

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Аномальная сверхпроводимость и сверхтекучесть  
в фермионных системах с отталкиванием

М.Ю. Каган, В.А. Мицкан, М.М. Коровушкин

*Обсуждаются механизмы нетрадиционной сверхпроводимости и сверхтекучести в трёхмерных и двумерных ферми-системах малой плотности с чисто отталкивательным взаимодействием. Приведены фазовые диаграммы этих систем и определены области сверхпроводящего спаривания в свободном пространстве и на решётке в модели ферми-газа с отталкиванием, модели Хаббарда, модели Шубина–Вонсовского и  $t$ – $J$ -модели. Продемонстрирована возможность резкого усиления критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу уже при малой плотности фермионов в спин-поляризованном случае и в двухзонной ситуации. Представленная теория, которая основывается на механизме Кона–Латтинжера и его обобщениях, может объяснить или предсказать аномальную сверхпроводимость с  $p$ -,  $d$ - и  $f$ -спариванием в различных материалах и системах, включая высокотемпературные сверхпроводники, идеализированные монослои и бислои легированного графена, тяжёлофермионные и органические сверхпроводники, сверхтекучий  $^3\text{He}$ , спин-поляризованные растворы  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ , а также ультрахолодные квантовые газы в магнитных ловушках и на оптических решётках.*

**Ключевые слова:** аномальная сверхпроводимость, механизм Кона–Латтинжера, фермионная сверхтекучесть, ферми-газ с отталкиванием, модель Хаббарда и  $t$ – $J$ -модель, модель Шубина–Вонсовского, монослой графена, бислои графена

PACS numbers: 67.85.–d, 74.20.–z, 74.20.Mn, 74.20.Rp, 74.25.Dw, 74.78.Fk, 81.05.ue DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508a.0785

## Содержание

1. Введение (785).
2. Сверхпроводимость в модели ферми-газа с отталкиванием (787).
3. Сверхпроводимость в трёхмерной и двумерной модели Хаббарда с отталкиванием (789).
4. Повышение критической температуры в двухзонной модели Хаббарда и в спин-поляризованном ферми-газе (791).
5. Нетривиальные поправки к теории ферми-жидкости Ландау в двумерных системах малой плотности (793).
6. Сверхпроводимость в модели Шубина–Вонсовского (794).

7. Сверхпроводимость в двумерной  $t$ – $J$ -модели (799).
  8. Сверхпроводимость в идеализированном монослое графена (800).
  9. Усиление сверхпроводимости в идеализированном бислое графена (806).
  10. Новые перспективные системы с аномальным спариванием (810).
  11. Заключение (811).
- Список литературы (812).

## 1. Введение

Недавнее открытие куперовского спаривания при рекордно высокой температуре 190 К в металлическом сульфиде водорода  $\text{H}_2\text{S}$  [1, 2] под давлением порядка 0,1 Мбар воскрешает наши надежды продвинуться от высокотемпературных сверхпроводников к комнатно-температурным. В то же время существует очень много интересных низкотемпературных сверхпроводящих и сверхтекучих систем с аномальным типом спаривания и нетривиальной структурой параметра порядка. В данном обзоре в рамках нефононных механизмов сверхпроводимости, таких как знаменитый механизм Кона–Латтинжера и его обобщения, а также обменных механизмов, связанных с антиферромагнитным притяжением спинов на соседних узлах (актуальных, в частности, для  $t$ – $J$ -модели), мы рассмотрим системы с малой плотностью фермионов, в которых возникают как низкие, так и высокие критические температуры сверхпроводящего перехода и аномальное куперовское спаривание  $p$ -,  $d$ - и  $f$ -типа.

**М.Ю. Каган.** Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация  
E-mail: kagan@kapitza.ras.ru

Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики",

ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация

**В.А. Мицкан.** Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Академгородок 50, стр. 38, 660036 Красноярск, Российская Федерация;

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнёва, просп. Газеты Красноярский рабочий 31, 660014 Красноярск, Российская Федерация

**М.М. Коровушкин.** Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Академгородок 50, стр. 38, 660036 Красноярск, Российская Федерация  
E-mail: kmax@iph.krasn.ru

Статья поступила 15 мая 2015 г.

Как известно из учебников, электроны проводимости металлов в совокупности с положительно заряженными ионами образуют твердотельную плазму, определяющую комплекс их электрических, гальваномагнитных, кинетических и сверхпроводящих свойств. Связь между подсистемой массивных положительных ионов и подсистемой лёгких фермионов приводит к формированию электрон-фононного взаимодействия, влияющего на свойства электронной подсистемы. В частности, эффективное взаимодействие между электронами в твердотельной плазме может существенно отличаться от кулоновского взаимодействия электронов в вакууме и даже менять свой знак. Этот важнейший эффект лежит в основе электрон-фононного механизма куперовской неустойчивости в обычных сверхпроводниках [3].

Очевидно, что в роли посредника, взаимодействие с которым инициирует ренормировку кулоновского взаимодействия, может выступать любая другая подсистема. Существенно лишь, чтобы взаимодействие электронного газа с такой подсистемой приводило к поляризационным эффектам, обуславливающим рождение электронов и дырок в окрестности поверхности Ферми. В частности, во многих теоретических работах по высокотемпературным сверхпроводникам в качестве такого посредника выступают коллективные возбуждения подсистемы локализованных спинов ионов меди. С этим связан спин-флуктуационный механизм куперовской неустойчивости, приводящий к сверхпроводящей фазе с d-типом симметрии параметра порядка.

В представлении вторичного квантования для фермионов оператор кулоновского взаимодействия электронов содержит слагаемые, инициирующие в высших порядках теории возмущений поляризационные вклады в энергию основного состояния, которые также будут приводить к ренормировке кулоновского взаимодействия между электронами. Поэтому эффективное взаимодействие электронов в таком металле может существенно отличаться от электрон-электронного взаимодействия в вакууме. Это делает актуальной постановку впервые сформулированной Андерсоном [4] проблемы, связанной с возможностью такой ренормировки кулоновского взаимодействия, при которой эффективное электрон-электронное взаимодействие в веществе имело бы характер притяжения, а не отталкивания. Другими словами, проблема заключается в поиске условий, при которых отмеченные выше поляризационные эффекты в электронной плазме металла приведут к смене знака результирующего взаимодействия между электронами. С математической точки зрения указанная проблема сводится к решению задачи о вычислении эффективного парного взаимодействия электронов при учёте многочастичных эффектов в электронном ансамбле. Не менее важной, по мнению Андерсона, является проблема объяснения необычных свойств нормального состояния многих сильно коррелированных электронных систем при температурах выше критической, особенно в псевдощелевом состоянии.

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в экспериментальном и теоретическом исследовании сверхпроводящих систем с нефононной природой куперовского спаривания и сложной, нетривиальной структурой параметра порядка. Первыми экспериментально открытыми системами с нетрадиционным триплетным р-спариванием (величина полного спина

куперовской пары  $S_{\text{tot}} = 1$  и орбитальный момент относительного движения пары  $l = 1$ ) были сверхтекучие А- и В-фазы  $^3\text{He}$  с низкими критическими температурами,  $T_c \sim 1$  мК. Другим примером систем, в которых реализуется р-спаривание, являются молекулы  $^6\text{Li}_2$  и  $^{40}\text{K}_2$  в магнитных ловушках в режиме р-резонанса Фешбаха с ультранизкими критическими температурами:  $T_c \sim 10^{-6} - 10^{-7}$  К [5, 6]. Предполагается, что нетрадиционное р-спаривание с критическими температурами  $T_c \sim 0,5 - 1$  К реализуется в некоторых тяжелофермионных интерметаллидах, таких как  $\text{U}_{1-x}\text{Th}_x\text{Be}_{13}$  и  $\text{UNi}_2\text{Al}_3$ , с большими эффективными массами,  $m^* \sim (100 - 200)m_e$  [7, 8]. Часто о р-спаривании говорят в связи с органическими сверхпроводниками, такими как  $\alpha$ -(BEDT-TTF) $_2\text{I}_3$  с  $T_c \sim 5$  К [9]. Наконец, р-спаривание с  $T_c \sim 1$  К, по видимому, реализуется в рутенатах  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  [10, 11], и оно не исключено также в слоистых дихалькогенидах  $\text{CuS}_2 - \text{CuSe}_2$ , полуметаллах и полуметаллических сверхрешётках  $\text{InAs} - \text{GaSb}$ ,  $\text{PbTe} - \text{SnTe}$  [12]. К нетрадиционным сверхпроводникам с синглетным d-спариванием ( $S_{\text{tot}} = 0$ ,  $l = 2$ ) относятся тяжелофермионный интерметаллид  $\text{UPt}_3$  с  $m^* \sim 200m_e$  и  $T_c \sim 0,5$  К, а также обширный класс высокотемпературных купратных сверхпроводников с критическими температурами от  $T_c = 36$  К для соединений на основе лантана до  $T_c = 160$  К, полученной под давлением в сверхпроводниках на основе ртуту. Наконец, в связи с задачами прикладной сверхпроводимости необходимо также упомянуть новые многозонные сверхпроводники с более традиционным s-типом спаривания, такие как  $\text{MgB}_2$  [13], а кроме того, недавно открытые сверхпроводники на основе арсенида железа [14] и уже отмеченные выше металлические соединения типа  $\text{H}_2\text{S}$  и  $\text{PoH}_2$  [15].

Наряду с проблемами куперовского спаривания в указанных электронных системах, значительный интерес также представляют до сих пор экспериментально не разрешённые проблемы поиска фермионной сверхтекучести в трёхмерных (3D) и в особенности в двумерных (2D) (тонкие плёнки, субмонослои) растворах  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  [16–18] и сверхпроводимости в легированном графене [19]. Данные системы представляются одними из наиболее перспективных с точки зрения экспериментального и теоретического описания широкого круга физических явлений и характера многочастичных корреляций в них.

В частности, субмонослои  $^3\text{He}$ , адсорбированные на различных подложках, таких как твёрдый субстрат или свободная поверхность сверхтекучего  $^4\text{He}$ , при изменении плотности частиц в широких интервалах допускают реализацию различных режимов в системе — от ультра-разреженного ферми-газа до сильно коррелированной ферми-системы [20]. Это делает растворы идеальным объектом для развития и апробации различных методов теории ферми-жидкости. Очень перспективными являются также разбалансированные (спин-поляризованные) ультрахолодные ферми-газы в трёхмерных и особенно в квазидвумерных магнитных ловушках [21, 22].

Графен представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения вследствие своих уникальных электронных свойств [23, 24]. Вблизи уровня Ферми электроны в графене обладают линейной дисперсией, а энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости отсутствует, поэтому электроны в графене могут описываться 2D-уравнением Дирака для безмассовых заряженных квази-

частиц [25]. Такие свойства этих квазичастиц, как двумерность, спинорная природа спектра, нулевая масса и отсутствие щели в спектре, приводят к ряду явлений, не имеющих аналогов в других физических системах [26].

Отмеченные исследования стимулировали интенсивный поиск альтернативных механизмов спаривания, основанных на сильных корреляциях в ферми-жидкости. Наиболее перспективными в этом отношении представляются механизм Кона–Латтинжера [27], предложенный в 1965 г., и его обобщения (см., например, обзор [28]). Механизм Кона–Латтинжера предполагает превращение затравочного отталкивательного взаимодействия двух частиц в вакууме при наличии ферми-фона в эффективное притяжение в веществе в канале с ненулевым значением орбитального момента пары.

Настоящий обзор посвящён изложению полученных в последние годы основных результатов по сверхпроводимости Кона–Латтинжера в ферми-системах с отталкиванием, а также по обменным механизмам сверхпроводимости в обобщённой  $t$ – $J$ -модели.

## 2. Сверхпроводимость в модели ферми-газа с отталкиванием

Основной моделью для изучения нефононных механизмов сверхпроводимости в электронных системах с малой плотностью является модель ферми-газа. В случае ферми-газа с притяжением длина рассеяния  $a < 0$  и в результате возникает традиционное  $s$ -спаривание (суммарный спин  $S = 0$ , величина орбитального момента  $l = 0$ ) с критической температурой

$$T_c^s \approx 0,28 \varepsilon_F \exp \left( -\frac{\pi}{2|a|p_F} \right). \quad (1)$$

где  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми,  $p_F$  — импульс Ферми.

Данный результат был получен в работе [29] вскоре после появления теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [3]. Результат (1) отличается от классической формулы [3] наличием в предэкспоненциальном множителе величины  $0,28 \varepsilon_F$  вместо дебаевской частоты  $\omega_D$ , типичной для фоновых моделей в традиционных сверхпроводниках.

В модели ферми-газа с отталкиванием длина рассеяния  $a > 0$  и в низкотемпературной области реализуется сверхпроводимость по механизму Кона–Латтинжера. Физическая причина этого факта заключается в эффективном взаимодействии квазичастиц, возникающем в результате поляризации фермиевского фона. Из-за наличия в импульсном пространстве резкой границы, отделяющей область заполненных состояний с размером, равным диаметру сферы Ферми  $2p_F$ , от пустых состояний, эффективное взаимодействие квазичастиц, находящихся на уровне Ферми, не убывает экспоненциально, а принимает знакопеременный вид (осцилляции Фриделя [30, 31]):

$$U_{\text{eff}}(r) \sim \frac{\cos(2p_F r)}{(2p_F r)^3}. \quad (2)$$

Если расстояние между двумя электронами в куперовской паре сравнительно велико, то эффективное взаимодействие (2) в координатном пространстве имеет большое число максимумов и минимумов (рис. 1). Тогда интегральный эффект, определяемый усреднением по потенциальному рельефу фриделевских осцилляций, в

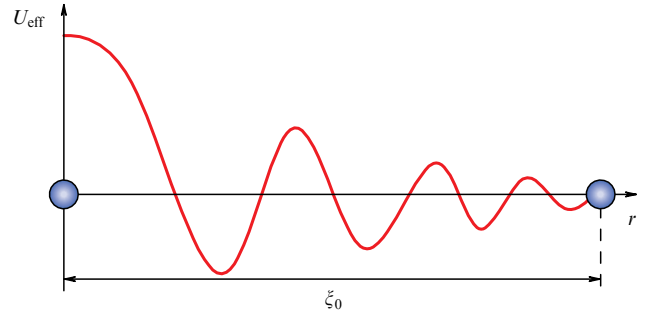


Рис. 1. Фриделевские осцилляции в эффективном взаимодействии двух частиц вследствие поляризации фермиевского фона.  $\xi_0$  — длина когерентности куперовской пары [32].

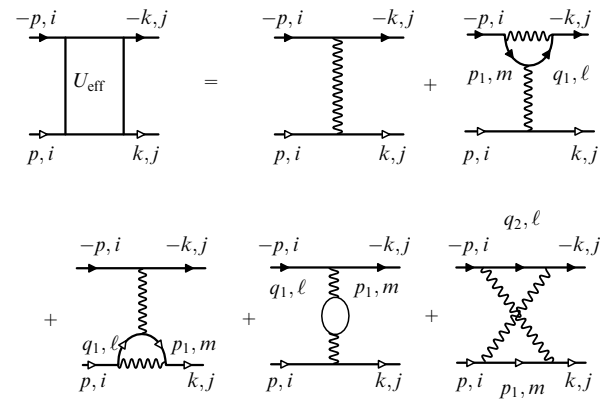


Рис. 2. Диаграммы первого и второго порядка для эффективного взаимодействия электронов  $U_{\text{eff}}$ . Сплошные линии со светлыми (тёмными) стрелками соответствуют функциям Грина электронов с проекциями спина  $+1/2$  ( $-1/2$ );  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}$ . Волнистые линии отражают затравочное взаимодействие. В случае ферми-газа (см. раздел 2), модели Хаббарда (см. раздел 3) и модели Шубина–Вонсовского (см. раздел 6) на диаграммах индексы  $i = j = l = m = 1$ . В случае монослоя графена (см. раздел 8)  $i = j = 1$ , а индексы  $l, m = 1, 2$ . В случае бислоя графена (см. раздел 9)  $i, j = 1, 2$ ,  $l, m = 1, 2, 3, 4$  [33].

принципе может привести к эффективному притяжению и возникновению сверхпроводимости в системе.

Впервые на такой механизм сверхпроводимости обратили внимание Кон и Латтинжер [27], рассмотревшие случай 3D-ферми-газа с отталкиванием. Авторы [27] показали, что эффективное взаимодействие в первых двух порядках теории возмущений по газовому параметру (точнее, по длине рассеяния  $a$ ) описывается суммой пяти диаграмм, изображённых на рис. 2. Первая диаграмма соответствует затравочному взаимодействию двух электронов в куперовском канале. Следующие четыре диаграммы (диаграммы Кона–Латтинжера) происходят от процессов второго порядка и учитывают поляризационные эффекты заполненной ферми-сферы. В случае короткодействующего потенциала вклад в эффективное взаимодействие определяется лишь четвёртой обменной диаграммой и в первых двух порядках теории возмущений выражение для  $U_{\text{eff}}$  может быть представлено в виде

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{4\pi a}{m} + \left( \frac{4\pi a}{m} \right)^2 \Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (3)$$

где  $4\pi a/m$  — псевдопотенциал, отвечающий волновой линии на рис. 2, а  $\Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k})$  — статический поляризационный оператор, описываемый стандартной линдхардовской функцией [34, 35],

$$\Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}}}. \quad (4)$$

Этот оператор ответствен за экранирование заряда в случае электронной плазмы в металле. Знак плюс в аргументе поляризационного оператора обусловлен так называемым кроссингом, отличающим в случае короткодействующего отталкивания обменную диаграмму от истинной поляризационной петли, в которую входит аргумент  $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ . В отсутствие решётки  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/(2m)$  — энергетический спектр,  $n_F$  — функция Ферми–Дирака,

$$n_F(x) = \left( \exp \frac{x - \mu}{T} + 1 \right)^{-1},$$

$\mu$  — химический потенциал.

В ранних работах Мигдала [36] и Кона [37] отмечалось, что при низких температурах,  $T \ll \varepsilon_F$ , поляризационный оператор содержит кроме регулярной части сингулярную часть — так называемую коновскую особенность, имеющую в 3D-случае вид

$$\Pi_{\text{sing}}(\tilde{q}) \sim (\tilde{q} - 2p_F) \ln |\tilde{q} - 2p_F|, \quad (5)$$

где в кросс-канале  $\tilde{q} = |\mathbf{p} + \mathbf{k}|$ . При переходе в координатное пространство сингулярная часть  $\Pi_{\text{sing}}$  приводит к фриделевским осцилляциям (2) в эффективном взаимодействии (см. рис. 1).

Таким образом, чисто отталкивательный короткодействующий потенциал между двумя частицами в вакууме индуцирует в электронном газе в металле эффективное взаимодействие с конкуренцией между отталкиванием и притяжением. Оказывается, что сингулярная часть в  $U_{\text{eff}}$  способствует притяжению, обеспечивая вклад, всегда превосходящий отталкивательный вклад, обусловленный регулярной частью  $U_{\text{eff}}$ . Это обстоятельство приводит при больших орбитальных моментах,  $l \gg 1$ , к сверхпроводящей неустойчивости с критической температурой  $T_{cl} \sim \varepsilon_F \exp(-l^4)$ . При этом традиционное синглетное спаривание в s-канале ( $S_{\text{tot}} = 0$ ,  $l = 0$ ) подавляется короткодействующим кулоновским отталкиванием, обусловленным главным максимумом в  $U_{\text{eff}}$  (см. рис. 1), и сверхпроводимость реализуется при больших значениях орбитального момента,  $l \gg 1$ . Отметим, что при  $l \neq 0$  роль главного максимума ослабляется центробежным потенциалом, что улучшает условия возникновения сверхпроводимости в каналах с аномальным спариванием.

Таким образом, из работы [27] следовал нетривиальный вывод о том, что при нулевой температуре не существует ферми-систем в нормальном состоянии — любая 3D-электронная система с затравочным отталкивательным взаимодействием между частицами является неустойчивой по отношению к переходу в сверхпроводящее состояние с большим орбитальным моментом относительного движения куперовской пары ( $l \gg 1$ ). Однако проведённые в работе [27] оценки величины критической температуры для электронных систем в металле с реалистичными параметрами и для сверхтекучего гелия дали при  $l = 2$  очень низкие значения критической температуры:  $T_c \sim 10^{-16}$  К в случае  $^3\text{He}$  и

$T_c \sim 10^{-11}$  К в случае металлической плазмы. Такая низкая величина  $T_c$  явилась одной из причин, по которой механизм Кона–Латтинжера не вызывал интереса у исследователей в течение достаточно длительного времени и был несправедливо забыт.

Позднее в работах [38, 39] было показано, что температура сверхпроводящего перехода в [27] была недооценена из-за использования асимптотического выражения для больших значений орбитального момента,  $l \gg 1$ . В действительности при  $l = 1$  точное аналитическое вычисление показывает, что вклады в  $U_{\text{eff}}$ , соответствующие притяжению квазичастиц, преобладают над отталкивательными вкладами. В результате 3D-ферми-газ с отталкиванием оказывается неустойчивым относительно сверхпроводящего перехода с триплетным р-спариванием при критической температуре [38–41]

$$T_{c1} \approx \varepsilon_F \exp \left[ -\frac{5\pi^2}{4(2 \ln 2 - 1)(ap_F)^2} \right] = \varepsilon_F \exp \left( -\frac{13}{\lambda^2} \right), \quad (6)$$

где  $\lambda = 2ap_F/\pi$  — эффективный 3D-газовый параметр Галицкого [42]. Отметим, что для  $l = 1$  вклад коновской особенности лишь увеличивает значение  $T_{c1}$ , но не имеет решающего значения для возникновения триплетной сверхпроводимости как таковой.

В работе [43] продемонстрировано, что можно существенно повысить критическую температуру сверхтекучего перехода уже при малых фермионных плотностях, помещая систему нейтральных ферми-частиц в магнитное поле или создавая спиновую поляризацию ( $n_{\uparrow} > n_{\downarrow}$ ). Это происходит вследствие того, что в р-канале для так называемой  $A_1$ -фазы отсутствует парамагнитное подавление сверхпроводимости (имеющее место при s-спаривании) и повышение  $T_c$  возможно за счёт увеличения эффективного взаимодействия и характера коновской особенности. В этом случае наибольшие  $T_c$  отвечают  $A_1$ -фазе, когда куперовская пара образуется двумя спинами "вверх", а эффективное взаимодействие для них готовят два спина "вниз". При этом  $T_c$  является функцией от отношения числа частиц со спином "вверх" и числа частиц со спином "вниз"  $n_{\uparrow}/n_{\downarrow}$ , точнее от спиновой поляризации  $\alpha = (n_{\uparrow} - n_{\downarrow})/(n_{\uparrow} + n_{\downarrow})$ .

В случае 2D-электронного газа с отталкиванием в первых двух порядках теории возмущений по газовому параметру эффективное взаимодействие имеет вид [44, 45]

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{m} f_0 + \left( \frac{4\pi}{m} f_0 \right)^2 \Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (7)$$

где  $f_0 = 1/[2 \ln(p_F r_0)]$  — 2D-газовый параметр Блума [46],  $\Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k})$  — 2D-поляризационный оператор в кросс-канале.

В 2D-ситуации эффективное взаимодействие в координатном пространстве также содержит фриделевские осцилляции:

$$U_{\text{eff}}(r) \sim f_0^2 \frac{\cos(2p_F r)}{(2p_F r)^2}, \quad (8)$$

причём гораздо более сильные, чем в 3D-случае. Однако в импульсном пространстве 2D-коновская особенность носит односторонний характер [47]:

$$U_{\text{eff}}^{\text{sing}}(\tilde{q}) \sim f_0^2 \text{Re} \sqrt{\tilde{q} - 2p_F} = 0 \quad (9)$$

для  $\tilde{q} = |\mathbf{p} + \mathbf{k}| \leq 2p_F$ , и поэтому оказывается неэффективной для задачи о сверхпроводимости (в которой  $\tilde{q} \leq 2p_F$ ). Таким образом, 2D-ферми-газ с отталкиванием остаётся в нормальном состоянии по крайней мере в двух первых порядках теории возмущений по газовому параметру  $f_0$ . Тем не менее в работе [44] было показано, что сверхпроводящее р-спаривание возникает в следующем, третьем, порядке теории возмущений по  $f_0$ , в котором для сингулярного вклада в эффективное взаимодействие выражение под знаком корня в (9) меняет знак:

$$U_{\text{eff}}^{\text{sing}}(\tilde{q}) \sim f_0^3 \text{Re} \sqrt{2p_F - \tilde{q}}. \quad (10)$$

При этом точное вычисление [48] критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу при учёте всех неприводимых диаграмм третьего порядка даёт

$$T_c \sim \varepsilon_F \exp\left(-\frac{1}{6,1f_0^3}\right). \quad (11)$$

Температура сверхпроводящего перехода оценивается величиной  $10^{-4}$  К [44, 48] для предельных плотностей, при которых всё ещё применимо ферми-газовое описание, и эта оценка уже соответствует реалистичным значениям, предсказанным для монослоёв гелия  $^3\text{He}$  на поверхности сверхтекучих плёнок  $^4\text{He}$  [49].

### 3. Сверхпроводимость в трёхмерной и двумерной модели Хаббарда с отталкиванием

В связи с открытием высокотемпературной сверхпроводимости [50] значительную популярность приобрела модель Хаббарда [51], ставшая одной из основных моделей для описания необычных свойств купратов. Модель Хаббарда является частным случаем общей модели взаимодействующих электронов, зонная структура которых описывается в методе сильной связи, и представляет собой минимальную модель, учитывающую зонное движение электронов в металле наряду с сильным межэлектронным взаимодействием [52–56]. Данная модель имеет особую значимость при описании узкозонных металлов [48]. В представлении вторичного квантования гамильтониан такой системы на решётке имеет вид

$$\hat{H}' = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) n_{f\sigma} + \sum_{f m \sigma} t_{fm} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f n_{f\uparrow} n_{f\downarrow}, \quad (12)$$

где  $c_{f\sigma}^\dagger (c_{f\sigma})$  — оператор рождения (уничтожения) электрона с проекцией спина  $\sigma = \pm 1/2$  на узле  $f$ ,  $\varepsilon$  — одно-узельная энергия электрона,  $\mu$  — химический потенциал системы,  $n_f = \sum_{\sigma} n_{f\sigma} = \sum_{\sigma} c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma}$  — оператор числа частиц на узле  $f$ , матричный элемент  $t_{fm}$  определяет интенсивность процесса перескока электрона с узла  $f$  на узел  $m$ ,  $U$  — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов, находящихся на одном узле и обладающих противоположными проекциями спинного момента (хаббардовское отталкивание).

