{\text{PXR}})| \cos(2\phi)}{c/(V\sqrt{\epsilon}) - \cos \theta}.$$

Коэффициенты Френеля (16) зависят не только от геометрии и свойств кристалла, но и от скорости заряженной частицы. Отметим, что эти коэффициенты относятся к проинтегрированному по частоте спектральному пику ПРИ.

## 8. Дифференциальный выход параметрического рентгеновского излучения

Подставляя (7) и (16) в (15), получаем выражение для дифференциального по углам выхода ПРИ:

$$Y_{\text{PXR}} = \frac{dN_{\text{PXR}}}{d\Omega} = \frac{\alpha z^2 M |\chi_{\text{g}}(\omega_{\text{PXR}})|^2}{[c/(V\sqrt{\epsilon}) - \cos \theta]^2} \frac{\delta_{\perp}^2 + \delta_{\parallel}^2 \cos^2(2\phi)}{(\gamma_{\text{eff}}^2 + \delta_{\perp}^2 + \delta_{\parallel}^2)^2}, \quad (17)$$

где частота излучения  $\omega_{\text{PXR}}$  описывается выражением (10),  $\delta_{\perp}, \delta_{\parallel} \ll 1$  — малые углы, определяющие направление распространения излучения относительно направления центра рефлекса ПРИ. Углы  $\delta_{\perp}, \delta_{\parallel}$  отсчитываются в направлениях, перпендикулярном и параллельном плоскости дифракции для ПРИ соответственно. Плоскость дифракции для ПРИ проходит через векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{g}$ . Угол между направлением вектора скорости налетающих частиц  $\mathbf{V}$  и центром рефлекса ПРИ равен  $2\phi$  в плоскости дифракции,  $\theta = 2\phi - \delta_{\parallel}$ ,  $M$  — число кристаллографических плоскостей, участвующих в формировании рефлекса ПРИ. В случае кристалла, прозрачного на

частотах  $\omega_{\text{ПХР}}$ ,  $M$  — это просто число кристаллографических плоскостей, которое пересекает частица. В случае поглощающего кристалла  $M$  уменьшается вследствие ослабления излучения в кристалле, и эффективное число кристаллографических плоскостей, принимающих участие в формировании рефлекса ПРИ, тогда можно найти по следующей формуле (см., например, (13), (14) в [27]):

$$M = \frac{T_e}{2\pi} \left| \frac{\mathbf{g}\mathbf{v}}{\mathbf{t}\mathbf{v}} \right| \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T}{T_e |\mathbf{t}\mathbf{v}|}\right) \right], \quad (18)$$

где  $\mathbf{t}$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности пластины,  $\mathbf{\Omega}$  — единичный вектор в направлении распространения излучения,  $\mathbf{v} = \mathbf{V}/V$  — единичный вектор в направлении движения частицы,  $T$  — толщина кристаллической пластины,  $T_e$  — длина, на которой излучение с частотой  $\omega_{\text{PXR}}$  ослабляется в  $e$  раз,  $T_e = 1/\mu$ ,  $\mu$  — коэффициент ослабления излучения в кристалле.

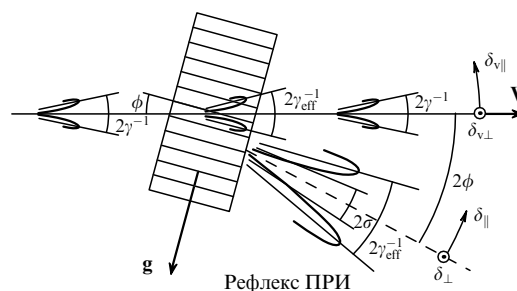
Как следует из (17), максимальный выход ПРИ осуществляется под углом  $\eta = \gamma_{\text{eff}}^{-1}$ , где  $\eta = (\delta_{\perp}^2 + \delta_{\parallel}^2)^{1/2}$  — угол отклонения от центра рефлекса в произвольном направлении. Область углового распределения с  $\eta \sim \gamma_{\text{eff}}^{-1}$  называют рефлексом ПРИ (PXR reflection), а угол  $\gamma_{\text{eff}}^{-1}$  — угловым размером рефлекса ПРИ. В центре рефлекса ПРИ имеется провал, в котором выход излучения уменьшается до нуля при  $\delta_{\perp}, \delta_{\parallel} = 0$ . Форма углового распределения числа реальных фотонов в рефлексе ПРИ (17) подобна таковой для числа виртуальных фотонов частицы (5), но коэффициенты в (17) различны для разных направлений поляризации излучения. Можно сказать, что рефлекс ПРИ является отражением распределения виртуальных фотонов (5) с частотой  $\omega_{\text{PXR}}$  при учёте поляризации излучения. Типичная схема генерации рефлекса ПРИ показана на рис. 2.

