

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Кулоновская задача с зарядом ядра $Z > Z_{\text{cr}}$

В.М. Кулешов, В.Д. Мур, Н.Б. Нарожный,
А.М. Федотов, Ю.Е. Лозовик, В.С. Попов

Получено замкнутое уравнение для критического заряда ядра, т.е. такого значения $Z = Z_{\text{cr}}$, при котором дискретный уровень с дираковским квантовым числом κ достигает границы нижнего континуума решений уравнения Дирака. В модели с прямоугольным обрезанием кулоновского потенциала на малых расстояниях $r_0 = R\hbar/(mc)$, $R \ll 1$, определены критические значения заряда ядра для нескольких значений κ при различных радиусах обрезания. Показано, что парциальная матрица упругого рассеяния позитронов на ядре $S_\kappa = \exp(2i\delta_\kappa(\epsilon_p))$ унитарна и при $Z > Z_{\text{cr}}$. Для $Z > Z_{\text{cr}}$ вычислены фаза рассеяния $\delta_\kappa(\epsilon_p)$ как функция энергии позитронов $E_p = \epsilon_p mc^2$, а также положения и ширины квазистационарных уровней, отвечающих полюсам матрицы рассеяния. Это означает, что не только при $Z < Z_{\text{cr}}$, но и при $Z > Z_{\text{cr}}$ справедливо одночастичное приближение для уравнения Дирака и спонтанное рождение e^+e^- -пар из вакуума отсутствует.

Ключевые слова: кулоновская задача, точечное ядро, граничные условия, критический заряд, фаза рассеяния, брейт-вигнеровский резонанс

PACS numbers: 03.65.Pm, 12.20. – m, 73.22.Pr

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508d.0845

Содержание

1. Введение (845).
 2. Граничные условия (846).
 3. Кулоновская задача с короткодействием (847).
 4. Дискретный спектр (848).
 5. Волновые функции нижнего континуума (848).
 6. Заключение (850).
 7. Приложение (851).
- Список литературы (851).

1. Введение

Задолго до вывода Дираком знаменитого уравнения для электрона формула для энергий ϵ_d дискретных уровней в релятивистской кулоновской задаче была получена Зоммерфельдом [1] в рамках боровской теории атома, а на основе уравнения Дирака в поле точечного заряда Z (в единицах электронного заряда) она была получена в

работах [2–5] (см. также монографии [6, 7]):

$$\epsilon_{n_r}(\kappa; Z) = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} + n_r \right)^2} \right]^{-1/2}, \quad (1)$$

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \kappa < 0, \\ 1, 2, \dots, & \kappa > 0. \end{cases}$$

Здесь дираковское квантовое число $\kappa = \mp(j + 1/2)$ представляет собой собственное значение оператора $K = \beta(1 + \Sigma \mathbf{L})$ (см. [8, 9]), j — сохраняющийся полный угловой момент электрона, n_r — аналог радиального квантового числа в теории Шрёдингера. Как правило, используется система единиц $\hbar = c = m = 1$, в которой постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137,04$ (m и $-e$ — масса и заряд электрона).

Энергия основного состояния ($1s_{1/2}$: $\kappa = -1$, $n_r = 0$) (1) обращается в нуль при $Z = 137$, а при $Z > 137$ становится комплексной, так что формула Зоммерфельда теряет смысл. Однако, как заметили Померанчук и Смородинский [10], это справедливо только для точечного заряда. Для ядра с конечным радиусом энергия нижнего дискретного уровня с возрастанием Z продолжает уменьшаться до тех пор, пока он не достигнет границы нижнего континуума решений уравнения Дирака при некотором "критическом" значении заряда $Z = Z_{\text{cr}}$. При вычислении Z_{cr} в модели прямоугольного обрезания кулоновского потенциала (поверхностное распределение заряда) при радиусе ядра $r_0 = 12 \text{ Ф}$ (что соответствует $R = 0,031$ в единицах $\hbar/(mc) = 3,86 \times 10^{-11} \text{ см}$) авторы работы [10] получили завышенное значение: $Z_{\text{cr}} = 200$. Точный расчёт для голого ядра в этой же модели даёт $Z_{\text{cr}} = 177$ [11, 12].

В.М. Кулешов, В.Д. Мур, Н.Б. Нарожный, А.М. Федотов.
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: narozhny@theor.mephi.ru

Ю.Е. Лозовик. Институт спектроскопии РАН,
ул. Физическая 5, 142190 Троицк, Москва, Российская Федерация
E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

В.С. Попов. Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А.И. Алиханова Национального исследовательского центра
"Курчатовский институт",
ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 16 июня 2015 г.

Если Z становится больше Z_{cr} , то первый дискретный уровень исчезает из спектра. Такое поведение основного уровня в кулоновской задаче аналогично движению уровней в прямоугольной потенциальной яме с увеличением её глубины. Шифф, Снайдер и Вайнберг [13] показали, что при некоторой глубине V_0 ямы нижний уровень энергии электрона достигает значения $-mc^2$. При дальнейшем углублении ямы этот уровень исчезает, переходя в непрерывный спектр (нижний континуум). Для объяснения этого явления авторы работы [10], используя интерпретацию Шиффа, Снайдера и Вайнберга, предположили, что если поместить электрон в поле сверхкритического ядра, то результат будет состоять в исчезновении электрона и уменьшении заряда вакуума на заряд одного электрона, т.е. произойдёт "падение" электрона на ядро.

В дальнейшем эти вопросы рассматривались в статьях [11, 12, 14–23] и монографиях [8, 24, 25]. Согласно указанным работам, в случае голого ядра при $Z > Z_{\text{cr}}$ возможно рождение e^+e^- -пар из вакуума, причём позитроны уходят на бесконечность, а остающиеся электроны экранируют заряд ядра, который уменьшается на две единицы, образуя сверхкритический атом [23]. Мы покажем, что такая интерпретация явлений при заряде ядра $Z > Z_{\text{cr}}$ неправомерна, а именно: дискретный уровень после достижения им границы нижнего континуума исчезает из спектра, сталкиваясь с виртуальным уровнем и превращаясь вместе с ним в пару брейт-вигнеровских уровней с комплексной энергией на втором, нефизическом, листе. При этом ближайший к физической области брейт-вигнеровский уровень с энергией $\varepsilon_{\text{BW}}^{(+)} = -\varepsilon_0 + i\gamma/2$, $\varepsilon_0 > 1$, $\gamma > 0$, отвечает резонансу в рассеянии позитронов с энергией $\varepsilon_p = -\varepsilon \geq 1$ на ядре, причём комплексные энергии квазистационарного состояния $\varepsilon_{\text{qs}} = -\varepsilon_{\text{BW}}^{(+)} = -\varepsilon_0 - i\gamma/2$, где ε_0 — положение квазидискретного уровня, а γ — его ширина¹.