Поскольку многие экспериментальные данные указывали на то, что основная динамика фермиевских возбуждений в купратах развивается в  $\text{CuO}_2$ -плоскостях, для описания нефононных механизмов сверхпроводимости использовалась главным образом 2D-модель Хаббарда на простой квадратной решётке. В импульсном про-

странстве гамильтониан модели имеет вид

$$\hat{H}' = \sum_{\mathbf{p}\sigma} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}\sigma} + U \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'+\mathbf{q}} c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\downarrow} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\downarrow} c_{\mathbf{p}'\uparrow}, \quad (13)$$

где энергия электрона при учёте дальних перескоков, интенсивность которых определяется параметрами  $t_2$  и  $t_3$ , описывается выражением

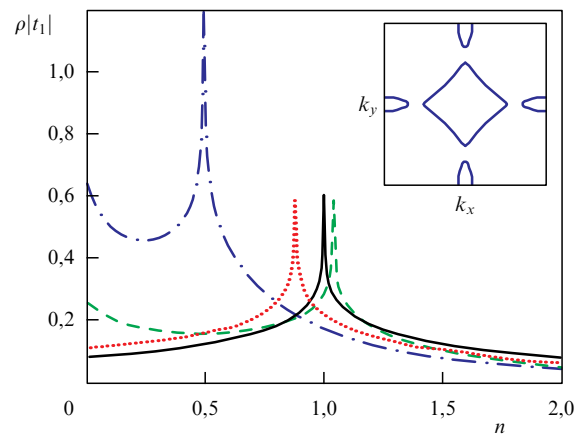
$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = 2t_1 [\cos(p_x a) + \cos(p_y a)] + 4t_2 \cos(p_x a) \cos(p_y a) + 2t_3 [\cos(2p_x a) + \cos(2p_y a)], \quad (14)$$

где  $a$  — постоянная решётки (расстояние между узлами).

Необходимо отметить, что при моделировании электронного спектра (14) и построении фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния в модели Хаббарда становится существенным выход за рамки приближения ближайших соседей ( $t_2 \neq 0$ ,  $t_3 \neq 0$ ). Это связано с тем, что главный вклад в эффективную константу связи набирается за счёт взаимодействия электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми, геометрия которой зависит от структуры энергетического спектра. Важную роль играет также тот факт, что включение дальних перескоков смещает особенность Ван Хофа в плотности электронных состояний от половинного заполнения ( $n = 1$ ) в область меньших или больших электронных плотностей (рис. 3). Необходимо отметить, что включение перескоков в третью координационную сферу квадратной решётки,  $t_3 \neq 0$ , может приводить к качественному изменению геометрии поверхности Ферми, которое заключается в формировании многолистного ферми-контура (см. вставку на рис. 3).

Таким образом, включение в рассмотрение дальних перескоков может приводить к модификации фазовой диаграммы, определяющей области реализации сверхпроводящих состояний с различными типами симметрии параметра порядка.

В модели Хаббарда имеется возможность построения теории возмущений в двух предельных случаях: 1) борновского приближения слабой связи,  $U \ll W$  ( $W = 2zt$  — ширина зоны,  $z$  — число ближайших соседей) и произ-



**Рис. 3.** Модификация плотности электронных состояний и смещение особенности Ван Хофа в модели Хаббарда на квадратной решётке при изменении интегралов перескока:  $t_2 = t_3 = 0$  (сплошная кривая),  $t_2 = 0,15$ ,  $t_3 = 0$  (пунктирная кривая),  $t_2 = 0,15$ ,  $t_3 = 0,1$  (штриховая кривая),  $t_2 = 0,44$ ,  $t_3 = 0$  (штрихпунктирная кривая). На вставке показано формирование многолистного ферми-контура при  $t_2 = 0,44$ ,  $t_3 = -0,1$ ,  $\mu = 2$  (все параметры в единицах  $|t_1|$ ) [32].

вольной плотности электронов,  $0 < n < 1$ ; 2) приближения сильной связи,  $U \gg W$ , и малой электронной плотности,  $n \ll 1$ . Использование приближения слабой связи,  $U \ll W$ , при анализе возможности сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера позволяет при вычислении  $U_{\text{eff}}$  для куперовского канала в области электронных плотностей  $n \sim 1$  (вблизи половинного заполнения) ограничиться диаграммами не выше второго порядка по взаимодействию (см. рис. 2). В противоположном пределе сильной связи,  $U \gg W$ , учёт только диаграмм первого и второго порядка является оправданным лишь в области малой электронной плотности,  $n \ll 1$ , где справедливо ферми-газовое разложение Галицкого–Блума [42, 46].

В одной из первых работ [57] были проанализированы условия реализации сверхпроводимости Кона–Латтинжера в 2D-модели Хаббарда с гамильтонианом (13) в пределе слабой связи,  $U \ll W$ , в приближении ближайших соседей ( $t_2 = t_3 = 0$ ) при малых электронных плотностях ( $p_F a \ll 1$ ). В этом случае для электронного спектра справедливо разложение

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu = 2t_1 [\cos(p_x a) + \cos(p_y a)] - \mu \approx \frac{p^2 - p_F^2}{2m} - \frac{(p_x^4 + p_y^4)a^2}{24m} + \frac{(p_x^6 + p_y^6)a^4}{720m}, \quad (15)$$

где  $m = 1/2t_1 a^2$  — зонная масса. Видно, что в выбранном приближении затравочный спектр электронов при  $p_F a \ll 1$  почти совпадает со спектром свободного ферми-газа, а сам гамильтониан Хаббарда оказывается тождественно эквивалентным гамильтониану слабонеидеального ферми-газа с короткодействующим отталкиванием между частицами [58]. Для выяснения возможности сверхпроводящего перехода в рассматриваемом приближении была вычислена эффективная затравочная вершина для куперовского канала до второго порядка теории возмущений включительно:

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = U + U^2 \Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (16)$$

где  $\Pi(\mathbf{p} + \mathbf{k})$  — поляризационный оператор (4). Для решения проблемы сверхпроводящего спаривания функция  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  была разложена в ряд по собственным функциям неприводимых представлений группы симметрии  $C_{4v}$  квадратной решётки (см. раздел 6), а затем был проанализирован знак выражений для  $U_{\text{eff}}$  в случае каждого из представлений. В результате было показано, что 2D-электронная система, описываемая моделью Хаббарда, при малом заполнении и  $U \ll W$  оказывается неустойчивой по отношению к сверхпроводящему спариванию с  $d_{x^2-y^2}$ -типом симметрии параметра порядка  $\Delta(\phi) \sim \sin(4m + 2)\phi$ , где целое число  $m \in [0, \infty)$ .

Предел слабой связи,  $U \ll W$ , в 3D- и 2D-модели Хаббарда вблизи половинного заполнения,  $n \sim 1$ , был проанализирован в работах [59–61]. В 2D-случае [61] при  $n \approx 1$  в приближении ближайших соседей электронный спектр становится квазигиперболическим,

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} \approx \pm \frac{p_x^2 - p_y^2}{2m}, \quad (17)$$

вблизи угловых точек  $(0, \pm\pi)$  и  $(\pm\pi, 0)$ , в которых ферми-поверхность почти касается зоны Бриллюэна (рис. 4). Как известно, в этих областях вблизи особенности Ван Хова плотность электронных состояний обладает логарифмической особенностью:  $\rho(E) \sim \ln(t/|\mu|)$ , где  $|\mu| \ll t$  — модуль химического потенциала вблизи половинного заполнения. Из рисунка 4 видно, что имеются почти плоские области поверхности Ферми, удовлетворяющие идеальному условию нестинга для точно полузаполненного случая ( $n = 1$ ),

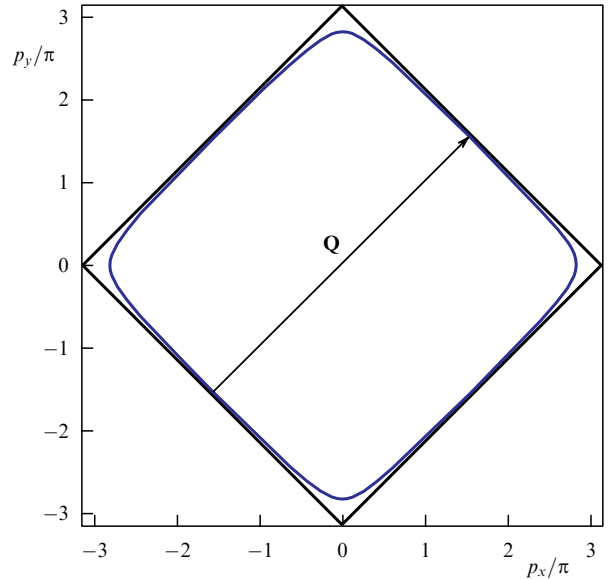


Рис. 4. Поверхность Ферми в случае почти полузаполненной зоны ( $n \approx 1$ ) в 2D-модели Хаббарда на квадратной решётке;  $\mathbf{Q} = (\pi/a, \pi/a)$  — вектор нестинга [32].

рифмической особенностью:  $\rho(E) \sim \ln(t/|\mu|)$ , где  $|\mu| \ll t$  — модуль химического потенциала вблизи половинного заполнения. Из рисунка 4 видно, что имеются почти плоские области поверхности Ферми, удовлетворяющие идеальному условию нестинга для точно полузаполненного случая ( $n = 1$ ),

$$\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} = -\varepsilon_{\mathbf{p}}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{Q} = (\pi/a, \pi/a)$  — вектор нестинга для 2D-квадратной решётки. В этих областях поляризационный оператор  $\Pi(\mathbf{Q}) \sim \ln^2(t/|\mu|)$  [61, 62], где один логарифмический множитель набирается от плотности состояний, а другой обусловлен коновской особенностью. Параметром теории возмущений в 2D-пределе слабой связи служит величина

$$f_0 = \frac{U}{8\pi t} \ll 1, \quad (19)$$

и во втором порядке теории возмущений по  $f_0$  выражение для эффективного взаимодействия принимает вид

$$U_{\text{eff}} \sim f_0 + f_0^2 \ln^2 \frac{t}{|\mu|}. \quad (20)$$

Поскольку выражение для куперовской петли  $L$  при  $n \approx 1$  кроме обычного куперовского логарифма содержит логарифм от особенности Ван Хова, то в результате

$$L = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\tanh(\xi_{\mathbf{p}}/2T)}{2\xi_{\mathbf{p}}} \sim \ln \frac{\mu}{T} \ln \frac{t}{|\mu|}, \quad (21)$$

где  $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$ . Поэтому соотношение для критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу с характерным для купратов  $d_{x^2-y^2}$ -типом симметрии параметра порядка, полученное в работе [61] в главном логарифмическом приближении, имеет вид

$$f_0^2 \ln^3 \frac{t}{|\mu|} \ln \frac{\mu}{T_c} \sim 1, \quad (22)$$



или

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim \mu \exp \left[ -\frac{1}{f_0^2 \ln^3(t/|\mu|)} \right]. \quad (23)$$

Из выражения (23) видно, что знаменатель в правой части, несмотря на малое значение  $f_0^2$  при  $f_0 \ll 1$ , существенно увеличивается за счёт большого значения  $\ln^3(t/|\mu|) \gg 1$ .

Результаты работы [57] по реализации  $d_{xy}$ -спаривания при  $n \lesssim 0,6$  и  $d_{x^2-y^2}$ -спаривания при  $n \sim 1$  [59–61] в пределе слабой связи впоследствии были подтверждены и другими авторами. В работе [63] построена фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния 2D-модели Хаббарда при малых и промежуточных числах заполнения, отражающая зависимость результата конкуренции различных типов симметрии параметра порядка от величины параметра перескока электронов  $t_2$  на узлы, следующие за ближайшими. Фазовая диаграмма, полученная во втором порядке теории возмущений, показывает, что при  $t_2 = 0$  в области малых плотностей электронов,  $0 < n < 0,52$ , в первых двух порядках теории возмущений реализуется сверхпроводимость с  $d_{xy}$ -типом симметрии параметра порядка, в интервале  $0,52 < n < 0,58$  основному состоянию соответствует фаза с р-типом спаривания, а при  $n > 0,58$  возникает сверхпроводимость  $d_{x^2-y^2}$ -типа. В работе [64] в рамках метода ренормгруппы получены аналогичные результаты.

В непосредственной близости к половинному заполнению,  $0,95 < n < 1$ , где имеет место сильная конкуренция между сверхпроводимостью и антиферромагнетизмом, задача о куперовской неустойчивости рассмотрена в работах [62, 65, 66]. В указанных работах суммировались так называемые паркетные диаграммы и для  $\mu \sim T_c$  получено соотношение

$$f_0^2 \ln^4 \frac{t}{|\mu|} \sim f_0^2 \ln^4 \frac{t}{T_c} \sim 1, \quad (24)$$

из которого следует изящная оценка для максимальной критической температуры:

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim t \exp \left( -\frac{\text{const}}{\sqrt{f_0}} \right). \quad (25)$$

Максимальная критическая температура перехода в сверхпроводящую фазу в 2D-модели Хаббарда получена также в работе [67] в режиме  $U/W \sim 1$  при оптимальных электронных концентрациях  $n \sim 0,8–0,9$ . Согласно оценке [67] критическая температура может достигать желаемых значений  $T_c^{d_{x^2-y^2}} \approx 100$  К, реалистичных для оптимально легированных купратных сверхпроводников.

#### 4. Повышение критической температуры в двухзонной модели Хаббарда и в спин-поляризованном ферми-газе

Наряду с возможностью усиления аномальной сверхпроводимости посредством помещения системы нейтральных ферми-частиц в магнитное поле, описанной в разделе 2, существует и другой, позволяющий существенно повысить  $T_c$  уже при малой электронной плотности, способ, связанный с рассмотрением двухзонной ситуации [68] или многослойной системы с геометриче-

ски разделёнными слоями. В этом случае роль спинов "вверх" играют электроны первой зоны (слоя), а роль спинов "вниз" — электроны второй зоны (слоя). Связь между электронами двух зон осуществляется посредством межзонного кулоновского взаимодействия  $U_{12}n_1n_2$ . В результате становится возможным следующий механизм сверхпроводимости экситонного типа: электроны одного сорта образуют куперовскую пару через поляризацию электронов другого сорта [68–70]. При этом роль спиновой поляризации играет относительное заполнение двух зон  $n_1/n_2$ .

Рассмотрим двухзонную модель Хаббарда с одной широкой и одной узкой зонами [69, 70], содержащими соответственно "тяжёлые" ( $n_1 = n_H$ ) и "лёгкие" ( $n_2 = n_L$ ) электроны. Данная модель является естественным обобщением хорошо известной модели Фаликова–Кимбалла [71] для систем с переменной валентностью, однако содержит более богатую физику ввиду наличия конечной ширины зоны тяжёлых электронов вместо локализованного уровня. В модели Хаббарда с одной узкой зоной эффективное взаимодействие, как показано в работах [69, 70, 72, 73], определяется главным образом межзонным кулоновским отталкиванием тяжёлых и лёгких электронов  $U_{12} = U_{HL}$ . Соответствующая критическая температура сверхпроводящего перехода немонотонно зависит от относительного заполнения зон  $n_H/n_L$  и имеет широкий ярко выраженный максимум при  $n_H/n_L = 4$  в 2D-случае. Максимальная критическая температура, которая выражается как

$$T_{c \max} = T_{cl} \left( \frac{n_H}{n_L} \approx 4 \right) = \varepsilon_F \exp \left( -\frac{1}{2f_0^2} \right), \quad (26)$$

соответствует триплетному р-спариванию тяжёлых частиц через поляризацию лёгких частиц. В случае борновского приближения слабой связи эффективная константа связи линейно зависит от межзонного кулоновского отталкивания и корня квадратного из произведения масс [68]:

$$f_0 = \frac{\sqrt{m_H m_L}}{2\pi} U_{HL}.$$

В противоположном пределе сильной связи [69, 70]

$$f_0 = \sqrt{\frac{m_H}{m_L}} \frac{1}{\ln [1/(p_F a)^2]}.$$

В так называемом унитарном пределе сильного экранированного кулоновского взаимодействия,  $f_0 \rightarrow 1/2$ , и сильного электрон-поляронного эффекта,  $m_H^*/m_L \sim (m_H/m_L)^2$ , оценка для максимальной критической температуры даёт [69, 70]

$$T_{cl} \sim \varepsilon_{FH}^* \exp \left( -\frac{1}{2f_0^2} \right) \sim \varepsilon_{FH}^* \exp(-2), \quad (27)$$

где  $\varepsilon_{FH}^*$  — ренормированная (сильно суженная) энергия Ферми тяжёлых частиц,

$$\varepsilon_{FH}^* = \frac{p_{FH}^2}{2m_H^*} \sim 30–50 \text{ К},$$

и резкое возрастание эффективной массы тяжёлых частиц вплоть до значений  $m_H^* \sim 100m_e$  обусловлено

многочастичным электрон-поляронным эффектом [72, 73]. В результате для сверхпроводящего р-спаривания получаются вполне приемлемые критические температуры:  $T_c \sim 5$  К, типичные для отмеченных во введении ураносодержащих тяжелофермионных соединений  $U_{1-x}Th_xBe_{13}$  и  $UNi_2Al_3$  с большими эффективными массами  $m^* \sim (100-200)m_e$  [7, 8] и для органических сверхпроводников.

Необходимо отметить, что электрон-поляронный эффект, обуславливающий сильное увеличение эффективной массы в рассматриваемой модели, связан с неадиабатической частью волновой функции, которая описывает тяжёлый электрон, окружённый облаком виртуальных электрон-дырочных пар, принадлежащих зоне лёгких электронов [72, 73].

Рассматриваемый механизм сверхпроводимости, предположительно, может реализовываться в купратных сверхпроводниках на основе висмута и таллия, а также в сверхрешётках  $PbTe-SnTe$  [12] и дихалькогенидах  $CuS_2$  и  $CuSe_2$  с геометрически разнесёнными слоями. Отметим, что, вообще говоря, две зоны могут принадлежать как одному, так и разным слоям. Предполагается также, что данный механизм может доминировать в рутенатах  $Sr_2RuO_4$  [10] и ультрахолодном ферми-газе  ${}^6Li$  в магнитных ловушках при сильном разбалансе сверхтонких компонент (см. раздел 10).

Ещё раз отметим, что при наличии зоны тяжёлых электронов и зоны лёгких электронов с сильно различающимися массами,  $m_H \gg m_L$ , и плотностями  $n_H > n_L$  критическая температура  $T_c$  обуславливается главным образом спариванием тяжёлых электронов через поляризацию лёгких. Однако включение уже бесконечно малого члена Гейликмана–Москаленко–Сула [74–78]  $K \sum_{pp'} a_p^\dagger a_{p'}^\dagger b_{p'} b_p$ , где  $K$  — параметр взаимодействия, отвечающий перерасеянию куперовских пар между "тяжёлой" и "лёгкой" зонами, приводит к открытию сверхпроводящих щелей в обеих зонах при одной и той же температуре, близкой к (26).

Остановимся более подробно на применении данной теории к физике низких температур. Подчёркнём, что ультрахолодные квантовые газы в магнито-дипольных ловушках, наряду со спин-поляризованными растворами  ${}^3He$  в  ${}^4He$ , в особенности в квазидвумерной ситуации (в которой происходит наиболее сильное возрастание температуры триплетного р-спаривания), являются отличным полигоном для проверки теоретических предсказаний работ [20, 41, 43, 68–70, 79]. Хорошими экспериментальными возможностями для реализации "высокотемпературной" сверхтекучести в спин-поляризованных (разбалансированных) ферми-газах в квазидвумерных магнитных ловушках обладает, в частности, группа Дж.Е. Томаса в Северной Каролине [21]. Отметим, что в 1990-х годах группа под руководством Г. Фроссати в Лейдене экспериментально получила 20%-ное увеличение (от 2,5 до 3,14 мК) критической температуры сверхтекучего перехода  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$  в  $A_1$ -фазе сверхтекучего  ${}^3He$  в магнитных полях  $H = 15$  Тл (при спиновой поляризации 7 %) [80, 81]. При этом в максимуме для критической температуры триплетного р-спаривания (достигаемого при спиновой поляризации  $\alpha = (n_\uparrow - n_\downarrow)/(n_\uparrow + n_\downarrow) = 48\%$ ) теория [20, 43] предсказывает увеличение  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$  в 6,4 раза по сравнению с таковой в неполяризованном случае. Близкое значение для  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$  в максимуме (максимальная  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} = 5,6T_{cl}$ ), но для 35%-ной спиновой поляризации

было также предсказано в метаманитной модели в работах [82, 83] в рамках так называемого s–p-приближения к теории ферми-жидкости Ландау [84]. Отметим, однако, что подход [20, 43] в рамках усиленного механизма Кона–Латтинжера характеризуется только одним подгоночным параметром — газовым параметром  $ar_F$ , и поэтому он модельно более независим, чем подход [82], использующий два не связанных между собой подгоночных параметра, а именно s- и p-гармоники амплитуды рассеяния квазичастиц на ферми-поверхности.

Отметим также, что в случае растворов  ${}^3He$  в  ${}^4He$  теория [20] и результаты работ [85, 86] предсказывают для фермионной сверхтекучести  ${}^3He$  фазовую диаграмму, имеющую в 3D-случае участки s-спаривания при малой концентрации  ${}^3He$  в растворе ( $x = 1\% - 2\%$ ) и р-спаривание при большей концентрации  ${}^3He$  ( $x > 2\% - 4\%$ ). Критические температуры s-спаривания в растворах максимальны при нулевых магнитных полях и  $x \sim 1\%$ . Согласно оценкам [85, 86] критическая температура составляет  $10^{-4} - 10^{-5}$  К.

Температура триплетного р-спаривания резко возрастает в магнитных полях, и при максимально возможной концентрации  ${}^3He$  в растворе  $x_{max} = 9,5\%$  в полях  $H \sim 15$  Тл величина  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim 10^{-5}$  К. В 2D-растворах  ${}^3He$  в  ${}^4He$  для субмонослоёв  ${}^3He$  на андреевских уровнях [87, 88] (возникающих, подобно таммовским уровням, на свободных поверхностях тонких плёнок сверхтекучего  ${}^4He$  [89, 90]) или на графойле [91, 92] фазовая диаграмма раствора также содержит участки s- и р-спаривания.

Подчёркнём, что для s-спаривания в 2D-системах характерна одновременная реализация двух явлений: спаривания двух частиц в реальном пространстве (с образованием молекулы или димера) и куперовского спаривания в импульсном пространстве. Максимальная  $T_c$  для s-спаривания, согласно [93–95], составляет  $10^{-3} - 10^{-4}$  К при 2D-плотности  $n_3 \sim 0,01$  монослоя [85, 86]. В то же время температура триплетного р-спаривания может быть вновь повышена в магнитных полях и при  $H \sim 15$  Тл и 2D-плотности  $n_3 \sim 0,05$  монослоя может стать вполне экспериментально достижимой ( $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim 1$  мК согласно [20]). Экспериментальное обнаружение фермионной сверхтекучести в 3D-растворах и субмонослоях  ${}^3He$  всё ещё остаётся вызовом для низкотемпературного сообщества [96]. Похожая фазовая диаграмма с участками s- и р-спаривания теоретически предсказана в работе [41] и в работе [97] для фермионного изотопа  ${}^6Li$  на куперовской (БКШ) стороне кроссовера с областью бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) в режиме s-резонанса Фешбаха.

Напомним, что в фермионном  ${}^6Li$  квазирезонансная длина рассеяния, которая очень велика по абсолютной величине ( $a = -2,3 \times 10^3$  А), соответствует притяжению. В результате в сбалансированном случае ( $n_1 = n_2$ ) для двух сверхтонких компонент ядерного спина  $I$ , захваченных магнитной ловушкой, реализуется синглетное s-спаривание с критической температурой, определяемой формулой (1). Максимальная температура  $T_{c0}$  в 3D-случае, согласно [97], составляет величину порядка  $10^{-6}$  К при  $\varepsilon_F \sim 10^{-5}$  К. Однако если разбаланс между сверхтонкими компонентами достаточно велик, так что  $(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) > T_{c0}/\varepsilon_F$ , то, согласно критерию сверхтекучести Ландау [41], s-спаривание полностью подавляется. Тем не менее при этом может возникнуть р-спаривание, когда куперовские пары (подобно тому,



как это имеет место в  $A_1$ -фазе сверхтекучего  $^3\text{He}$ ) образуются ферми-частицами одной сверхтонкой компоненты, а эффективное взаимодействие для неё готовится ферми-частицами другой (или других) сверхтонкой компоненты. В данной ситуации максимальная критическая температура  $p$ -спаривания при оптимальном соотношении плотностей сверхтонких компонент, согласно [41],  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim \varepsilon_F \exp(-7/\lambda^2)$  может достичь величины  $10^{-7}$  К при  $\varepsilon_F \sim 10^{-5}$  К и  $\lambda \sim 1$ .

Эффект повышения  $T_c$ , по аналогии с таковым в растворах  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ , для  $p$ -спаривания в разбалансированном случае гораздо сильнее и ярче проявляется в квазидвумерной ситуации [68], что делает весьма актуальными экспериментальные достижения [21], позволившие создавать квазидвумерные ловушки и послойно контролировать в них существенные параметры, такие как плотность, температура и число частиц.

Наконец, остановимся ещё на одном весьма важном предсказании данной теории. В работе [79] показано, что в квазидвумерных (слоистых) материалах в магнитном поле, строго параллельном слою, возникающий вектор-потенциал  $A_y = Hx$  ( $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_x$ ,  $x, y$  — координаты слоя) не изменяет движения электронов и куперовских пар в плоскости слоя. Диамагнитный эффект Мейснера полностью подавлен. В результате электронный монослой (или слоистая система) становится эквивалентным незаряженному (нейтральному) фермионному слою  $^3\text{He}$ .

Таким образом, для квазидвумерных систем малой плотности фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния в параллельных электронному слою магнитных полях вновь может содержать участки традиционного  $s$ -спаривания в отсутствие магнитного поля и участки триплетного  $p$ -спаривания (подобные  $A_1$ -фазе сверхтекучего  $^3\text{He}$ ) в сильных магнитных полях, когда  $s$ -спаривание полностью парамагнитно подавлено. Причём в магнитных полях  $H \sim 15$  Тл для малых энергий Ферми,  $\varepsilon_F \sim 30$  К, можно ожидать достаточно больших степеней спиновой поляризации электронов,  $\alpha \geq 10\%$ , и реалистичных критических температур,  $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim 0,5$  К. Конечно, при этом, как и в случае с графеном (см. разделы 8, 9), экспериментаторам необходимо быть очень внимательными при анализе совершенства кристаллической структуры и степени структурного беспорядка, а также концентрации магнитных и немагнитных примесей, которые приводят к изотропизации параметра порядка и тем самым подавляют несферическое  $p$ -спаривание [98, 99]. Кроме того, необходимо обеспечить высокую степень параллельности магнитного поля плоскости слоя, так как наличие даже сравнительно малой перпендикулярной компоненты приведёт к диамагнитному подавлению сверхпроводимости [96]. Тем не менее предложенный механизм весьма интересен с точки зрения возможной сверхпроводимости в очень чистых гетероструктурах (см. раздел 10).