Выражение (17) совпадает с выражением, полученным в рамках теории Тер-Микаеляна в приближении малых углов (см. (15), (22) в [17]), с точностью до множителя

$$\varepsilon^{7/2} \left( \frac{V}{c} \right)^2 \approx \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]^{7/2} (1 - \gamma^{-2}).$$

В случае рентгеновского излучения при  $\gamma \gg 1$  этот множитель практически равен единице. Например,  $\varepsilon^{7/2} \approx 1 - 3,3 \times 10^{-5}$  в монокристалле Si при  $\hbar\omega = 10$  кэВ, а  $(V/c)^2 = 1 - 1,0 \times 10^{-4}$  для электронов с энергией 50 МэВ. Кроме того, выражение (17) близко к выражениям, полученным в рамках других версий кинематической теории ПРИ, которые обсуждаются в [28].

Кинематическая теория с помощью выражения (17) хорошо описывает экспериментально наблюдаемый выход ПРИ в областях максимумов рефлекса и на угловых расстояниях от его центра вплоть до десяти угловых размеров рефлекса ПРИ (см., например, [18, 29, 30]). При этом сравнение результатов теории ПРИ с экспериментальными данными в области центра рефлекса затруднено из-за наличия в ней других видов излучения. Например, в области центра рефлекса могут находиться пики подвергшихся дифракции тормозного излучения частицы в кристалле и переходного излучения, возникающего при влёте частицы в кристалл. Интенсивность таких видов излучения может намного превышать интенсивность ПРИ вблизи центра рефлекса. Например,



**Рис. 2.** Типичная схема производства рефлекса ПРИ, показанная в плоскости дифракции. Угловые координаты  $\delta_{v\perp}$ ,  $\delta_{\perp}$ , которые отсчитываются в направлениях, перпендикулярных этой плоскости, показаны кружками с точками. Заряженная частица, движущаяся постоянной скоростью  $V$  в вакууме, пересекает кристаллическую пластину. Одна из кристаллографических плоскостей кристалла с ненулевым структурным фактором, показанная штриховой линией, описывается вектором обратной решётки  $\mathbf{g}$ . Угловые распределения числа виртуальных фотонов частицы в стационарном состоянии представлены диаграммами на разных участках траектории частицы: распределение в кристалле (5) с максимальным числом виртуальных фотонов при углах  $\delta_{v\perp}, \delta_{v\parallel} = \pm\gamma_{\text{эф}}^{-1}$  и распределение в вакууме (5) до влёта и после вылета частицы из кристалла с величиной  $\gamma^{-1}$  вместо  $\gamma_{\text{эф}}^{-1}$  и с максимальным числом виртуальных фотонов при углах  $\delta_{v\perp}, \delta_{v\parallel} = \pm\gamma^{-1}$ ;  $\phi$  — угол между кристаллографическими плоскостями и вектором  $V$ , а рефлекс ПРИ испускается под углом  $2\phi$  к вектору  $V$ . Угловое распределение выхода реальных фотонов в рефлексе ПРИ (17) показано диаграммой, максимальный выход в рефлексе ПРИ находится под углами  $\delta_{\perp}, \delta_{\parallel} = \pm\gamma_{\text{эф}}^{-1}$  относительно направления центра рефлекса, показанного штриховой линией. Отмечена также область углов  $2\sigma$  (31), в которой возможны эффективные проявления динамической дифракции ПРИ.

наблюдавшийся в экспериментах [18, 29] выход излучения в центре рефлекса составлял около половины от выхода излучения в максимумах рефлекса, в отличие от провала до нуля, предсказываемого кинематической теорией ПРИ (см. (17)). Таким образом, выход ПРИ в области центра рефлекса маскируется другими видами излучения.

Одной из особенностей теории Тер-Микаеляна является предсказание асимметрии выхода излучения в рефлексе ПРИ в плоскости дифракции относительно центра рефлекса при сколь угодно большой энергии налетающих частиц. Недавно это предсказание проверялось в работе [27] посредством сравнения с экспериментальными данными, полученными с высоким угловым разрешением при условии  $\gamma^{-2} < |\chi_0|$  [29], когда выход ПРИ подавлен вследствие влияния эффекта плотности (при высокой энергии (255 МэВ) налетающих электронов), и при условии  $\gamma^{-2} > |\chi_0|$  [18], когда влияние эффекта плотности незначительно (при умеренных энергиях налетающих электронов 15,7 и 25,7 МэВ). Сравнение показало хорошее согласие экспериментально наблюдаемой асимметрии в рефлексе ПРИ, испущенном в переднюю полусферу, с рассчитанной с помощью выражений (15), (22) из [17], которые практически совпадают с полученным нами выражением (17). Асимметрия в (17) видна при учёте соотношения  $\theta = 2\phi - \delta_{\parallel}$ .

Наблюдавшийся в экспериментах абсолютный дифференциальный выход в максимумах рефлекса ПРИ из тонкого кристалла кремния составляет, например, около  $2 \times 10^{-4}$  квантов на электрон на 1 ср при энергии электронов 25,7 МэВ [18] и порядка  $5 \times 10^{-3}$  квантов на электрон на 1 ср при энергии электронов 855 МэВ [28].