В последние годы обсуждаемые вопросы оказались актуальными в далёкой, казалось бы, от ядерной физики области — физике нерелятивистских двумерных гетероструктур. Дело в том, что в зависимости от подложки электронные свойства графена описываются эффективным бесщелевым или, наоборот, со щелью (см., например, [26–28]) двумерным уравнением Дирака. При наличии кулоновской примеси энергетический спектр двумерной кулоновской задачи в силу аксиальной симметрии определяется системой уравнений, которая с точностью до обозначений совпадает с рассматриваемой в настоящей статье трёхмерной радиальной дираковской системой. При этом эффективная постоянная тонкой структуры оказывается большой по сравнению с $1/137$, а Z_{cr} — близким к единице [29]. Это открывает уникальную возможность экспериментально проверить теорию атомов со сверхкритическим зарядом.

В разделе 2 обсуждаются граничные условия, обеспечивающие самосопряжённость радиального дираковского гамильтониана. В разделе 3 кратко рассматривается кулоновская задача с короткодействием, в которой самосопряжённость гамильтониана обеспечивается модификацией кулоновского потенциала на малых рас-

стояниях. В разделе 4 получены волновые функции дискретных уровней и вычислены как их энергии, так и соответствующие значения критического заряда. Волновые функции нижнего континуума, матрица рассеяния и её полюсы при комплексных энергиях, отвечающих положениям и ширинам квазистационарных состояний при $Z > Z_{\text{cr}}$, рассмотрены в разделе 5. Раздел 6 посвящён заключительным замечаниям. В приложении кратко обсуждается вычисление критического заряда Z_{cr} .

2. Граничные условия

Радиальные функции уравнения Дирака с кулоновским потенциалом $V_C(r) = -Z\alpha/r$ удовлетворяют системе уравнений [8]:

$$H_D \Psi_{\varepsilon, \kappa}(r) = \varepsilon \Psi_{\varepsilon, \kappa}(r), \quad (2)$$

$$H_D = \begin{pmatrix} 1 - \frac{Z\alpha}{r} & \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \\ -\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} & -1 - \frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\varepsilon, \kappa} = \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix},$$

где ε — безразмерная энергия, κ — дираковское квантовое число, принимающее значения $\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots$. Поскольку кулоновский потенциал $V_C(r)$ "вымирает" на больших расстояниях, то, как известно, значениям $\varepsilon \geq 1$ отвечает верхний континуум решений уравнения Дирака, области $-1 < \varepsilon_d < 1$ — дискретный спектр², а значениям $\varepsilon \leq -1$ — нижний континуум [8].

Для того чтобы дифференциальный оператор H_D стал оператором H , действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(R_+)$ квадратично интегрируемых на вещественной полуоси $R_+ = [0, \infty)$ функций с эрмитовым скалярным произведением

$$(\Psi_2, \Psi_1) = \int_0^\infty \Psi_2^+(r) \Psi_1(r) dr \quad (3)$$

и нормой

$$(\Psi, \Psi) = |\Psi|^2 = \int_0^\infty (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) dr, \quad (4)$$

необходимо, чтобы H_D удовлетворял определённым граничным условиям. Поскольку H является неограниченным оператором, минимально необходимым требованием для него являются условия [30]

$$H\Psi = H_D\Psi, \quad D(H) = \{\Psi \in \mathcal{L}^2(R_+), H_D\Psi \in \mathcal{L}^2(R_+)\}, \quad (5)$$

где $D(H)$ — область определения оператора H . Эти условия приводят к тому, что квадратично интегрируемыми, согласно (4), являются не только функции $F(r)$ и $G(r)$, но и их производные. В самом деле, второе из условий (5) даёт

$$(H_D\Psi, H_D\Psi) = \int_0^\infty \left(|F+G|^2 + \left| \frac{d}{dr} F \right|^2 + \left| \frac{d}{dr} G \right|^2 \right) dr < \infty,$$

¹ В работах [11, 12, 14–25] ширина γ брейт-вигнеровского уровня интерпретировалась как вероятность спонтанного рождения e^+e^- -пар из вакуума.

² При $Z = Z_{\text{cr}}$ состояние с $\varepsilon_d = -1$ принадлежит дискретному спектру, а состояния с $\varepsilon < -1$ образуют нижний континуум.

где первое слагаемое в правой части в силу неравенства треугольника $|F + G|^2 \leq |F|^2 + |G|^2$ и первого из условий (5) заведомо сходится. Так что окончательно имеем

$$\int_0^\infty |F|^2 dr < \infty, \quad \int_0^\infty \left| \frac{dF}{dr} \right|^2 dr < \infty, \\ \int_0^\infty |G|^2 dr < \infty, \quad \int_0^\infty \left| \frac{dG}{dr} \right|^2 dr < \infty,$$

и, следовательно (см., например, [30]),

$$F(\infty) = G(\infty) = 0. \quad (6)$$

При этом интегрирование по частям даёт

$$\int_0^\infty \Psi_2^+ (H_D \Psi_1) dr - \int_0^\infty (H_D \Psi_2)^+ \Psi_1 dr = \\ = \lim_{r \rightarrow 0} (F_1(r) G_1^*(r) - F_2^*(r) G_2(r)). \quad (7)$$

Таким образом, чтобы обеспечить самосопряжённость гамильтониана, т.е. обратить в нуль внеинтегральное слагаемое, надо рассмотреть поведение решений системы (2) на малых расстояниях. Эта асимптотика определяется значениями³ одного лишь параметра: $\sigma = [\kappa^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2}$,

$$\Psi_{\varepsilon, \kappa}(r \rightarrow 0) = C_\sigma \left\{ \eta_\sigma r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma - \kappa} \right) + \eta_{-\sigma} r^{-\sigma} \left(\frac{1}{-\sigma - \kappa} \right) \right\}, \\ \sigma \neq \frac{1}{2}, 0. \quad (8)$$

Если $\sigma \geq 1/2$, то для квадратичной интегрируемости решений в (8) следует положить $\eta_{-\sigma} = 0$. Поэтому при $Z\alpha < \sqrt{\kappa^2 - 1/4}$ реализуется так называемое встроенное граничное условие [30] и для энергии уровней справедлива формула Зоммерфельда. В частности, для основного состояния, $\kappa = -1$, это приводит к неравенству $Z < \sqrt{3}/2\alpha \approx 119$.