## 5. Нетривиальные поправки к теории ферми-жидкости Ландау в двумерных системах малой плотности

Общеизвестно, что аномально высокая температура сверхпроводящего перехода в купратных сверхпроводниках связана с весьма необычными свойствами этих систем в нормальном (несверхпроводящем) состоянии. К необычным свойствам нормальной фазы относятся

малость скачка в функции распределения взаимодействующих частиц на поверхности Ферми и линейный ход сопротивления как функции температуры при температурах гораздо ниже дебаевской в оптимально допированных купратных сверхпроводниках. Для объяснения линейного хода сопротивления Андерсоном была выдвинута идея латтинжеровской ферми-жидкости с нулевым скачком функции распределения на ферми-поверхности [100]. Похожая идея маргинальной ферми-жидкости, являющейся частным случаем латтинжеровской, была предложена авторами [101] на основе анализа экспериментальных данных.

Позднее Андерсон выдвинул ещё более нетривиальную идею о том, что не только сильно взаимодействующая 2D-ферми-система высокой плотности, но и даже слабо взаимодействующий 2D-ферми-газ малой плотности описываются не ферми-жидкостной теорией Ландау с конечным скачком функции распределения, а латтинжеровской ферми-жидкостью [102]. В работах [100, 102] Андерсон сформулировал три принципиальных пункта, которые вызвали его сомнения относительно применимости стандартного ферми-газового подхода Галицко-го–Блума [42, 46] в 2D-случае. К ним относятся, во-первых, вопрос о конечности фазы рассеяния для частиц с почти параллельными спинами, ведущей к обращению в нуль  $Z$ -фактора (скачка Мигдала) на поверхности Ферми, во-вторых, связанный с первым вопрос о существенной роли верхней хаббардовской зоны в решёточных моделях уже в случае малой электронной плотности и, наконец, вопрос о предполагаемой сильной особенности в  $f$ -функции взаимодействия квазичастиц Ландау, возникающей в 2D-ферми-газе даже в отсутствие решётки.

В развернувшейся после опубликования работ Андерсона дискуссии приняли участие многие теоретики, большинство из которых [103–107] придерживалось ферми-газовой идеологии и доказывало её внутреннюю непротиворечивость в 2D-случае с помощью лестничных и паркетных приближений в рамках диаграммной техники. Андерсон продолжал настаивать на своей точке зрения, считая, что в 2D-системах такая диаграммная техника даже на уровне суммирования бесконечного ряда паркетных диаграмм неприменима. Фактически спор шёл вокруг вопроса о выборе правильного основного состояния, на базе которого можно построить регулярную процедуру последовательных приближений по взаимодействию, точнее, той его части, которая не была учтена при выборе основного состояния. В соответствии с качественными соображениями Андерсона функция взаимодействия квазичастиц Ландау  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  в 2D-случае при почти параллельных импульсах  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  и противоположных спинах сталкивающихся частиц содержит при малом отклонении от ферми-поверхности сингулярную часть вида

$$f_{\text{sing}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sim \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}. \quad (28)$$

Существование такой сильной сингулярности приводит к логарифмической расходимости всех гармоник Ландау  $f_0, f_1, \dots$  и тем самым к полному краху теории ферми-жидкости. Аккуратное вычисление функции взаимодействия квазичастиц Ландау  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , проведённое во втором порядке теории возмущений в работе [106] и независимо авторами [107], приводит, однако, к значи-

тельно более слабой особенности в  $f$ -функции — вида  $|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^{-1/2}$ , которая, кроме того, существует только в малом угловом интервале  $\phi \propto |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^{3/2}$  вблизи параллельно ориентированных импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . В результате эта особенность приводит лишь к нетривиальным температурным поправкам к  $f$ -функции, но не к разрушению ферми-жидкостной картины как целого.

В работе [108] рассмотрена 2D-модель Хаббарда в пределе сильной связи ( $U \gg W$ ) и малой электронной плотности ( $n \ll 1$ ) в  $T$ -матричном приближении Канамори [109]. В низкоэнергетическом секторе,  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ , в рамках данного описания 2D-модель Хаббарда становится эквивалентной 2D-электронному газу с квадратичным спектром и короткодействующим отталкиванием (см. раздел 2). Таким образом, данная модель может характеризоваться 2D-газовым параметром Блума  $f_0 \approx 1/\ln(1/na^2)$  [46], допускающим проведение контролируемого разложения (здесь  $n = p_F^2/2\pi$  — электронная плотность в 2D-случае для обеих спиновых проекций). На уровне первой итерации к самосогласованному  $T$ -матричному приближению авторами [108] был найден вклад  $T$ -матричного полюса, соответствующего верхней хаббардовской зоне. В результате была получена одночастичная функция Грина с двухполюсной структурой [108], напоминающая функцию Грина в приближении Хаббард-I [51]:

$$G(\omega, \mathbf{k}) \approx \frac{1 - na^2/2}{\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}}(1 - na^2/2) + i0} + \frac{na^2/2}{\omega - U(1 - na^2/2) - \varepsilon_{\mathbf{k}}na^2/2 + i0}, \quad (29)$$

где  $o$  — бесконечно малая положительная величина. Первое слагаемое в правой части (29) соответствует вкладу от нижней хаббардовской зоны, а второе слагаемое — от верхней. Отметим, что вторая итерация к самосогласованному  $T$ -матричному приближению не изменяет главных свойств выражения (29). Таким образом, верхняя хаббардовская зона индуцирует нетривиальные поправки к картине ферми-жидкости Ландау уже при малых электронных плотностях, не разрушая, однако, эту картину в 2D-случае, а приводя лишь к малым хартри-фоковским поправкам к термодинамическому потенциалу.

Необходимо отметить, что все результаты по сверхпроводимости в модели Хаббарда, полученные в однополосном приближении для одночастичной функции Грина, остаются справедливыми при  $U \gg W$  и малой электронной плотности и при учёте второго полюса (с точностью до малых поправок  $\sim W/U$ , где  $W$  — ширина зоны). Таким образом, данный результат по двухполюсной структуре функции Грина играет роль очень интересного связующего звена между точными результатами Галицкого и приближением Хаббард-I (гутцвиллеровским приближением) в модели Хаббарда, но не сказывается на типе спаривания и оценке критической температуры при малых электронных плотностях.

## 6. Сверхпроводимость в модели Шубина – Вонсовского

В работе [110] обсуждался важный вопрос о роли полного (не редуцированного) кулоновского взаимодействия в нефононных механизмах сверхпроводимости, которое в

действительности не ограничивается короткодействующим хаббардовским отталкиванием, а включает в себя также дальнедействующую часть. Авторы [110] рассмотрели 3D-модель желе при реалистичных значениях электронных плотностей, когда корреляционный радиус Вигнера – Зейтца  $r_S \leq 20$ , где

$$r_S = \frac{1,92}{p_F a_B}, \quad (30)$$

$a_B = \varepsilon_0/(me^2)$  — боровский радиус электрона ( $\hbar = 1$ ). При вычислении эффективного взаимодействия учитывались вклады первого и второго порядка, обусловленные всеми диаграммами, представленными на рис. 2. Авторами [110] отмечено, что предыдущие исследования сверхпроводимости Кона – Латтинжера ограничивались учётом только короткодействующего хаббардовского взаимодействия электронов  $U$ , главным образом, ввиду вычислительных трудностей, связанных с учётом в диаграммах первого и высших порядков фурье-образа дальнедействующего кулоновского отталкивания  $V_{\mathbf{q}}$  (зависящего от волнового вектора  $\mathbf{q}$ ). В результате сильное дальнедействующее кулоновское отталкивание в первом порядке теории возмущений (первая диаграмма на рис. 2) игнорировалось и вклад в эффективное взаимодействие электронов в куперовском канале, который обуславливался только последней обменной диаграммой второго порядка на рис. 2, носил характер притяжения и обеспечивал р-спаривание в 3D-случае [38, 39] и d-спаривание в 2D-случае [40, 67].

В работе [110] дальнедействующее кулоновское взаимодействие  $V_{\mathbf{q}}$  выбрано в виде фурье-образа от потенциала Юкавы  $V(r) = (e^2/r) \exp(-\kappa r)$ , который в 3D-случае имеет стандартный вид:

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \kappa^2}, \quad (31)$$

где  $\kappa$  — величина, обратная дебаевской длине экранирования. По итогам вычислений авторы [110] заключили, что малые и промежуточные величины хаббардовского отталкивания  $U$  при наличии дальнедействующей части кулоновского взаимодействия (31) не индуцируют развития куперовской неустойчивости как в трёхмерных, так и в двумерных ферми-системах в р- и d-каналах, независимо от того, насколько мала длина экранирования. Спаривание, возникающее при больших орбитальных моментах ( $l \geq 3$ ), приводит к почти нулевым значениям критической температуры для любых реалистичных значений энергии Ферми. Таким образом, по мнению авторов [110], аномальное спаривание, обусловленное сильным кулоновским отталкиванием, практически экспериментально не измеримо, поскольку соответствующая энергия конденсации, если она имеется, в несколько раз ниже энергии конденсации, обусловленной электрон-фононным взаимодействием.

Возрастание интереса к проблеме учёта дальних межузельных кулоновских корреляций при описании фазовой диаграммы высокотемпературных сверхпроводников привело к значительной популярности расширенной модели Хаббарда, включающей в себя взаимодействие электронов, находящихся на разных узлах кристаллической решётки (в отечественной литературе такая модель обычно называется моделью Шубина – Вонсовского [111 – 113]).

В историческом аспекте модель Шубина–Вонсовского, сформулированная практически сразу после создания квантовой механики, является предшественницей некоторых важных моделей теории сильно коррелированных электронных систем, в частности s–d(f)-модели и самой модели Хаббарда. Модель Шубина–Вонсовского активно использовалась при исследовании полярных состояний в твёрдом теле [114, 115], для описания перехода металл–диэлектрик [116], а также при изучении влияния межузельного кулоновского взаимодействия на эффективную зонную структуру и сверхпроводящие свойства сильно коррелированных систем [117–119].

В представлении Ванье гамильтониан модели Шубина–Вонсовского может быть выражен в виде

$$\hat{H}' = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma} + \sum_{fms} t_{fm} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f \hat{n}_{f\uparrow} \hat{n}_{f\downarrow} + \frac{1}{2} \sum_{fm} V_{fm} \hat{n}_f \hat{n}_m, \quad (32)$$

где последний член в правой части соответствует энергии  $V_{fm}$  кулоновского взаимодействия электронов, находящихся на различных узлах кристаллической решётки. В совокупности три последних члена в правой части (32) отражают тот факт, что в рассматриваемых системах радиус экранирования равен нескольким величинам параметра элементарной ячейки [116]. Этим определяется эффективность модели Шубина–Вонсовского, в которой межузельное кулоновское взаимодействие учитывается в пределах нескольких координационных сфер. В импульсном представлении гамильтониан (32) принимает вид

$$\hat{H}' = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} + U \sum_{pp'q} c_{p1}^\dagger c_{p'+q1}^\dagger c_{p+q1} c_{p'1} + \frac{1}{2} \sum_{pp'q\sigma\sigma'} V_{p-p'} c_{p\sigma}^\dagger c_{p'+q\sigma'}^\dagger c_{p+q\sigma} c_{p'\sigma'}, \quad (33)$$

где фурье-образ кулоновского взаимодействия электронов, находящихся на ближайших узлах,  $V_1$ , и узлах, следующих за ближайшими,  $V_2$ , в 2D-случае на квадратной решётке выражается как

$$V_q = 2V_1 [\cos(q_x a) + \cos(q_y a)] + 4V_2 \cos(q_x a) \cos(q_y a). \quad (34)$$

Авторы работы [120] внесли вклад в дискуссию [67, 110], исследовав условия возникновения сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера в 3D- и 2D-моделях Шубина–Вонсовского с кулоновским отталкиванием электронов, находящихся на соседних узлах ( $V_1 \neq 0$ ,  $V_2 = 0$ ). В качестве взаимодействия ими было рассмотрено предельно сильное кулоновское отталкивание как на одном, так и на соседних узлах:  $U \gg V_1 \gg W$  ( $W$  — ширина зоны;  $W = 12t$  для 3D-кубической решётки;  $W = 8t$  для 2D-квадратной решётки).

В 3D-случае на кубической решётке мы имеем следующие выражения для затравочного взаимодействия электронов в вакууме в s- и p-каналах:

$$U_{\text{vac}}^s = U + 6V + o(p^2 a^2), \quad U_{\text{vac}}^p = 2V \mathbf{pp}' a^2. \quad (35)$$

При этом  $T$ -матрицы в соответствующих каналах в пределе сильной связи определяются выражениями

$$T_s = \frac{4\pi}{m} a_s, \quad T_p = \frac{4\pi}{m} 2a_p \mathbf{pp}' a^2, \quad (36)$$

где  $a_s \sim a$  и  $a_p \sim a$  для длин рассеяния в s- и p-каналах. Безразмерный газовый параметр в s-канале в итоге принимает вид  $\lambda_s = \lambda = 2ap_F/\pi$ , как и в модели Хаббарда, тогда как затравочный газовый параметр в p-канале пропорционален  $\lambda_p \sim (p_F a)^3$ , в согласии с общими квантово-механическими результатами для медленных частиц ( $p_F a < 1$ ) в вакууме [121].

Таким образом, даже в наиболее неблагоприятной для возникновения эффективного притяжения и сверхпроводимости максимально отталкивательной 3D-модели Шубина–Вонсовского нормальное состояние в режиме сильной связи и малой электронной плотности оказывается неустойчивым по отношению к триплетному p-спариванию. В частности, эффективное взаимодействие электронов для  $l = 1$  в веществе имеет вид [120]

$$\rho_{3D} U_{\text{eff}}^{l=1} = \lambda_p - \frac{\lambda_s^2}{13}, \quad (37)$$

где  $\rho_{3D} = mp_F/(2a^2)$  — плотность электронных состояний 3D-ферми-газа. Как обсуждалось выше, вклад от p-гармоники поляризационного оператора  $P_{l=1}$  в веществе  $-\lambda_s^2/13 < 0$  "играет" в пользу притяжения, и он не может быть компенсирован вкладом от межузельного кулоновского отталкивания  $V_1$  в p-канале, пропорционального  $(p_F a)^3$ .

Аналогичным образом, в 2D-случае в режиме сильной связи и малой электронной плотности безразмерный газовый параметр в s-канале  $f_s = f_0 \sim 1/\ln(1/na^2) \sim 1/\ln[1/(p_F a)^2]$ , как в 2D-модели Хаббарда, тогда как безразмерный газовый параметр в p-канале  $f_p \sim p_F^2 a^2$ , что вновь находится в согласии с результатами для медленных частиц в вакууме. Эффективное взаимодействие в 2D-случае в веществе имеет вид [120]

$$\rho_{2D} U_{\text{eff}}^{l=1} = -6,1 f_s^3 + 2p_F^2 a^2, \quad (38)$$

где  $\rho_{2D} = m/(2a)$  — плотность состояний 2D-ферми-газа. Поскольку  $f_s^3 \gg p_F^2 a^2$  при  $p_F a \ll 1$ , величина  $U_{\text{eff}}^{l=1} \approx -6,1 f_s^3$ , как и в случае  $V_1 = 0$  (см. раздел 2).

Таким образом, предшествующие результаты по реализации сверхпроводящего p-спаривания как в трёхмерной, так и в двумерной моделях Хаббарда с отталкиванием в пределе сильной связи,  $U \gg W$ , и малой электронной плотности остаются справедливыми даже при включении сильного кулоновского отталкивания электронов на соседних узлах,  $V_1 \gg W$ , в рамках модели Шубина–Вонсовского. В результате получаются те же выражения для главной экспоненты, определяющей критическую температуру p-спаривания (6) и (11), что и в отсутствие межузельного кулоновского отталкивания ( $V_1 = 0$ ), как в трёхмерном, так и в двумерном случаях. При этом включение  $V_1$  изменяет лишь предэкспоненциальный множитель [48], а значит, сверхпроводящее p-спаривание может развиваться в ферми-системах с чистым отталкиванием [120] (в отсутствие электрон-фононного взаимодействия) даже при учёте дальних отталкивательных кулоновских корреляций.

Авторы работы [122] провели схожий анализ для расширенной модели Хаббарда в борновском приближении слабой связи и пришли к тем же выводам, что и

авторы работы [120]. Более того, в работе [122] отмечено, что и в режиме слабой связи,  $W > U > V$ , эффект дальних кулоновских взаимодействий оказывается подавленным и не ухудшает условий для развития куперовской неустойчивости. Это объясняется тем, что дальние взаимодействия в решёточных моделях обычно вносят вклад только в некоторые определённые каналы спаривания и не влияют на другие каналы. Вместе с тем поляризационные вклады, описываемые диаграммами на рис. 2, имеют компоненты во всех каналах, и чаще всего более чем одна из них "играет" в пользу притяжения. В такой ситуации оказывается, что дальние взаимодействия либо вообще не влияют на главные компоненты эффективного взаимодействия, приводящие к спариванию, либо подавляют главные компоненты, но не затрагивают второстепенные (см. обсуждение ниже после выражения (49)).

В связи с этим в работе [122] на основе расширенной модели Хаббарда в рамках механизма Кона–Латтинжера была построена фазовая диаграмма, наглядно отражающая результат конкуренции сверхпроводящих фаз с параметрами порядка, имеющими различные типы симметрии. При расчётах эффективной константы связи использовалось выражение для ренормированной амплитуды рассеяния в куперовском канале в виде

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + U^2 \Pi(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (39)$$

где  $V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$  — фурье-образ межузельного кулоновского отталкивания электронов (34),  $\Pi(\mathbf{p} + \mathbf{q})$  — линдхардовская функция (4). Таким образом, межузельное кулоновское взаимодействие  $V$  было учтено только в первом порядке теории возмущений, а поляризационные вклады определялись только членом порядка  $U^2$ . При этом было показано [122], что, хотя дальние взаимодействия имеют тенденцию к подавлению аномального спаривания в некоторых каналах, сверхпроводимость Кона–Латтинжера возникает во всей области электронных концентраций  $0 < n < 1$  и для всех соотношений между параметрами модели.

В работах [123, 124] отмечено, что только в области  $\mathbf{q} \ll 1$  эффективное взаимодействие  $U_{\text{eff}}(\mathbf{q})$  характеризуется квадратичной по квазиимпульсу зависимостью. За пределами указанной области становится важным тот факт, что импульсная зависимость  $V_{\mathbf{q}}$  определяется периодическими функциями. В результате поведение  $U_{\text{eff}}(\mathbf{q})$  значительно модифицируется по сравнению с поведением импульсной зависимости фурье-образа потенциала Юкавы. Эти факторы существенно сказываются на условиях реализации куперовской неустойчивости при больших значениях плотности электронов, когда поверхности Ферми не обладают сферической симметрией. Поэтому следует ожидать, что условия реализации сверхпроводящего спаривания в рамках механизма Кона–Латтинжера будут определяться не только динамическими эффектами, обусловленными кулоновскими взаимодействиями, но и эффектами зоны Бриллюэна.

Авторами [123, 124] было последовательно учтено влияние кулоновского взаимодействия электронов из первой и второй координационных сфер на развитие куперовской неустойчивости в борновском приближении слабой связи,  $W > U > V$ . Соответственно ими использовалось эффективное взаимодействие  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ , которое определяется в графической форме суммой пяти диаграмм (см. рис. 2) и для модели Шубина–Вонсовского

имеет следующий аналитический вид:

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \delta U(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \delta U(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} (U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}) (2V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - V_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}} - V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{k}}) \times \\ & \times \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}-\mathbf{k}}} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} (U + V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}}) (U + V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{k}}) \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Наличие ренормированного выражения для эффективного взаимодействия позволяет перейти к анализу условий реализации куперовской неустойчивости. Принимая во внимание, что главный вклад в полную амплитуду рассеяния  $\Gamma$  двух электронов с противоположными значениями импульсов и проекций спина (полная амплитуда в куперовском канале) набирается от рассеяния электронов вблизи поверхности Ферми, зависимостью  $\Gamma$  от мапубаровской частоты в уравнении Бете–Солпитера можно пренебречь. В результате это уравнение упрощается, принимая вид

$$\Gamma(\mathbf{p}|\mathbf{k}) = U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) L(\xi_{\mathbf{q}}) \Gamma(\mathbf{q}|\mathbf{k}), \quad (42)$$

где  $L(\xi_{\mathbf{q}}) = \tanh(\xi_{\mathbf{q}}/2T)/(2\xi_{\mathbf{q}})$  — стандартное выражение для ядра куперовской петли.

Известно [29], что возникновение куперовской неустойчивости можно обнаружить из анализа однородной части уравнения (42). При этом зависимость от импульса  $\mathbf{k}$  факторизуется и её можно не обсуждать. В результате возникает интегральное уравнение Горькова для сверхпроводящей щели  $\Delta(\mathbf{p})$ . Переходя к интегрированию по изоэнергетическим контурам (в 2D-случае), получим, что возможность куперовского спаривания определяется характеристиками энергетического спектра в окрестности уровня Ферми и эффективным взаимодействием  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми  $\varepsilon_{\mathbf{q}} = \mu$  [59, 60]. В результате исследование куперовской неустойчивости сводится к решению задачи для собственных значений

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\varepsilon_{\mathbf{q}}=\mu} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{v_F(\hat{\mathbf{q}})} U_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \Delta(\hat{\mathbf{q}}) = \lambda \Delta(\hat{\mathbf{p}}), \quad (43)$$

в которой сверхпроводящий параметр порядка  $\Delta(\hat{\mathbf{q}})$  выступает в роли собственного вектора, а для собственных значений мы имеем  $\lambda^{-1} \simeq \ln(T_c/W)$ . При этом квазиимпульсы  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\mathbf{q}}$  находятся на поверхности Ферми, а  $v_F(\hat{\mathbf{q}})$  — ферми-скорость. Допустимые решения уравнения (43) с  $\lambda < 0$  определяются не только эффективным взаимодействием  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , но и видом изоэнергетических контуров. Поскольку конкретная структура этих контуров тесно связана с энергетическим спектром, очевидно, что если не ограничиваться рамками приближения ближайших соседей и учесть перескоки на узлы из дальних координационных сфер, то можно существенно повлиять на условия реализации куперовской неустойчивости и заметно модифицировать структуру фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния.

Для решения уравнения (43) представим его ядро в виде суперпозиции функций, каждая из которых отно-

сится к одному из неприводимых представлений группы симметрии  $C_{4v}$  квадратной решётки. Как известно, эта группа имеет пять неприводимых представлений [121], и для каждого из них уравнение (43) имеет своё решение с соответствующей эффективной константой связи  $\lambda$ . В дальнейшем для симметрии параметра порядка используется следующая классификация: представление  $A_1$  соответствует s-типу симметрии,  $A_2$  — расширенному s-типу симметрии ( $s_{\text{ext}}$ ),  $B_1$  —  $d_{xy}$ -типу симметрии,  $B_2$  —  $d_{x^2-y^2}$ -типу симметрии,  $E$  — p-типу симметрии.

Для неприводимого представления  $\gamma = A_1, A_2, B_1, B_2, E$  решение уравнения (43) ищется в виде

$$\Delta^{(\gamma)}(\phi) = \sum_m \Delta_m^{(\gamma)} g_m^{(\gamma)}(\phi), \quad (44)$$

где  $m$  — номер базисной функции представления  $\gamma$ ,  $\phi$  — угол, характеризующий направление импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  по отношению к оси  $p_x$ . Явный вид функций  $g_m^{(\gamma)}(\phi)$  определяется выражениями:

$$\begin{aligned} A_1 \rightarrow g_m^{(s)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{m0})\pi}} \cos(4m\phi), \quad m \in [0, \infty), \\ A_2 \rightarrow g_m^{(s_{\text{ext}})}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin[4(m+1)\phi], \\ B_1 \rightarrow g_m^{(d_{xy})}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin[(4m+2)\phi], \\ B_2 \rightarrow g_m^{(d_{x^2-y^2})}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos[(4m+2)\phi], \\ E \rightarrow g_m^{(p)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{A \sin[(2m+1)\phi] + B \cos[(2m+1)\phi]\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Базисные функции удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int_0^{2\pi} d\phi g_m^{(\gamma)}(\phi) g_n^{(\beta)}(\phi) = \delta_{\gamma\beta} \delta_{mn}. \quad (46)$$

Подставляя (44) в уравнение (43), проводя интегрирование по углам и используя условие ортонормированности функций  $g_m^{(\gamma)}(\phi)$ , получаем

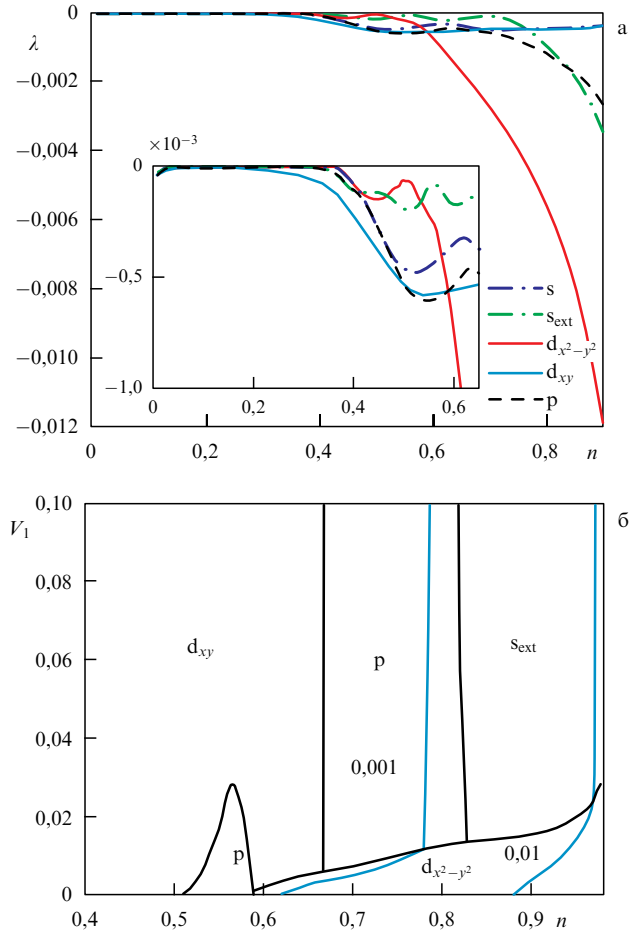
$$\sum_n \Lambda_{mn}^{(\gamma)} \Delta_n^{(\gamma)} = \lambda_\gamma \Delta_m^{(\gamma)}, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{mn}^{(\gamma)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{p}} \oint_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{q}} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{d\phi_{\mathbf{q}} v_F(\hat{\mathbf{q}})} U_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \times \\ &\times g_m^{(\gamma)}(\phi_{\mathbf{p}}) g_n^{(\gamma)}(\phi_{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку  $T_c \sim W \exp(1/\lambda)$ , каждому отрицательному собственному значению  $\lambda_\gamma$  соответствует сверхпроводящая фаза с симметрией параметра порядка типа  $\gamma$ . Разложение параметра порядка  $\Delta^{(\gamma)}(\phi)$  по базисным функциям включает в себя, вообще говоря, множество гармоник, но главный вклад определяется только несколькими первыми слагаемыми. Наибольшему значению критической температуры соответствует наибольшее по абсолютной величине значение  $\lambda_\gamma$ .