Кристаллы, состоящие из лёгких элементов, наилучшим образом подходят для генерации рефлексов ПРИ [31]. Двумерное изображение углового распределения выхода числа квантов в рефлексе ПРИ впервые наблюдалось в [32], а измеренное с высоким угловым разрешением приведено в [29]. Результаты расчётов структуры дифференциального выхода в рефлексах ПРИ, испущенных под различными углами в переднюю и заднюю полусферы, показаны на рисунках в работах [26, 33].

Выше мы обсуждали только ПРИ с частотой  $\omega_{\text{ПРИ}}$  (10) первого порядка. Возможно также производство ПРИ с кратными частотами, но не с произвольной кратностью. Условием существования рефлекса ПРИ является отличие от нуля структурного фактора кристаллографической плоскости. Например, возможно производство ПРИ на кристаллографических плоскостях (111) и с утроенной частотой на плоскостях (333) кристалла со структурой алмаза, но производство ПРИ с удвоенной частотой на плоскостях (222) невозможно вследствие нулевого структурного фактора плоскости (222). Это условие аналогично условию существования отражения реального рентгеновского излучения от кристалла.

В случае нескольких рефлексов ПРИ суммарный выход излучения  $Y$  рассчитывается по формуле

$$Y = \sum_{\mathbf{g}} Y_{\text{ПРИ}}, \quad (19)$$

где суммирование проводится по плоскостям с ненулевыми структурными факторами.

Из формулы (17) можно увидеть, что при умеренных энергиях налетающих частиц при условии  $\gamma^2 \ll 1/|\chi_0|$  выход излучения в максимумах рефлекса ПРИ квадратично возрастает с увеличением энергии частиц, а угловой размер рефлекса уменьшается обратно пропорционально энергии частиц. Влияние эффекта плотности приводит к тому, что распределение (17) вообще перестаёт зависеть от энергии частиц при высоких энергиях налетающих частиц при условии  $\gamma^2 \gg 1/|\chi_0|$ . Смена поведения (17) происходит в области энергий частиц, соответствующей критической энергии при условии  $\gamma_{\text{crit}} = 1/\sqrt{|\chi_0|}$  [10, 18]. Например, для энергии  $\hbar\omega_{\text{ПРИ}} = 12,9$  кэВ ПРИ, возбуждаемого электронами в кристалле кремния, критическая энергия электронов составляет 212 МэВ. Физическая причина эффекта плотности связана с аналогичным поведением распределения (5) виртуальных фотонов в веществе, которые являются источником ПРИ.

## 9. Линейная поляризация излучения в рефлексе параметрического рентгеновского излучения

Известно, что виртуальные фотоны линейно поляризованы в радиальных направлениях по отношению к вектору скорости частицы. Рефлекс ПРИ образуется в результате дифракции поляризованных виртуальных фотонов. Поэтому дифференциальный по углам выход в рефлексе ПРИ также должен быть линейно поляризованным.

Следуя работе [34], будем описывать направление линейной поляризации в рефлексе ПРИ с помощью угла  $\rho$  между плоскостью поляризации излучения (плоскость, проходящая через волновой вектор и вектор электрического поля) и плоскостью дифракции. Тангенс угла  $\rho$

равен отношению перпендикулярной  $E_{\perp}$  и параллельной  $E_{\parallel}$  компонент электрического поля. С учётом коэффициентов Френеля (16) в приближении малых углов имеем

$$\tan \rho = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{F_{\perp} \sqrt{J_{v\perp}}}{F_{\parallel} \sqrt{J_{v\parallel}}} = -\frac{\delta_{\perp}}{\delta_{\parallel} \cos(2\phi)}. \quad (20)$$

Выражение (20) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для кривых  $\delta_{\perp} = \delta_{\perp}(\delta_{\parallel})$ , касательных к направлению вектора электрического поля (к направлению линейной поляризации излучения) в каждой точке:

$$\frac{d\delta_{\perp}}{d\delta_{\parallel}} = -\frac{\delta_{\perp}}{\delta_{\parallel} \cos(2\phi)}. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) даёт набор кривых с произвольной константой  $B$ :

$$\delta_{\perp} = B |\delta_{\parallel}|^{-1/\cos(2\phi)}, \quad (22)$$

которые описывают поляризационную структуру рефлекса ПРИ.

Отметим, что знак фазы коэффициента Френеля  $F_{\perp}$  (16) для ПРИ с перпендикулярной поляризацией не зависит от угла  $\phi$ . Однако знак фазы коэффициента Френеля  $F_{\parallel}$  (16) для ПРИ с параллельной поляризацией и знак показателя степени в (22) меняются вблизи угла излучения рефлекса  $2\phi = \pi/2$ . Это приводит к существенному различию структур линейной поляризации (22) в рефлексах ПРИ, испущенных в переднюю и заднюю полусферы. Кривые (22), касательные к направлениям линейной поляризации излучения, имеют гиперболическую форму в рефлексе ПРИ, испущенном в переднюю полусферу при  $2\phi < \pi/2$ , и параболическую в рефлексе ПРИ, испущенном в заднюю полусферу при  $2\phi > \pi/2$ .

