

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Теория плазменного эмиттера положительных ионов

И.А. Котельников, В.Т. Астрелин

С единых позиций изложены известные к настоящему времени результаты одномерной теории плазменного эмиттера положительных ионов. Обсуждается критерий Бома в простой и обобщённой форме. Изложена теория униполярного слоя и теория двух масштабов. Описаны гидродинамическая и кинетическая модели формирования дебаевского слоя и зоны ионизации в дебаевском предслое. Показано, что за исключением некоторых искусственных моделей ионизации критерий Бома выполняется в виде равенства. Вычислен ток эмиссии плазменного эмиттера в гидродинамическом и кинетическом приближении. Кратко описаны существующие численные коды для моделирования источников положительных ионов в двумерной и трёхмерной геометрии.

Ключевые слова: критерий Бома, дебаевский слой, униполярный слой, пучки заряженных частиц, численное моделирование плазмы

PACS numbers: 41.75.Ak, 41.85.Ar, 52.25.Jm, 52.40.Kh, 52.59.Bi, 52.59.Sa, **52.65.-y**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201507c.0753

Содержание

1. Введение (753).
 2. Критерий Бома (754).
 3. Дебаевский слой (756).
 4. Униполярный слой (757).
 5. Теория двух масштабов (758).
 6. Гидродинамическая модель ионизации (759).
 7. Обобщённый критерий Бома (761).
 8. Плазменное уравнение (761).
 9. Локализованный источник ионов (764).
 10. Ток эмиссии (766).
 11. Численное моделирование плазменного эмиттера (766).
11.1. PBGUNS. 11.2. COBRA-3. 11.3. POISSON-2. 11.4. ELIS.
 12. Плазменный мениск (768).
 13. Заключение (770).
- Список литературы (770).

1. Введение

В отечественной научной литературе существует ограниченное число работ с обзором источников ионов. Известны монографии Габовича с соавторами [1, 2], его статья в УФН [3] и русский перевод книги Форрестера [4], изданные 20–40 лет назад. Монография Крейнделя [5] посвящена эмиссии электронов из плазмы, но в ней также указаны особенности эмиссии ионов из плазмы. В

недавней монографии Коваля с соавторами [6] в двух отдельных главах рассмотрены современные плазменные источники как электронов, так и ионов с анализом некоторых вопросов эмиссии заряженных частиц из плазмы. Другие публикации посвящены отдельным проблемам, связанным с этой обширной тематикой. Как правило, они предполагают знакомство читателя с основами теории эмиссии заряженных частиц из плазмы. В настоящей статье мы попытаемся изложить с единых позиций известные к настоящему времени результаты теории плазменного эмиттера положительных ионов, заполнив некоторые лакуны между этими результатами. Теорию формирования пучков электронов и отрицательно заряженных ионов в источниках с плазменным эмиттером оставляем за рамками данной статьи.

Прежде всего уточним понятие плазменного эмиттера. Мы рассматриваем плазменный эмиттер как конструктивный элемент ионного источника, а ионный источник — как устройство для получения пучка ионов. Плазменный эмиттер заменяет твердотельный эмиттер, например термокотод в источнике электронов. В источнике с плазменным эмиттером заряженные частицы вытягиваются из плазмы со свободной границей, форма и положение которой заранее не известны.

Вместе с тем мы рассматриваем плазменный эмиттер как объект физического исследования. Согласно [2, с. 10] и [6, с. 529], *плазменный эмиттер* в простейшем приближении представляют как однородную смесь двух газов, электронного и ионного (если не считать нейтральных атомов), с примерно одинаковой концентрацией. Однако это только первое и не вполне точное определение. Мы увидим, что естественным образом в состав плазменного эмиттера следует включить ленгмюровский слой со стороны коллектора заряженных частиц (или ускоряющего электрода) и зону ионизации в глубине плазмы, где плазма по необходимости неоднородна.

В основе теории плазменного эмиттера лежит известный критерий Бома [7]. Он определяет необходимое

И.А. Котельников, В.Т. Астрелин. Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, просп. Академика Лаврентьева 11, 630090 Новосибирск, Российская Федерация; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Российская Федерация
E-mail: I.A.Kotelnikov@inp.nsk.su, V.T.Astrelin@inp.nsk.su

Статья поступила 26 марта 2015 г.,
после доработки 7 мая 2015 г.

условие формирования дебаевского слоя на границе квазинейтральной плазмы. При его выводе, вошедшем в классические учебники [4, 8–13] и обзоры [14], рассматривают дебаевский слой, который возникает вблизи электрода, помещённого в плазму. Физика плазмы как наука возникла в то время, когда Ленгмюр с сотрудниками исследовали явления в газовом разряде, которые формируют заряженный слой вблизи такого электрода [15–19]. В наше время критерий Бома изучают все студенты, которые знакомятся с зондовыми измерениями плазмы [20–24].

Метод, использованный при выводе критерия Бома, вполне пригоден для описания плазменного эмиттера положительных ионов, который приобрёл в последние годы важное значение в связи с развитием сильноточных источников заряженных частиц и нейтральных атомов. Соответствующее обобщение теории Бома, вполне очевидное, обсуждается в книге Чена [10], хотя плазменный эмиттер там не упоминается, в отличие от монографии Габовича с соавторами [2], где имеется отдельный параграф, посвящённый плазменному эмиттеру положительных ионов.

Следуя терминологии, предложенной в статье Римана и Цендина [25], будем говорить, что дебаевский слой на поверхности плазмы отделён от коллектора ионов униполярным слоем, в котором потенциал приближённо подчиняется закону Чайлда–Ленгмюра [26, 27]. В сумме дебаевский и униполярный слои образуют так называемый ленгмюровский слой [25, 28]. Точная граница между дебаевским и униполярным слоем строго не определена. Дебаевский слой плавно переходит в униполярный слой на расстоянии порядка нескольких дебаевских длин. Качественное же различие между ними состоит в том, что в униполярном слое плотность электронов пренебрежимо мала по сравнению с плотностью положительных ионов (скажем, менее 2%), а в дебаевском слое плотности ионов и электронов имеют один порядок величины. Что касается границы между квазинейтральной плазмой и дебаевским слоем, то её можно определить достаточно строго, используя теорию двух масштабов [29–33].