Если межузельное кулоновское взаимодействие учитывается только для электронов, находящихся на ближайших узлах ( $V_1 \neq 0$ ,  $V_2 = 0$  в (34)), а спектр возбужде-



**Рис. 5.** Зависимости  $\lambda$  от концентрации носителей  $n$  для  $t_2 = t_3 = 0$ ,  $U = |t_1|$  и  $V_1 = V_2 = 0$  (а) и фазовая диаграмма  $n-V_1$  модели Шубина–Вонсовского на квадратной решётке при  $t_2 = t_3 = 0$ ,  $U = |t_1|$  и  $V_2/V_1 = 0$  (б). Межузельное кулоновское взаимодействие учтено только в первом порядке теории возмущений [123, 124]. Для всех точек, принадлежащих одной тонкой линии на рис. б, указанное значение  $|\lambda|$  постоянно.

ний описывается одним параметром перескока ( $t_1 \neq 0$ ,  $t_2 = t_3 = 0$ ), то при  $U = |t_1|$  фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния (рис. 5) содержит пять областей. На рисунке 5а представлены зависимости эффективных констант связи  $\lambda$  для разных типов симметрии сверхпроводящего параметра порядка от электронной плотности  $n$ , полученные при  $V_1 = V_2 = 0$ . На основе найденных зависимостей  $\lambda(n)$  для различных значений межузельных кулоновских взаимодействий  $V_1$  была построена фазовая диаграмма модели Шубина–Вонсовского, отражающая конкуренцию между сверхпроводящими фазами с различными типами симметрии параметра порядка (рис. 5б). Таким образом, случай, изображённый на рис. 5а, соответствует оси абсцисс на рис. 5б. При получении данной фазовой диаграммы использовалось выражение (39) для эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале, которое учитывает вклады только первого порядка по  $V$  и игнорирует вклады, пропорциональные  $UV$  и  $V^2$ . Участки фазовой диаграммы, лежащие на оси абсцисс ( $V_1 = 0$ ), хорошо согласуются с областями на фазовых диаграммах, полученных в работах [63, 125]. В области малых плотностей электронов,  $n = 0-0,52$ , в первых двух порядках теории возмущений

реализуется сверхпроводимость с  $d_{xy}$ -типом симметрии параметра порядка [40, 57], в интервале  $n = 0,52 - 0,58$  основному состоянию соответствует фаза с  $p$ -типом спаривания, но при этом величина  $|\lambda_p|$  незначительно превосходит величину  $|\lambda_{d_{xy}}|$  (см. вставку на рис. 5а). Отметим, что, согласно расчётам авторов [122], в данном интервале электронных плотностей вместо  $p$ -спаривания реализуется  $d_{xy}$ -спаривание. При  $n > 0,58$  возникает  $d_{x^2-y^2}$ -тип сверхпроводимости, актуальный для купратных сверхпроводников.

Необходимо отметить, что включение в первом порядке теории возмущений кулоновского взаимодействия  $V_1$  электронов, находящихся на соседних узлах, приводит к уменьшению абсолютной величины  $\lambda$  для всех типов симметрии. При этом сверхпроводящая  $d_{x^2-y^2}$ -фаза подавляется наиболее интенсивно и с возрастанием  $V_1$  при тех же концентрациях начинают реализовываться фазы с параметрами порядка, имеющими симметрию другого типа.

Поскольку первый порядок теории возмущений по межузельному кулоновскому взаимодействию всегда имеет тенденцию к подавлению сверхпроводящего спаривания, возможность реализации куперовской неустойчивости на основе механизма Кона – Латтинжера связывается с появлением во втором порядке теории возмущений таких вкладов в матрицу эффективного взаимодействия для куперовского канала (41), которые соответствуют притяжению и обладают достаточной интенсивностью. Таким образом, при учёте эффектов Кона – Латтинжера по межузельному кулоновскому взаимодействию необходимо использовать для  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  не усечённое выражение (39), а полное — (40). При таком подходе поляризационные эффекты, пропорциональные  $UV$  и  $V^2$ , даже при небольших значениях  $V_1$  существенно изменяют и усложняют структуру фазовой диаграммы (рис. 6а). С увеличением параметра межузельного кулоновского взаимодействия  $V_1$  происходит возрастание величины  $|\lambda|$  для  $T_c \sim W \exp(-1/|\lambda|)$ . При этом стабилизируются только три фазы, соответствующие  $d_{xy}$ -,  $p$ - и  $s$ -типам симметрии сверхпроводящего параметра порядка.

Отметим, что в области высоких концентраций электронов и при  $0,25 < V_1/|t_1| < 0,5$  поляризационные эффекты Кона – Латтинжера приводят к появлению сверхпроводящей  $s$ -фазы. Этот качественный эффект наглядно демонстрирует важность учёта процессов второго порядка при вычислении эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале и при построении фазовой диаграммы, представленной на рис. 6. Проведённое количественное сравнение различных парциальных вкладов в полное эффективное взаимодействие показало, что реализация  $s$ -спаривания обусловлена поляризационными вкладами, пропорциональными  $V^2$ , при этом основной вклад определяется угловой гармоникой  $g_1^{(s)}(\phi) = (1/\sqrt{\pi}) \cos(4\phi)$ , а не константой (как для обычного  $s$ -спаривания в изотропной ситуации и в отсутствие решётки).

Отмеченный сценарий реализации сверхпроводящего  $s$ -спаривания за счёт высших угловых гармоник хорошо коррелирует с недавно полученными экспериментальными данными работы [126], в которой представлены результаты экспериментальных исследований сверхпроводника на основе арсенида железа  $\text{KFe}_2\text{As}_2$ , выполненных методом фотоэмиссионной спектроскопии с ультравысоким угловым разрешением. Исследования показыва-

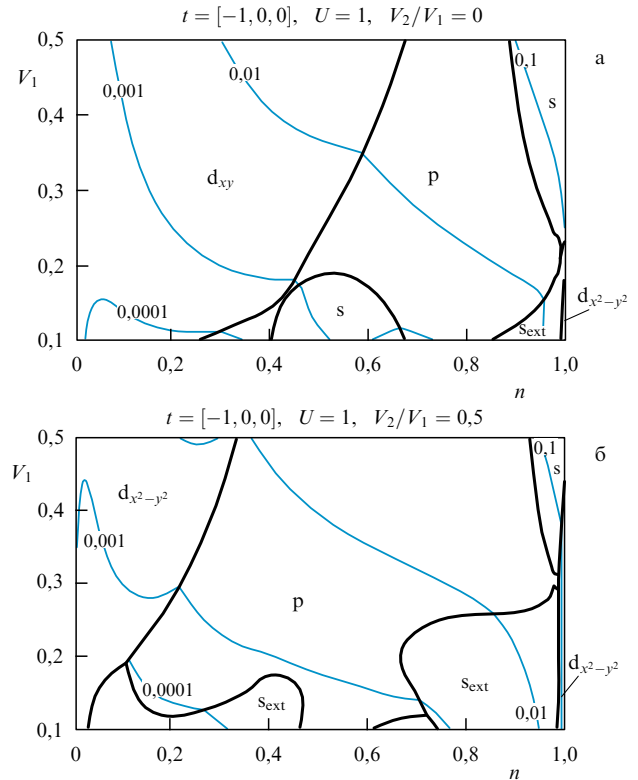


Рис. 6. Фазовая диаграмма  $n - V_1$  модели Шубина – Вонсовского на квадратной решётке, построенная при учёте вкладов второго порядка по  $V$  для набора параметров  $t_2 = t_3 = 0$ ,  $U = |t_1|$  и соотношения  $V_2/V_1 = 0$  (а) и  $V_2/V_1 = 0,5$  (б). Тонкие кривые соответствуют линиям постоянного значения  $|\lambda|$  [124].

ли, что данное соединение является нодальным (содержащим нули щели) сверхпроводником с  $s$ -типом симметрии параметра порядка, который имеет восемь точек обращения щели в нуль.

На рисунке 7а приведена угловая зависимость сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta^{(s)}(\phi)$ ,

$$\Delta^{(s)}(\phi) = \frac{\Delta_0^{(s)}}{\sqrt{2}} + \Delta_1^{(s)} \cos(4\phi) + \Delta_2^{(s)} \cos(8\phi) + \Delta_3^{(s)} \cos(12\phi) + \Delta_4^{(s)} \cos(16\phi), \quad (49)$$

рассчитанная в работе [124] для точки фазовой диаграммы, в которой реализуется  $s$ -спаривание при боль-

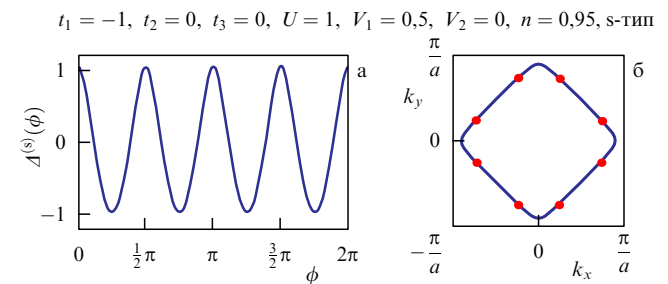
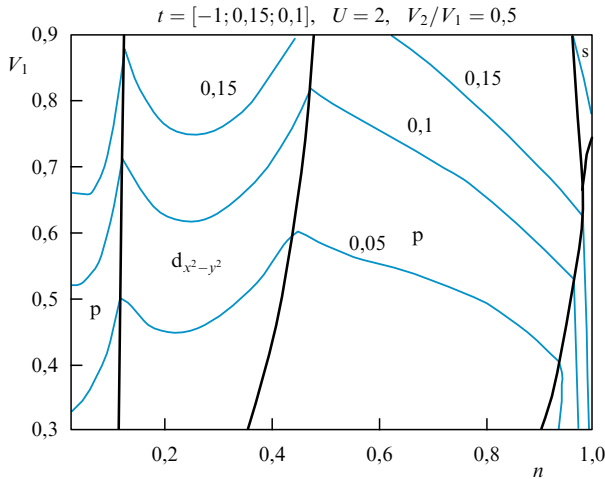


Рис. 7. Угловая зависимость сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta^{(s)}(\phi)$  (а) и расположение нодальных точек обращения щели  $\Delta^{(s)}(\phi)$  в нуль на контуре Ферми (б), рассчитанные для параметров  $t_2 = t_3 = 0$ ,  $U = |t_1|$ ,  $V_1 = 0,5|t_1|$ ,  $V_2 = 0$ ,  $n = 0,95$  [124].





**Рис. 8.** Фазовая диаграмма  $n-V_1$  модели Шубина–Вонсовского на квадратной решётке, полученная для параметров  $t_2 = 0,15|t_1|$ ,  $t_3 = 0,1|t_1|$ ,  $U = 2|t_1|$ ,  $V_2/V_1 = 0,5$ . Тонкие кривые соответствуют линиям постоянного значения  $|\lambda|$  [124].

ших электронных плотностях. Данная зависимость демонстрирует наличие восьми нодальных точек, в которых щель обращается в нуль. Их расположение на контуре Ферми (рис. 7б) по результатам расчёта [124] качественно согласуется с экспериментальной картиной, представленной в работе [126].

Сценарий реализации сверхпроводимости, схожий с описанным выше сценарием возникновения  $s$ -спаривания, наблюдается также в  $p$ -канале. Здесь сверхпроводимость, полученная при учёте второго порядка теории возмущений по кулоновскому взаимодействию, подавляется затравочным отталкиванием только для первой гармоники  $g_0^{(p)}(\phi) = (1/\sqrt{\pi})(A \sin \phi + B \cos \phi)$ . При этом основной вклад в  $\Delta^{(p)}(\mathbf{p})$  вносит функция следующей гармоники  $p$ -спаривания на решётке  $g_1^{(p)}(\phi) = (1/\sqrt{\pi}) \times [A \sin(3\phi) + B \cos(3\phi)]$ .

В работе [124] проанализировано также влияние дальнего кулоновского отталкивания ( $V_2 \neq 0$ ) и дальних электронных перескоков ( $t_2 \neq 0$ ,  $t_3 \neq 0$ ) на фазовую диаграмму сверхпроводящего состояния модели Шубина–Вонсовского. На рисунке 8 показана модификация фазовой диаграммы модели Шубина–Вонсовского, возникающая при увеличении параметра хаббардовского отталкивания  $U$ . Видно, что в области малых электронных плотностей, а также в области плотностей, близких к особенности Ван Хофа, реализуется сверхпроводящая фаза с  $d_{x^2-y^2}$ -симметрией параметра порядка и достаточно большими значениями  $|\lambda| \sim 0,1-0,2$ . Данный результат представляется актуальным при рассмотрении возможности реализации механизма Кона–Латтинжера в купратных сверхпроводниках. Отметим, что при  $|\lambda| \sim 0,2$  критические температуры перехода в сверхпроводящую фазу могут достигать реалистичных для купратов значений  $T_c \sim 100$  К.

## 7. Сверхпроводимость в двумерной $t-J$ -модели

После выдвижения Андерсоном идеи [4] о том, что электронные свойства купратных сверхпроводников могут описываться моделью Хаббарда в пределе силь-

ной связи,  $U \gg W$ , исключительную популярность приобрела так называемая  $t-J$ -модель (см. обзоры [127–130]). Эта модель первоначально была получена с помощью канонического преобразования из модели Хаббарда вблизи половинного заполнения,  $n \rightarrow 1$ , в пределе  $t/U \ll 1$  [131, 132]. В дальнейшем применительно к купратам была предложена обобщённая  $t-J$ -модель [133, 134]. Гамильтониан 2D-обобщённой  $t-J$ -модели с ослабленным констрейнтом и произвольным отношением  $J/t$ , выведенный из трёхзонной модели Эмери [135, 136], имеет вид [133, 134, 137]

$$\hat{H}' = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma} + t \sum_{\langle fm \rangle \sigma} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f \hat{n}_{f\uparrow} \hat{n}_{f\downarrow} + J \sum_{\langle fm \rangle} \left( \mathbf{S}_f \mathbf{S}_m - \frac{\hat{n}_f \hat{n}_m}{4} \right). \quad (50)$$

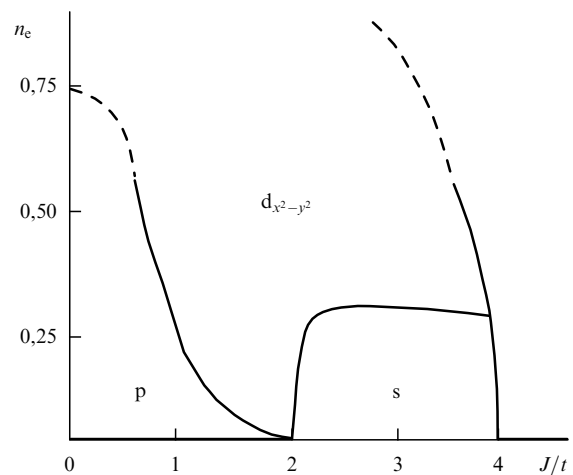
Фактически это модель с сильным хаббардовским отталкиванием между электронами на одном узле и слабым антиферромагнитным притяжением  $J > 0$  на соседних узлах. Таким образом, иерархия параметров модели имеет вид  $U \gg \{J, t\}$ . Фазовая диаграмма  $t-J$ -модели, построенная в работе [137], изображена на рис. 9.

Для параметров, реалистичных для оптимально допированных купратных сверхпроводников,  $J/t \sim 0,5$ ,  $n = 2\varepsilon_F/W = 0,85$ , получается следующая оценка для критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу:

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim \varepsilon_F \exp \left( -\frac{\pi t}{2Jn^2} \right) \sim 10^2 \text{ К}. \quad (51)$$

Необходимо отметить, что аналогичная оценка для критической температуры  $d_{x^2-y^2}$ -спаривания получена в рамках более строгой спин-поляронной теории в работах [138, 139] с использованием операторов Хаббарда [140].

Отметим, что авторы работ [138, 139] также использовали обобщённую  $t-J$ -модель, выведенную из модели Эмери в пределе малого числа дырок с помощью конструкции синглетов Жанга–Райса [141] при  $J < t$  и в



**Рис. 9.** Фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния двумерной  $t-J$ -модели при малых и промежуточных электронных плотностях [96, 137].

пренебрежении межзонным кулоновским взаимодействием (между носителями заряда из энергетических зон меди и кислорода),  $V_{pd} = 0$ . В этом приближении локальный констрейнт также не очень важен и мы можем пренебречь кинематическим взаимодействием [142, 143].

Отметим, что очень интересная физика возникает в так называемом трудном углу фазовой диаграммы обобщённой  $t$ – $J$ -модели, а именно в случае малого допирования при  $J/t \ll 1$  и  $\delta = (1 - n_e) \ll 1$  (эту область часто называют псевдощелевой). Для этой части фазовой диаграммы в соответствии с идеями Лафлина [144, 145] о конфайнменте спина и заряда в двумерной и трёхмерной сильно коррелированной электронной материи (см. также [146, 147]) предложено представление о сильнодействующей ферми-бозе-смеси спинов и холонов, связанных в композитные дырки потенциалом конфайнмента (или антиферромагнитной (АФМ) струны [131, 148]). При этом, согласно предположению [96, 147], фазовую диаграмму купратных сверхпроводников в области малого допирования можно рассматривать в рамках сценария БКШ–БЭК-кроссовера между локальными и протяжёнными парами для спаривания двух композитных дырок (двух спиновых поляронов или двух АФМ-струн) в  $d_{x^2-y^2}$ -канале. Конечно, переход от области оптимального допирования с большой ферми-поверхностью и протяжёнными куперовскими парами к области малого допирования с локальными парами и дырочными карманами (малой ферми-поверхностью) может быть реализован существенно нетривиальным способом и содержать посередине некую сингулярность, наподобие квантовой критической точки (Quantum Critical Point, QCP) (см., например, [149–151]), или даже некие промежуточные фазы.

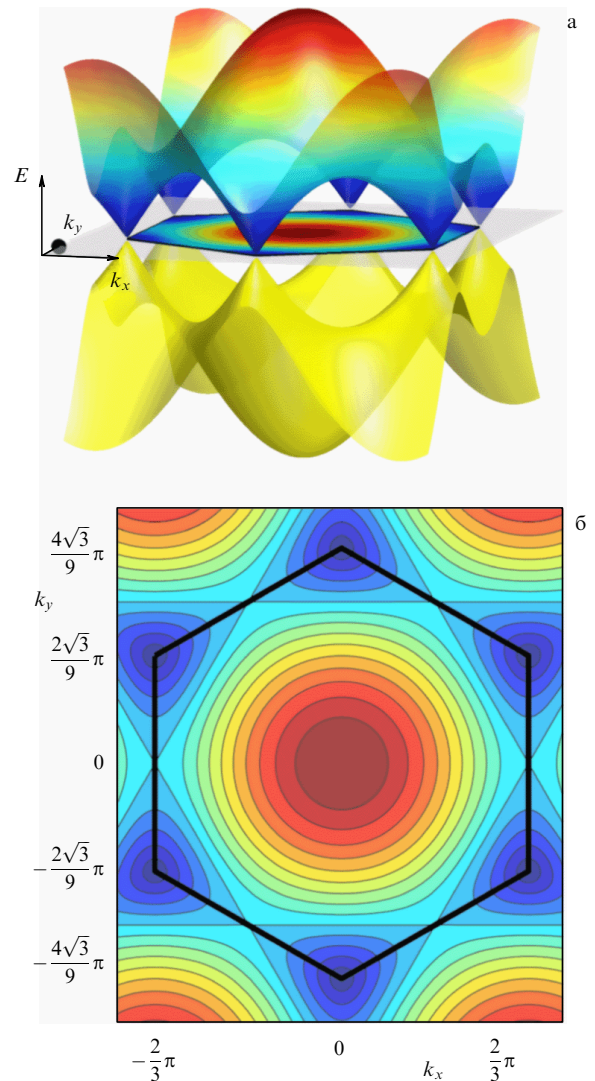
Возвращаясь к области протяжённого куперовского спаривания и оптимального допирования  $n_e \geq 0,85$ , подчеркнём, что на сегодня развитие идеологии Кона–Латтинжера для режима сильной связи представляет собой одно из актуальнейших направлений теории сверхпроводимости в сильно коррелированных системах. Однако решение этой задачи сопряжено с необходимостью учёта сильных одноузельных корреляций во всех порядках теории возмущений. Причём межузельные корреляции должны описываться с учётом вкладов по крайней мере второго порядка. Один из сценариев развития теории в указанном направлении связан с использованием атомного представления [140] и диаграммной техники для операторов Хаббарда [152, 153]. Актуальными моделями, в рамках которых могут быть рассмотрены ренормировки Кона–Латтинжера, являются обобщённая  $t$ – $J$ – $V$ -модель [154–157] и  $t$ – $J^*$ – $V$ -модель, учитывающая трёхцентровые взаимодействия, важная роль которых при описании сверхпроводящего состояния изучалась в работах [158–165]. Данные модели, которые могут быть выведены из модели Шубина–Вонсовского в некоторой области параметров, эффективно представляют собой её низкоэнергетические варианты.

В заключение этого раздела заметим, что ультрахолодные квантовые газы в оптических решётках также предоставляют отличную экспериментальную возможность моделирования сильно коррелированных систем на решётке, в частности изучения фазовой диаграммы  $t$ – $J$ -модели и даже структуры АФМ-струны и спиновых поляронов в ситуации с хорошо контролируруемыми и легко перестраиваемыми параметрами  $t$ ,  $J$  и  $n_e$  [166].

## 8. Сверхпроводимость в идеализированном монослое графена

В настоящий момент популярность механизма Кона–Латтинжера продолжает возрастать в связи с возможностью его реализации и в других актуальных физических системах. Например, активно обсуждается вопрос об условиях его возникновения в топологических сверхтекучих жидкостях [167], а также в идеализированных монослое и бислое графена, в которых не учитывается влияние примесей и ван-дер-ваальсова потенциала подложки.

Сегодня графен представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения вследствие своих необычных транспортных, псевдорелятивистских и квантово-электродинамических свойств [23, 24, 26]. Эта совокупность свойств графена обусловлена в первую очередь его уникальной бесщелевой энергетической структурой, состоящей из конусообразных валентной зоны и зоны проводимости (рис. 10), которые соприкасаются в углах первой зоны Бриллюэна (дираков-



**Рис. 10.** Энергетическая структура монослое графена (а) и энергетические контуры вокруг седловых точек в зоне проводимости графена (б), полученные в модели сильной связи в приближении ближайших соседей.

ские точки) [25]. Установлено, что электроны, распространяющиеся в графене, демонстрируют вблизи дираковских точек схожесть с безмассовыми фермионами с линейной дисперсией [168], минимальную проводимость при нулевой концентрации носителей [168, 169], высокую подвижность [170–172], туннелирование Клейна [173, 174], осциллирующее движение (*Zitterbewegung*) [175, 176], универсальное поглощение света [177] и многие другие свойства, не имеющие аналогов в других физических системах.

В контакте со сверхпроводниками графен проявляет экзотические сверхпроводящие свойства [178]. Авторами работы [179] экспериментально изучался эффект Джозефсона [180] в мезоскопических переходах, состоящих из короткого образца монослоя графена, находящегося между двумя близко расположенными сверхпроводящими электродами. Охладив такое устройство до температуры, меньшей критической температуры электродов ( $T_c \approx 1,3$  К), авторы [179] наблюдали в монослое графена сверхток (аналогичный результат был получен в работе [181]). Изменяя напряжение электрического поля затвора, исследователи имели возможность сдвигать уровень Ферми из валентной зоны в зону проводимости и тем самым контролировать плотность носителей заряда в монослое графена. Независимо от положения уровня Ферми в системе наблюдался джозефсоновский ток, свидетельствующий о том, что данное устройство работает как биполярный сверхтоковый транзистор: сверхток переносился дырочными куперовскими парами, когда уровень Ферми находился в валентной зоне, и электронными куперовскими парами, когда уровень Ферми располагался в зоне проводимости. Более важным является тот факт, что сверхток протекал в монослое графена даже тогда, когда уровень Ферми находился в дираковской точке, т.е. при нулевой плотности носителей. Такое поведение согласовывалось с теорией баллистического транспорта в джозефсоновских переходах из графена [182], однако более поздние эксперименты [183–185] продемонстрировали, что транспорт в переходах сверхпроводник–графен–сверхпроводник является скорее диффузионным.

Хотя пока не найдено подтверждений того, что в самом графене может развиваться куперовская неустойчивость (возможно, из-за постоянно присутствующего структурного беспорядка), результаты отмеченных экспериментов свидетельствуют, что куперовские пары способны распространяться в графене когерентно. В связи с этим встаёт вопрос: можно ли модифицировать графен структурно (например, рассмотреть плоскости двойникования и межзёрненные границы) или химически так, чтобы он стал магнетиком [186] или даже настоящим сверхпроводником [187]?

Теоретический анализ, проведённый в этом направлении, показал [188], что модель с конической дисперсией требует минимальной интенсивности спаривательного взаимодействия для развития куперовской неустойчивости в нелегированной системе. Кроме того, было предпринято несколько попыток анализа возможности реализации сверхпроводящего состояния и в легированном монослое графена. В работе [189] изучалась роль топологических дефектов в реализации куперовского спаривания в этом материале. Была также исследована сверхпроводящая фаза и определена симметрия параметра порядка на гексагональной решётке графена. В случае

притягательного хаббардовского взаимодействия  $U$  между электронами, как показано в работе [190] в рамках модели Хаббарда с притяжением, реализуется обычное синглетное спаривание с  $s$ -типом симметрии параметра порядка. В работе [191] в приближении среднего поля получена фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния для монослоя графена в расширенной модели Хаббарда с притяжением и исследован плазменный механизм сверхпроводимости, приводящий к низким критическим температурам в  $s$ -канале для реалистичных значений электронных концентраций. Кроме того, продемонстрировано, что при включении в рассмотрение притягательного взаимодействия  $V$  на соседних узлах возможна реализация экзотической комбинации  $s$ - и  $p$ -типов спаривания [191].

Наряду с исследуемым во многих работах вопросом о реализации сверхпроводящего состояния в слое графена в рамках электрон-фононного механизма [192–196], в настоящее время активно изучается возможность развития в графене куперовской неустойчивости вследствие электрон-электронных взаимодействий. В работе [197] в  $t$ – $J$ -модели в рамках ренормированной теории среднего поля проведено исследование возможности реализации сверхпроводящего спаривания в монослое графена. Показано, что возможна реализация как сверхпроводимости с  $s$ -типом симметрии параметра порядка, так и киральной сверхпроводимости с  $d$ -типом симметрии, которая описывается двумерным представлением и нарушает симметрию по отношению к обращению времени. При этом продемонстрировано [197] значительное превосходство  $d$ -спаривания над  $s$ -спариванием.