Результаты расчётов структуры линейной поляризации в рефлексах ПРИ, испущенных под различными углами в переднюю и заднюю полусферы, приведены на рис. 2 в работе [34], а также на рисунках в работах [26, 33]. Результаты расчётов хорошо согласуются с результатами экспериментальных измерений поляризации ПРИ, выполненных в [35].

## 10. О применимости кинематического приближения для описания рефлекса параметрического рентгеновского излучения

ПРИ испускается частицей, движущейся внутри кристалла, а частота и направление распространения излучения в рефлексе ПРИ близки к условиям дифракции излучения в кристалле. Вскоре после опубликования кинематической теории [6] в работах [36, 37] была предложена динамическая теория ПРИ с учётом динамической дифракции ПРИ в кристалле. Согласно динамической теории излучение в рефлексе ПРИ испытывает дифракцию на том же семействе кристаллографических плоскостей, на котором оно производится, а подвергнувшееся дифракции излучение может испускаться в направлении вперёд вблизи вектора скорости частицы  $\mathbf{V}$ .

Позднее в экспериментальных исследованиях на ускорителях наблюдалось излучение в рефлексе ПРИ, основные свойства которого хорошо описываются кинематической теорией (см., например, [10, 11, 28–30]), но подвергнувшееся дифракции в направлении вперёд излучение

зарегистрировать не удавалось. В то же время дискуссии о природе, возможностях существования и наблюдения ПРИ в направлении вперёд продолжались (см., например, [7, 38–40] и краткий обзор этих дискуссий в [41]). Наконец, в экспериментах [41, 42] были зарегистрированы спектральные пики подвергнувшегося дифракции ПРИ в узком угловом интервале вблизи вектора скорости частиц  $\mathbf{V}$ . Ниже мы обсудим условия, при которых существенна дифракция ПРИ, и условия, при которых справедливо кинематическое приближение.

Частота спектрального пика ПРИ (10) несколько отличается от частоты Брэгга  $\omega_B$  в кристалле,

$$\omega_B = \frac{cg^2}{2\sqrt{\varepsilon}|\mathbf{\Omega g}|}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{\Omega}$  — единичный вектор в направлении распространения ПРИ. Явное выражение для нормированной разности частот Брэгга (23) и ПРИ (10) в приближении малых углов  $\delta_{\perp}, \delta_{\parallel} \ll 1$  вблизи центра рефлекса ПРИ получено в [43]:

$$\frac{\omega_B - \omega_{\text{ПРИ}}}{\omega_{\text{ПРИ}}} \approx \frac{\gamma^{-2} + |\chi_0| + \eta^2}{4 \sin^2 \phi} = \frac{\gamma_{\text{eff}}^{-2} + \eta^2}{4 \sin^2 \phi}, \quad (24)$$

где  $\eta = (\delta_{\perp}^2 + \delta_{\parallel}^2)^{1/2}$  — угол отклонения от центра рефлекса в произвольном направлении. Из (24) видно, что частота ПРИ всегда меньше частоты Брэгга, а разность частот минимальна в области центра рефлекса, при  $\eta = 0$ , где выход ПРИ близок к нулю согласно (17). В области максимального выхода излучения в рефлексе ПРИ, где  $\eta = \gamma_{\text{eff}}^{-1}$ , разность частот (24) выражается как  $\gamma_{\text{eff}}^{-2}/(2 \sin^2 \phi)$ . Разность частот (24) быстро возрастает при дальнейшем увеличении угла отклонения  $\eta$  от центра рефлекса ПРИ.

Известно, что эффективные проявления динамической дифракции в кристалле возможны в случае, когда луч монохроматического рентгеновского излучения отклоняется от точного направления Брэгга в пределах угла

$$\Delta\vartheta = \pm \frac{C|\chi_g|}{\sin(2\phi)}, \quad (25)$$

где множитель  $C = 1$  для перпендикулярной поляризации излучения ( $\sigma$ -поляризации), и  $C = |\cos(2\phi)|$  для параллельной ( $\pi$ -поляризации), а вне этих пределов проявления динамической дифракции они быстро уменьшаются [16]. В нашем случае фиксированного направления излучения соответствующие пределы отклонения частоты излучения от частоты Брэгга легко найти посредством дифференцирования закона Брэгга. Эти пределы выражаются как

$$\frac{\Delta\omega_B}{\omega_B} = \pm \frac{C|\chi_g|}{2 \sin^2 \phi}. \quad (26)$$

Сравнивая (24) и (26), оценим условия, при которых возможны эффективные проявления динамической дифракции ПРИ. Очевидно, что они возможны в случае, когда отклонение частоты ПРИ (24) находится в пределах (26), т.е. при

$$\frac{(\omega_B - \omega_{\text{ПРИ}})/\omega_{\text{ПРИ}}}{|\Delta\omega_B/\omega_B|} \leq 1. \quad (27)$$