В рамках этой теории меньший масштаб задан длиной Дебая λ_D , а больший — толщиной зоны ионизации L . В зоне ионизации, которую чаще называют дебаевским предслоем (хотя это не всегда одно и то же), плазму обычно можно считать квазинейтральной. В дебаевском слое, где существенно отклонение от квазинейтральности, ионизацией можно пренебречь, считая, что ток ионов, сформированный в зоне ионизации, сохраняется. Теория Бома сформулирована для дебаевского слоя. В масштабе зоны ионизации дебаевский слой проявляется как математическая сингулярность, которая возникает вследствие замены уравнения Пуассона условием квазинейтральности.

Регулярное решение Бома для дебаевского слоя сшивается с сингулярным решением для зоны ионизации на расстоянии $\delta z_D = \lambda_D^{1-\beta} L^\beta$ до сингулярности, причём $\beta = 1/5$ в гидродинамической модели и $\beta = 1/9$ в кинетической теории. Если измерять расстояние в единицах λ_D , то в пределе $\lambda_D/L \rightarrow 0$ расстояние до точки сшивки $\delta \xi_D = \delta z_D/\lambda_D = L^\beta/\lambda_D^\beta$ удаляется на бесконечность. Поэтому в теории Бома считается, что поток ионов задан на бесконечном удалении от дебаевского слоя. Если же измерять расстояние в единицах L , то в том же пределе

ширина дебаевского слоя $\delta s_D = \delta z_D/L = \lambda_D^{1-\beta}/L^{1-\beta}$ стремится к нулю, а сам слой вырождается в сингулярность.

Аналитическая теория плазменного эмиттера ограничивается одномерными моделями. Одномерная теория призвана помочь сформулировать граничные условия для численных кодов, которые применяются для расчёта реальных источников заряженных частиц. В сильноточных источниках дебаевская длина зачастую слишком мала по сравнению с размерами устройства, чтобы численные коды могли её разрешить, поэтому реальное распределение потенциала вблизи свободной поверхности плазмы в некоторых кодах заменяют модельными граничными условиями на границе между квазинейтральной плазмой и униполярным слоем с нулевой толщиной переходного дебаевского слоя. Свободную (не контактирующую с твёрдым электродом) поверхность плазмы в рассматриваемом контексте называют эмиссионной поверхностью или плазменным мениском (см., например, [13]).

Изложение теории плазменного эмиттера положительных ионов начнём с вывода критерия Бома в гидродинамическом приближении в разделе 2. Основные понятия, такие как дебаевский, униполярный и ленгмюровский слои, определены в разделе 3. Униполярный слой описан в разделе 4. Теория двух масштабов сформулирована в разделе 5. Гидродинамические модели зоны ионизации в дебаевском предслое рассмотрены в разделе 6. Кинетическое обобщение критерия Бома сформулировано в разделе 7. Кинетическая модель зоны ионизации описана в разделе 8. Модель локализованного в пространстве источника ионов изложена в разделе 9. В разделе 10 вычислен ток эмиссии с поверхности плазменного эмиттера. В разделе 11 перечислены некоторые из существующих численных кодов для моделирования источников ионов в двумерной и трёхмерной геометрии. В разделе 12 обсуждается форма плазменного эмиттера в двумерной геометрии. Наконец, в разделе 13 суммированы основные выводы.

2. Критерий Бома

Для вывода критерия Бома в первоначальной формулировке используем систему уравнений двухжидкостной гидродинамики, дополненную уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial z} n_e v_e = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} n_i v_i = 0, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} m_e n_e v_e^2 = -\frac{\partial}{\partial z} n_e T_e + e n_e \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1в)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} m_i n_i v_i^2 = -\frac{\partial}{\partial z} n_i T_i - e n_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1г)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e (n_e - n_i). \quad (1д)$$

Здесь $e > 0$ обозначает элементарный заряд, v_e и v_i — потоковые скорости соответственно электронов и ионов, остальные обозначения являются общепринятыми.

Будем считать, что электроны в среднем неподвижны, поэтому $v_e = 0$. Но даже если потоковые скорости электронов и ионов, v_e и v_i , одного порядка, то кинетическая

энергия электронов, $m_e v_e^2/2$, мала по сравнению с кинетической энергией ионов, $m_i v_i^2/2$, из-за огромной разницы масс m_e и m_i , вследствие чего левую часть уравнения (1в) можно приравнять нулю. Тогда из этого уравнения следует, что плотность электронов подчиняется распределению Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right), \quad (2)$$

где n_0 — плотность электронов в квазинейтральной области, потенциал которой будем считать равным нулю. Мы ищем решение, которое описывает плазменный эмиттер ионов, подразумевая, что $\varphi \rightarrow 0$ и $\partial\varphi/\partial z \rightarrow 0$ глубоко в плазме при $z \rightarrow -\infty$, а вне плазмы при $z \rightarrow +\infty$ потенциал стремится к $-\infty$ по закону Чайлда–Ленгмюра (закону "трёх вторых"), как в диоде с эмиссией, ограниченной пространственным зарядом, где $\varphi \propto -z^{4/3}$ [26, 27].

Следуя Бому, рассмотрим случай, когда температура ионов T_i настолько меньше температуры электронов T_e , что ею можно пренебречь. Тогда из уравнений (1б) и (1г) нетрудно найти скорость

$$v_i = \sqrt{v_0^2 - 2e\varphi/m_i} \quad (3)$$

и плотность ионов

$$n_i = \frac{n_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2e\varphi/m_i}} \quad (4)$$

как функции электрического потенциала φ , где v_0 — скорость ионов при $\varphi = 0$. Подставляя выражения (2) и (4) в уравнение Пуассона (1д), перейдём к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{z}{\lambda_D}, \quad \chi = \frac{e\varphi}{T_e}, \quad u_0 = \frac{v_0}{c_s}, \quad (5)$$

где $\lambda_D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}$ — дебаевская длина, а $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ — скорость ионного звука. Полученное уравнение

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = \exp(\chi) - \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2\chi}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial \chi} \quad (6)$$

допускает полезную механическую аналогию с воображаемой псевдочастицей, которая движется в поле эффективного потенциала

$$U(\chi) = 1 - \exp(\chi) - u_0 \sqrt{u_0^2 - 2\chi} + u_0^2, \quad (7)$$

причём ξ имеет смысл времени, а χ — координаты псевдочастицы. Механическая энергия такой псевдочастицы является интегралом движения