Когда говорят о киральности в отношении сверхпроводящего состояния, подразумевают, что такое состояние характеризуется как спонтанным нарушением симметрии по отношению к обращению времени, так и нарушением чётности (см. [198], а также обзор [199]). Другими словами, такая сверхпроводимость обязательно включает в себя линейную комбинацию двух параметров порядка, принадлежащих объединённому представлению более высокой размерности для точечной группы симметрии кристалла. Киральным сверхпроводящим состоянием с  $d$ -типом симметрии параметра порядка в графене является спин-синглетное  $d_{x^2-y^2} \pm id_{xy}$ -состояние. В силу того что гексагональная решётка относится к группе симметрии  $C_{6v}$ , два состояния  $d$ -типа вносят одинаковый вклад, но имеют фазовый сдвиг  $\pi/2$  относительно друг друга. Это обстоятельство обуславливает возникновение сверхпроводящего состояния в графене при любом конечном уровне легирования [198, 199].

Возникновение киральной сверхпроводимости с  $d_{x^2-y^2} \pm id_{xy}$ -типом симметрии параметра порядка исследовалось ранее в купратах при наличии магнитных полей [200, 201] и магнитных примесей [202], а также в 2D-сверхтекучем  $^3\text{He}$  [203]. Необходимо отметить, что реализация киральной сверхпроводимости  $d + id$ -типа наблюдалась экспериментально в пниктиде  $\text{SrPtAs}$  вблизи ван-хововского заполнения  $n_{\text{vH}}$  [204]. Данное соединение с  $T_c = 2,4$  К [205] включает в себя набор слабо связанных между собой слоёв  $\text{PtAs}$ , формирующих гексагональную решётку.

В работе [206] в рамках  $t$ – $J$ -модели [207] при учёте кулоновского взаимодействия фермионов  $V$  на соседних атомах углерода для гексагональной решётки графена, исследованной методом функциональной ренормгруп-

пы, было обнаружено триплетное  $f$ -спаривание и синглетное  $d + id$ -спаривание вдали от половинного заполнения. Возможность реализации киральной сверхпроводимости  $d + id$ -типа за счёт спин-флуктуационного механизма подтверждалась также расчётами в рамках квантового метода Монте-Карло [208, 209].

В работе [210] рассмотрена ситуация, в которой уровень Ферми находится вблизи одной из особенностей Ван Хофа в плотности состояний монослоя графена. Известно, что эти особенности имеют свойство усиливать магнитные и сверхпроводящие флуктуации [211]. Согласно сценарию, описанному в работе [210], возникновение куперовской неустойчивости обусловлено сильной анизотропией контура Ферми при ван-хововском заполнении,  $n_{\text{vH}}$ , что, по сути, восходит к механизму Кона – Латтинжера. В работе [210] отмечено, что реализация данного механизма представляется возможной в графене, поскольку электрон-электронное рассеяние становится сильно анизотропным и поэтому может возникнуть канал с притяжением, в котором осуществляется проекция амплитуды рассеяния на гармоники с нетривиальной угловой зависимостью на поверхности Ферми. Согласно результату работы [210] такая куперовская неустойчивость в идеализированном монослое графена развивается преимущественно в  $d + id$ -канале и она может обуславливать критические температуры сверхпроводящего перехода вплоть до величин  $T_c \sim 10$  К, в зависимости от возможности максимально приблизить уровень химического потенциала к особенности Ван Хофа. В работе [212] обсуждалась возможность сосуществования и конкуренции неустойчивости Померанчука и сверхпроводящей неустойчивости Кона – Латтинжера в монослое графена.

Авторам работы [213] впервые экспериментально удалось получить сильно легированный химическим путём монослой графена (в качестве допантов выступали различные комбинации К и Са) и исследовать полученный образец с помощью метода фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением (Angle-Resolved Photoemission Spectroscopy, ARPES). Было обнаружено, что многочастичные взаимодействия существенно деформируют поверхность Ферми, приводя к так называемой расширенной особенности Ван Хофа в  $M$ -точке гексагональной зоны Бриллюэна и индуцируя при этом электронный топологический переход.

Под расширенной особенностью Ван Хофа [214] здесь понимается расходимость в плотности электронных состояний, возникающая в ситуации, когда энергетическая зона какой-либо системы является почти плоской (в пределах 1 мэВ) в одном из направлений зоны Бриллюэна. При этом появляется целый набор простых седловых точек, которые формируют критическую линию, или так называемую расширенную седловую точку [214]. Такая расширенная седловая точка индуцирует более сильную корневую расходимость в плотности электронных состояний, в отличие от обычной седловой точки энергетической зоны, которая приводит к обыкновенной логарифмической в 2D-случае расходимости Ван Хофа [215]. Эта корневая расходимость в свою очередь может способствовать значительному увеличению критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу [214].

Кроме экспериментального исследования образца сильно легированного слоя графена, в работе [213] проведено теоретическое изучение особенностей основного

состояния, а также проанализирована конкуренция между ферромагнитной и сверхпроводящей неустойчивостями. Анализ показал, что в этой конкуренции побеждает тенденция к сверхпроводимости вследствие сильной модуляции эффективного взаимодействия вдоль контура Ферми, т.е. за счёт только электрон-электронных взаимодействий. При этом сверхпроводящая неустойчивость развивается преимущественно в  $f$ -канале [213].

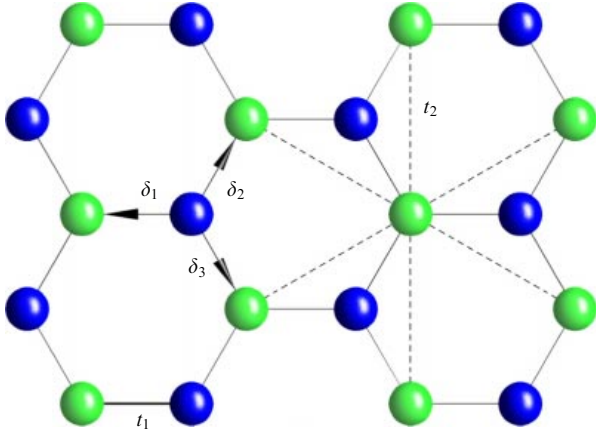
Авторы работ [216, 217] в рамках метода функциональной ренормгруппы [218–220] провели анализ конкуренции сверхпроводимости, обусловленной электрон-электронным взаимодействием, и фаз волны спиновой и зарядовой плотности при ван-хововском заполнении в монослое графена [221–223]. Анализ показал, что три седловые ван-хововские точки с идеальным нестингом приводят к доминированию именно сверхпроводящего спаривания как наиболее предпочтительного типа упорядочения. Ренормгрупповой анализ указал на то, что в этих условиях реализуется спин-синглетное сверхпроводящее состояние с  $d + id$ -типом симметрии параметра порядка, спонтанно нарушающее симметрию по отношению к обращению времени и приводящее к киральным андреевским состояниям на границах образца. В работе [224] отмечено, что при малом смещении уровня Ферми от особенности Ван Хофа происходит переход в фазу волны спиновой плотности, т.е. область сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнитного упорядочения в легированном графене отсутствует.

В работе [225] указано на то, что учёт дальних кулоновских взаимодействий может существенно повлиять на конкуренцию сверхпроводящих фаз с различными типами симметрии параметра порядка в легированном графене. В частности, в рамках расширенной модели Хаббарда (модели Шубина – Вонсовского) для графена показано, что при удалении от особенности Ван Хофа, на которой реализуется спин-синглетное спаривание  $d + id$ -типа, фаза волны спиновой плотности вступает в сильную конкуренцию с фазой волны зарядовой плотности, усиленной дальними кулоновскими взаимодействиями, что может способствовать реализации триплетного  $f$ -спаривания [67] (см. ниже).

Важность учёта дальних кулоновских взаимодействий при расчётах физических характеристик графена отмечалась в работе [226], где при получении эффективной многочастичной модели графена и графита из первых принципов определены величины частично экранированного зависящего от частоты кулоновского взаимодействия. Обнаружено, что величина хаббардовского отталкивания в графене составляет  $U = 9,3$  эВ (в согласии с оценкой, приведённой в монографии [227]), в противоречии с интуитивными ожиданиями малой величины  $U$  и слабой связи  $U < W$  (известно [228], что в графене  $t_1 = 2,8$  эВ). В работе [226] приведены также результаты вычисления параметров кулоновского отталкивания электронов, находящихся на ближайших и на следующих за ближайшими соседями атомах углерода в монослое графена:  $V_1 = 5,5$  эВ и  $V_2 = 4,1$  эВ соответственно. Отметим, что другие исследователи (см., например, [229]) полагают значения данных параметров гораздо меньшими.

Конкуренция сверхпроводящих фаз с различными типами симметрии в широкой области концентрации носителей  $1 < n \leq n_{\text{vH}}$  в идеализированном монослое легированного графена исследовалась в работах [33, 230].





**Рис. 11.** (В цвете онлайн.) Кристаллическая структура монослоя графена. Атомы углерода, принадлежащие различным подрешёткам, отмечены разными цветами.  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  — векторы в направлении ближайших соседей,  $t_1$  и  $t_2$  — интегралы перескока между ближайшими и следующими за ближайшими соседями атомами.

Показано, что при промежуточных электронных плотностях дальние кулоновские взаимодействия способствуют реализации сверхпроводимости с f-типом симметрии параметра порядка, а при приближении к сингулярности Ван Хоа реализуется сверхпроводящее спаривание с  $d + id$ -типом симметрии [33, 230].

В гексагональной решётке графена на каждую элементарную ячейку приходится по два атома углерода, поэтому всю решётку можно разбить на две подрешётки, А и В (рис. 11). Гамильтониан модели Шубина – Вонсовского для монослоя графена, учитывающий перескоки электронов между ближайшими и следующими за ближайшими атомами, а также кулоновское отталкивание электронов, находящихся на одном и на разных атомах, в представлении Ванье имеет вид

$$\hat{H}' = \hat{H}'_0 + \hat{H}'_{\text{int}}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}'_0 = & -\mu \left( \sum_{f\sigma} \hat{n}_{f\sigma}^A + \sum_{g\sigma} \hat{n}_{g\sigma}^B \right) - t_1 \sum_{f\delta\sigma} (a_{f\sigma}^\dagger b_{f+\delta,\sigma} + \text{h.c.}) - \\ & - t_2 \left( \sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle} a_{f\sigma}^\dagger a_{m\sigma} + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle} b_{g\sigma}^\dagger b_{n\sigma} + \text{h.c.} \right), \\ \hat{H}'_{\text{int}} = & U \left( \sum_f \hat{n}_{f\uparrow}^A \hat{n}_{f\downarrow}^A + \sum_g \hat{n}_{g\uparrow}^B \hat{n}_{g\downarrow}^B \right) + V_1 \sum_{f\delta\sigma\sigma'} \hat{n}_{f\sigma}^A \hat{n}_{f+\delta,\sigma'}^B + \\ & + \frac{V_2}{2} \left( \sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle\sigma\sigma'} \hat{n}_{f\sigma}^A \hat{n}_{m\sigma'}^A + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle\sigma\sigma'} \hat{n}_{g\sigma}^B \hat{n}_{n\sigma'}^B \right). \end{aligned}$$

Здесь  $a_{f\sigma}^\dagger (a_{f\sigma})$  — операторы рождения (уничтожения) электрона с проекцией спина  $\sigma = \pm 1/2$  на узле  $f$  подрешётки А,  $\hat{n}_{f\sigma}^A = a_{f\sigma}^\dagger a_{f\sigma}$  — операторы чисел фермионов на узле  $f$  подрешётки А (аналогичные обозначения используются и для подрешётки В); вектор  $\delta$  связывает ближайшие соседние атомы гексагональной решётки; двойные угловые скобки обозначают, что суммирование проводится только по следующим за ближайшими соседями;  $t_1$  — интеграл перескока между соседними атомами (перескоки между различными подрешётками),  $t_2$  — интеграл перескока между следующими за ближайшими соседями атомами (перескоки в одной подрешётке),  $U$  —

параметр хаббардовского отталкивания,  $V_1$  и  $V_2$  — кулоновские взаимодействия электронов, находящихся соответственно на ближайших и следующих за ближайшими атомах углерода. Предполагается, что положение химического потенциала  $\mu$  и число носителей тока  $n$  в монослое графена могут регулироваться электрическим полем затвора.

После перехода в импульсное пространство и проведения  $u-v$ -преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\sigma} &= w_{11\mathbf{k}} \alpha_{1\mathbf{k}\sigma} + w_{12\mathbf{k}} \alpha_{2\mathbf{k}\sigma}, \\ b_{\mathbf{k}\sigma} &= w_{21\mathbf{k}} \alpha_{1\mathbf{k}\sigma} + w_{22\mathbf{k}} \alpha_{2\mathbf{k}\sigma}, \end{aligned} \quad (53)$$

где  $\alpha_{1\mathbf{k}\sigma}$  и  $\alpha_{2\mathbf{k}\sigma}$  — операторы, описывающие динамику электронов в верхней и нижней зонах графена, гамильтониан  $\hat{H}'_0$  диагонализуются, и в результате получается хорошо известное выражение [25] для двухзонного энергетического спектра (см. рис. 10):

$$E_{1\mathbf{k}} = t_1 |u_{\mathbf{k}}| - t_2 f_{\mathbf{k}}, \quad E_{2\mathbf{k}} = -t_1 |u_{\mathbf{k}}| - t_2 f_{\mathbf{k}}, \quad (54)$$

где введены обозначения

$$f_{\mathbf{k}} = 2 \cos(\sqrt{3} k_y a) + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \cos\left(\frac{3}{2} k_x a\right), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k}} &= \sum_{\delta} \exp(i\mathbf{k}\delta) = \exp(-ik_x a) + \\ &+ 2 \exp\left(\frac{i}{2} k_x a\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right), \end{aligned} \quad (56)$$

$$|u_{\mathbf{k}}| = \sqrt{3 + f_{\mathbf{k}}}. \quad (57)$$

Коэффициенты преобразования Боголюбова имеют вид

$$\begin{aligned} w_{11}(\mathbf{k}) &= w_{22}^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u_{\mathbf{k}}^*}{|u_{\mathbf{k}}|}, \\ w_{12}(\mathbf{k}) &= -w_{21}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (58)$$

В боголюбовском представлении (53) оператор взаимодействия в (52) определяется выражением, включающим в себя операторы  $\alpha_{1\mathbf{k}\sigma}$  и  $\alpha_{2\mathbf{k}\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{\text{int}} &= \frac{1}{N} \sum_{ijlm} \Gamma_{ij,lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) \alpha_{i\mathbf{k}\sigma}^\dagger \alpha_{j\mathbf{p}\sigma}^\dagger \alpha_{l\mathbf{q}\sigma} \alpha_{m\mathbf{s}\sigma} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s}) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{ijlm} \Gamma_{ij,lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) \alpha_{i\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \alpha_{j\mathbf{p}\downarrow}^\dagger \alpha_{l\mathbf{q}\downarrow} \alpha_{m\mathbf{s}\uparrow} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (59)$$

где  $\Gamma_{ij,lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s})$  и  $\Gamma_{ij,lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s})$  — затравочные амплитуды, вид которых приводится ниже,  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Использование борновского приближения слабой связи с иерархией параметров модели

$$W > U > V_1 > V_2, \quad (60)$$

где  $W$  — ширина зоны для верхней и нижней ветвей энергетического спектра графена (54) при  $t_2 = 0$ , при вычислении амплитуды рассеяния в куперовском канале позволяет ограничиться рассмотрением диаграмм второго порядка в эффективном взаимодействии двух электронов с противоположными значениями импульса и спина и использовать величину  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ . Графически

эта величина определяется суммой диаграмм, представленных на рис. 2. Допуская, что при легировании графена химический потенциал попадает в верхнюю энергетическую зону  $E_{1k}$ , и анализируя условия возникновения сверхпроводимости Кона – Латтинжера, можно рассматривать ситуацию, в которой начальный и конечный импульсы также принадлежат верхней зоне.

Аналитически величина эффективного взаимодействия  $U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  определяется выражением

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \tilde{U}_0(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + \delta U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (61)$$

$$\tilde{U}_0(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \Gamma_{ij;lj}^\perp(\mathbf{p}, -\mathbf{p} | -\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{N} \sum_{l,m,\mathbf{p}_1} \Gamma_{li;jm}^\perp(\mathbf{p}, \mathbf{q}_2 | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \times \\ & \times \Gamma_{mi;l j}^\perp(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p} | \mathbf{q}_2, \mathbf{k}) \chi_{l,m}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1) + \\ & + \frac{2}{N} \sum_{l,m,\mathbf{p}_1} \left\{ \Gamma_{im;l j}^\perp(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{k}) \times \right. \\ & \times [\Gamma_{li;m j}^\parallel(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | \mathbf{p}_1, -\mathbf{k}) - \Gamma_{li;jm}^\parallel(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)] + \\ & + \Gamma_{li;jm}^\perp(\mathbf{q}_1, -\mathbf{p} | -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) \times \\ & \left. \times [\Gamma_{im;jl}^\parallel(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{k}, \mathbf{q}_1) - \Gamma_{im;l j}^\parallel(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{k})] \right\} \chi_{l,m}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1). \end{aligned}$$

Здесь величина

$$\Gamma_{ij;lm}^\parallel(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} (V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ji;ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k} | \mathbf{s}, \mathbf{q})), \quad (63)$$

$$\begin{aligned} V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) = & V_1 u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + \\ & + \frac{V_2}{2} f_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} (w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j1}(\mathbf{p}) w_{l1}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + \\ & + w_{i2}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m2}^*(\mathbf{s})), \end{aligned} \quad (64)$$

описывает интенсивность взаимодействия фермионов с параллельными проекциями спина, а величина

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij;lm}^\perp(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) = & U_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) + \\ & + V_{ji;ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k} | \mathbf{s}, \mathbf{q}), \quad (65) \\ U_{ij;lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p} | \mathbf{q}, \mathbf{s}) = & U(w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j1}(\mathbf{p}) w_{l1}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + \\ & + w_{i2}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m2}^*(\mathbf{s})), \end{aligned}$$

соответствует взаимодействию фермиевских квазичастиц с антипараллельными проекциями спина. В выражениях (61)–(65) индексы  $i = j = 1$ , а индексы  $l$  и  $m$  могут принимать значения 1 или 2 (верхняя и нижняя зона). Через

$$\chi_{l,m}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{n_F(E_{lk}) - n_F(E_{mp})}{E_{mp} - E_{lk}} \quad (66)$$

обозначены обобщённые восприимчивости, где  $n_F(x) = \{\exp[(x - \mu)/T] + 1\}^{-1}$  — функция распределения Ферми – Дирака, а энергии  $E_{lk}$  определены в (54). Для компактности введены обозначения для комбинаций импульсов

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}. \quad (67)$$

Как и в случае модели Шубина – Вонсовского на квадратной решётке (см. раздел 6), задачу об исследовании куперовской неустойчивости в монослое графена

можно свести к задаче для собственных значений

$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi^2} \oint_{\epsilon_{\mathbf{q}}=\mu} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{v_F(\hat{\mathbf{q}})} U_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \Delta(\hat{\mathbf{q}}) = \lambda \Delta(\hat{\mathbf{p}}), \quad (68)$$

где интегрирование проводится по контуру, изображённому на рис. 10б. Для решения уравнения (68) его ядро можно представить как суперпозицию собственных функций, каждая из которых принадлежит одному из неприводимых представлений группы симметрии  $C_{6v}$  гексагональной решётки.

Как известно, эта группа симметрии имеет шесть неприводимых представлений [121]: четыре одномерных и два двумерных. Для каждого представления уравнение (68) имеет решение со своей эффективной константой связи  $\lambda$ . Далее будем использовать следующие обозначения для классификации симметрий параметра порядка: представление  $A_1$  соответствует s-типу симметрии;  $A_2$  — расширенному s-спариванию;  $B_1$  и  $B_2$  — f-типу симметрии;  $E_1$  —  $p + ip$ -типу симметрии,  $E_2$  —  $d + id$ -типу симметрии.

Для каждого неприводимого представления  $v = A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2$  будем искать решение уравнения (43) в виде

$$\Delta^{(v)}(\phi) = \sum_m \Delta_m^{(v)} g_m^{(v)}(\phi), \quad (69)$$

где  $m$  — номер собственной функции, принадлежащей представлению  $v$ , а  $\phi$  — угол, определяющий направление импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  по отношению к оси  $p_x$ . Явный вид ортонормированных функций  $g_m^{(v)}(\phi)$  определяется выражениями

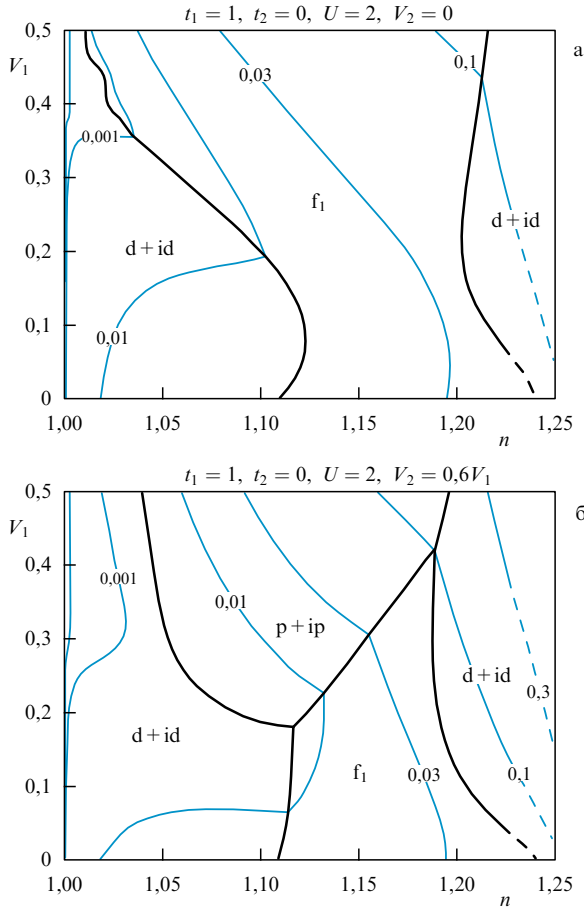
$$\begin{aligned} A_1 \rightarrow g_m^{(s)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{m0})\pi}} \cos(6m\phi), \quad m \in [0, \infty), \\ A_2 \rightarrow g_m^{(s_{\text{ext}})}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin[(6m + 6)\phi], \\ B_1 \rightarrow g_m^{(f_1)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin[(6m + 3)\phi], \\ B_2 \rightarrow g_m^{(f_2)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos[(6m + 3)\phi], \\ E_1 \rightarrow g_m^{(p+ip)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ A \sin[(2m + 1)\phi] + B \cos[(2m + 1)\phi] \right\}, \\ E_2 \rightarrow g_m^{(d+id)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ A \sin[(2m + 2)\phi] + B \cos[(2m + 2)\phi] \right\}. \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь для двумерных представлений  $E_1$  и  $E_2$  индексы  $m$  пробегает такие значения, при которых коэффициенты  $2m + 1$  и  $2m + 2$  соответственно не кратны трём.

На рисунке 12а представлена фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния Кона – Латтинжера в случае, когда энергетический спектр монослоя описывается только одним параметром перескока ( $t_1 \neq 0, t_2 = 0$ ), учитывается хаббардовское отталкивание,  $U = 2$  (здесь и далее все параметры в единицах  $|t_1|$ ), а также кулоновское отталкивание электронов, находящихся только на соседних атомах углерода ( $V_1 \neq 0, V_2 = 0$ ).

Видно, что фазовая диаграмма содержит три области. При малых электронных плотностях  $n$  основному состоянию системы соответствует сверхпроводимость с  $d + id$ -типом симметрии параметра порядка, описываемая 2D-представлением  $E_2$ , вклад в которое определяется гармониками  $g_m^{(d+id)}(\phi)$  из (70). При промежу-

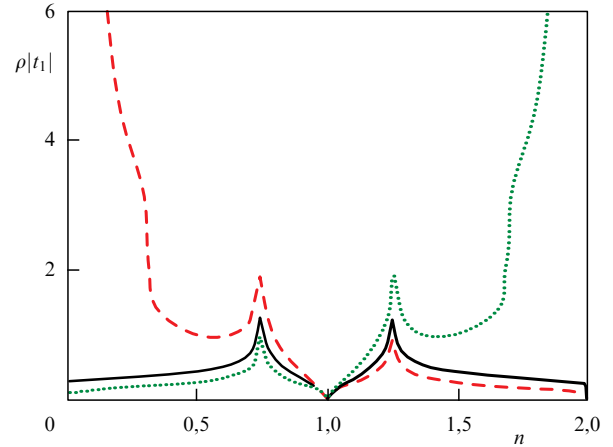




**Рис. 12.** Фазовая диаграмма  $n-V_1$  сверхпроводящего состояния монослоя графена при  $t_2 = 0$ ,  $U = 2$  для  $V_2 = 0$  (а) и  $V_2 = 0,6V_1$  (б) (все параметры в единицах  $|t_1|$ ). Для всех точек, принадлежащих одной тонкой линии, указанное на ней значение  $|\lambda|$  постоянно [231].

точных электронных концентрациях реализуется сверхпроводящее f-спаривание, вклад в которое определяется гармониками  $g_m^{(f_1)}(\phi) = (1/\sqrt{\pi}) \sin[(6m+3)\phi]$  (где  $m \in [0, \infty)$ ), тогда как вклад гармоник  $g_m^{(f_2)}(\phi) = (1/\sqrt{\pi}) \cos[(6m+3)\phi]$  при этом отсутствует. При больших плотностях  $n$  вновь возникает область реализации киральной сверхпроводимости с d + id-типом симметрии параметра порядка [197, 210, 216, 225]. С увеличением параметра межузельного кулоновского взаимодействия  $V_1$  в области малых  $n$  происходит подавление d + id-спаривания и реализуется спаривание с f-типом симметрии параметра порядка. Тонкими кривыми на рис. 12 изображены линии постоянного значения  $|\lambda|$ . Видно, что в рассматриваемом случае при приближении к ван-хововскому заполнению  $n_{\text{ВХ}}$  (сплошная кривая на рис. 13) значения эффективной константы связи достигают величин  $|\lambda| = 0,1$ .

Отметим, что здесь вновь во избежание суммирования паркетных диаграмм [62, 65, 66] анализируются только те области электронных концентраций, которые не находятся в непосредственной близости к особенности Ван Хофа в плотности электронных состояний монослоя графена (см. рис. 13). По этой причине границы между различными областями реализации сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера, а также линии постоянного значения  $|\lambda|$ , находящиеся в непосредственной близости к особенности Ван Хофа, изображены на фазовой диаграмме штриховыми кривыми.