При $0 < \sigma < 1/2$ в соответствии с теорией неограниченных операторов фон Неймана [31] (см. также работу Кейза [32]), т.е. из требования, что обращение в нуль внеинтегрального слагаемого в равенстве (7) осуществляется за счёт входящих туда функций Ψ_1 и Ψ_2 на равных основаниях, приходим к условию

$$\frac{\eta_\sigma}{\eta_{-\sigma}} = \left(\frac{\eta_\sigma}{\eta_{-\sigma}} \right)^* = \tan \theta_\sigma(\kappa), \quad (9)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_\sigma(\kappa) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sigma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} > 0.$$

Условие (9) определяет однопараметрическое семейство самосопряжённых операторов $H_{\theta_\sigma}^+ = H_{\theta_\sigma}$. Отметим, что при значениях параметра $\theta_\sigma = \pm\pi/2$ формула Зоммерфельда остаётся справедливой при Z вплоть до значений $Z = |\kappa|/\alpha$, т.е. вплоть до $Z < 137$ для основного состояния.

Если $Z\alpha > |\kappa|$, то вместо (9) получим

$$\frac{\eta_\tau}{\eta_{-\tau}} = \left(\frac{\eta_{-\tau}}{\eta_\tau} \right)^* = \exp(2i\theta_\tau(\kappa)), \quad (10)$$

$$\text{Im } \theta_\tau(\kappa) = 0, \quad \tau = \sqrt{(Z\alpha)^2 - \kappa^2} > 0,$$

Граничные условия (9) и (10) определяют однопараметрические семейства самосопряжённых радиальных дираковских операторов H_{θ_σ} и H_{θ_τ} . Эти однопараметрические семейства ранее были получены в работе [9] другим способом.

3. Кулоновская задача с короткодействием

Для того чтобы фиксировать параметры $\theta_\sigma(\kappa)$ и $\theta_\tau(\kappa)$, необходимо использовать дополнительные физические соображения. Согласно Померанчуку и Смородинскому, надо рассмотреть кулоновский потенциал, модифицированный на малых расстояниях. В случае прямоугольного обрезания [10],

$$V_R(r) = -\frac{Z\alpha}{R}, \quad r < R, \\ V_R(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad r > R, \quad R \ll 1, \quad (11)$$

система (2) с заменой $V_C(r) \rightarrow V_R(r)$ при $r < R$ решается аналитически в функциях Бесселя. При $r < R$, т.е. на малых расстояниях,

$$\Psi_\kappa(r) = C_\kappa \sqrt{Z\alpha} \frac{r}{R} \begin{pmatrix} \pm J_{\mp(1/2+\kappa)} \left(Z\alpha \frac{r}{R} \right) \\ J_{\pm(1/2-\kappa)} \left(Z\alpha \frac{r}{R} \right) \end{pmatrix}, \quad r \leq R \ll 1, \quad (12)$$

где верхние (нижние) знаки плюс и минус относятся к $\kappa < 0$ ($\kappa > 0$).

Требование непрерывности волновых функций (12) и асимптотика (8) при $r = R$ для $Z\alpha < |\kappa|$ с учётом (9) дают

$$\tan \theta_\sigma(\kappa, R) = \\ = \frac{(\sigma - \kappa) [Z\alpha J_{\mp(1/2+\kappa)}(Z\alpha) \pm (\sigma + \kappa) J_{\pm(1/2-\kappa)}(Z\alpha)] R^{-\sigma}}{(\sigma + \kappa) [Z\alpha J_{\mp(1/2+\kappa)}(Z\alpha) \mp (\sigma - \kappa) J_{\pm(1/2-\kappa)}(Z\alpha)] R^\sigma}, \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} > 0,$$

где, так же как и в (12), верхние знаки отвечают отрицательным значениям κ , а нижние — положительным.

Если $Z\alpha > |\kappa|$, то, согласно (10), приходим к равенству

$$\exp(2i\theta_\tau(\kappa, R)) = \\ = \frac{(i\tau - \kappa) [Z\alpha J_{\mp(1/2+\kappa)}(Z\alpha) \pm (i\tau + \kappa) J_{\pm(1/2-\kappa)}(Z\alpha)] R^{-i\tau}}{(i\tau + \kappa) [Z\alpha J_{\mp(1/2+\kappa)}(Z\alpha) \mp (i\tau - \kappa) J_{\pm(1/2-\kappa)}(Z\alpha)] R^{i\tau}}, \quad (14)$$

$$\tau = \sqrt{(Z\alpha)^2 - \kappa^2} > 0.$$

Граничные условия (9) и (13), а также (10) и (14) определяют волновые функции как непрерывного, так и дискретного спектра системы (2) в модели (11) при всех значениях дираковского квантового числа κ и заряда ядра Z , в том числе при $Z > Z_{\text{cr}}$.

³ При $\sigma = 1/2$, 0 в асимптотике (8) появляются логарифмы $(\ln r)$.

4. Дискретный спектр

Вводя обозначения $\rho = 2\lambda r$, $\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \geq 0$ и следуя [6], получаем при $\sigma = [\kappa^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} > 0$ убывающие на бесконечности решения системы (2):

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = C \sqrt{1 \pm \varepsilon} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) \rho^\sigma \times \\ \times \left\{ \Psi(a, c; \rho) \pm \left(\kappa + \frac{Z\alpha}{\lambda}\right) \Psi(a+1, c; \rho) \right\}, \quad (15)$$

где C — нормировочный множитель, $\Psi(a, c; \rho)$ — функция Трикоми [33] с параметрами $a = \sigma - Z\alpha\varepsilon/\lambda$ и $c = 1 + 2\sigma$, а верхние (нижние) знаки относятся к функциям $F(G)$ соответственно.

Тогда, согласно равенству (9), приходим к уравнению

$$\frac{(2\lambda)^\sigma [Z\alpha\sqrt{1-\varepsilon} + (\kappa - \sigma)\sqrt{1+\varepsilon}] \Gamma(1 + \sigma - Z\alpha\varepsilon/\lambda) \Gamma(-2\sigma)}{(2\lambda)^{-\sigma} [Z\alpha\sqrt{1-\varepsilon} + (\kappa + \sigma)\sqrt{1+\varepsilon}] \Gamma(1 - \sigma - Z\alpha\varepsilon/\lambda) \Gamma(2\sigma)} = \\ = \tan \theta_\sigma(\kappa), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_\sigma(\kappa) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (16)$$

которое вместе с равенством (13) определяет дискретный спектр при $Z\alpha < |\kappa|$ в модели (11).