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 + U(\chi) = \text{const}. \quad (8)$$

Полагая, что при $\xi \rightarrow -\infty$ координата χ и скорость $d\chi/d\xi$ псевдочастицы одновременно обращаются в нуль, найдём, что константа в уравнении (8) равна нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 = \exp(\chi) - 1 + u_0 \sqrt{u_0^2 - 2\chi} - u_0^2. \quad (9)$$

В пределе $\chi \rightarrow 0$ это уравнение можно упростить, разложив его правую часть в ряд Тейлора вблизи $\chi = 0$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2u_0^2} \right) \chi^2. \quad (10)$$

Поскольку его левая часть неотрицательна, решение существует, если правая часть также неотрицательна, т.е.

$$u_0^2 \geq 1. \quad (11)$$

В частности, убывающее (в сторону увеличения ξ) решение имеет вид

$$\chi = \chi_s \exp\left(\sqrt{1 - \frac{1}{u_0^2}}(\xi - \xi_s)\right), \quad (12)$$

где $\chi_s < 0$ и ξ_s — некоторые константы (их смысл станет ясен в разделе 3). В размерных переменных это решение описывает изменение электрического потенциала

$$\varphi = -\frac{|\chi_s| T_e}{e} \exp\left(\sqrt{1 - \frac{1}{u_0^2}} \frac{z - z_s}{\lambda_D}\right)$$

от нуля в глубине плазмы (при $z \rightarrow -\infty$) до небольших отрицательных значений вблизи её границы ($z \rightarrow z_s$).

В другом предельном случае, $\chi \rightarrow -\infty$, имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^2 = u_0 \sqrt{-2\chi}, \quad (13)$$

откуда находим

$$\chi = -\left(\frac{u_0^2}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{3\xi}{2}\right)^{4/3}, \quad (14)$$

т.е. при $z \rightarrow +\infty$

$$\varphi = -\frac{T_e}{e} \left(\frac{u_0^2}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{3z}{2\lambda_D}\right)^{4/3}.$$

Последнее выражение, переписанное в виде

$$j_{3/2} = en_0 v_0 = \frac{\sqrt{2e}}{9\pi\sqrt{m_i}} \frac{|\varphi|^{3/2}}{z^2}, \quad (15)$$

показывает, что вне плазмы плотность тока подчиняется закону Чайлда–Ленгмюра. В приближении (15) она не зависит от температуры электронов T_e .

Формальное решение уравнения (9), такое, что $\chi = \chi_p$ при $\xi = \xi_p$, можно записать в неявном виде

$$\xi - \xi_p = - \int_{\chi_p}^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{2} \sqrt{\exp(\chi) - 1 + u_0 \sqrt{u_0^2 - 2\chi} - u_0^2}}. \quad (16)$$

При выполнении условия (11) выражение (16) определяет однозначную и монотонно убывающую функцию $\chi(\xi - \xi_p)$. Она показана на рис. 1 для нескольких значений параметра u_0^2 при $\chi_p = -4$ и $\xi_p = 0$. Соответствующие графики плотности ионов и электронов приведены на рис. 2.

В размерных величинах условие (11) означает, что скорость ионов в области квазинейтральной плазмы

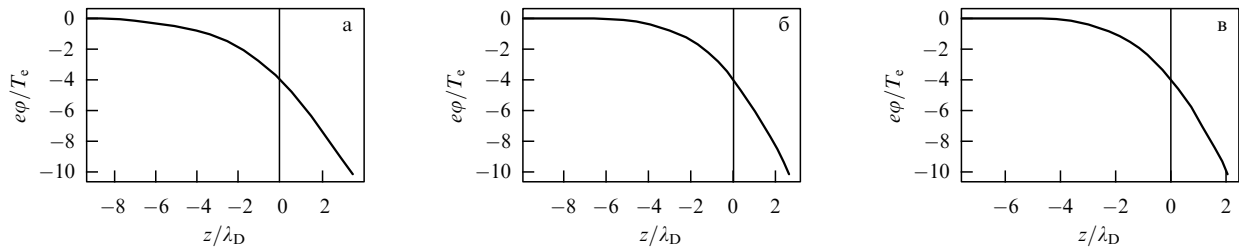


Рис. 1. Профиль потенциала вблизи плазменного эмиттера при различных значениях параметра u_0^2 : (а) $u_0^2 = 1$, (б) $u_0^2 = 2$, (в) $u_0^2 = 10$; $\chi_p = -4$, $\xi_p = 0$.

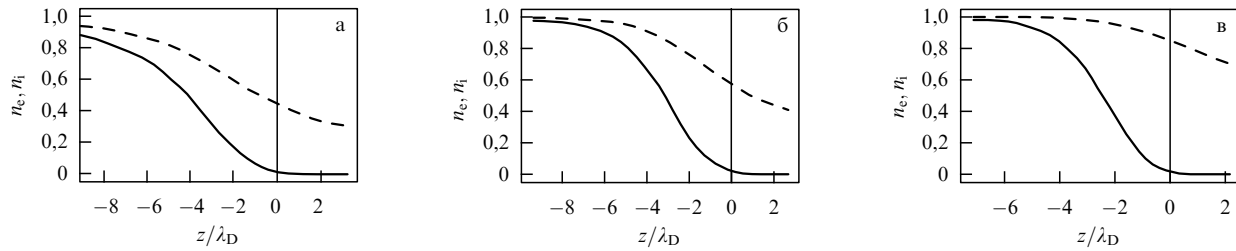


Рис. 2. Плотности электронов (сплошная линия) и ионов (штриховая линия) вблизи плазменного эмиттера при различных значениях параметра u_0^2 : (а) $u_0^2 = 1$, (б) $u_0^2 = 2$, (в) $u_0^2 = 10$; $\chi_p = -4$, $\xi_p = 0$.

больше или равна скорости ионного звука:

$$v_0 \geq c_s. \quad (17)$$

Оно известно как *критерий Бома* (Bohm's sheath criterion) [4, 10–13, 30], хотя сам Бом называл его критерием устойчивости дебаевского слоя (a criterion for the stability of a sheath) [7, 34]. Если критерий Бома не выполняется, то, как указано в работе [35], формируется волна разрежения [36], которая распространяется против течения ионов к области источника и там интерферирует с ним. История открытия критерия Бома, а также события, предшествовавшие этому открытию и последовавшие за ним, описаны в статье Аллена [37].