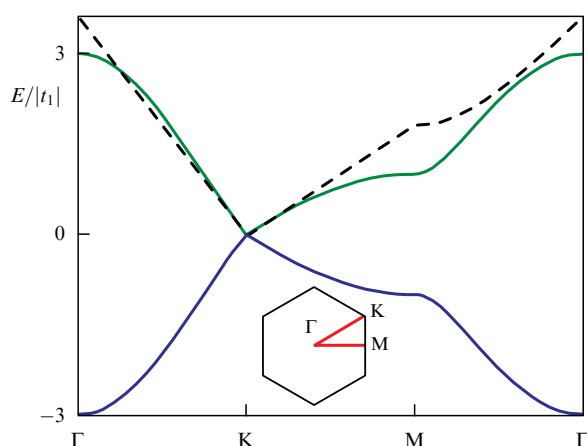


**Рис. 13.** Модификация плотности электронных состояний монослоя графена при включении перескоков на следующие за ближайшими соседями атомы при  $t_2 = 0$  (сплошная кривая),  $t_2 = -0,2|t_1|$  (штриховая кривая),  $t_2 = 0,2|t_1|$  (пунктирная кривая) [33].

При учёте дальних кулоновских взаимодействий электронов  $V_2$  на гексагональной решётке графена происходит качественное изменение фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния [231]. Это видно из рис. 12б, полученного при фиксированном соотношении между параметрами дальних кулоновских взаимодействий  $V_2 = 0,6V_1$ . В этом случае происходит подавление широкой области сверхпроводящего состояния с f-типом симметрии при промежуточных электронных плотностях и реализуется сверхпроводящее спаривание с p + ip-типом симметрии параметра порядка. Кроме того, учёт  $V_2$  приводит к увеличению значений эффективной константы связи до величин  $|\lambda| = 0,3$ .

Включение электронных перескоков  $t_2$  на следующие за ближайшими атомы углерода в монослое графена качественно не влияет на конкуренцию сверхпроводящих фаз различных типов симметрии, как видно из рис. 12б [33]. Такое поведение системы объясняется тем, что включение перескоков  $t_2 > 0$  или  $t_2 < 0$  не вызывает существенной модификации плотности электронных состояний монослоя в областях концентраций носителей между дираковской точкой и обеими особенностями Ван Хофа (см. рис. 13). Однако учёт перескоков  $t_2$  приводит к увеличению абсолютных величин эффективного взаимодействия, а следовательно, к реализации более высоких критических температур перехода в сверхпроводящую фазу в идеализированном монослое графена [33].

Необходимо отметить, что сверхпроводимость Кона–Латтинжера (и соответствующее значение  $|\lambda|$ ) в графене никогда не реализуется вблизи дираковских точек. Расчёты показывают, что в окрестности этих точек, где хорошо работает линейное приближение для энергетического спектра монослоя (и параболическое приближение для спектра бислоя графена (см. раздел 9)), плотность состояний очень мала, а величина эффективной константы связи  $|\lambda| < 10^{-2}$ . Большие значения  $|\lambda|$ , свидетельствующие о развитии куперовской неустойчивости, появляются при электронных плотностях  $n > 1,15$ , однако при таких концентрациях энергетический спектр монослоя вдоль направления КМ зоны Бриллюэна (рис. 14) уже существенно отличается от дираковского приближения [231].

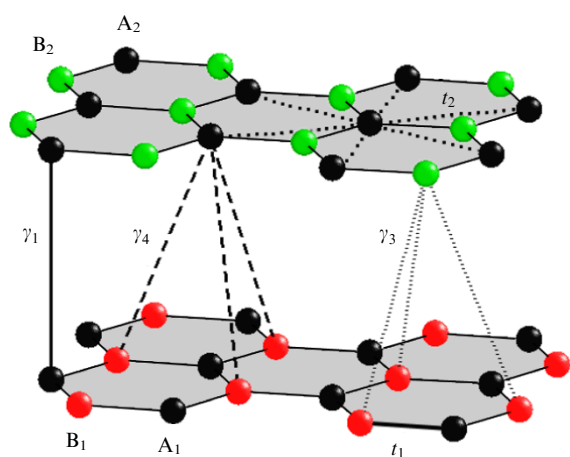


**Рис. 14.** (В цвете онлайн.) Сравнение энергетического спектра монослоя графена, определяемого выражениями (54) (синяя и зелёная сплошные линии), и спектра, полученного в дираковском приближении (чёрная штриховая линия). На вставке показан контур обхода зоны Бриллюэна.

В работах [232, 233] возможность куперовского спаривания в графене исследовалась в противоположном пределе сильной связи  $U \gg t$  [226] на основе кинематического механизма сверхпроводимости в рамках диаграммной техники для операторов Хаббарда [56, 152, 153]. В частности, была построена фазовая диаграмма для сверхпроводящего упорядочения и вычислена константа БКШ в зависимости от заполнения  $\pi$ - или  $\sigma$ -оболочки.

## 9. Усиление сверхпроводимости в идеализированном бислое графена

Поскольку известно, что электронные свойства графена могут изменяться при изменении числа слоёв атомов углерода [234], возможность реализации сверхпроводящего состояния анализировалась нами и в бислое графене [231, 235], кристаллическая структура которого показана на рис. 15. Если энергетическая зонная структура монослоя характеризуется вблизи дираковских



**Рис. 15.** (В цвете онлайн.) Кристаллическая структура бислоя графена. Атомы углерода  $A_1$  и  $B_1$  в нижнем слое показаны красными и чёрными кружками, атомы углерода  $A_2$  и  $B_2$  в верхнем слое изображены чёрными и зелёными кружками.  $t_1$  и  $t_2$  — внутриплоскостные электронные перескоки,  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$  — межплоскостные перескоки [231].

точек линейной дисперсией, то бислой в низкоэнергетическом пределе обладает квадратичным энергетическим спектром (см. [236–238], а также обзоры [239, 240]).

В работе [241] рассмотрено влияние межплоскостных электронных перескоков в бислое графена и графите на формирование сверхпроводящей фазы. Предположив, что хаббардовское взаимодействие имеет характер притяжения и обуславливает сверхпроводящее  $s$ -спаривание, авторы [241] в приближении среднего поля показали, что учёт межплоскостных перескоков увеличивает критическую температуру сверхпроводящего перехода  $T_c$  при малых значениях химического потенциала.

В работе [242] в приближении среднего поля в рамках  $t$ – $J$ -модели для бислоя графена при учёте прямых межслойных перескоков  $\gamma_1$  (см. рис. 15) и сверхобменного взаимодействия, обусловленного сильным хаббардовским отталкиванием  $U$  электронов, исследована возможность реализации сверхпроводящей фазы. Показано, что в бислое при умеренном легировании и для низкоэнергетических масштабов доминирует  $d + id$ -тип спаривания. В последующей работе [243] в рамках  $t$ – $J$ -модели для бислоя графена обсуждалось сосуществование киральной сверхпроводимости с  $d + id$ -типом симметрии параметра порядка и антиферромагнетизма вблизи половинного заполнения.

Авторами работ [244, 245] изучался экзотический механизм сверхпроводимости, основанный на межслойном спаривании киральных электронов в бислое графена, которое приводит к аномальным термодинамическим свойствам. Согласно заключению авторов [244, 245] данный механизм сверхпроводимости в бислое графена имеет глубокую аналогию с цветной сверхпроводимостью [246], основанной на спаривании кварков в сверхплотной кварковой материи при низких температурах, и бесщелевыми состояниями в ядерной материи [247].

Авторами работы [248] в приближении случайных фаз (Random Phase Approximation, RPA) вычислена функция экранирования кулоновского взаимодействия в бислое как в легированном, так и в нелегированном режимах. Обнаружено, что статический поляризационный оператор легированного бислоя содержит коновскую аномалию, намного большую по величине, чем в случае монослоя или 2D-электронного газа. Как уже отмечалось в разделе 2, сингулярная часть поляризационного оператора, или коновская аномалия, способствует эффективному притяжению двух частиц, обеспечивая вклад, всегда превышающий для орбитальных моментов пары  $l \neq 0$  отталкивательный вклад, обусловленный регулярной частью поляризационного оператора. Таким образом, авторы [248] заключили, что в идеализированном бислое можно ожидать повышения критических температур перехода в сверхпроводящую фазу  $T_c$  по сравнению с  $T_c$  в идеализированном монослое графена.

Согласно результатам работы [249] ферромагнитная неустойчивость вблизи особенностей Ван Хофа доминирует над сверхпроводимостью Кона–Латтинжера. Тем не менее в работе [250] возможность сверхпроводящего спаривания в отталкивательном случае на гексагональной решётке для бислоя графена была исследована в рамках формализма ренормгруппы в режиме слабой связи вдали от половинного заполнения. Несмотря на то что схема ренормгруппы в данном режиме может быть обоснована лишь формально [250], авторами была обнаружена, кроме сверхпроводящего спаривания  $f$ -типа,

киральная сверхпроводимость d-типа. В результате оценки критической температуры сверхпроводящего перехода в идеализированной системе авторы [250] получили значения  $T_c \sim 1$  К, указав, что критические температуры могут быть даже ещё ниже при учёте влияния примесей.

В работах [231, 235] подробно исследовано влияние кулоновского взаимодействия дираковских фермионов на формирование сверхпроводящего состояния Кона – Латтинжера в бислойном легированном графене без учёта влияния ван-дер-ваальсова потенциала подложки и примесей. В рамках модели Шубина – Вонсовского в борновском приближении слабой связи при учёте хаббардовского, межатомного (внутри слоя) и межслойного кулоновских взаимодействий электронов была построена фазовая диаграмма, определяющая границы реализации областей сверхпроводимости с различными типами симметрии параметра порядка. Показано, что поляризационные вклады Кона – Латтинжера до второго порядка теории возмущений включительно по кулоновскому взаимодействию и учёт дальних внутриплоскостных кулоновских взаимодействий существенно влияют на конкуренцию между сверхпроводящими фазами с f-, p + ip- и d + id-симметриями параметра порядка. Продемонстрировано, что учёт межслойного кулоновского взаимодействия может приводить к повышению критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу. Остановимся на вычислениях и результатах работ [231, 235] более подробно.

Рассмотрим идеализированный бислой графена, предполагая, что два монослоя расположены по типу АВ, т.е. один слой повёрнут на  $60^\circ$  относительно другого [236, 240]. При этом расположение подрешёток в слоях выберем таким образом, чтобы узлы из разных слоёв, расположенные друг над другом, относились к подрешёткам  $A_1$  и  $A_2$ , а остальные узлы — к подрешёткам  $B_1$  и  $B_2$  (см. рис. 15). В этом случае гамильтониан модели Шубина – Вонсовского для бислоя графена, учитывающий перескоки электронов между ближайшими и следующими за ближайшими атомами, кулоновское отталкивание электронов, находящегося на одном и на разных атомах одного слоя, а также межслойное кулоновское взаимодействие электронов, в представлении Ванье будет иметь вид

$$\hat{H}' = \hat{H}'_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}'_0 = & (\varepsilon - \mu) \left( \sum_{if\sigma} \hat{n}_{if\sigma}^A + \sum_{ig\sigma} \hat{n}_{ig\sigma}^B \right) - \\ & - t_1 \sum_{f\delta\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger b_{1,f+\delta,\sigma} + a_{2f\sigma}^\dagger b_{2,f-\delta,\sigma} + \text{h.c.}) - \\ & - t_2 \sum_{i\sigma} \left( \sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle} a_{if\sigma}^\dagger a_{im\sigma} + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle} b_{ig\sigma}^\dagger b_{in\sigma} + \text{h.c.} \right) - \\ & - \gamma_1 \sum_{f\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger a_{2f\sigma} + \text{h.c.}) - \gamma_3 \sum_{g\delta\sigma} (b_{1g\sigma}^\dagger b_{2,g+\delta,\sigma} + \text{h.c.}) - \\ & - \gamma_4 \sum_{f\delta\sigma} (a_{1f\sigma}^\dagger b_{2,f-\delta,\sigma} + a_{2f\sigma}^\dagger b_{1,f+\delta,\sigma} + \text{h.c.}), \quad (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & U \left( \sum_{if} \hat{n}_{if\uparrow}^A \hat{n}_{if\downarrow}^A + \sum_{ig} \hat{n}_{ig\uparrow}^B \hat{n}_{ig\downarrow}^B \right) + \\ & + V_1 \sum_{f\delta\sigma\sigma'} (\hat{n}_{1f\sigma}^A \hat{n}_{1,f+\delta,\sigma'}^B + \hat{n}_{2f\sigma}^A \hat{n}_{2,f-\delta,\sigma'}^B) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{V_2}{2} \sum_{i\sigma\sigma'} \left( \sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle} \hat{n}_{if\sigma}^A \hat{n}_{im\sigma'}^A + \sum_{\langle\langle gn \rangle\rangle} \hat{n}_{ig\sigma}^B \hat{n}_{in\sigma'}^B \right) + \\ & + G_1 \sum_{f\sigma\sigma'} \hat{n}_{1f\sigma}^A \hat{n}_{2f\sigma'}^A + G_3 \sum_{g\delta\sigma\sigma'} \hat{n}_{1g\sigma}^B \hat{n}_{2,g+\delta,\sigma'}^B + \\ & + G_4 \sum_{f\delta\sigma\sigma'} (\hat{n}_{1f\sigma}^A \hat{n}_{2,f-\delta,\sigma'}^B + \hat{n}_{2f\sigma}^A \hat{n}_{1,f+\delta,\sigma'}^B). \quad (73) \end{aligned}$$

Здесь использованы аналогичные обозначения, что и для гамильтониана монослоя (52). В гамильтониане (71) индекс  $i = 1, 2$  обозначает номер слоя. Вектор  $\delta(-\delta)$  связывает ближайшие соседние атомы гексагональной решётки нижнего (верхнего) слоя. Предполагается, что одноузельные энергии  $\varepsilon_{Ai} = \varepsilon_{Bi} = \varepsilon$ . Через  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$  обозначены параметры межслойных электронных перескоков (см. рис. 15), а через  $G_1, G_3$  и  $G_4$  соответственно — межслойные кулоновские взаимодействия электронов.

Как и в случае монослоя (см. раздел 8), гамильтониан  $\hat{H}'_0$  диагонализуются с помощью преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} \alpha_{ik\sigma} = & w_{i1}(\mathbf{k}) a_{1k\sigma} + w_{i2}(\mathbf{k}) a_{2k\sigma} + \\ & + w_{i3}(\mathbf{k}) b_{1k\sigma} + w_{i4}(\mathbf{k}) b_{2k\sigma}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (74) \end{aligned}$$

и приводится к виду

$$\hat{H}'_0 = \sum_{i=1}^4 \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{ik} \alpha_{ik\sigma}^\dagger \alpha_{ik\sigma}. \quad (75)$$

Поскольку результаты первопринципных расчётов [251, 252], выполненных для графита, свидетельствуют об очень малой величине параметра межслойного перескока  $\gamma_4$ , в дальнейших вычислениях будем полагать  $\gamma_4 = 0$ . В этом случае четырёхзонный энергетический спектр бислоя графена определяется выражениями

$$E_{ik} = \varepsilon \pm \sqrt{A_{\mathbf{k}} \pm \sqrt{B_{\mathbf{k}}}} - t_2 f_{\mathbf{k}}, \quad (76)$$

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4} (2a^2 + 4|b_{\mathbf{k}}|^2 + 2|d_{\mathbf{k}}|^2),$$

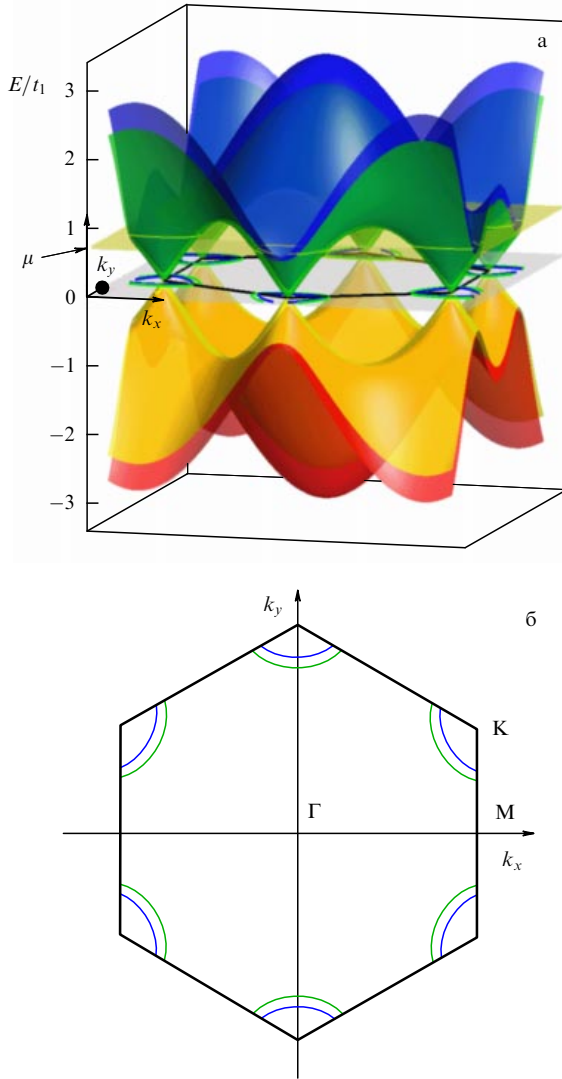
$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k}} = & \frac{1}{4} (|d_{\mathbf{k}}|^2 (|d_{\mathbf{k}}|^2 - 2a^2 + 4|b_{\mathbf{k}}|^2) + a^4 + \\ & + 4a^2 |b_{\mathbf{k}}|^2 + 4ab_{\mathbf{k}}^2 d_{\mathbf{k}} + 4ab_{\mathbf{k}}^{*2} d_{\mathbf{k}}^*), \end{aligned}$$

$$a = \gamma_1, \quad b_{\mathbf{k}} = t_1 u_{\mathbf{k}}, \quad d_{\mathbf{k}} = \gamma_3 u_{\mathbf{k}}.$$

Условия возникновения сверхпроводимости Кона – Латтинжера в бислое графена в рамках борновского приближения слабой связи, при котором иерархия параметров модели имеет вид

$$W > U > V_1 > V_2 > G_1 > G_3, G_4 \quad (77)$$

( $W$  — ширина энергетической зоны бислоя графена), анализируются по общей схеме, изложенной в разделе 8. При этом рассматривается ситуация, в которой при легировании бислоя химический потенциал попадает в две верхние энергетические зоны,  $E_{1k}$  и  $E_{2k}$ , как показано на рис. 16а. В этом случае, если  $\gamma_1 \neq 0$  и выполняется неравенство  $\mu > \gamma_1$ , в окрестности каждой дираковской точки для электронных плотностей  $1 < n < n_{\text{ВН}}$ , где  $n$  — концентрация электронов в расчёте на атомы одного слоя, контур Ферми будет состоять из двух линий, как показано на рис. 16б. При этом начальный и конечный



**Рис. 16.** Энергетическая структура бислоя графена вблизи дираковых точек (а) и формирование многолистного ферми-контура (б) при  $t_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$  и  $\mu = 0,7$  (все параметры в единицах  $|t_1|$ ) [231].

импульсы электронов в куперовском канале также принадлежат двум верхним зонам, а значит, индексы  $i$  и  $j$  в диаграммах Кона–Латтинжера в случае бислоя (см. рис. 2) принимают значения 1 или 2. В результате приходим к выражению (61) для эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале, в котором затравочные амплитуды в случае бислоя графена определяются выражениями

$$\Gamma_{ij,lm}^{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left( V_{ij,lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ji,ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(4)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) \right), \quad (78)$$

$$V_{ij,lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = V_1 \left( u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j3}(\mathbf{p}) w_{l3}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i2}(\mathbf{k}) w_{j4}(\mathbf{p}) w_{l4}^*(\mathbf{q}) w_{m2}^*(\mathbf{s}) \right) + \frac{V_2}{2} \sum_{r=1}^4 f_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{ir}(\mathbf{k}) w_{jr}(\mathbf{p}) w_{lr}^*(\mathbf{q}) w_{mr}^*(\mathbf{s}), \quad (79)$$

$$G_{ij,lm}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = G_1 w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j2}(\mathbf{p}) w_{l2}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}), \quad (80)$$

$$G_{ij,lm}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = G_3 u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i3}(\mathbf{k}) w_{j4}(\mathbf{p}) w_{l4}^*(\mathbf{q}) w_{m3}^*(\mathbf{s}), \quad (81)$$

$$G_{ij,lm}^{(4)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = G_4 \left( u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i1}(\mathbf{k}) w_{j4}(\mathbf{p}) w_{l4}^*(\mathbf{q}) w_{m1}^*(\mathbf{s}) + u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} w_{i2}(\mathbf{k}) w_{j3}(\mathbf{p}) w_{l3}^*(\mathbf{q}) w_{m2}^*(\mathbf{s}) \right), \quad (82)$$

$$\Gamma_{ij,lm}^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = U_{ij,lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ij,lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + V_{ji,ml}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}) + G_{ij,lm}^{(4)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) + G_{ji,ml}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}|\mathbf{s}, \mathbf{q}), \quad (83)$$

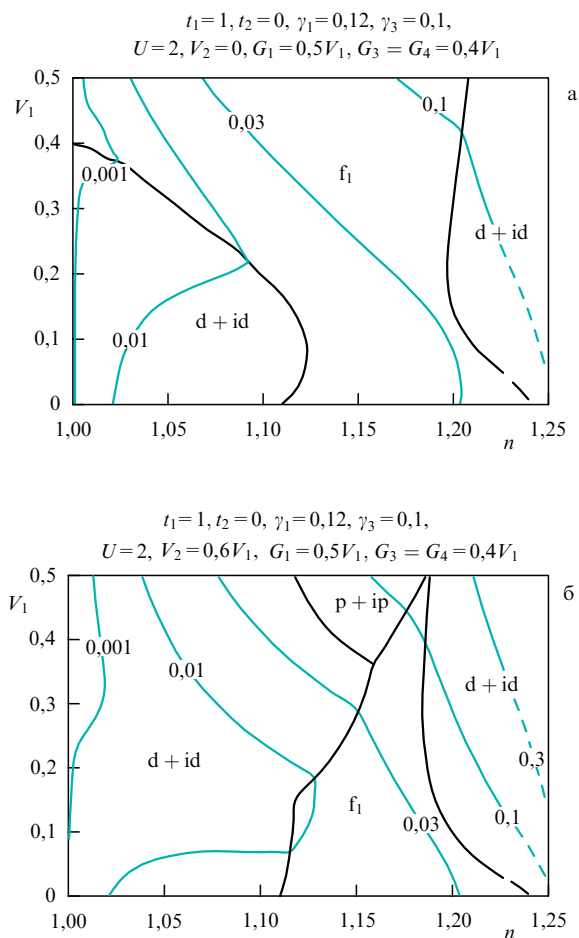
$$U_{ij,lm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{s}) = U \sum_{r=1}^4 w_{ir}(\mathbf{k}) w_{jr}(\mathbf{p}) w_{lr}^*(\mathbf{q}) w_{mr}^*(\mathbf{s}). \quad (84)$$

Здесь индексы  $l$  и  $m$  могут принимать значения 1, 2, 3 или 4.

Как уже было отмечено в случае монослоя, в литературе не существует единого мнения о величинах параметров внутрислойных и межслойных кулоновских взаимодействий в бислое графена [226, 243]. В наших расчётах используется иерархия параметров (77), допускающая применение борновского приближения слабой связи. Для параметров межслойных перескоков  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  используются значения, близкие к значениям, определённым для графита в работах [251, 252].

Рассмотрим сверхпроводящую фазовую диаграмму бислоя графена и её модификацию при учёте различных взаимодействий. Прежде всего необходимо отметить, что при  $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$  и  $G_1 = G_3 = G_4 = 0$ , когда бислой графена представляет собой два изолированных друг от друга монослоя, в численных расчётах выполняется предельный переход к результатам, полученным для монослоя в разделе 8. Учёт межслойных электронных перескоков  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$  (здесь и далее все параметры в единицах  $|t_1|$ ) при сохранении тех же остальных параметров, что и на рис. 12, почти не изменяет фазовую диаграмму бислоя графена. Включение в рассмотрение кулоновского взаимодействия  $G_1$  вызывает лишь слабое смещение границ  $f_1$ - и  $d + id$ -спаривания на фазовой диаграмме, приведённой на рис. 12, и не влияет на абсолютные величины  $\lambda$ .

На рисунке 17 продемонстрировано влияние учёта межслойных кулоновских взаимодействий  $G_3$  и  $G_4$ . Фазовая диаграмма модели Шубина–Вонсовского для бислоя графена, полученная при наборе параметров  $t_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$ ,  $U = 2$ ,  $V_2 = 0$  для соотношений между межслойными и межузельными (внутрислойными) кулоновскими взаимодействиями, выбранными в виде  $G_1 = 0,5V_1$ ,  $G_3 = G_4 = 0,4V_1$  согласно иерархии параметров (77), представлена на рис. 17а. Результаты расчётов показывают, что увеличение параметров  $G_3$  и  $G_4$  по отдельности приводит к подавлению  $d + id$ -спаривания и расширению области  $f$ -спаривания при малых электронных плотностях. При этом более интенсивное подавление сверхпроводящей  $d + id$ -фазы может быть достигнуто увеличением параметра межслойного кулоновского взаимодействия  $G_4$ . При одновременном учёте взаимодействий  $G_3$  и  $G_4$ , как показано на рис. 17а, происходят не только интенсивное подавление при малых электронных плотностях сверхпроводящего  $d + id$ -спаривания и ре-

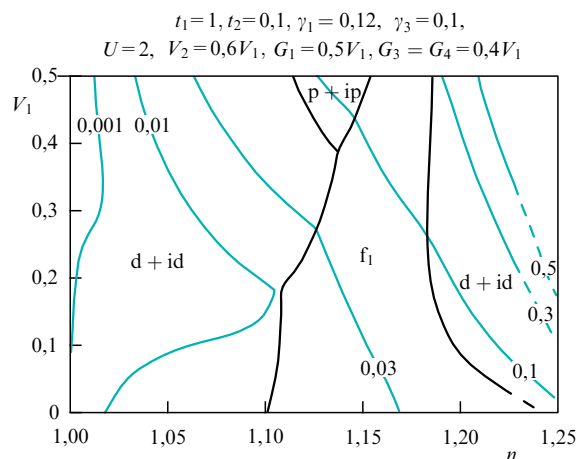


**Рис. 17.** Фазовая диаграмма  $n-V_1$  сверхпроводящего состояния бислоя графена, полученная для  $t_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$ ,  $U = 2$ ,  $G_1 = 0,5V_1$ ,  $G_3 = G_4 = 0,4V_1$ , при  $V_2 = 0$  (а) и  $V_2 = 0,6V_1$  (б) (все параметры в единицах  $|t_1|$ ). Тонкими кривыми показаны линии постоянного значения  $|\lambda|$  [231].