Подставляя (24) и (26) в (27), получаем оценку углового размера центральной области рефлекса ПРИ  $\sigma_D$ , в которой возможны эффективные проявления динамической дифракции ПРИ:

$$\eta \leq \sigma_D = \gamma_{\text{eff}}^{-1} \sqrt{\frac{2C|\chi_g|}{\gamma_{\text{eff}}^2} - 1}. \quad (28)$$

Условием существования этого угла является положительность подкоренного выражения в (28),

$$2C|\chi_g| > \gamma_{\text{eff}}^{-2}. \quad (29)$$

Интересно отметить, что условие существования дифракции ПРИ (29) и угловой размер центральной области рефлекса ПРИ, в которой возможна дифракция (28), не зависят от направления испускания рефлекса ПРИ.

Далее рассмотрим наиболее благоприятный для проявления динамических эффектов случай перпендикулярной поляризации, т.е.  $C = 1$ , и достаточно высокой энергии налетающих частиц, когда величиной  $\gamma^{-2}$  можно пренебречь ввиду её малости по сравнению с  $|\chi_0|$ , т.е. при ярко выраженном эффекте плотности,

$$\gamma^{-2} \ll |\chi_0|. \quad (30)$$

При этом угловой размер рефлекса ПРИ  $\gamma_{\text{eff}}^{-1} = \sqrt{|\chi_0|}$  перестаёт зависеть от энергии налетающих частиц, оценка углового размера центральной области  $\sigma$  (28) становится зависящей только от свойств кристалла,

$$\eta \leq \sigma = \sqrt{|\chi_0|} \sqrt{\frac{2|\chi_g|}{|\chi_0|} - 1}, \quad (31)$$

а условие (29) приобретает вид

$$2C|\chi_g| > |\chi_0|. \quad (32)$$

Отметим, что всегда  $\sigma > \sigma_D$ . Положение центральной области рефлекса с угловым размером  $\sigma$  показано на рис. 2. Угловой размер области (31) можно выразить (нормировать) в единицах углового размера рефлекса ПРИ,

$$\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{|\chi_0|}} = \sqrt{\frac{2C|\chi_g|}{|\chi_0|} - 1}. \quad (33)$$

Неравенства (29) и (32) можно рассматривать как критерий для выбора кристаллографических плоскостей, на которых возможна динамическая дифракция, а выражения (28), (31) и (33) могут быть использованы для оценки угловых размеров центральной области рефлекса ПРИ, в которой динамическая дифракция может быть существенной. Не исключены также менее выраженные эффекты динамической дифракции и повышенного ослабления излучения вблизи границ области (28), (31), (33), а также проявления побочных максимумов маятникового решения вблизи этой области для тонких кристаллов.

Ниже подробнее рассмотрим случай перпендикулярной поляризации, т.е.  $C = 1$ . В этом случае, как отмечалось выше, условие существования дифракции ПРИ (32) и угловой размер центральной области (33) зависят

только от свойств кристалла,

$$2|\chi_g| > |\chi_0|, \quad (34)$$

$$\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{|\chi_0|}} = \sqrt{\frac{2|\chi_g|}{|\chi_0|}} - 1. \quad (35)$$

Наиболее популярным кристаллом в экспериментах по ПРИ является монокристалл кремния, поэтому сделаем оценки применительно к этому кристаллу. Расчёты показывают, что при частотах ПРИ, превышающих частоты атомных переходов и вне резонансных частот, условие (34) выполняется только для трёх кристаллографических плоскостей с ненулевым структурным фактором: (111), (220) и (400), а угловой размер области  $\sigma_N$  (35) составляет 0,275, 0,45 и 0,077 от величины углового размера рефлекса ПРИ соответственно. Это означает, что только небольшая центральная угловая часть рефлексов ПРИ, в которой выход излучения минимален, может эффективно подвергнуться дифракции. Для других кристаллографических плоскостей кристалла кремния условие (34) не выполняется.

Похожая ситуация имеет место и для кристалла германия, в котором угловой размер области  $\sigma_N$  (33) составляет 0,47, 0,67, 0,45 и 0,18 для кристаллографических плоскостей с ненулевыми структурными факторами, удовлетворяющими условию (34), — это плоскости (111), (220), (400) и (422) соответственно. Наиболее заметных проявлений динамической дифракции ПРИ можно ожидать в рефлексах ПРИ от кристаллографической плоскости (220) в обоих кристаллах. Ситуация с другими кристаллами требует отдельного анализа.

Эксперименты по наблюдению двумерного углового распределения выхода в рефлексе ПРИ от кристаллографической плоскости (220) кристалла кремния выполнялись в [29, 32]. В указанных работах основные свойства рефлекса хорошо описываются кинематической теорией ПРИ и привлечения представлений о динамической дифракции не потребовалось. Однако это не исключает возможности дифракции в направлении вперёд некоторой части излучения из центральной области рефлекса ПРИ.