3. Дебаевский слой

В научной литературе существует разное толкование некоторых терминов, связанных с рассмотренной в разделе 2 задачей о профиле потенциала на границе бесстолкновительной плазмы. Ту часть заряженного слоя на границе, где плотности электронов и ионов одного порядка, но даже приблизительно не равны друг другу, называют *дебаевским слоем* (Debye sheath, см., например, [25]). Обычно полагают, что толщина дебаевского слоя составляет несколько дебаевских длин (см., например, [38]), а длина Дебая λ_D значительно меньше всех других характерных размеров, и именно поэтому дебаевский слой можно считать бесстолкновительным. В пределах этого слоя безразмерный электрический потенциал χ отрицателен, а его абсолютная величина изменяется от долей единицы до нескольких единиц. Точные значения границ дебаевского слоя в рамках теории Бома не определены. Далее мы условимся, что дебаевскому слою соответствует интервал

$$-4 < \chi < 0. \quad (18)$$

На его верхней границе при $\chi \rightarrow 0$ плазма становится квазинейтральной в том смысле, что $n_e \approx n_i \approx n_0$, однако

асимптотика (12) здесь неприменима. Она не может объяснить, каким образом был сформирован поток ионов со сверхзвуковой скоростью $v_0 \geq c_s$. Последовательная теория должна учитывать столкновения частиц и процессы ионизации нейтрального газа, которые в действительности формируют этот поток, тогда как в теории Бома плазма считается бесстолкновительной, что выражается в равенстве нулю правых частей уравнений (1а) и (1б).

Если в плазме ионы рождаются с малой скоростью, то они доускоряются электрическим полем до скорости, предписываемой критерием Бома, в *зоне ионизации*, где формируется положительный потенциал. Именно этот потенциал в зоне ионизации приводит к формированию потока ионов на границе зоны квазинейтральности перед входом в дебаевский слой при $\chi \approx 0$, тогда как в теории Бома этот поток считается заданным как граничное условие при $\xi \rightarrow -\infty$. Поскольку в соответствии с критерием Бома (17) скорость ионов v_0 на входе в дебаевский слой должна достигать как минимум скорости звука $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$, перепад потенциальной энергии $e\phi$ в зоне ионизации как минимум равен $m_i c_s^2/2 = T_e/2$, т.е. в зоне ионизации

$$0 < \chi < \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Следуя [25, 30, 32, 39], зону ионизации будем также называть *дебаевским предслоем* (presheath), хотя этим термином иногда обозначают "переходную область" между заряженным дебаевским слоем и квазинейтральной плазмой [33, 40]. Дебаевский предслой квазинейтрален. При зондовых измерениях предварительно ионизованной плазмы предслой вокруг зонда (который чаще всего имеет форму цилиндра) формируется кулоновскими столкновениями и его протяжённость определяется длиной свободного пробега ионов, однако в данной статье мы игнорируем кулоновские столкновения. Теория предслоя, изложенная в разделах 6 и 8, предсказывает, что его верхняя граница $\chi = \chi_{pl}$ в действительности

превышает значение 1/2 и приближается к 1. Величины, относящиеся к этой границе, будем помечать индексом p , имея в виду, что они характеризуют параметры квазинейтральной плазмы за пределами предслоя.

Наконец, область

$$\chi < -4 \tag{20}$$

с противоположной стороны дебаевского слоя, следуя работе [25], будем называть *униполярным слоем* (unipolar sheath); там приближённо действует закон Чайлда–Ленгмюра [26, 27]. Униполярный слой вместе с дебаевским слоем формирует *ленгмюровский слой* (Langmuir sheath), который Риман называет слоем Ленгмюра–Дебая (Langmuir–Debye sheath) [25, 28], а Либерман и Лихтенберг — слоем Чайлда (Child law sheath) [11].

Значение $\chi = \chi_p = -4$ на границе между дебаевским и униполярным слоем мы выбрали с тем расчётом, чтобы всюду в униполярном слое плотность электронов не превышала $\exp(\chi_p) \approx 2\%$ от n_0 . Оно используется для определения эмиссионной поверхности в некоторых численных кодах и близко к значению $\chi \approx -\ln \sqrt{m_i/m_e} \approx -3,8$, при котором ток ионов в водородной плазме сравнивается с током электронов на зонд с плавающим потенциалом. Всяду далее величины, относящиеся к границе между дебаевским и униполярным слоем, будем метить индексом p ; например, z_p обозначает координату z на этой границе, а ξ_p — значение безразмерной переменной $\xi = z/\lambda_D$.

Различные зоны плазменного эмиттера положительных ионов схематически изображены на рис. 3, где квазинейтральная зона ионизации примыкает непосредственно к дебаевскому слою. В разделе 9 мы обсудим пример, когда в зоне ионизации формируется второй дебаевский слой, отделённый от ленгмюровского слоя длинной квазинейтральной областью, в которой потенциал приблизительно постоянен и равен нулю.

Наконец, укажем границу $\chi = \chi_s$ применимости теории Бома при $\chi \rightarrow 0$. Относящиеся к ней величины будем помечать индексом s . Если считать, что $\chi_s \rightarrow 0$, то толщина дебаевского слоя $\delta z_D = \xi_p - \xi_s$, вычисленная путём сравнения точного решения (16) с асимптотикой (12), стремится к бесконечности, что порождает немалые трудности в теории, поскольку длина свободного пробега ионов конечна и пренебрегать столкновениями, как это сделано в теории Бома, в бесконечном слое нельзя.

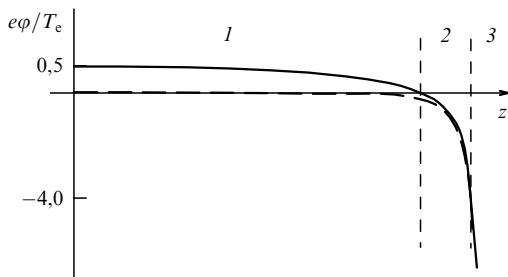


Рис. 3. Одномерная модель плазменного эмиттера: 1 — квазинейтральная зона ионизации (дебаевский предслой), $0 < e\phi/T_e < 1/2$; 2 — дебаевский слой, $-4 < e\phi/T_e < 0$, ширина дебаевского слоя обычно значительно меньше, чем показано на рисунке; 3 — униполярный слой, $e\phi/T_e < -4$; сплошная линия — профиль потенциала в теории двух масштабов, штриховая линия — решение Бома, оно неприменимо в области 1.