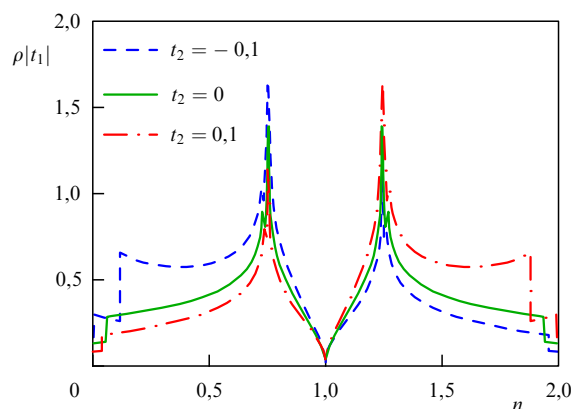
лизация сверхпроводимости с f-типом симметрии параметра порядка, но и увеличение абсолютных значений эффективной константы связи  $\lambda$ .

На рисунке 17б приведена фазовая диаграмма бислоя графена, рассчитанная при тех же параметрах, что и на рис. 17а, но при учёте дальнего внутрислоистного кулоновского отталкивания электронов  $V_2$ . Из сравнения рис. 17б с рис. 12б видно, что учёт  $G_3 \neq 0$  и  $G_4 \neq 0$  приводит к сильной конкуренции d + id- и p + ip-спаривания и значительному подавлению последнего в области промежуточных электронных концентраций. При этом в сохранившейся области p + ip-спаривания величина  $|\lambda_{p+ip}|$  незначительно превосходит величину  $|\lambda_f|$ .

Учёт перескоков электронов на следующие за ближайшими атомы углерода  $t_2$  качественно почти не влияет на конкуренцию сверхпроводящих фаз, представленную на рис. 17. Это видно из рис. 18, на котором показана фазовая диаграмма бислоя графена, полученная при значениях параметров  $t_2 = 0,1$ ,  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$ ,  $U = 2$ ,  $G_1 = 0,5V_1$ ,  $G_3 = G_4 = 0,4V_1$ . Такое поведение системы объясняется тем, что включение перескоков  $t_2 > 0$  или  $t_2 < 0$  для бислоя графена, как и в случае монослоя, не вызывает существенной модификации плотности электронных состояний в областях концентраций носителей между дираковой точкой и обеими точками  $n_{\text{ВН}}$



**Рис. 18.** Фазовая диаграмма  $n-V_1$  сверхпроводящего состояния бислоя графена при  $t_2 = 0,1$ ,  $\gamma_1 = 0,12$ ,  $\gamma_3 = 0,1$ ,  $U = 2$ ,  $G_1 = 0,5V_1$ ,  $G_3 = G_4 = 0,4V_1$  (все параметры в единицах  $|t_1|$ ). Тонкими кривыми показаны линии постоянного значения  $|\lambda|$  [231].



**Рис. 19.** Модификация зависимости плотности электронных состояний бислоя графена в расчёте на атомы одного слоя от концентрации электронов при учёте электронных перескоков на следующие за ближайшими соседями атомы [231].

(рис. 19). Однако из рис. 18 видно, что учёт перескоков  $t_2$  приводит к увеличению абсолютных величин эффективного взаимодействия, а следовательно, к реализации более высоких критических температур перехода в сверхпроводящую фазу в идеализированном бислое графена.

Таким образом, наши расчёты показывают, что механизм Кона – Латтинжера может обуславливать критические температуры сверхпроводящего перехода  $T_c \sim 20-40$  К в идеализированном бислое графена. Вопреки этим довольно оптимистичным оценкам сверхпроводимость в реальном графене, как отмечалось в разделе 8, пока не обнаружена. Этот материал лишь близок к сверхпроводимости.

Имеется несколько причин, вследствие которых результаты теоретических расчётов, представленные в настоящем обзоре, могут расходиться с экспериментальными данными. Во-первых, в наших расчётах не учитывается влияние потенциала Ван-дер-Ваальса подложки [253–257]. По-видимому, при увеличении числа слоёв роль этого потенциала должна ослабевать, однако даже в случае многослойной системы силы Ван-дер-Ваальса могут ухудшить условия для развития куперовской неустойчивости.



Во-вторых, как отмечалось, в литературе не существует единого мнения о величинах параметров внутриплоскостных и межплоскостных кулоновских взаимодействий в бислое графена. В настоящем обзоре для внутриплоскостных кулоновских взаимодействий использовались значения, близкие к полученным из расчётов *ab initio* в работе [226] для графита. Значения межплоскостных кулоновских взаимодействий выбирались такими, чтобы они удовлетворяли иерархии параметров борновского приближения слабой связи.

В-третьих, в наших расчётах рассматривается чистый и идеальный по структуре бислой графена, в то время как реальный материал содержит множество примесей и дефекты структуры, включая межзёрненные границы и плоскости двойникования. Известно, что, в то время как при традиционном s-спаривании синглетное сверхпроводящее состояние разрушается магнитными примесями [99, 258–260], в случае аномального спаривания с *f*-, *p* + *ip*- и *d* + *id*-типом симметрии параметра порядка уже немагнитные примеси [98] и дефекты структуры в графене могут способствовать разрушению сверхпроводящего порядка [250, 261, 311].

Необходимо также отметить ещё одну возможную причину расхождения результатов теоретических расчётов по сверхпроводимости в графене с экспериментальными наблюдениями. В недавней работе [262], где исследовалось влияние квантовых ( $T = 0$ ) флуктуаций на слои графена, показано, что эти флуктуации инициируют логарифмические поправки к модулям упругости и изгиба слоёв. Другими словами, согласно [262], квантовые флуктуации изгибных колебаний слоёв графена могут приводить к ситуации, в которой электроны движутся не вдоль атомно-гладких слоёв, а по сильно искривлённым струноподобным траекториям. Такая ситуация требует отдельного рассмотрения, хотя и в этом случае сверхпроводимость отнюдь не исключена и даже может быть усилена при обмене изгибными квантами колебаний между спаривающимися электронами.

## 10. Новые перспективные системы с аномальным спариванием

На сегодняшний день имеется ряд систем, в которых, как предполагается, может реализовываться аномальное сверхпроводящее спаривание, в частности, по механизму Кона–Латтинжера и его обобщениям. Одной из таких систем является титанат стронция  $\text{SrTiO}_3$ . При комнатной температуре  $\text{SrTiO}_3$  обладает кубической кристаллической структурой, а при температуре  $T^* = 105$  К в результате фазового перехода его структура становится тетрагональной. Электронная структура  $\text{SrTiO}_3$  характеризуется наличием энергетической щели шириной 3 эВ, отделяющей заполненные 2p-зоны кислорода от пустых 3d-зон титана [263, 264].

В работе [265] показано, что в ограниченной области импульсного пространства вблизи центра зоны Бриллюэна зонная структура титаната стронция может быть эффективно описана блоховскими волнами типа  $d_{xy}$ ,  $d_{yz}$  или  $d_{xz}$ , каждая из которых имеет два направления с сильной дисперсией ( $k_x$  и  $k_y$  для  $d_{xy}$ -орбитали и т.д.) и одно направление со слабой дисперсией, ортогональное к двум первым [265]. В результате образуется набор из трёх вырожденных энергетических зон, которые с хорошей точностью могут быть аппроксимированы параболами,

а поверхность Ферми состоит из трёх взаимопересекающихся эллипсоидов с центром в зоне Бриллюэна, ориентированных вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  обратной кубической решётки.

Таким образом, титанат стронция представляет собой полупроводник, который при слабом электронном легировании становится хорошим проводником с относительно высокой подвижностью носителей заряда, квадратичной температурной зависимостью электрического сопротивления и сильной температурной зависимостью инфракрасной оптической проводимости [265]. При низких температурах материал становится сверхпроводящим [266] с максимальной критической температурой  $T_c = 1,2$  К [50], хотя обычно сверхпроводимость наблюдается при более низких температурах,  $T_c \leq 0,7$  К, и характеризуется куполообразной зависимостью  $T_c(n)$  [267, 268]. Сверхпроводящее спаривание наблюдается и при  $T_c \sim 0,2$  К в 2D-электронном газе, формирующемся на границе раздела гетероструктур  $\text{SrTiO}_3/\text{LaAlO}_3$  [269, 270]. При этом температура сверхпроводящего перехода может быть увеличена до  $T_c \sim 0,3–0,4$  К благодаря приложению электрического поля [271, 272].

Необходимо отметить, что природа сверхпроводимости в самом титанате стронция, а также гетероструктурах на его основе до сих пор неясна. Впервые сверхпроводимость в  $\text{SrTiO}_3$  была исследована в работе [273] на основе механизма электрон-электронного притяжения, обусловленного обменом фононами из одной и из разных долин. Это исследование было мотивировано результатами ранних зонных расчётов [274], которые продемонстрировали многодолинную зонную структуру  $\text{SrTiO}_3$ . В дальнейшем механизм многодолинной сверхпроводимости в титанате стронция исследовался в работах [275–277]. Однако позднее, когда были накоплены данные о том, что  $\text{SrTiO}_3$  — это сверхпроводник с тремя почти параболическими зонами, были предложены другие механизмы сверхпроводимости, не связанные с многодолинными механизмами (см., например, [278–280]).

В работе [281] в рамках среднеполевой феноменологической 2D-модели исследованы проявления и следствия многозонной сверхпроводимости в тонких плёнках  $\text{SrTiO}_3$  и на границах раздела гетероструктур  $\text{SrTiO}_3/\text{LaAlO}_3$  при различных уровнях допирования. Авторы [281] не обсуждали природу возникновения сверхпроводящей неустойчивости, ограничившись рассмотрением s-типа спаривания. В их модели орбитали  $d_{xz}$ ,  $d_{yz}$  и  $d_{xy}$  формируют две электронные зоны, как в слабодопированном соединении, и только одна из них пересекает уровень Ферми [281]. При увеличении уровня допирования химический потенциал пересекает вторую зону, вызывая сильную модификацию сверхпроводящих свойств системы. Сравнение результатов расчётов зависимостей  $T_c$  и локальной плотности электронных состояний от уровня допирования [281] с экспериментальными данными [268] показало, что внутризонное (внутриорбитальное) эффективное притяжение в  $\text{SrTiO}_3$  доминирует над межзонным (межорбитальным) притяжением, тогда как в других многозонных сверхпроводниках, таких как, например, пниктиды, преобладание внутризонного эффективного притяжения над межзонным не проявлялось.

Другим классом систем, в которых возможно развитие куперовской неустойчивости по механизму Кона–Латтинжера, являются вертикальные гетероструктуры, состоящие из слоёв графена, разделённых прослойками



из нитрида бора [282–285]. Эти структуры демонстрируют ряд интересных свойств, связанных со взаимодействием электронов из разных слоёв. В рассматриваемых системах нитрид бора (h-BN), как и графен, имеет гексагональную структуру (часто нитрид бора из-за его цвета и схожести его структуры со структурой графита называют "белым графитом" [286]), однако в узлах подрешёток А и В содержит атомы бора и азота. Это вызывает появление широкой энергетической щели (5,2–5,9 эВ) в электронной структуре h-BN [287–291], что привело к широкому использованию h-BN как высококачественного диэлектрика в графеновых устройствах [292]. Поскольку h-BN является химически и термически стабильным и не характеризуется наличием оборванных связей и поверхностных ловушек заряда, графеновые структуры на h-BN демонстрируют более высокую подвижность носителей [293, 294], меньшую шероховатость и в два раза меньшие по величине флуктуации потенциала по сравнению с таковыми в графеновых структурах на подложке SiO<sub>2</sub> [295, 296].

Графеновые структуры с h-BN легко могут быть перестроены. Концентрация носителей в слоях графена, расстояние между этими слоями, а также природа подложки могут быть изменены независимо друг от друга в широких пределах. Такие изменения могут привести к сильной модификации электрон-электронного взаимодействия в этом классе гетероструктур, что в свою очередь может открыть возможность реализации сверхпроводимости при сравнительно небольших концентрациях носителей и в отсутствие каких-либо особых свойств плотности электронных состояний [297].

Отметим, что в работе [297] исследовалась возможность куперовского спаривания за счёт электрон-электронного взаимодействия в модели вертикальной гетероструктуры, состоящей из двух слоёв графена с концентрациями носителей  $n_1$  и  $n_2$  и тремя диэлектрическими прослойками с различными статическими диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ . Была проанализирована возможность развития сверхпроводящей неустойчивости в рамках механизма Кона–Латтинжера и описана наиболее вероятная сверхпроводящая фаза. В частности, показано, что сверхпроводящее состояние с нечётными моментами, при котором сверхпроводящие щели имеют противоположные знаки в разных конусах, является основным состоянием системы в силу междолинного рассеяния на больших плотностях.

В твёрдых телах конкретная структура веществ строго определяет эффективную массу, скорость движения электронов, а также интенсивность их взаимодействий. Это обстоятельство значительно затрудняет развитие и апробацию различных теоретических и экспериментальных методов физики сильно коррелированных электронных систем. Другим, гораздо лучше поддающимся контролю и управлению, современным способом изучения феноменов физики сильных корреляций является создание модельных систем с помощью ультрахолодных атомов, захваченных периодическим потенциалом, получаемым посредством интерференции трёх лазерных пучков [298, 299].

В работе [300] предложена экспериментальная схема моделирования и наблюдения дираковских фермионов в системе ультрахолодных атомов в двумерной гексагональной оптической решётке. Авторы работ [300, 301] теоретически показали, что посредством управления

анизотропией оптической решётки с помощью изменения интенсивности захватывающего лазера можно реализовать режимы как массивных, так и безмассовых дираковских фермионов, а также наблюдать фазовый переход между этими двумя режимами. Фактически авторы [300, 301] предсказали топологический переход Лифшица полуметалл–диэлектрик с открытием щели в фермионном спектре и изменением температурного поведения электронной теплоёмкости. В работе [300] отмечено, что брэгговская спектроскопия [302], а также различные методы определения атомного профиля плотности в магнитной или оптической ловушках [303–305] могут быть использованы для экспериментального обнаружения указанных режимов и фазового перехода между ними. Наблюдаемая при этом физическая картина, по мнению авторов [300], должна быть очень близка к картине ансамбля дираковских фермионов в монослое графена.

Недавно группе Эслингера [306] в Цюрихе удалось экспериментально реализовать дираковские точки с хорошо контролируемыми свойствами с помощью ультрахолодных фермионных атомов <sup>40</sup>K в гексагональной оптической решётке. Присутствие дираковских точек в зонной структуре было зафиксировано авторами [306] посредством наблюдения минимальной щели внутри зоны Бриллюэна. В работе [306] была использована уникальная возможность оптической настройки решёточного потенциала для регулирования эффективной массы дираковских фермионов. Более того, изменение решёточной анизотропии дало возможность авторам [306] изменять позиции дираковских точек внутри зоны Бриллюэна. Таким образом, оказывается, что если анизотропия превышает некоторое критическое значение, то две дираковские точки сливаются и поглощают друг друга. Это явление вызвало колоссальный теоретический интерес [301, 307–309], но в то же время стали очевидными трудности с точки зрения возможности его экспериментального наблюдения в твёрдых телах [310].

Экспериментальная реализация дираковских точек в системе ультрахолодных атомов в гексагональных оптических решётках [306] открывает также большие перспективы для экспериментального и теоретического изучения широкого класса физических явлений, обусловленных сложными топологиями решётки, включая аномальное сверхпроводящее спаривание и возникновение различных киральных фаз.

## 11. Заключение

Механизм Кона–Латтинжера (и его обобщения, предполагающие возникновение аномального сверхпроводящего спаривания в системах с чисто отталкивательным взаимодействием) во многих отношениях является универсальным механизмом.

В настоящем обзоре на примерах различных электронных систем продемонстрирована неустойчивость нормального состояния электронного газа с отталкивательным или ван-дер-ваальсовым взаимодействием по отношению к переходу в сверхпроводящую фазу. Первоначальный вывод о возможности куперовской неустойчивости для модели ферми-газа с короткодействующим (хаббардовским) отталкиванием и квадратичным законом дисперсии был обобщён для электронов в реальных кристаллических твёрдых телах, рассматривае-

мых в приближении сильной связи. Отличие закона электронной дисперсии от квадратичного приводит к появлению дополнительных особенностей, связанных с эффектами зоны Бриллюэна. Оказалось, что характер энергетического спектра электронов, определяемый параметрами перескоков, сильно влияет на симметрию сверхпроводящего параметра порядка, что приводит к изменению структуры фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния системы. Но в принципиальном отношении вывод о возможности развития куперовской неустойчивости по механизму Кона–Латтинжера и его обобщениям в электронной плазме в приближении сильной связи остаётся в силе. Более того, во многих случаях данный механизм может приводить к значительному повышению температуры сверхпроводящего перехода уже при малой плотности носителей, в частности, при рассмотрении спин-поляризованного случая или двухзонной ситуации.

Продemonстрировано, что универсальность механизма Кона–Латтинжера сохраняется и при учёте конечного радиуса экранирования в ферми-системах с отталкиванием. В частности, исследования, проведённые в рамках модели Шубина–Вонсовского, показали, что учёт кулоновского отталкивания электронов, находящихся на разных узлах кристаллической решётки, является существенным, поскольку при этом происходит изменение фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния, а в определённых условиях имеет место и увеличение критической температуры. В частности, при электронных концентрациях, близких к особенности Ван Хофа в плотности состояний, критические температуры могут достигать значений порядка 100 К при промежуточных значениях отношения  $U/W$  параметра хаббардовского отталкивания  $U$  к ширине зоны проводимости  $W$ .

Также в обзоре показано, что механизм сверхпроводящего спаривания типа Кона–Латтинжера может реализовываться в системах с линейным законом дисперсии. Этот факт продемонстрирован на примере идеализированного монослоя графена, атомы которого образуют гексагональную решётку. Показано, что и в такой системе поляризационные эффекты приводят к эффективному притяжению электронов в куперовском канале. Полученные для монослоя графена результаты обобщены для случая бислоя графена, состоящего из двух слоёв, взаимодействующих между собой посредством межслойного кулоновского отталкивания. Показано, что рассмотрение идеализированной двухслойной системы графена приводит к повышению критической температуры сверхпроводящего перехода в рамках механизма Кона–Латтинжера.

Наряду с анализом сверхпроводящего состояния, в обзоре проведён анализ структуры нормального состояния базовых моделей с хаббардовским отталкиванием и найдены нетривиальные поправки к ферми-газовому разложению Галицкого–Блума, обусловленные присутствием верхней хаббардовской зоны в решёточных моделях или сингулярностью квазичастичной  $f$ -функции Ландау при малой электронной плотности. Однако эти поправки не разрушают интегральной картины ферми-жидкости Ландау как в трёхмерных, так и в двумерных системах, а также оставляют справедливыми все результаты по реализации в них сверхпроводящего спаривания.

В обзоре значительное внимание уделено описанию важных для развития микроэлектроники систем, таких как вертикальные гетероструктуры графен/нитрид бора/графен, титанат стронция и гетероструктуры на его основе. Мы подробно проанализировали как аномальную сверхпроводимость, так и возможность реализации фермионной сверхтекучести в 3D- и 2D-растворах  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ , а также в системе ультрахолодных атомов  $^6\text{Li}$  и  $^{40}\text{K}$  в магнитных ловушках и на оптических решётках. Тем самым мы проложили мостик, сближающий интересы твердотельного и низкотемпературного сообществ.

В завершение ещё раз подчеркнём универсальный характер механизма Кона–Латтинжера и его обобщений для формирования куперовской неустойчивости в ферми-системах с отталкиванием и его важность для реализации аномального сверхпроводящего и сверхтекучего спаривания с ненулевым значением орбитального момента ( $l \neq 0$ ).

Авторы выражают благодарность М.А. Баранову, В.В. Валькову, Д.В. Ефремову, В.В. Кабанову, К.И. Кугелю, М.С. Мариенко, Н.М. Плакиде, Н.В. Прокофьеву, А.В. Чубукову за полезные дискуссии и постоянное внимание к работе. Работа поддержана РФФИ (гранты 14-02-00058 и 14-02-31237). М.Ю.К. благодарит за поддержку Программой фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики". Работа М.М.К. поддержана стипендией Президента РФ (СП-1361.2015.1) и фондом "Династия".

## Список литературы

1. Duan D et al. *Sci. Rep.* **4** 6968 (2014)
2. Drozdov A P, Erements M I, Troyan I A, arXiv:1412.0460
3. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
4. Anderson P W *Science* **235** 1196 (1987)
5. Regal C A et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 053201 (2003)
6. Schunck C H et al. *Phys. Rev. A* **71** 045601 (2005)
7. Ott H R et al. *Phys. Rev. Lett.* **52** 1915 (1984)
8. Kromer S et al. *Phys. Rev. Lett.* **81** 4476 (1998)
9. Kuroki K *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 051013 (2006)
10. Maeno Y, Rice T M, Sigrist M *Phys. Today* **54** (1) 42 (2001)
11. Rice T M, Sigrist M *J. Phys. Condens. Matter* **7** L643 (1995)
12. Murase K et al. *Surf. Sci.* **170** 486 (1986)
13. Nagamatsu J et al. *Nature* **410** 63 (2001)
14. Kamihara Y et al. *J. Am. Chem. Soc.* **130** 3296 (2008)
15. Liu Y et al., arXiv:1503.08587
16. Vollhardt D, Wölfle P *The Superfluid Phases of Helium 3* (London: Taylor and Francis, 1990)
17. Volovik G E *Exotic Properties of Superfluid  $^3\text{He}$*  (Singapore: World Scientific, 1992)
18. Volovik G E *The Universe in a Helium Droplet* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
19. Novoselov K S et al. *Science* **306** 666 (2004)
20. Kagan M Ю *УФН* **164** 77 (1994); Kagan M Yu *Phys. Usp.* **37** 69 (1994)
21. Ong W et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 110403 (2015)
22. Ries M G et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 230401 (2015); arXiv:1409.5373
23. Лозовик Ю Е, Меркулова С П, Соколик А А *УФН* **178** 757 (2008); Lozovik Yu E, Merkulova S P, Sokolik A A *Phys. Usp.* **51** 727 (2008)
24. Kotov V N et al. *Rev. Mod. Phys.* **84** 1067 (2012)
25. Wallace P R *Phys. Rev.* **71** 622 (1947)
26. Castro Neto A H et al. *Rev. Mod. Phys.* **81** 109 (2009)
27. Kohn W, Luttinger J M *Phys. Rev. Lett.* **15** 524 (1965)
28. Miyake K *J. Phys. Condens. Matter* **19** 125201 (2007)
29. Горьков Л П, Мелик-Бархударов Т К *ЖЭТФ* **40** 1452 (1961); Gor'kov L P, Melik-Barchudarov T K *Sov. Phys. JETP* **13** 1018 (1961)
30. Friedel J *Adv. Phys.* **3** 446 (1954)