В эксперименте [41] наблюдалось подвергнувшееся дифракции излучение из области рефлекса ПРИ от кристаллографической плоскости (111) монокристалла кремния. Излучение наблюдалось в направлении вперёд в угловом диапазоне вплоть до углов приблизительно  $\pm 0,36\sqrt{|\chi_0|}$  относительно вектора скорости частицы (см. рис. 3 в [41]). Эти углы находятся вблизи полученной выше оценки границ области углов (31) для данной плоскости  $\pm 0,275\sqrt{|\chi_0|}$ .

Очевидно, что кинематическая теория не может описывать свойства наблюдавшегося в [41, 42] ПРИ, которое подверглось дифракции в направлении вперёд. Проявления динамических эффектов в области центра рефлекса ПРИ могут быть малозаметными из-за малой интенсивности ПРИ в этой области и маскирующего влияния других видов подвергнувшегося дифракции излучения, которые обсуждались в разделе 8. Поэтому в экспериментах по наблюдению рефлексов ПРИ проявления динамической дифракции ПРИ слабо выражены и свойства рефлекса хорошо описываются кинематической теорией.

Отметим, что, хотя частота ПРИ в рефлексе и частота подвергнувшихся дифракции иных видов излучения близки между собой, они всё же различаются (см. (24)), что даёт возможность разделять вклады излучений разного вида по частоте [43].

## 11. Результаты и обсуждение

Квадраты модулей коэффициентов Френеля для ПРИ (16)

$$|F_{\perp}|^2 = M|q_{g\perp}(\omega_{\text{ПРИ}})|^2 = \frac{M\pi^2|\chi_g(\omega_{\text{ПРИ}})|^2}{[c/(V\sqrt{\epsilon}) - \cos\theta]^2}, \quad (36)$$

$$|F_{\parallel}|^2 = M|q_{g\parallel}(\omega_{\text{ПРИ}})|^2 = \frac{M\pi^2|\chi_g(\omega_{\text{ПРИ}})|^2 \cos^2(2\phi)}{[c/(V\sqrt{\epsilon}) - \cos\theta]^2}$$

совпадают с точностью до множителя  $\epsilon^{7/2}(V/c)^2 \approx 1$ , обсуждавшегося в разделе 8, с приведёнными в [27] выражениями (12), для коэффициентов преобразования числа виртуальных квантов в реальные, хорошо аппроксимирующими экспериментальные данные по выходу ПРИ.

Величины коэффициентов преобразования (36) для типичных экспериментальных случаев, приведённые в [27], имеют порядок  $10^{-4}$  для низкоиндексных кристаллографических плоскостей кристалла кремния. Казалось бы, коэффициенты преобразования (36) можно увеличить, повышая число кристаллографических плоскостей  $M$ , т.е. толщину кристалла. К сожалению, эффективное число  $M$  ограничено ослаблением излучения в кристалле (см. (18)). Очевидно, что фазы коэффициентов Френеля не могли быть найдены из экспериментальных данных по выходу ПРИ в [27] вследствие известной "фазовой проблемы" в структурном анализе [15]. Между тем если фазы коэффициентов Френеля известны, то это позволяет, например, легко определить рассмотренную выше поляризационную структуру рефлекса ПРИ.

В настоящей статье выражения для угловых распределений выхода и поляризации излучения в рефлексе ПРИ получены в первом порядке малости по углам отклонения от центра рефлекса. При рассмотрении в следующем порядке оказывается, что выражения для угловых распределений выхода и направлений линейной поляризации в рефлексе ПРИ, который испускается перпендикулярно к пучку частиц под углом  $2\phi = \pi/2$ , полученные в [34, 44], несколько отличаются от выражений (17), (22) и содержат новые особые точки. Однако экспериментальных исследований свойств такого рефлекса с точностью, достаточной для сравнения с результатами обоих расчётов, пока, насколько нам известно, не проведено.

Приведённые выше оценки показывают, что условия для эффективных проявлений динамической дифракции ПРИ в рассмотренных кристаллах выполняются только для некоторых низкоиндексных кристаллографических плоскостей в центральной угловой области рефлекса ПРИ, где выход ПРИ является малым и маскируется другими видами излучения частицы. Поэтому влияние этого явления на наблюдавшийся в экспериментах выход излучения в рефлексе ПРИ невелико и основные свойства излучения в рефлексе ПРИ хорошо описываются кинематической теорией. Это не исключает существования подвергнувшейся дифракции в направлении вперёд некото-



рой части ПРИ из центральной области рефлекса, что и подтверждается наблюдениями в работах [41, 42].

В настоящей статье рассмотрены свойства ПРИ из прямого (неизогнутого) кристалла. Однако эти свойства могут резко изменяться в случае генерации ПРИ в изогнутом кристалле. Например, возможна фокусировка ПРИ, которое испускается частицей, движущейся в режиме каналирования вдоль изогнутого кристалла [25]. Кроме того, излучение в максимуме рефлекса ПРИ, пройдя некоторый путь в кристалле, может попасть в условия динамической дифракции вследствие изгиба кристалла (см. пример, приведённый в [26]). Но пока ПРИ из изогнутого кристалла мало изучено.