Разумное определение границы χ_s даёт теория двух масштабов, которая будет изложена в разделе 5. Она интерпретирует толщину дебаевского слоя $\delta z_D = z_p - z_s$ как размер, который велик по сравнению с длиной Дебая, $\delta z_D \gg \lambda_D$, однако $\delta z_D \rightarrow 0$, если $\lambda_D \rightarrow 0$. Дебаевский слой в этой теории можно считать бесстолкновительным, а в квазинейтральной зоне следует учитывать процессы ионизации нейтрального газа и кулоновских столкновений. В этом смысле $\chi = \chi_s$ есть граница между дебаевским слоем и квазинейтральным предслоем.

Напомним, что в начале этого раздела было объявлено, что такой границей является $\chi = 0$. Теперь мы видим, что это было только первое приближение. Точное значение параметра χ_s близко к нулю. Оно существенно при вычислении толщины дебаевского слоя, но не плотности плазмы или потоковой скорости ионов. Их изменение между точками плазмы с $\chi = 0$ и $\chi = \chi_s$ ничтожно. В этом смысле то первое приближение не было таким уж плохим.

4. Униполярный слой

Далее мы увидим, что критерий Бома (17) обычно выполняется в форме равенства [25, 30, 31, 37, 41, 42]. По крайней мере, к такому выводу приводит теория, изложенная в разделах 6 и 8, где предполагается, что размер зоны ионизации значительно превышает длину Дебая и поэтому зона ионизации является квазинейтральной. Следствием этого является универсальность дебаевского слоя на границе плазменного эмиттера ионов, т.е. из трёх профилей плотности ионов и электронов, изображённых на рис. 2а–в, реализуется только случай 2а. Следовательно, $v_0 = c_s$, а ток эмиссии $j_p = en_0v_0$ имеет строго определённое значение

$$j_p = en_0c_s. \tag{21}$$

В разделе 10 мы увидим, что в кинетической теории в этой формуле появляется числовой коэффициент, близкий к единице. Так или иначе ток эмиссии определяется процессами в зоне ионизации, например интенсивностью ввода нейтрального газа и мощностью высокочастотного (ВЧ) нагрева. Соответственно плотность плазмы $n_0 = j_p/ec_s$ на краю квазинейтральной зоны перед входом в дебаевский слой однозначно определяется величиной тока эмиссии j_p . В теории же Бома, изложенной в разделе 4, наоборот, плотность плазмы n_0 считается свободным параметром.

Если большое отрицательное напряжение $|U| \gg T_e/e$ приложено к электроду, который служит коллектором ионов, то за дебаевским слоем образуется свободный от электронов *униполярный ионный слой* (unipolar ion sheath). В бесстолкновительном случае его толщина определяется из уравнения (15) с подстановками $z = d$ и $\phi = U$:

$$j_{3/2} = \frac{\sqrt{2e}}{9\pi\sqrt{m_i}} \frac{|U|^{3/2}}{d^2}. \tag{22}$$

В таком виде это соотношение известно как закон Чайлда–Ленгмюра [26, 27] или закон "трёх вторых", который связывает величину тока в плоском диоде, в котором эмиссия ограничена пространственным зарядом, с заданной величиной зазора d между электродами и заданной величиной приложенного напряжения U . Применительно к плазменному эмиттеру смысл соотно-

нения (22) совершенно иной. Теперь ток эмиссии $j_p = en_0c_s$ задан процессами внутри плазмы, а меняется зазор d между поверхностью эмиттера и коллектором ионов: при заданном напряжении U плазма заполняет всё доступное пространство, чтобы до коллектора остался зазор нужного размера. Комбинируя формулы (21) и (22) при $j_p = j_{3/2}$, получим:

$$d = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2e|U|}{T_e} \right)^{3/4} \lambda_D. \quad (23)$$

При большом отношении $d/\lambda_D \gg 1$ возникают основания для моделирования плазменного эмиттера как эмиссионной поверхности, на которой плотность электронов скачком обращается в нуль [43, 44]. Если толщина дебаевского слоя (порядка нескольких λ_D) мала по сравнению с шириной униполярного слоя d , то плотность электронов, казалось бы, можно представить в виде ступеньки. Считая нулём электрическое поле и начальную скорость ионов на краю этой ступеньки при $z = 0$, получаем закон Чайлда–Ленгмюра (22). Однако закон Чайлда–Ленгмюра даёт лишь первое, очень грубое представление об униполярном слое.

Более точное описание предложено Риманом и Цендиным [25]. Повторяя их рассуждения, начнём с уравнения (9), подставив туда $u_0 = 1$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 = \exp(\chi) - 2 + (1 - 2\chi)^{1/2}. \quad (24)$$

Пренебрегая плотностью электронов, т.е. отбрасывая слагаемое $\exp(\chi)$, которое мало при $\chi \rightarrow -\infty$, получаем уравнение

$$\frac{d\chi}{d\xi} = -\sqrt{2(1 - 2\chi)^{1/2} - 4}. \quad (25)$$

Его удаётся проинтегрировать, представив потенциал в униполярном слое в неявном виде:

$$\xi - \xi_p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sqrt{1 - 2\chi} - 2} (\sqrt{1 - 2\chi} + 4). \quad (26)$$

Формула (26) верно учитывает как начальную скорость ионов, так и интегральный вклад электронов в пространственный заряд. Ошибка из-за отбрасывания вклада тех электронов, которые есть в униполярном слое, экспоненциально мала. Предел Чайлда–Ленгмюра

$$\xi - \xi_p = \frac{\sqrt{2}}{3} (-2\chi)^{3/4} \quad (27)$$

получается из (26) путём отбрасывания слагаемых порядка $\chi^{-1/2}$ по сравнению с единицей.