Если $Z\alpha > |\kappa|$, то для $\tau = [(Z\alpha)^2 - \kappa^2]^{1/2} > 0$ получаем уравнение

$$\frac{(2\lambda)^{i\tau} [Z\alpha\sqrt{1-\varepsilon} + (\kappa - i\tau)\sqrt{1+\varepsilon}] \Gamma(1 + i\tau - Z\alpha\varepsilon/\lambda) \Gamma(-2i\tau)}{(2\lambda)^{-i\tau} [Z\alpha\sqrt{1-\varepsilon} + (\kappa + i\tau)\sqrt{1+\varepsilon}] \Gamma(1 - i\tau - Z\alpha\varepsilon/\lambda) \Gamma(2i\tau)} = \\ = \exp(2i\theta_\tau(\kappa)), \quad \text{Im } \theta_\tau(\kappa) = 0, \quad (17)$$

которое вместе с равенством (14) определяет в этой же модели энергетический спектр при $Z\alpha > |\kappa|$.

Полагая в равенстве (17) $\varepsilon = -1$ и учитывая асимптотику гамма-функций $\Gamma(1 \pm i\tau - Z\alpha\varepsilon/\lambda)$ при больших значениях аргумента, получаем уравнение для определения критического заряда $Z_{\text{cr}}^{(n)}(\kappa)$, при котором n -й уровень с заданным квантовым числом κ достигает границы нижнего континуума:

$$\arg \Gamma \left[2i \sqrt{(Z_{\text{cr}}^{(n)} \alpha)^2 - \kappa^2} \right] = \\ = \sqrt{(Z_{\text{cr}}^{(n)} \alpha)^2 - \kappa^2} \ln(2Z_{\text{cr}}^{(n)} \alpha) - \theta_\tau(\kappa) + \pi n, \quad (18)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение (18) с учётом равенства (14) определяет критическое значение заряда $Z_{\text{cr}}^{(n)}(\kappa, R)$ в зависимости от квантовых чисел κ и n и радиуса обрезания R . Энергии основного и первого возбуждённого уровней для $\kappa = -1$ и $\kappa = 1$ как функции заряда в области $0 < Z \leq Z_{\text{cr}}$ при $R = 0,031$ представлены на рис. 1. Точность приближённого уравнения (18) в зависимости от радиуса обрезания приведена в таблице.

5. Волновые функции нижнего континуума

Учитывая второе линейно независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения и полагая $k = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, для волновых функций нижнего континуума

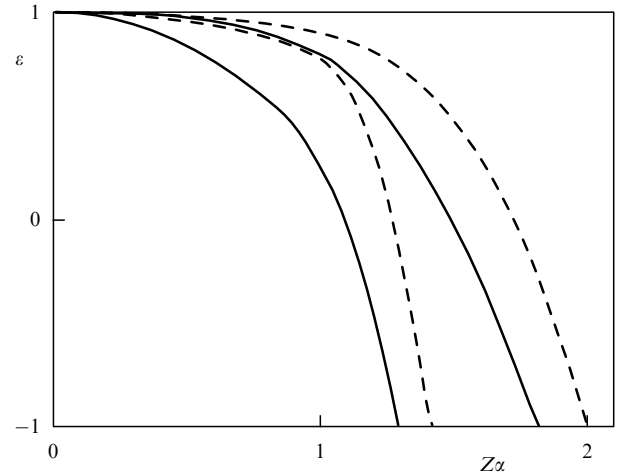


Рис. 1. Зависимость значений основного и первого возбуждённого уровней энергии $\varepsilon(Z\alpha, \kappa; R)$ от заряда $Z\alpha$ при радиусе обрезания кулоновского потенциала $R = 0,031$ (радиус ядра $r_0 = 12$ Ф) для $\kappa = -1$ (сплошные кривые) и $\kappa = 1$ (штриховые кривые).

Таблица. Значения критического заряда $Z_{\text{cr}}^{(n)}(\kappa, R)$ в модели прямоугольного обрезания с радиусом ядра $r_0 = R\hbar/(mc)$, полученные двумя методами: 1 — численным методом в работе [11] (см. приложение); 2 — вычислением по приближённому уравнению (18) с учётом равенства (14)

r_0, Φ	$1s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2s_{1/2}$	Метод
8	171	185	236	1
	172	187	236	2
10	174	189	244	1
	175	192	243	2
12	177	193	251	1
	178	196	249	2

нуума решений системы (2) получаем

$$\begin{pmatrix} F \\ iG \end{pmatrix} = \exp\left(\mp i \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{-\varepsilon \mp 1} (-2ikr)^{i\tau} \left\{ A \exp(ikr) \times \right. \\ \times \left[\Psi(g_-, h; -2ikr) \pm \left(\kappa + i \frac{Z\alpha}{k}\right) \Psi(g_- + 1, h; -2ikr) \right] \pm \\ \pm B \exp(-ikr) \times \\ \times \left[\Psi(g_+, h; 2ikr) \pm \left(\kappa - i \frac{Z\alpha}{k}\right) \Psi(g_+ + 1, h; 2ikr) \right] \left. \right\}. \quad (19)$$

Здесь $g_{\pm} = i\tau \pm iZ\alpha\varepsilon/k$, $h = 1 + 2i\tau$, $\tau = [(Z\alpha)^2 - \kappa^2]^{1/2}$, $Z > Z_{\text{cr}}$, а верхние (нижние) знаки относятся к функциям $F(iG)$ соответственно.

Сравнение этих выражений с асимптотикой (8), в которой следует положить $\sigma = i\tau$, даёт

$$u_\tau = \Gamma(-2i\tau)(2k)^{i\tau}(Aa - Bb), \quad (20)$$

$$u_{-\tau} = \Gamma(2i\tau)(2k)^{-i\tau}[A \exp(-\pi\tau)b^* - B \exp(\pi\tau)a^*],$$

где

$$a = \frac{Z\alpha\sqrt{-\varepsilon+1} - (i\kappa + \tau)\sqrt{-\varepsilon-1}}{\Gamma(1 - i\tau - i(\varepsilon/k)Z\alpha)}, \quad (21)$$

$$b = \frac{Z\alpha\sqrt{-\varepsilon+1} + (i\kappa + \tau)\sqrt{-\varepsilon-1}}{\Gamma(1 - i\tau + i(\varepsilon/k)Z\alpha)}.$$

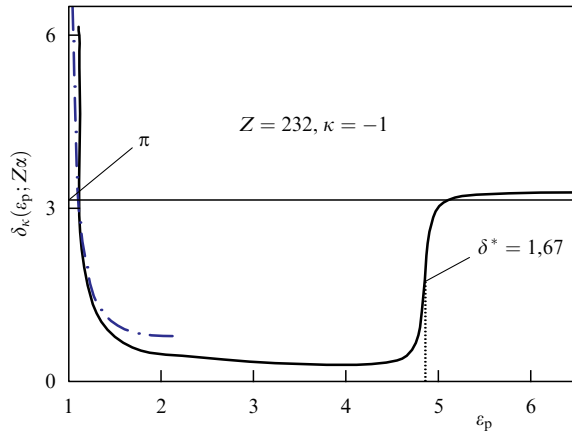


Рис. 2. Фаза рассеяния $\delta_\kappa(\varepsilon_p; Z\alpha)$ для $\kappa = -1$ как функция энергии позитрона для значения $Z = 232$ из интервала $Z_{cr}^{(0)}(-1, R) = 177 < 251 = Z_{cr}^{(1)}(-1, R)$ при $R = 0,031$ (сплошная кривая). Штрихпунктирная кривая — асимптотика фазы при малых импульсах позитрона (25), δ^* — фаза, отвечающая энергии позитрона ε^* .