ПРИ возникает благодаря взаимодействию поля налетающей частицы с электронной подсистемой кристалла. Одновременно в кристалле возникает когерентное тормозное излучение вследствие взаимодействия частицы с ядерной подсистемой кристалла [6]. Периодичности электронной и ядерной подсистем в кристалле, естественно, одинаковы. Поэтому частота спектральных пиков когерентного тормозного излучения при условии  $\hbar\omega \ll \gamma mc^2$  описывается той же формулой (10), что и частота ПРИ. Максимум интенсивности когерентного тормозного излучения находится в области углов  $\sim \gamma^{-1}$  вблизи вектора скорости частицы  $\mathbf{V}$ , а рефлекс ПРИ обычно испускается под большим углом к вектору  $\mathbf{V}$ , и эти два типа излучения не влияют друг на друга. Однако в случае, когда рефлекс ПРИ испускается вблизи вектора  $\mathbf{V}$ , их интенсивности могут быть сравнимыми между собой и возможны проявления их интерференции. Интерференция ПРИ и когерентного тормозного излучения исследовалась в работах [45–47].

Все рассмотренные выше свойства ПРИ не зависят от знака заряда налетающей частицы. Однако фазы излучения положительно и отрицательно заряженных частиц противоположны, что может быть важным, например, при рассмотрении ПРИ электронно-позитронных пар. Выход ПРИ (17) квадратично зависит от заряда частицы. Это обстоятельство можно использовать для экспериментального определения зарядового состояния релятивистских ионов, движущихся в кристалле. Отметим, что ПРИ применяется для получения как теневых, так и фазово-контрастных изображений (см., например, [48]).

## 12. Заключение

В настоящей статье мы получили аналитические выражения для коэффициентов Френеля для ПРИ, показали построение варианта кинематической теории с использованием коэффициентов Френеля и продемонстрировали, что эту теорию можно использовать для расчёта основных свойств излучения в рефлексе ПРИ.

Показано, что результаты расчётов основных наблюдаемых свойств рефлекса ПРИ, таких как частота спектрального пика ПРИ, ширина спектрального пика ПРИ, а также тонкой структуры дифференциального выхода и поляризации ПРИ находятся в хорошем согласии с результатами кинематической теории [6] и с приведёнными в литературе экспериментальными данными по рефлексу ПРИ.

## Благодарности

Автор выражает благодарность Н.Ф. Шульге и А.П. Потылицыну за обсуждения доклада по основным резуль-

татам работы на симпозиуме [49]. Работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект 3.2009.2014/К).

## Список литературы

1. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1968); Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)
2. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1999)
3. Франк И М *УФН* **87** 189 (1965); Frank I M *Sov. Phys. Usp.* **8** 729 (1966)
4. Гинзбург В Л, Цытович В Н *УФН* **126** 553 (1978); Ginzburg V L, Tsytovich V N *Phys. Rep.* **49** 1 (1979)
5. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984); Ginzburg V L, Tsytovich V N *Transition Radiation and Transition Scattering* (Bristol: A. Hilger, 1990)
6. Тер-Микаелян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1969); Ter-Mikaelian M L *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media* (New York: Wiley-Interscience, 1972)
7. Тер-Микаелян М Л *УФН* **171** 597 (2001); Ter-Mikaelian M L *Phys. Usp.* **44** 571 (2001)
8. Файнберг Я Б, Хижняк Н А *ЖЭТФ* **32** 883 (1957); Fainberg Ya B, Khizhnyak N A *Sov. Phys. JETP* **5** 720 (1957)
9. Nitta H *Phys. Lett. A* **158** 270 (1991)
10. Shchagin A V, Maruyama X K, in *Accelerator-Based Atomic Physics. Techniques and Applications* (Eds S M Shafroth, J C Austin) (New York: AIP Press, 1997) p. 279
11. Потылицын А П *Излучение электронов в периодических структурах* (Томск: НТЛ, 2009); Potylitsyn A P *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures* (Heidelberg: Springer, 2011)
12. Базылев В А, Жеваго Н К *Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях* (М.: Наука, 1987)
13. Potylitsyn A P, Vnukov I E, in *Electron-Photon Interaction in Dense Media* (NATO Science Series, Ser. II, Vol. 49, Ed. H Wiedemann) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002) p. 25
14. Als-Nielsen J, McMorrow D *Elements of Modern X-ray Physics* 2nd ed. (Hoboken: Wiley, 2011)
15. Жданов Г С, Илюшин А С, Никитина С В *Дифракционный и резонансный структурный анализ* (М.: Наука, 1980)
16. Пинскер З Г *Рентгеновская кристаллооптика* (М.: Наука, 1982); Pinsker Z G *Dynamical Scattering of X-Rays in Crystals* (New York: Springer, 1978)
17. Shchagin A V *Radiation Phys. Chem.* **61** 283 (2001)
18. Shchagin A V, Khizhnyak N A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **119** 115 (1996)
19. Shchagin A V, Pristupa V I, Khizhnyak N A *Phys. Lett. A* **148** 485 (1990)
20. Shchagin A V, in *Electron-Photon Interaction in Dense Media* (NATO Science Series, Ser. II, Vol. 49, Ed. H Wiedemann) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002) p. 133
21. Мороховский В Л, Щагин А В *ЖТФ* **60** (5) 147 (1990); Morokhovskii V L, Shchagin A V *Sov. Phys. Tech. Phys.* **35** 623 (1990)
22. Shchagin A V *J. Phys. Conf. Ser.* **236** 012020 (2010)
23. Brenzinger K-H et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2462 (1997)
24. Шульга Н Ф, Табризи М *Письма в ЖЭТФ* **76** 337 (2002); Shul'ga N F, Tabrizi M *JETP Lett.* **76** 279 (2002)
25. Щагин А В *Письма в ЖЭТФ* **80** 535 (2004); Shchagin A V *JETP Lett.* **80** 469 (2004)
26. Shchagin A V, in *Advanced Radiation Sources and Applications* (NATO Science Series, Ser. II, Vol. 199, Ed. H Wiedemann) (Dordrecht: Springer, 2006) p. 27
27. Shchagin A V, Takabayashi Y *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **309** 198 (2013)
28. Brenzinger K-H et al. *Z. Phys. A* **358** 107 (1997)
29. Takabayashi Y, Shchagin A V *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **278** 78 (2012)
30. Shchagin A V, Pristupa V I, Khizhnyak N A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **99** 277 (1995)
31. Sones B, Danon Y, Block R C *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **227** 22 (2005)