Точность униполярного приближения демонстрирует рис. 4, где график (26) сравнивается как с точным численным решением уравнения (24), так и с формулой Чайлда–Ленгмюра (27). Униполярный потенциал заканчивается при $\chi = -3/2$, так как при $\chi > -3/2$ выражение в правой части (26) становится комплексным. При $\chi < -2$ в масштабе рисунка он практически неотличим от точного решения. В работе [25] было предложено принять в качестве границы между дебаевским и униполярным слоем значение $\chi = -2,303$, при котором $n_e = 0,1n_0$. Мы же предпочитаем устанавливать границу между дебаевским и униполярным слоем при $\chi = \chi_p = -4$, что соот-

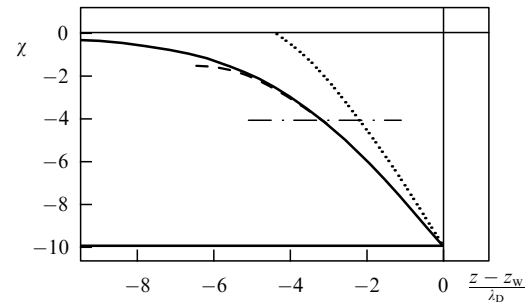


Рис. 4. Профиль потенциала в ленгмюровском слое: сплошная линия — точное решение уравнения (24), штриховая линия — униполярное приближение (26), пунктирная линия — формула Чайлда–Ленгмюра (27); для всех графиков выбрано одинаковое значение потенциала на стенке $\chi_w = -10$. Горизонтальная штрихпунктирная линия изображает условную границу $\chi = -4$ между униполярным и дебаевским слоями.

ветствует $n_e \approx 0,018n_0$. На рисунке 4 она отмечена горизонтальной штрихпунктирной линией.

Интересно, что выражение (25), переписанное в размерных единицах при $\chi = \chi_p = -4$, принимает вид

$$\frac{E^2}{8\pi} = n_0 T_e. \quad (28)$$

В численном коде POISSON-2, который описан в разделе 11.3, равенство (28) используется в качестве граничного условия на эмиссионной поверхности плазменного эмиттера. Оно означает, что давление электронов $n_0 T_e$ и динамический напор ионов $n_i m_i v_i^2 = n_0 m_i c_s^2 = n_0 T_e$ с внутренней стороны дебаевского слоя (где $E \approx 0$) уравновешиваются суммой подросшего (за счёт перепада потенциала от $\varphi = 0$ до $\varphi = -4T_e/e$) динамического напора ионов $n_i m_i v_i^2 = 3n_0 T_e$ (см. формулы (3) и (4)) и отрицательного давления (натяжения) электрического поля $-E^2/8\pi$ с внешней стороны дебаевского слоя (где $n_e \approx 0$).

5. Теория двух масштабов

Основатели газовой электроники с момента зарождения этой науки различали квазинейтральную плазму и тонкий приэлектродный (ленгмюровский) слой, где возникает большая объёмная плотность электрического заряда [15–19, 37, 45, 46]. При большом отрицательном потенциале электрода приэлектродный слой в свою очередь может быть условно разделён на дебаевский слой и униполярный слой, описанный в разделе 4. Характерная толщина дебаевского слоя обычно оценивается в несколько длин Дебая λ_D . В пределах дебаевского слоя плотность электронов падает на порядки величины, тогда как в униполярном слое она уже мала по сравнению с плотностью ионов. Естественно поэтому считать, что "край" квазинейтральной плазмы, размер которой $L \gg \lambda_D$, привязан к дебаевскому слою. На интуитивном уровне этот факт был сформулирован как Бомом [7], так и задолго до него Ленгмюром [15–19]. При достаточно малом отношении

$$\varepsilon = \frac{\lambda_D}{L} \quad (29)$$

возможно строгое математическое определение границы между дебаевским слоем и квазинейтральной плазмой. Соответствующая асимптотическая (при $\varepsilon \rightarrow 0$) теория

двух масштабов (two-scale theory) была развита в начале 1960-х годов Карузо и Кавальере [29]. В доступном виде она изложена в работах Римана [28, 30–33] и проверена в численных расчётах Франклина и Снелла [47, 48] при различных предположениях относительно длины свободного пробега.

Приступая к её изложению, добавим источник ионов S_i в гидродинамические уравнения (1), использованные при выводе критерия Бома, с самого начала приняв, что $T_i = 0$:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right), \quad (30a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} n_i v_i = S_i, \quad (30б)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} m_i n_i v_i^2 = -en_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (30в)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (30г)$$

Не ограничивая общности изложения, по-прежнему будем считать, что нуль потенциала ($\varphi = 0$) и нормировочная плотность n_0 относятся к "началу" дебаевского слоя, где $n_e = n_0$. Записывая уравнения (30), мы предположили, что источник ионов инжектирует в плазму ионы с нулевой начальной скоростью, поэтому уравнение непрерывности (30б) содержит слагаемое с $S_i(z)$, а уравнение движения (30в) — нет. В теоретических построениях обычно предполагают, что интенсивность источника ионов S_i либо не зависит от плотности электронов n_e (как в случае ионизации ВЧ-полем), либо пропорциональна n_e (ионизация электронным ударом) или n_e^2 (ионизация электронным ударом из возбуждённого состояния). При этом $S_i = S_q n_e^q$, где S_q — константа, а $q = 0, 1$ или 2 .

Уравнения (30) содержат два "естественных" масштаба: длину Дебая $\lambda_D = (T_e/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ и длину ионизации $L = c_s n_0 / S_q n_0^q$. Вводя безразмерные величины

$$\chi = \frac{e\varphi}{T_e}, \quad u = \frac{v_i}{c_s}, \quad n = \frac{n_i}{n_0},$$

приводим уравнения (30) к виду

$$\frac{d}{d\xi} nu = \varepsilon \exp(q\chi), \quad (31a)$$

$$\frac{d}{d\xi} nu^2 = -n \frac{d\chi}{d\xi}, \quad (31б)$$

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = \exp(\chi) - n, \quad (31в)$$

если координату z нормировать на длину Дебая,

$$\xi = \frac{z}{\lambda_D}, \quad (32)$$

или к альтернативной форме

$$\frac{d}{ds} nu = \exp(q\chi), \quad (33a)$$

$$\frac{d}{ds} nu^2 = -n \frac{d\chi}{ds}, \quad (33б)$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \chi}{ds^2} = \exp(\chi) - n, \quad (33в)$$

если ввести другую безразмерную координату

$$s = \frac{z}{L}. \quad (34)$$

Уравнения (31) и (33) эквивалентны при конечном $\varepsilon > 0$, но имеют разный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. В *приближении слоя* (the sheath representation), которому соответствует система уравнений (31), ε входит множителем перед источником ионов в уравнение (31а). Отбрасывание этого члена в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ возвращает нас к теории Бома (см. раздел 2). В *плазменном приближении* (the plasma representation) с системой уравнений (33) ε входит в уравнение Пуассона (33в). В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ оно переходит в условие квазинейтральности, означающее приближённое равенство плотности ионов и электронов. Соответствующее решение обсуждается в разделе 6.