Отсюда, учитывая граничное условие (10), находим

$$\exp(-\pi\tau) \frac{B}{A} = \exp(2i\delta_\kappa(k; Z)) = \frac{f_\kappa^*(k; Z)}{f_\kappa(k; Z)}, \quad (22)$$

$$A = \frac{\exp(i\delta_\kappa)}{\sqrt{2\pi(-\varepsilon)}} \exp\left(\frac{\pi Z\alpha(-\varepsilon)}{2k}\right).$$

Здесь $\delta_\kappa(k; Z)$ — фаза рассеяния, $f_\kappa(k; Z)$ — функция Йоста,

$$f_\kappa(k; Z) = -i \left[\exp\left(\frac{\pi\tau}{2} - i\varphi_\tau\right)a - \exp\left(\frac{-\pi\tau}{2} + i\varphi_\tau\right)b^* \right], \quad (23)$$

и введено обозначение

$$\exp(i\varphi_\tau) = \frac{(2k)^{-i\tau} \Gamma(2i\tau)}{(2k)^{i\tau} \Gamma(-2i\tau)} \exp(2i\theta_\tau(\kappa)), \quad (24)$$

а постоянный множитель A определяется из условия нормировки волновой функции на $\delta(k - k')$. Фаза рассеяния $\delta_\kappa(k; Z)$ при $\kappa = -1$ как функция энергии для $Z = 232 > Z_{cr}$ представлена на рис. 2, который следует сравнить с фиг. 13.3(a) из [34] для нерелятивистского резонансного рассеяния, когда фоновый фазовый сдвиг равен нулю, а величина фазы δ внезапно возрастает от 0 до π и при $\delta = \pi/2$ сечение достигает унитарного предела. Штрихпунктирной линией показана асимптотика фазы при малых импульсах позитрона,

$$\delta_\kappa(k; Z) = \frac{Z\alpha}{k} \ln\left(\frac{Z\alpha}{ek}\right) + \frac{\pi}{4}. \quad (25)$$

Гамовские волновые функции квазистационарных состояний получаются из функций (19), если в последних положить $B = 0$. Это условие приводит к уравнению для спектра комплексных энергий квазидискретных уровней, отвечающих полюсам парциальной матрицы рассеяния $S_\kappa(k; Z) = \exp(2i\delta_\kappa(k; Z))$:

$$\frac{(-2ik)^{i\tau} [Z\alpha\sqrt{-\varepsilon+1} - (\tau+ik)\sqrt{-\varepsilon-1}] \Gamma(1+i\tau-iZ\alpha\varepsilon/k) \Gamma(-2i\tau)}{(-2ik)^{-i\tau} [Z\alpha\sqrt{-\varepsilon+1} + (\tau-ik)\sqrt{-\varepsilon-1}] \Gamma(1-i\tau-iZ\alpha\varepsilon/k) \Gamma(2i\tau)} = \exp(2i\theta_\tau(\kappa)). \quad (26)$$

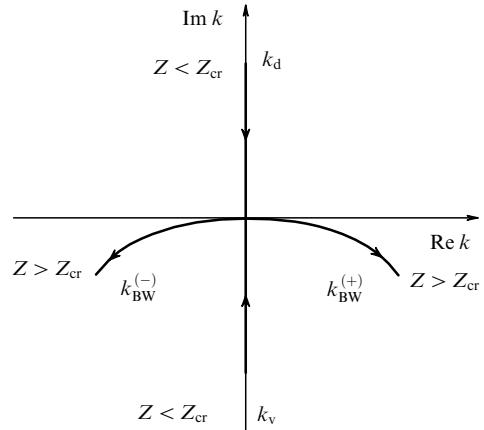


Рис. 3. Движение полюсов S -матрицы в комплексной плоскости $k = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ вблизи границы нижнего континуума $\varepsilon = -1$. Стрелками указано направление движения при увеличении заряда Z .

Решение уравнения (26) определяет как положение квазидискретного уровня ε_0 , так и его ширину γ :

$$\varepsilon = -\varepsilon_0 + \frac{i}{2}\gamma, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \gamma > 0, \quad (27)$$

причём при $\gamma \ll \varepsilon_0$

$$k_0 = k'_0 - ik''_0, \quad k'_0 = \sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}, \quad k''_0 = \gamma \frac{\varepsilon_0}{2k'_0} > 0. \quad (28)$$

Необычный знак⁴ перед шириной γ квазистационарного состояния обеспечивает уход дискретного уровня при $Z > Z_{cr}$ на нефизический лист и тем самым непротиворечивость одночастичного приближения [35, 36] для уравнения Дирака в рассматриваемой задаче, тогда как уравнение Клейна – Фока – Гордона в данном случае приводит к противоречиям.

Движение полюсов S -матрицы в плоскости комплексного переменного $k = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = k'_0 - ik''_0$ вблизи границы нижнего континуума⁵ при увеличении заряда Z показано на рис. 3, который можно сравнить с фиг. 13.6(a) из [34] для движения полюсов нерелятивистской амплитуды упругого рассеяния медленных частиц с отличным от нуля орбитальным моментом, когда наличие резонанса определяется центробежным, а не кулоновским барьером, как в рассматриваемой задаче.

При $Z < Z_{cr}(\kappa)$ для энергии дискретного уровня имеем $-1 < \varepsilon_d < 1$, так что $k_d = i\lambda_d$, $\lambda_d > 0$, и отвечающий ему полюс матрицы рассеяния расположен на мнимой оси верхней k -полуплоскости, т.е. на первом, физическом, листе. При увеличении заряда этот уровень приближается к границе нижнего континуума $\varepsilon = -1$, причём навстречу ему также по мнимой оси, но в нижней полуплоскости комплексного переменного k движется виртуальный уровень k_v , находящийся на втором, нефизическом, листе. При $Z = Z_{cr}(\kappa)$ эти уровни сталки-

⁴ Такой же "неправильный" знак мнимой части энергии при $Z > Z_{cr}$ был получен ранее в работах [11, 12].