32. Fiorito R B et al. *Phys. Rev. E* **51** R2759 (1995)
33. Щагин А В, Сотников В В *Вопросы атомной науки и техники, Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения* (4(6)) 316 (2008)
34. Shchagin A V *Phys. Lett. A* **247** 27 (1998)
35. Morokhovskii V V et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 4389 (1997)
36. Барышевский В Г, Феранчук И Д *ЖЭТФ* **61** 994 (1971); Baryshevskii V G, Feranchuk I D *Sov. Phys. JETP* **34** 502 (1972)
37. Гарибян Г М, Ян Ши *ЖЭТФ* **61** 930 (1971); Garibian G M, Yang C *Sov. Phys. JETP* **34** 495 (1972)
38. Baryshevsky V G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **122** 13 (1997)
39. Artru X, Rullhusen P *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **145** 1 (1998); addendum: *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **173** 16 (2001)
40. Nitta H J. *Phys. Soc. Jpn.* **69** 3462 (2000)
41. Backe H et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **234** 138 (2005)
42. Алейник А Н и др. *Письма в ЖЭТФ* **80** 447 (2004); Aleinik A N et al. *JETP Lett.* **80** 339 (2004)
43. Щагин А В *Вестн. Харьковского национального ун-та. Сер. физическая. Ядра, частицы, поля* (3(39)) 91 (2008)
44. Shchagin A V *Phys. Lett. A* **262** 383 (1999)
45. Blazhevich S V et al. *Phys. Lett. A* **195** 210 (1994)
46. Kleiner V L, Nasonov N N, Safronov A G *Phys. Status Solidi B* **181** 223 (1994)
47. Morokhovskiy V V et al. *Phys. Rev. B* **61** 3347 (2000)
48. Hayakawa Y et al. *JINST* **8** C08001 (2013)
49. Shchagin A V, in *X Intern. Symp. Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures, Lake Sevan, Armenia, September 23–28, 2013 Book of Abstracts* (Tomsk: Tomsk Polytechnic Univ. Publ. House, 2013) p. 49

### Fresnel coefficients for parametric X-ray (Cherenkov) radiation

A.V. Shchagin

Belgorod State National Research University,  
ul. Pobedy 85, 308015 Belgorod, Russian Federation;  
National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology,  
ul. Akademicheskaya 1, 61108 Kharkov, Ukraine  
E-mail: shchagin@kipt.kharkov.ua

Parametric X-ray (Cherenkov) radiation (PXR) is considered as resulting from the crystal diffraction of virtual photons associated with a relativistic charged particle moving through the crystal. Formulas for PXR Fresnel coefficients are obtained in a kinematic approach, whose applicability is discussed. The derivation of the version of kinematic RXR theory using the Fresnel coefficients is described. Also using these coefficients, analytical expressions for the frequency, spectral peak width, differential by angles yield and polarization of PXR are obtained and shown to compare well with the kinematic PXR theory of Ter-Mikaelian and with experimental PXR reflection studies.

**Keywords:** parametric X-ray radiation, Fresnel coefficients, virtual photons, crystal diffraction

PACS numbers: 41.20.Jb, **41.60. – m**, 42.25.Bs, 61.80.Cb

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508g.0885

Bibliography — 49 references

Received 5 September 2014, revised 15 January 2015

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **185** (8) 885–894 (2015)

*Physics–Uspekhi* **58** (8) (2015)