6. Гидродинамическая модель ионизации

В этом разделе мы построим решение уравнений

$$\frac{d}{ds} nu = \exp(q\chi), \quad (35a)$$

$$\frac{d}{ds} nu^2 = -n \frac{d\chi}{ds}, \quad (35б)$$

$$n = \exp(\chi), \quad (35в)$$

которые получаются из уравнений (33) в пределе $\varepsilon = 0$. Проследив вывод этих уравнений в разделе 5, следует обратить внимание на тот факт, что скорость ионов в момент инжекции в плазму предполагалась равной нулю. Таким образом, ионы, инжектированные в области плазмы с разным потенциалом, изначально приобретают разную энергию, поэтому их функция распределения не может характеризоваться нулевой температурой. Иными словами, модель плазмы с холодными ионами, которая задана уравнениями (35), не вполне самосогласованна. Тем не менее она представляет определённый методический интерес, и мы используем её в данном разделе. Попытка учесть конечную температуру ионов в гидродинамическом приближении предпринята в работах [39, 49, 50]. Более адекватная кинетическая модель обсуждается в разделе 8.

Напомним, что разные значения параметра q в уравнениях (33) отвечают различным механизмам ионизации нейтрального газа, который напускают в систему для подпитки тока эмиссии. При ионизации первичными электронами или ВЧ-полем скорость ионизации не зависит от плотности электронов и $q = 0$. Если доминирует ионизация электронным ударом, то скорость ионизации пропорциональна n_e^1 и $q = 1$. Наконец, в случае $q = 2$ имеем ионизацию из возбуждённого состояния, когда число возбуждённых атомов пропорционально плотности электронов.

Систему уравнений (35) удаётся решить для любого значения q . Решение даёт зависимость координаты s от скорости u или потенциала χ в виде комбинации гипергеометрических функций. При целых значениях q они выражаются через полиномы и элементарные функции. Для $q = 0, 1, 2$ решение найдено в работе [51].

Комбинируя уравнения (35б) и (35в) при дополнительном условии

$$u = 1 \quad \text{при} \quad \chi = 0, \quad (36)$$

которое просто фиксирует потенциал в том месте, где скорость течения достигает скорости звука, для начала заметим, что

$$\chi = \ln \frac{2}{1+u^2} \quad (37)$$

при любом значении параметра q . Подставляя это выражение в уравнение (35а) при дополнительном условии

$$u = 0 \text{ при } s = 0, \quad (38)$$

которое привязывает начало координат $s = 0$ к тому месту, где $u = 0$, находим, что

$$s = \frac{2^{1-q}u}{q-1} \left[q {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1-q; \frac{3}{2}; -u^2 \right) - (1+u^2)^{q-1} \right], \quad (39)$$

где ${}_2F_1$ обозначает гипергеометрическую функцию. В интересующих нас случаях

$$s = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{при } q = 0, \quad (40a)$$

$$s = 2 \arctan(u) - u \quad \text{при } q = 1, \quad (40б)$$

$$s = \frac{1}{6} (3u - u^3) \quad \text{при } q = 2. \quad (40в)$$

Графики решений приведены на рис. 5.

При $q = 0$ зависимости потенциала и скорости от координаты s удаётся записать в явном виде:

$$\chi = -\ln \left(\frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s^2} \right), \quad u = \frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s}. \quad (41)$$

В точке $s \rightarrow s_p = 1$, где потоковая скорость приближается к скорости звука, т.е. $u = 1$, электрическое поле $d\chi/ds$ и пространственный заряд $\varepsilon^2 d^2\chi/ds^2$ обращаются в бесконечность, причём

$$\frac{d\chi}{ds} \approx -\frac{1}{\sqrt{2(s_p-s)}}. \quad (42)$$

Эта сингулярность соответствует дебаевскому слою в точном решении, поэтому вблизи сингулярности асимптотическое решение (41) теряет смысл. Координату границы s_s между квазинейтральной зоной ионизации ($s < s_s$) и дебаевским слоем ($s > s_s$) можно определить, следуя методу Римана [28]. На этой границе отброшенные члены в модели квазинейтральной плазмы (а имен-

но, пространственный заряд в уравнении (33в))

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\chi}{ds^2} \sim \frac{\varepsilon^2}{(s_p - s_s)^{3/2}}$$

и отброшенные члены в теории Боме (а именно, поправка к плотности ионов за счёт работы источника ионов $\varepsilon \exp(q\chi)$ на длине $\delta\zeta_D = (s_p - s_s)/\varepsilon$ в уравнении (31а))

$$\delta n \sim \varepsilon \exp(q\chi) \frac{\delta\zeta_D}{u} \sim \varepsilon \delta\zeta_D$$

дают равный вклад.

Из равенства $\varepsilon^2/(\delta s_D)^{3/2} \sim \delta s_D$, где $\delta s_D = s_p - s_s$, получаем

$$\delta s_D \sim \varepsilon^{4/5}, \quad \delta\zeta_D \sim \varepsilon^{-1/5}. \quad (43)$$

В размерных единицах

$$\delta z_D = \lambda_D \delta\zeta_D = L \delta s_D \sim \lambda_D^{4/5} L^{1/5}.$$

Такая же оценка была получена в работах [52–55]. Отсюда видно, что при $\varepsilon = \lambda_D/L \rightarrow 0$ в масштабе (34) толщина дебаевского слоя δs_D оказывается нулевой, тогда как в масштабе (32) та же, по сути, толщина $\delta\zeta_D$ будет бесконечной. Непонимание этого фундаментального факта приводит к различного рода парадоксам, которые иногда вызывают жаркие дискуссии [28, 56–60].