⁵ Сравнение движения полюсов матрицы рассеяния вблизи границы нижнего континуума решений уравнений Клейна – Фока – Гордона и Дирака в рамках приближения эффективного радиуса проведено в работах [35, 36]. Качественное различие этих задач отмечено в работе [10].

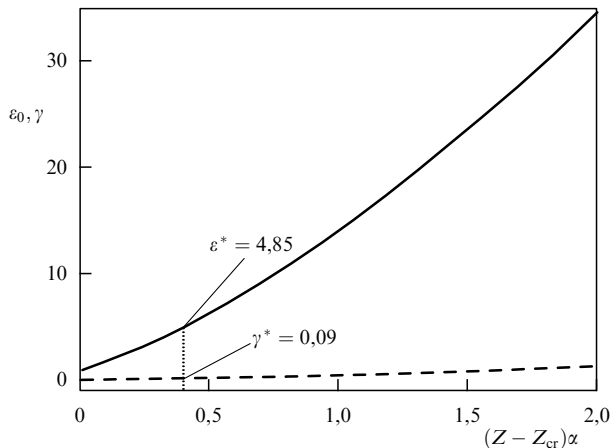


Рис. 4. Зависимость положения резонанса $\varepsilon_0(Z; \kappa = -1; R)$ (сплошная кривая) и его ширины $\gamma(Z; \kappa = -1; R)$ (штриховая линия) от разности $(Z - Z_{cr})\alpha$ при значении радиуса обрезания кулоновского потенциала $R = 0,031$. ε^* и γ^* — положение и ширина полюса S -матрицы, соответствующие резонансу при $Z = 232$.

ваются и при дальнейшем увеличении Z превращаются в пару брейт-вигнеровских полюсов, находящихся на нефизическом листе. При этом в закритической области ближайший к положительной вещественной полуоси полюс $k_{BW}^{(+)}$, отвечающий квазистационарному состоянию (27), проявляется как резонанс с шириной γ при рассеянии позитронов на сверхкритическом ядре.

Зависимость положения "основного", при $\kappa = -1$, квазидискретного уровня $\varepsilon_0(Z, R)$ и его ширины $\gamma(Z, R)$ при радиусе обрезания $R = 0,031$ представлена на рис. 4. Положение полюса S -матрицы соответствует при $Z = 232$ энергии резонанса $\varepsilon^* = 4,85$, а $\gamma^* = 0,09$ — ширине резонанса. Это согласуется с рис. 2, на котором значение фазы $\delta^* = 1,67$ отвечает энергии позитрона ε^* , а ширина резонанса попадает в область резкого изменения фазы.

С учётом модификации (11) кулоновского потенциала гамильтониан $H_D(r; \kappa; R)$ становится самосопряжённым и его собственные функции образуют полную систему, т.е. базис. Поскольку электронный спектр энергий, $-1 < \varepsilon < \infty$, не перекрывается с позитронным⁶, $0 \leq \varepsilon_p < \infty$, $\varepsilon_p = -\varepsilon$ при $\varepsilon \leq -1$, законным является вторичное квантование по Фарри [37] на основе этих базисных функций. Причём для комплексной энергии квазистационарного состояния позитрона имеем (в работе [20] кратко обсуждается резонансное рассеяние внешнего позитрона при $Z > Z_{cr}$, который, однако, расщепляется на сверхкритическом атоме)

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_0 - \frac{i}{2} \gamma, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \gamma > 0, \quad (29)$$

т.е. обычное выражение для энергии квазидискретного уровня. Указанное квантование непротиворечиво при любых значениях заряда. Поэтому нет оснований ожидать, что при $Z > Z_{cr}$ произойдёт экранирование заряда ядра рождёнными из вакуума парами, обсуждавшееся в работах [11, 12, 14–25].

⁶ Это утверждение остаётся справедливым и при $Z = Z_{cr}$, когда энергия $\varepsilon_d = -1$ отвечает связанному состоянию электрона, а $\varepsilon_p > 0$.

С математической точки зрения утверждение об отсутствии спонтанного рождения e^+e^- -пар следует из того, что в рассматриваемой задаче in- и out-состояния с заданным квантовым числом κ унитарно эквивалентны: матрица рассеяния (22), $S_\kappa(k; Z) = \exp(2i\delta(k; Z))$, унитарна ввиду вещественности фазы рассеяния (см. рис. 2). В этом состоит существенное отличие закритической кулоновской задачи от ситуации в случае парадокса Клейна [38], когда положительно- и отрицательно-частотные состояния перекрываются и необходимо использовать два полных набора решений уравнения Дирака: in- и out-наборы [39–42].

6. Заключение

Итак, "обрезание" [10], т.е. регуляризация, кулоновского потенциала на малых расстояниях обеспечивает самосопряжённость дираковского гамильтониана и, следовательно, определяет полный ортонормированный набор решений радиального уравнения Дирака при любых зарядах ядра Z . Это означает непротиворечивость одночастичного приближения для уравнения Дирака не только при $Z < Z_{cr}$, но и в закритической области, $Z > Z_{cr}$, т.е. стабильность в вакууме голого сверхкритического ядра. При этом вакууму, т.е. состоянию с наименьшей энергией, отвечает незаполненные состояния верхнего континуума, незаполненные дискретные уровни и полностью занятые электронами состояния нижнего континуума (море Дирака, искажённое наличием тяжёлого ядра с зарядом $Z > Z_{cr}$). В силу принципа Паули рождение e^+e^- -пар из вакуума сверхкритическим кулоновским полем невозможно: электрон такой пары не может оккупировать уже занятое состояние в море Дирака и сверхкритический атом, обсуждающийся в работах [20, 23], не может образоваться. В рамках вторичного квантования по Фарри морю Дирака будут соответствовать незаполненные состояния позитронов, а вакууму — состояния без частиц.

Остановимся на поднятом в работе [10] вопросе о том, что произойдёт с электроном докритического водородоподобного атома, когда заряд ядра превысит критическое значение. Если изменение заряда происходит за счёт поглощения ядром протона или α -частицы, то вопрос сводится к задаче о ионизации атома "встряхиванием" [43], которая решается стандартным способом. В этом случае "докритический" связанный электрон окажется с различными вероятностями в электронных состояниях дискретного и непрерывного спектров сверхкритического ядра, и поэтому ион с зарядом ядра $Z > Z_{cr}$ не обладает специфическими свойствами "сверхкритического" иона, описанными в обзоре [20].