31. Friedel J *Nuovo Cimento Suppl.* **7** 287 (1958)
32. Каган М Ю и др. *ЖЭТФ* **145** 1127 (2014); Kagan M Yu et al. *JETP* **118** 995 (2014)
33. Kagan M Yu et al. *Solid State Commun.* **188** 61 (2014)
34. Lindhard J *Kongelige Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **28** 8 (1954)
35. Ashcroft N, Mermin N *Solid State Physics* Vol. 1 (New York: Rinehart and Winston, 1976); Ашкрофт Н, Мермин Н *Физика твердого тела* Т. 1 (М.: Мир, 1979)
36. Мигдал А Б *ЖЭТФ* **34** 1438 (1958); Migdal A B *Sov. Phys. JETP* **7** 996 (1958)
37. Kohn W *Phys. Rev. Lett.* **2** 393 (1959)
38. Fay D, Layzer A *Phys. Rev. Lett.* **20** 187 (1968)
39. Каган М Ю, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **47** 525 (1988); Kagan M Yu, Chubukov A V *JETP Lett.* **47** 614 (1988)
40. Baranov M A, Chubukov A V, Kagan M Yu *Int. J. Mod. Phys. B* **6** 2471 (1992)
41. Баранов М А, Каган М Ю, Каган Ю *Письма в ЖЭТФ* **64** 273 (1996); Baranov M A, Kagan M Yu, Kagan Yu *JETP Lett.* **64** 301 (1996)
42. Галицкий В М *ЖЭТФ* **34** 151 (1958); Galitskii V M *Sov. Phys. JETP* **7** 104 (1958)
43. Каган М Ю, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **50** 483 (1989); Kagan M Yu, Chubukov A V *JETP Lett.* **50** 517 (1989)
44. Chubukov A V *Phys. Rev. B* **48** 1097 (1993)
45. Efremov D V et al. *Physica B* **284–288** 216 (2000)
46. Bloom P *Phys. Rev. B* **12** 125 (1975)
47. Афанасьев А М, Каган Ю *ЖЭТФ* **43** 1456 (1962); Afanas'ev A M, Kagan Yu *Sov. Phys. JETP* **16** 1030 (1962)
48. Ефремов Д В и др. *ЖЭТФ* **117** 990 (2000); Efremov D V et al. *JETP* **90** 861 (2000)
49. Oh G-H et al. *J. Low Temp. Phys.* **95** 525 (1994)
50. Bednorz J G, Müller K A Z. *Phys. B* **64** 189 (1986)
51. Hubbard J C *Proc. R. Soc. Lond. A* **276** 238 (1963)
52. Изюмов Ю А, Кацнельсон М И, Скрябин Ю Н *Магнетизм коллективизированных электронов* (М.: Физматлит, 1994)
53. Изюмов Ю А *УФН* **165** 403 (1995); Izyumov Yu A *Phys. Usp.* **38** 385 (1995)
54. Georges A et al. *Rev. Mod. Phys.* **68** 13 (1996)
55. Tasaki H J. *Phys. Condens. Matter* **68** 4353 (1998)
56. Вальков В В, Овчинников С Г *Квазичастицы в сильно коррелированных системах* (Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001); Ovchinnikov S G, Val'kov V V *Hubbard Operators in the Theory of Strongly Correlated Electrons* (London: Imperial College Press, 2004)
57. Baranov M A, Kagan M Yu Z. *Phys. B* **86** 237 (1992)
58. Баранов М А, Каган М Ю *ЖЭТФ* **99** 1236 (1991); Baranov M A, Kagan M Yu *Sov. Phys. JETP* **72** 689 (1991)
59. Scalapino D J, Loh E (Jr.), Hirsch J E *Phys. Rev. B* **34** 8190 (1986)
60. Scalapino D J, Loh E (Jr.), Hirsch J E *Phys. Rev. B* **35** 6694 (1987)
61. Козлов А Н *Сверхпроводимость: физика, химия, техника* **2** 64 (1989)
62. Дзялошинский И Е, Кричевер И М, Хронек Я *ЖЭТФ* **94** 344 (1988); Dzyaloshinskii I E, Krichever I M, Chronек J *Sov. Phys. JETP* **67** 1492 (1988)
63. Hlubina R *Phys. Rev. B* **59** 9600 (1999)
64. Zanchi D, Schulz H J *Phys. Rev. B* **54** 9509 (1996)
65. Дзялошинский И Е, Яковенко В М *ЖЭТФ* **94** 344 (1988); Dzyaloshinskii I E, Yakovenko V M *Sov. Phys. JETP* **67** 844 (1988)
66. Zheleznyak A T, Yakovenko V M, Dzyaloshinskii I E *Phys. Rev. B* **55** 3200 (1997)
67. Raghu S, Kivelson S A, Scalapino D J *Phys. Rev. B* **81** 224505 (2010)
68. Kagan M Yu *Phys. Lett. A* **152** 303 (1991)
69. Kagan M Yu, Val'kov V V *ЖЭТФ* **140** 179 (2011); *JETP* **113** 156 (2011)
70. Kagan M Yu, Val'kov V V, in *A Lifetime in Magnetism and Superconductivity: A Tribute to Professor David Schoenberg* (Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2011)
71. Falicov L M, Kimball J C *Phys. Rev. Lett.* **22** 997 (1969)
72. Каган Ю, Прокофьев Н В *ЖЭТФ* **90** 2176 (1986); Kagan Yu, Prokofev N V *Sov. Phys. JETP* **63** 1276 (1986)
73. Каган Ю, Прокофьев Н В *ЖЭТФ* **93** 366 (1986); Kagan Yu, Prokofev N V *Sov. Phys. JETP* **66** 211 (1987)
74. Suhl H, Matthias T B, Walker L R *Phys. Rev. Lett.* **3** 552 (1959)
75. Гейликман Б Т *ЖЭТФ* **48** 1194 (1965); Geilikman B T *Sov. Phys. JETP* **21** 796 (1965)
76. Гейликман Б Т *УФН* **88** 327 (1966); Geilikman B T *Sov. Phys. Usp.* **9** 142 (1966)
77. Гейликман Б Т *УФН* **109** 65 (1973); Geilikman B T *Sov. Phys. Usp.* **16** 17 (1973)
78. Баранов М А, Каган М Ю *ЖЭТФ* **102** 313 (1992); Baranov M A, Kagan M Yu *JETP* **75** 165 (1992)
79. Baranov M A, Efremov D V, Kagan M Yu *Physica C* **218** 75 (1993)
80. Frossati G et al. *Czech. J. Phys.* **440** 909 (1990)
81. Wieggers S A J et al. *Physica B* **165–166** 733 (1990)
82. Bedell K S, Sanchez-Castro C *Phys. Rev. Lett.* **57** 854 (1986)
83. Frossati G et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 1032 (1986)
84. Dy K S, Pethick C J *Phys. Rev.* **185** 373 (1969)
85. Bashkin E P, Meyerovich A E *Adv. Phys.* **30** 1 (1981)
86. Østgaard E, Bashkin E P *Physica B* **178** 134 (1992)
87. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **50** 1415 (1966); Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **23** 939 (1966)
88. Зиновьева К Н, Болдарев С Т *ЖЭТФ* **56** 1089 (1969); Zinov'eva K N, Boldarev S T *Sov. Phys. JETP* **29** 585 (1969)
89. Alikacem N, Sprague D T, Hallock R B *Phys. Rev. Lett.* **67** 2501 (1991)
90. Higley R H, Sprague D T, Hallock R B *Phys. Rev. Lett.* **63** 2570 (1989)
91. Saunders J, Lusher C P, Cowan B P *Phys. Rev. Lett.* **64** 2523 (1990)
92. Lusher C P, Cowan B P, Saunders J *Phys. Rev. Lett.* **67** 2497 (1991)
93. Miyake K *Prog. Theor. Phys.* **69** 1794 (1983)
94. Randeria M, Duan J-M, Shieh L-Y *Phys. Rev. Lett.* **62** 981 (1989)
95. Schmitt-Rink S, Varma C M, Ruckenstein A E *Phys. Rev. Lett.* **63** 445 (1989)
96. Kagan M Yu *Modern Trends in Superconductivity and Superfluidity* (Lecture Notes in Physics, Vol. 874) (Dordrecht: Springer, 2013)
97. Stoof H T C et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 10 (1996)
98. Ларкин А И *ЖЭТФ* **58** 1466 (1970); Larkin A I *Sov. Phys. JETP* **31** 784 (1970)
99. Абрикосов А А, Горьков Л П *ЖЭТФ* **39** 480 (1960); Abrikosov A A, Gor'kov L P *Sov. Phys. JETP* **12** 337 (1961)
100. Anderson P W *Phys. Rev. Lett.* **65** 2306 (1990)
101. Varma C M et al. *Phys. Rev. Lett.* **63** 1996 (1989)
102. Anderson P W *Phys. Rev. Lett.* **66** 3226 (1991)
103. Engelbrecht J R, Randeria M *Phys. Rev. Lett.* **65** 1032 (1990)
104. Fukuyama H, Hasegawa Y, Narikiyo O *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 2013 (1991)
105. Fabrizio M, Doctoral Thesis (1992)
106. Prokofiev N V, in review article: Stamp P J. *Physique* **3** 625 (1993)
107. Баранов М А, Каган М Ю, Марьенко М С *Письма в ЖЭТФ* **58** 734 (1993); Baranov M A, Kagan M Yu, Mar'enko M S *JETP Lett.* **58** 709 (1993)
108. Kagan M Yu, Val'kov V V, Wölfle P *Low Temp. Phys.* **37** 1046 (2011)
109. Kanamori J *Prog. Theor. Phys.* **30** 275 (1963)
110. Alexandrov A S, Kabanov V V *Phys. Rev. Lett.* **106** 136403 (2011)
111. Shubin S P, Vonsovsky S V *Proc. R. Soc. Lond. A* **145** 159 (1934)
112. Shubin S P, Vonsovsky S V *Phys. Z. Sowjetunion* **7** 292 (1935)
113. Shubin S P, Vonsovsky S V *Phys. Z. Sowjetunion* **10** 348 (1936)
114. Vonsovsky S V, Katsnelson M I J. *Phys. C Solid State Phys.* **12** 2043 (1979)
115. Vonsovsky S V, Katsnelson M I J. *Phys. C Solid State Phys.* **12** 2055 (1979)
116. Зайцев Р О *ЖЭТФ* **78** 1132 (1980); Zaitsev R O *Sov. Phys. JETP* **51** 671 (1980)
117. Зайцев Р О, Иванов В А, Михайлова Ю В *ФММ* **65** 1032 (1988)
118. Зайцев Р О, Иванов В А, Михайлова Ю В *ФММ* **65** 1108 (1989)
119. Вальков В В, Коровушкин М М *ЖЭТФ* **139** 126 (2011); Val'kov V V, Korovushkin M M *JETP* **112** 108 (2011)
120. Kagan M Yu et al. *Письма в ЖЭТФ* **93** 807 (2011); *JETP Lett.* **93** 725 (2011)
121. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1991)
122. Raghu S et al. *Phys. Rev. B* **85** 024516 (2012)
123. Каган М Ю и др. *Письма в ЖЭТФ* **97** 253 (2013); Kagan M Yu et al. *JETP Lett.* **97** 226 (2013)

124. Каган М Ю и др. *ЖЭТФ* **144** 837 (2013); Kagan M Yu et al. *JETP* **117** 728 (2013)
125. Deng Y et al. *Europhys. Lett.* **110** 57001 (2015); arXiv:1408.2088
126. Okazaki K et al. *Science* **337** 1314 (2012)
127. Изюмов Ю А *УФН* **161** (11) 1 (1991); Izyumov Yu A *Sov. Phys. Usp.* **34** 935 (1991)
128. Brenig W *Phys. Rep.* **251** 153 (1995)
129. Изюмов Ю А *УФН* **167** 465 (1997); Izyumov Yu A *Phys. Usp.* **40** 445 (1997)
130. Plakida N M *Condens. Matter Phys.* **5** 707 (2002)
131. Булаевский Л Н, Нагаев Э Л, Хомский Д И *ЖЭТФ* **54** 1562 (1968); Bulaevskii L N, Nagaev E L, Khomskii D I *Sov. Phys. JETP* **27** 836 (1968)
132. Chao K A, Spalek J, Oles A M *J. Phys. C Solid State Phys.* **10** L271 (1977)
133. Hybertsen M S, Schluter M, Christensen N E *Phys. Rev. B* **39** 9028 (1989)
134. Unger P, Fulde P *Phys. Rev. B* **47** 8947 (1993)
135. Emery V J *Phys. Rev. Lett.* **58** 2794 (1987)
136. Varma C M, Schmitt-Rink S, Abrahams E *Solid State Commun.* **62** 681 (1987)
137. Kagan M Yu, Rice T M *J. Phys. Condens. Matter* **6** 3771 (1994)
138. Плакида Н М *Письма в ЖЭТФ* **74** 38 (2001); Plakida N M *JETP Lett.* **74** 36 (2001)
139. Плакида Н М и др. *ЖЭТФ* **124** 367 (2003); Plakida N M et al. *JETP* **97** 331 (2003)
140. Hubbard J C *Proc. R. Soc. Lond. A* **285** 542 (1965)
141. Zhang F C, Rice T M *Phys. Rev. B* **37** 3759 (1988)
142. Зайцев Р О, Иванов В А *ФТТ* **29** 2554 (1987); Zaitsev R O, Ivanov V A *Sov. Phys. Solid State* **29** 475 (1987)
143. Зайцев Р О *ЖЭТФ* **125** 891 (2004); Zaitsev R O *JETP* **98** 780 (2004)
144. Laughlin R B *Phys. Rev. Lett.* **60** 2677 (1988)
145. Fetter A L, Hanna C B, Laughlin R B *Phys. Rev. B* **39** 9679 (1989)
146. Kagan M Yu et al. *Phys. Rev. A* **70** 023607 (2004)
147. Каган М Ю и др. *УФН* **176** 1105 (2006); Kagan M Yu et al. *Phys. Usp.* **49** 1079 (2006)
148. Brinkman W F, Rice T M *Phys. Rev. B* **2** 1324 (1970)
149. Sachdev S *Phys. Status Solidi B* **247** 537 (2010)
150. Lee J, Strack P, Sachdev S *Phys. Rev. B* **87** 045104 (2013)
151. Castellani C, Di Castro C, Grilli M *Phys. Rev. Lett.* **75** 4650 (1995)
152. Зайцев Р О *ЖЭТФ* **68** 207 (1975); Zaitsev R O *Sov. Phys. JETP* **41** 100 (1975)
153. Зайцев Р О *ЖЭТФ* **70** 1100 (1976); Zaitsev R O *Sov. Phys. JETP* **43** 574 (1976)
154. Eremin M, Eremin I, Varlamov S *Phys. Rev. B* **64** 214512 (2001)
155. Eremin M V, Shigapov I M, Eremin I M *Eur. Phys. J. B* **85** 131 (2012)
156. Plakida N M, Oudovenko V S *Eur. Phys. J. B* **86** 115 (2013)
157. Plakida N M, Oudovenko V S *ЖЭТФ* **146** 631 (2014); *JETP* **119** 554 (2014)
158. Hirsch J E *Phys. Lett. A* **136** 153 (1989)
159. Yushankhai V Yu, Vujicic G M, Zakula R B *Phys. Lett. A* **151** 254 (1990)
160. Вальков В В и др. *Письма в ЖЭТФ* **75** 450 (2002); Val'kov V V et al. *JETP Lett.* **75** 378 (2002)
161. Вальков В В, Дзедзашвили Д М *ЖЭТФ* **127** 686 (2005); Val'kov V V, Dzebisashvili D M *JETP* **100** 608 (2005)
162. Коршунов М М, Овчинников С Г, Шерман А В *Письма в ЖЭТФ* **80** 45 (2004); Korshunov M M, Ovchinnikov S G, Sherman A V *JETP Lett.* **80** 39 (2004)
163. Вальков В В, Головня А А *ЖЭТФ* **134** 1167 (2008); Val'kov V V, Golovnya A A *JETP* **107** 996 (2008)
164. Вальков В В, Коровушкин М М, Барабанов А Ф *Письма в ЖЭТФ* **88** 426 (2008); Val'kov V V, Korovushkin M M, Barabanov A F *JETP Lett.* **88** 370 (2008)
165. Вальков В В и др. *ФТТ* **53** 1895 (2011); Val'kov V V et al. *Phys. Solid State* **53** 1997 (2011)
166. Bermudez A, Porras D, arXiv:1504.00128
167. Marienko M S, Sau J D, Tewari S, arXiv:1202.5784
168. Novoselov K S et al. *Nature* **438** 197 (2005)
169. Tan Y-W et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 246803 (2007)
170. Morozov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 016602 (2008)
171. Bolotin K I et al. *Solid State Commun.* **146** 351 (2008)
172. Garcia N et al. *Phys. Rev. B* **78** 035413 (2008)
173. Geim A K, Katsnelson M I, Novoselov K S *Nature Phys.* **2** 620 (2006)
174. Young A F, Kim P *Nature Phys.* **5** 222 (2009)
175. Katsnelson M I *Eur. Phys. J. B* **51** 157 (2006)
176. Rusin T M, Zawadzki W *Phys. Rev. B* **80** 045416 (2009)
177. Nair P R et al. *Science* **320** 1308 (2008)
178. Muñoz W A, Covaci L, Peeters F M *Phys. Rev. B* **86** 184505 (2012)
179. Heersche H B et al. *Nature* **446** 56 (2007)
180. Josephson B D *Phys. Lett.* **1** 251 (1962)
181. Shailos A et al. *Europhys. Lett.* **79** 57008 (2007)
182. Titov M, Beenakker C W J *Phys. Rev. B* **74** 041401R (2006)
183. Du X, Skachko I, Andrei E Y *Phys. Rev. B* **77** 184507 (2008)
184. Ojeda-Aristizabal C et al. *Phys. Rev. B* **79** 165436 (2009)
185. Tomori H et al. *Physica C* **470** 1492 (2010)
186. Peres N M R, Guinea F, Castro Neto A H *Phys. Rev. B* **72** 174406 (2005)
187. Esquinazi P *Physics* **5** 050007 (2013)
188. Marino E C, Nunes L H C M *Nucl. Phys. B* **741** 404 (2006)
189. González J, Guinea F, Vozmediano M A H *Phys. Rev. B* **63** 134421 (2001)
190. Zhao E, Paramakanti A *Phys. Rev. Lett.* **97** 230404 (2006)
191. Uchoa B, Castro Neto A H *Phys. Rev. Lett.* **98** 146801 (2007)
192. Kopnin N B, Sonin E B *Phys. Rev. Lett.* **100** 246808 (2008)
193. Basko D M, Aleiner I L *Phys. Rev. B* **77** 041409(R) (2008)
194. Lozovik Yu E, Ogarkov S L, Sokolik A A *Phil. Trans. R. Soc. A* **368** 5417 (2010)
195. Einenkel M, Efetov K B *Phys. Rev. B* **84** 214508 (2011)
196. Classen L, Scherer M M, Honerkamp C *Phys. Rev. B* **90** 035122 (2014)
197. Black-Schaffer A M, Doniach S *Phys. Rev. B* **75** 134512 (2007)
198. Black-Schaffer A M, Wu W, Le Hur K *Phys. Rev. B* **90** 054521 (2014)
199. Black-Schaffer A M, Honerkamp C *J. Phys. Condens. Matter* **26** 423201 (2014)
200. Krishana K et al. *Science* **277** 83 (1997)
201. Elhalel K et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 137002 (2007)
202. Balatsky A V *Phys. Rev. Lett.* **80** 1972 (1998)
203. Volovik G E *Phys. Lett. A* **128** 277 (1988)
204. Biswas P K et al. *Phys. Rev. B* **87** 180503(R) (2013)
205. Nishikubo Y, Kudo K, Nohara M *J. Phys. Soc. Jpn.* **80** 055002 (2011)
206. Honerkamp C *Phys. Rev. Lett.* **100** 146404 (2008)
207. Daul S, Scalapino D J, White S R *Phys. Rev. Lett.* **84** 4188 (2000)
208. Ma T et al. *Phys. Rev. B* **84** 121410(R) (2011)
209. Chen K S et al. *Phys. Rev. B* **88** 041103(R) (2013)
210. González J *Phys. Rev. B* **78** 205431 (2008)
211. Markiewicz R S *J. Phys. Chem. Solids* **58** 1179 (1997)
212. Valenzuela B, Vozmediano M A H *New J. Phys.* **10** 113009 (2008)
213. McChesney J L et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 136803 (2010)
214. Gofron K et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 3302 (1994)
215. Van Hove L *Phys. Rev.* **89** 1189 (1953)
216. Nandkishore R, Levitov L S, Chubukov A V *Nature Phys.* **8** 158 (2012)
217. Nandkishore R, Chern G-W, Chubukov A V *Phys. Rev. Lett.* **108** 227204 (2012)
218. Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **93** 1487 (1987); Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **66** 848 (1987)
219. Schulz H J *Europhys. Lett.* **4** 609 (1987)
220. Shankar R *Rev. Mod. Phys.* **66** 129 (1994)
221. Makogon D et al. *Phys. Rev. B* **84** 125404 (2011)
222. Li T *Europhys. Lett.* **97** 37001 (2012)
223. Wang W S et al. *Phys. Rev. B* **85** 035414 (2012)
224. Nandkishore R, Chubukov A V *Phys. Rev. B* **86** 115426 (2012)
225. Kiesel M L et al. *Phys. Rev. B* **86** 020507(R) (2012)
226. Wehling T O et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 236805 (2011)
227. Левин А А *Введение в квантовую химию твердого тела* (М.: Химия, 1974); Levin A A *Solid State Quantum Chemistry* (New York: McGraw-Hill, 1977)
228. Reich S et al. *Phys. Rev. B* **66** 035412 (2002)
229. Peretto E et al. *Phys. Rev. B* **76** 233408 (2007)
230. Nandkishore R, Thomale R, Chubukov A V *Phys. Rev. B* **89** 144501 (2014)
231. Kagan M Yu, Mitskan V A, Korovushkin M M *Eur. Phys. J. B* **88** 157 (2015)

232. Зайцев Р О *Письма в ЖЭТФ* **94** 224 (2011); Zaitsev R O *JETP Lett.* **94** 206 (2011)
233. Зайцев Р О *Письма в ЖЭТФ* **95** 423 (2012); Zaitsev R O *JETP Lett.* **95** 380 (2012)
234. Guinea F, Castro Neto A H, Peres N M R *Phys. Rev. B* **73** 245426 (2006)
235. Каган М Ю, Мишкан В А, Коровушкин М М *ЖЭТФ* **146** 1301 (2014); Kagan M Yu, Mitskan V A, Korovushkin M M *JETP* **119** 1140 (2014)
236. McCann E, Fal'ko V I *Phys. Rev. Lett.* **96** 086805 (2006)
237. Nilsson J et al. *Phys. Rev. B* **73** 214418 (2006)
238. Partoens B, Peeters F M *Phys. Rev. B* **74** 075404 (2006)
239. McCann E, Abergel D S L, Fal'ko V I *Eur. Phys. J. Special Topics* **148** 91 (2007)
240. McCann E, Koshino M *Rep. Prog. Phys.* **76** 056503 (2013)
241. Nunes L H C M, Mota A L, Marino E C *Solid State Commun.* **152** 2082 (2012)
242. Vučićević J, Goerbig M O, Milovanović M V *Phys. Rev. B* **86** 214505 (2012)
243. Milovanović M V, Predin S *Phys. Rev. B* **86** 195113 (2012)
244. Hosseini M V, Zareyan M *Phys. Rev. Lett.* **108** 147001 (2012)
245. Hosseini M V, Zareyan M *Phys. Rev. B* **86** 214503 (2012)
246. Alford M, Rajagopal K, Wilczek F *Nucl. Phys. B* **537** 443 (1999)
247. Sedrakian A, Lombardo U *Phys. Rev. Lett.* **84** 602 (2000)
248. Hwang E H, Das Sarma S *Phys. Rev. Lett.* **101** 156802 (2012)
249. González J *Phys. Rev. B* **88** 125434 (2013)
250. Murray J M, Vafek O *Phys. Rev. B* **89** 205119 (2014)
251. Dresselhaus M S, Dresselhaus G *Adv. Phys.* **51** 1 (2002)
252. Brandt N B, Chudinov S M, Ponomarev Y G, in *Semimetals* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 20, Eds V M Agranovich, A A Maradudin) (Amsterdam: North-Holland, 1988)
253. Girifalco L A, Hodak M *Phys. Rev. B* **65** 125404 (2002)
254. Hasegawa M, Nishidate K *Phys. Rev. B* **70** 205431 (2004)
255. Hasegawa M, Nishidate K, Iyetomi H *Phys. Rev. B* **76** 115424 (2007)
256. Boström M, Sernelius B E *Phys. Rev. A* **85** 012508 (2012)
257. Klimchitskaya G L, Mostepanenko V M *Phys. Rev. B* **87** 075439 (2013)
258. Anderson P W *Phys. Rev. Lett.* **3** 325 (1959)
259. Tsuneto T *Prog. Theor. Phys.* **28** 857 (1962)
260. Markowitz D, Kadanoff L P *Phys. Rev.* **131** 563 (1963)
261. Löthman T, Black-Schaffer A M *Phys. Rev. B* **90** 224504 (2014)
262. Kats E I, Lebedev V V *Phys. Rev. B* **89** 125433 (2014)
263. Cardona M *Phys. Rev.* **140** A651 (1965)
264. Shanthi N, Sarma D D *Phys. Rev. B* **57** 2153 (1998)
265. van der Marel D, van Mechelen J L M, Mazin I I *Phys. Rev. B* **84** 205111 (2011)
266. Schooley J F, Hosler W R, Cohen M L *Phys. Rev. Lett.* **12** 474 (1964)
267. Koonce C S et al. *Phys. Rev.* **163** 380 (1967)
268. Binning G et al. *Phys. Rev. Lett.* **45** 1352 (1980)
269. Reyren N et al. *Science* **317** 1196 (2007)
270. Heber J *Nature* **459** 28 (2009)
271. Caviglia A D et al. *Nature* **456** 624 (2008)
272. Bell C et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 226802 (2009)
273. Cohen M L *Phys. Rev.* **134** A511 (1964)
274. Kahn A H, Leyendecker A J *Phys. Rev.* **135** A1321 (1964)
275. Eagles D M *Phys. Rev.* **164** 489 (1967)
276. Eagles D M *Phys. Rev.* **186** 456 (1969)
277. Koonce C S, Cohen M L *Phys. Rev.* **177** 707 (1969)
278. Appel J *Phys. Rev.* **180** 508 (1969)
279. Zinamon Z *Philos. Mag.* **21** 347 (1970)
280. Jarlborg T *Phys. Rev. B* **61** 9887 (2000)
281. Fernandes R M et al. *Phys. Rev. B* **87** 014510 (2013)
282. Ponomarenko L A et al. *Nat. Phys.* **7** 958 (2011)
283. Brittnell L et al. *Science* **335** 947 (2012)
284. Brittnell L et al. *Nano Lett.* **12** 1707 (2012)
285. Gorbachev R V et al. *Nature Phys.* **8** 896 (2012)
286. Sakai Y, Koretsune T, Saito S *Phys. Rev. B* **83** 205434 (2011)
287. Hoffman D M, Doll G L, Eklund P C *Phys. Rev. B* **30** 6051 (1984)
288. Blase X et al. *Phys. Rev. B* **51** 6868 (1995)
289. Watanabe K, Taniguchi T, Kanda H *Nature Mater.* **3** 404 (2004)
290. Kubota Y et al. *Science* **317** 932 (2007)
291. Lee G-H et al. *Appl. Phys. Lett.* **99** 243114 (2011)
292. Dean C R et al. *Nature Nanotechnol.* **5** 722 (2010)
293. Mayorov A S et al. *Nano Lett.* **11** 2396 (2011)
294. Gannett W et al. *Appl. Phys. Lett.* **98** 242105 (2011)
295. Xue J et al. *Nature Mater.* **10** 282 (2011)
296. Decker R et al. *Nano Lett.* **11** 2291 (2011)
297. Guinea F, Uchoa B *Phys. Rev. B* **86** 134521 (2012)
298. Lewenstein M et al. *Adv. Phys.* **56** 243 (2007)
299. Bloch I, Dalibard J, Zwerger W *Rev. Mod. Phys.* **80** 885 (2008)
300. Zhu S-L, Wang B, Duan L-M *Phys. Rev. Lett.* **98** 260402 (2007)
301. Wunsch B, Guinea F, Sols F *New J. Phys.* **10** 103027 (2008)
302. Stamper-Kurn D M et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 2876 (1999)
303. Anglin J R, Ketterle W *Nature* **416** 211 (2002)
304. Zwierlein M W et al. *Science* **311** 492 (2006)
305. Shin Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 030401 (2006)
306. Tarruell L et al. *Nature Lett.* **483** 302 (2012)
307. Hasegawa Y et al. *Phys. Rev. B* **74** 033413 (2006)
308. Montambaux G et al. *Phys. Rev. B* **80** 153412 (2009)
309. Lee K L et al. *Phys. Rev. A* **80** 043411 (2009)
310. Pereira V M, Castro Neto A H, Peres N M R *Phys. Rev. B* **80** 045401 (2009)
311. Посаженникова А И, Садовский М В *Письма в ЖЭТФ* **63** 347 (1996); Posazhennikova A I, Sadovskii M V *JETP Lett.* **63** 358 (1996)

### Anomalous superconductivity and superfluidity in repulsive fermion systems

**M.Yu. Kagan.** *P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation. E-mail: kagan@kapitza.ras.ru*

*National Research University Higher School of Economics, ul. Myasitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation*

**V.A. Mitskan.** *L.V. Kirensky Institute of Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Akademgorodok 50, str. 38, 660036 Krasnoyarsk, Russian Federation;*

*M.F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, prosp. Gazety Krasnoyarskii rabochii 31, 660014 Krasnoyarsk, Russian Federation*

**M.M. Korovushkin.** *L.V. Kirensky Institute of Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Akademgorodok 50, str. 38, 660036 Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: kmax@iph.krasn.ru*

In review, we discuss the mechanisms of unconventional superconductivity and superfluidity in 3D and 2D fermionic systems with purely repulsive interaction at low density. We construct phase diagrams of these systems and find the areas of superconducting state in free space, as well as in the lattice in the framework of the Fermi-gas model with hard-core repulsion, Hubbard model, Shubin–Vonsovsky model, and  $t-J$  model. We demonstrate that the critical superconducting temperature can be strongly increased in a spin-polarized case or in a two-band situation already at low densities. The proposed theory is based on the Kohn–Luttinger mechanism or its generalizations and explains or predicts anomalous  $p$ -,  $d$ - and  $f$ -wave pairing in various materials, such as high-temperature superconductors, idealized monolayer and bilayer of doped graphene, heavy-fermion systems, layered organic superconductors, superfluid  $^3\text{He}$ , spin-polarized solutions  $^3\text{He}$  in  $^4\text{He}$ , ultracold quantum gases in magnetic traps and in the optical lattices.

**Keywords:** anomalous superconductivity, Kohn–Luttinger mechanism, superfluidity, repulsive Fermi gas, Hubbard and  $t-J$  model, Shubin–Vonsovsky model, graphene monolayer, graphene bilayer

PACS numbers: **67.85. -d**, **74.20. -z**, 74.20.Mn, 74.20.Rp, 74.25.Dw, 74.78.Fk, 81.05.ue

Bibliography — 311 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **185** (8) 785–815 (2015)

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201508a.0785

Received 15 May 2015

*Physics – Uspekhi* **58** (8) (2015)