При адиабатическом изменении заряда вблизи $Z = Z_{cr}$ следует учитывать экранирование вследствие поляризации вакуума, т.е. изменение формы электростатического потенциала. В этом случае задача становится многочастичной. Адиабатическое увеличение эффективного заряда реализуется в процессе столкновения двух ядер, но это уже совершенно иная нестационарная задача, которой посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных работ (см. по этому поводу [44]). Заметим, что процесс рождения e^+e^- -пар при адиабатическом сближении двух тяжёлых ядер рассмотрен в рамках стандартной квантовой электродинамики в недавней работе [45].

Отметим, наконец, что все упомянутые выше вопросы сверхкритической кулоновской задачи возникают в нерелятивистской теории двумерных примесных гетероструктур. Так, например, электронные свойства допированного лёгкими ядрами или ионами графена на подложке SiC описываются в рамках эффективного двумерного уравнения Дирака со щелью [27, 46]. Энергетический спектр в такой двумерной кулоновской задаче определяется дираковской системой (1), в которой следует сделать замену $\kappa \rightarrow -J$. Здесь J — полный сохраняющийся двумерный угловой момент, который может принимать все положительные и отрицательные значения, включая нуль, а также полужелые значения, $J = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$ [27]. Ответ на все затронутые выше вопросы можно получить, измеряя уровни энергии в графене, допированном заряженными примесями.

Авторы выражают искреннюю благодарность Д.Н. Воскресенскому за стимулирующие дискуссии, а Б.М. Карнакову также и за обсуждение результатов работы.

7. Приложение

Критическим зарядом ядра Z_{cr} принято называть [10] то значение Ze , при котором уровень $E_d = \varepsilon_d mc^2$ дискретного спектра опускается до границы нижнего континуума решений уравнения Дирака:

$$\varepsilon_d(k, Z_{cr}\alpha) = -mc^2 \quad (\text{П.1})$$

(далее $\hbar = c = m = 1$). Кратко обсудим способы вычисления Z_{cr} .

Решение уравнения Дирака (15) с кулоновским потенциалом $V(r) = -Z\alpha/r$ при энергии $\varepsilon_d = -1$ существенно упрощается, поскольку в этом случае переменная $\rho = 2\lambda r \rightarrow 0$, параметр $a \rightarrow \infty$ и справедливы тождества (см. справочник [33]):

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\Gamma(a - c + 1) \Psi\left(a, c, \frac{x}{a}\right) \right] = 2\sqrt{x^{1-c}} K_{c-1}(2\sqrt{x}),$$

$$\Psi'(a, c, x) = \frac{1}{x} [(a - c + x) \Psi(a, c, x) - \Psi(a - 1, c, x)].$$

При этом

$$F(r) = K_{iv}(\sqrt{8Z\alpha r}), \quad G(r) = \frac{1}{Z\alpha} \left(r \frac{d}{dr} + \kappa \right) F, \quad (\text{П.2})$$

$$F, G \sim r^{\mp 1/4} \exp(-\sqrt{8Z\alpha r}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (\text{П.3})$$

здесь $v = 2[(Z\alpha)^2 - \kappa^2]^{1/2} > 0$, $\kappa = \mp(j + 1/2)$, $j = 1/2, 3/2, \dots$, κ — интеграл движения для уравнения Дирака в центральном поле, $K_{iv}(z)$ — функция Макдональда⁷, F и G — радиальные волновые функции для верхней и нижней компонент дираковского биспинора.

Выражение (П.2) справедливо при $\varepsilon_d = -1$ и $r > R$; в области $0 < r < R \ll 1$ потенциал $V(r)$ с учётом конечных размеров ядра отличается от кулоновского. Пренебрегая слагаемыми порядка $R \ll 1$ и сшивая волновые функции

на краю ядра, получим уравнение для критического заряда Z_{cr} [11, 12]:

$$\frac{zK'_{iv}(z)}{2K_{iv}(z)} = \xi, \quad (\text{П.4})$$

где $z = 2\sqrt{2Z_{cr}\alpha R}$, ξ — безразмерная логарифмическая производная,

$$\xi = \frac{r}{F} \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=R} = \begin{cases} \frac{Z\alpha}{\tan(Z\alpha)}, & \kappa = -1, \\ \frac{(Z\alpha)^2 \tan(Z\alpha)}{\tan(Z\alpha) - Z\alpha}, & \kappa = 1 \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

(последние выражения относятся к модели прямоугольного обрезания (11)). Численное решение уравнений (П.4) и (П.5) даёт значения Z_{cr} , приведённые в таблице. Для более реалистичной модели обрезания

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Z\alpha}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], & 0 < r < R, \\ -\frac{Z\alpha}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

соответствующей постоянной объёмной плотности заряда протонов в ядре, получены [11, 12] значения $Z_{cr}(1s_{1/2}) = 168, 170, 173$ для $r_0 = 8, 10, 12$ Ф соответственно. Заметим также, что если экстраполировать на область $Z > 137$ зависимость $r_0 = 1,2A^{1/3}$ [Ф], $A = 2,5Z$, обычную для тяжёлых ядер, то для основного уровня $Z_{cr}(1s_{1/2}) = 169$.

Положив $\varepsilon = -1$ в уравнении (17), которое определяет энергетический спектр в области $Z\alpha > |\kappa|$, получим уравнение (18), определяющее критический заряд, при котором уровень с данным κ достигает границы нижнего континуума. Решения этого уравнения с учётом равенства (14), полученного в модели обрезания (11), для различных значений радиуса обрезания R приведены в таблице.

Уравнения (П.4) и (18), (14), определяющие критический заряд ядра, по форме существенно отличаются друг от друга. Однако они приводят к близким значениям Z_{cr} (см. значения в таблице для нижних уровней $ns_{1/2}$ и $np_{1/2}$), что служит независимым подтверждением развитого выше подхода.

Список литературы

1. Sommerfeld A *Ann. Physik* **51** 1 (1916)
2. Dirac P A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **117** 610 (1928)
3. Dirac P A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **118** 351 (1928)
4. Darwin C G *Proc. R. Soc. Lond. A* **118** 654 (1928)
5. Gordon W Z. *Phys.* **48** 11 (1928)
6. Bethe H *Quantenmechanik der Ein und Zwei Elektronenprobleme* (Handbuch der Physik, Bd. 24, Tl. 1) (Berlin: Springer, 1933);
7. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980); Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999)
8. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press, 1958); Дирак П *Принципы квантовой механики* (М.: Наука, 1979)
9. Воронов Б Л, Гитман Д М, Тютин И В *ТМФ* **150** 41 (2007); Voronov B L, Gitman D M, Tyutin I V *Theor. Math. Phys.* **150** 34 (2007)
10. Pomeranchuk I, Smorodinsky Ya *J. Phys. USSR* **9** 97 (1945)

⁷ Функция K_{iv} принимает вещественные значения при $0 < z$, $v < \infty$ и имеет асимптотики $K_{iv}(z) = \sqrt{\pi/[v \sinh(\pi v)]} \sin[v \ln(2/z) + \arg \Gamma(1 + iv)]$ при $z \rightarrow +0$ и $K_{iv}(z) = \exp(-z) \sqrt{\pi/(2z)} [1 - (v^2 + 1/4)/2z]$ при $z \rightarrow \infty$.

11. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **11** 254 (1970); Popov V S *JETP Lett.* **11** 162 (1970)
12. Попов В С *ЯФ* **12** 429 (1970); Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 235 (1971)
13. Schiff L I, Snyder H, Weinberg J *Phys. Rev.* **57** 315 (1940)
14. Герштейн С С, Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **57** 654 (1969); Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **30** 358 (1970)
15. Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Nuovo Cimento Lett.* **1** 835 (1969)
16. Pieper W, Greiner W Z. *Phys.* **218** 327 (1969)
17. Попов В С *ЖЭТФ* **59** 965 (1970); Popov V S *Sov. Phys. JETP* **32** 526 (1971)
18. Попов В С *ЖЭТФ* **60** 1228 (1971); Popov V S *Sov. Phys. JETP* **33** 665 (1971)
19. Зельдович Я Б, Питаевский Л П, Попов В С, Старобинский А А *УФН* **105** 780 (1971); Zel'dovich Ya B, Pitaevskii L P, Popov V S, Starobinskii A A *Sov. Phys. Usp.* **14** 811 (1972)
20. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971); Zel'dovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)
21. Попов В С, Карнаков Б М *УФН* **184** 27 (2014); Popov V S, Karnakov B M *Phys. Usp.* **57** 257 (2014)
22. Gershtein S S, Popov V S *Lett. Nuovo Cimento* **6** 593 (1973)
23. Okun L B *Comments Nucl. Part. Phys.* **6** 25 (1974)
24. Greiner W, Müller B, Rafelski J *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
25. Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (М.: Энергоатомиздат, 1988)
26. Novoselov K S et al. *Nature* **438** 197 (2005)
27. Pereira V M, Kotov V N, Castro Neto A H *Phys. Rev. B* **78** 085101 (2008)
28. Castro Neto A H et al. *Rev. Mod. Phys.* **81** 109 (2009)
29. Кулешов В М и др. *Письма в ЖЭТФ* **101** 282 (2015); Kuleshov V M et al. *JETP Lett.* **101** 264 (2015)
30. Richtmyer R D *Principles of Advanced Mathematical Physics* (New York: Springer-Verlag, 1978); Рихтмайер Р *Принципы современной математической физики* (М.: Мир, 1982)
31. Von Neumann J V *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: J. Springer, 1932); Von Neumann J V *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1955); фон Нейман Дж *Математические основы квантовой механики* (М.: Мир, 1964)
32. Case K M *Phys. Rev.* **80** 797 (1950)
33. Bateman H *Higher Transcendental Functions* Vol. 1, 2 (Director A Erdélyi) (New York: McGraw-Hill, 1953, 1954); Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1973, 1974)
34. Taylor J R *Scattering Theory. The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions* (New York: Wiley, 1972); Тейлор Дж *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений* (М.: Мир, 1975)
35. Мур В Д, Попов В С *ТМФ* **27** 204 (1976); Mur V D, Popov V S *Theor. Math. Phys.* **27** 429 (1976)
36. Попов В С, Елецкий В Л, Мур В Д *ЖЭТФ* **71** 856 (1976); Popov V S, Eletsckii V L, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **44** 451 (1976)
37. Furry W H *Phys. Rev.* **81** 115 (1951)
38. Klein O Z. *Phys.* **53** 157 (1929)
39. Никишов А И *ЖЭТФ* **57** 1210 (1970); Nikishov A I *Sov. Phys. JETP* **30** 660 (1970)
40. Nikishov A I *Nucl. Phys. B* **21** 346 (1970)
41. Нарожный Н Б, Никишов А И *ЯФ* **11** 1071 (1970)
42. Hansen A, Ravndal F *Phys. Scripta* **23** 1036 (1981)
43. Мигдал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975); Migdal A B *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Cambridge, Mass.: Advanced Book Program, Perseus Pub., 2000)
44. Попов В С *ЯФ* **64** 421 (2001); Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **64** 367 (2001)
45. Khriplovich I B *Письма в ЖЭТФ* **100** 552 (2014); *JETP Lett.* **100** 494 (2014)
46. Zhou S Y et al. *Nature Mater.* **6** 770 (2007)

Coulomb problem for a $Z > Z_{\text{cr}}$ nucleus

V.M. Kuleshov, V.D. Mur, N.B. Narozhny, A.M. Fedotov

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),

Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation

E-mail: narozhny@theor.mephi.ru

Yu.E. Lozovik

Institute for Spectroscopy, Russian Academy of Sciences,

ul. Fizicheskaya 5, 142190 Troitsk, Moscow, Russian Federation

E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

V.S. Popov

Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics, National Research Centre "Kurchatov Institute",

ul. B. Chermushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation

A closed form equation is derived for the critical nucleus charge, i.e. for the value $Z = Z_{\text{cr}}$ at which the discrete level with the Dirac quantum number touches the lower continuum of Dirac equation solutions. For a Coulomb potential cut off rectangularly at a small distance $r_0 = R\hbar/mc$, $R \ll 1$, the critical nucleus charge values are obtained for several values of κ and R . It is shown that the partial scattering matrix of the elastic positron-nucleus scattering, $S_\kappa = \exp(2i\delta_\kappa(e_p))$, is also unitary for $Z > Z_{\text{cr}}$. For this range, the scattering phase $\delta_\kappa(e_p)$ is calculated as a function of the positron energy $E_p = e_p mc^2$, as are the positions and widths of quasidecrete levels corresponding to the scattering matrix poles. The implication is that the single-particle approximation for the Dirac equation is valid not only for $Z < Z_{\text{cr}}$ but also for $Z > Z_{\text{cr}}$ and that there is no spontaneous creation of e^+e^- pairs from vacuum.

Keywords: the Coulomb problem, pointlike nucleus, boundary conditions, critical charge, scattering phase, Breit – Wigner resonance

PACS numbers: 03.65.Pm, **12.20. – m**, 73.22.Pr

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508d.0845

Bibliography — 46 references

Received 16 June 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (8) 845–852 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (8) (2015)