Электрическое поле на расстоянии δz_D от сингулярности

$$E_s \sim \frac{T_e}{e \lambda_D^{2/5} L^{3/5}} \quad (44)$$

мало по сравнению с электрическим полем $E \sim T_e/e\lambda_D$ в дебаевском слое, а потенциал

$$\varphi_s \sim -\frac{T_e}{e} \frac{\lambda_D^{2/5}}{L^{2/5}} \quad (45)$$

мал по сравнению с потенциалом $\varphi \sim -T_e/e$ в дебаевском слое.

В случае $q = 1$ решение не удаётся записать в явном виде, но оно также сингулярно при $u \rightarrow 1$ в том смысле, что производная $d\chi/ds$ обращается в бесконечность, как и в случае $q = 0$. Однако координата сингулярности $s_p = \pi/2 - 1$ теперь численно не равна 1.

В случае $q = 2$ уравнение (40в) удаётся разрешить относительно u и найти зависимость $u(s)$ в явном виде, но получающееся выражение громоздко и мы его не

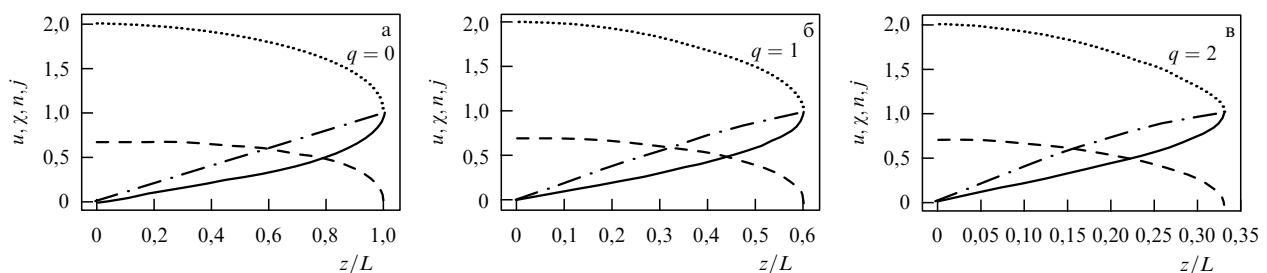


Рис. 5. Профили скорости u (сплошная линия), потенциала χ (штриховая линия), плотности n (пунктирная линия) и потока ионов $j = nu$ (штрихпунктирная линия) при разных значениях параметра q (указаны на рисунках).

приводим. Отметим только, что сингулярность расположена в точке $s_p = 1/3$.

Сравнение графиков на рис. 5а – в показывает значительное сходство результатов расчётов для разных моделей ионизации. По существу, графики потенциала, скорости ионов, плотности плазмы и плотности тока очень похожи для разных значений q и отличаются только численным значением координаты сингулярности s_p . Во всех трёх рассмотренных случаях плотность плазмы n от стенки (где $u = 0$) до сингулярности (где $u = 1$) убывает в два раза, а плотность потока ионов ni монотонно нарастает от 0 до 1 вследствие ионизации. Ускорение ионов в зоне ионизации происходит за счёт падения потенциала от

$$\chi_{pl} = \ln 2 = 0,693 \quad (46)$$

до 0, при этом плотность плазмы уменьшается от $n_{pl} = 2n_0$ до n_0 . Существенно, что во всех трёх примерах критерий Бома выполняется в маргинальной форме, т.е. в виде равенства

$$v_0 = c_s \quad (47)$$

(напомним, что мы определили v_0 в разделе 2 как значение v_i при $\varphi = 0$). Порядок сингулярности также одинаков во всех трёх случаях, поэтому оценка величины электрического поля (44) и потенциала (45) на границе сшивки полученных решений с дебаевским слоем применима ко всем рассмотренным примерам.

Теперь мы можем "подправить" определение условной границы между квазинейтральной плазмой и дебаевским слоем, которое было дано в разделе 3. Неравенствами (18) и (19) этой границе приписано значение $\chi = 0$. Если же эту границу понимать как воображаемую поверхность раздела между квазинейтральной зоной ионизации и бесстолкновительным заряженным слоем, то следует признать, что на этой границе $\chi = \chi_s = e\varphi_s/T_e \sim -(\lambda_D/L)^{2/5}$. Однако различие между $\chi = 0$ и $\chi = \chi_s$ существенно только для вычисления толщины дебаевского слоя, тогда как различие между плотностью электронов при $\chi = 0$ и плотностью электронов при $\chi = \chi_s$ совершенно ничтожно. То же самое верно в отношении величины потоковой скорости ионов и плотности ионного тока. Кроме того, мы увидим, что χ_s имеет другое значение в кинетической модели зоны ионизации, которая описана в разделе 8. Поэтому в первом приближении можно считать, что $\chi_s \approx 0$, как это сделано в разделе 3.

7. Обобщённый критерий Бома

Критерий Бома в разделе 2 был сформулирован для простейшей и не вполне естественной модели холодных ионов, когда их распределение описывается лишь двумя параметрами: плотностью n_i и потоковой скоростью v_i . Обобщённый критерий Бома записывается для произвольной функции распределения ионов $f(v_z)$ в виде

$$\langle v_z^{-2} \rangle^{-1/2} \geq \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}, \quad (48)$$

где

$$\langle v_z^{-2} \rangle = \frac{1}{n_i} \int_0^\infty \frac{f(v_z)}{v_z^2} dv_z.$$

Впервые он был получен Харрисоном и Томпсоном [61], но использованный ими метод вывода не был признан убедительным. С разной степенью строгости обобщённый критерий Бома обсуждался в работах [11, 30, 35, 42, 62, 63]. В форме равенства

$$\langle v_z^{-2} \rangle^{-1/2} = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \quad (49)$$

он цитируется Алленом [64]. В замечательной статье [65] Аллен обсуждает физический смысл этого условия. Здесь показано, что обобщённый критерий Бома в форме (49) получается из закона дисперсии ионно-звуковых волн. При отрицательной частоте $\omega = k(c_s - v_0)$ волны, которая распространяется назад против потока ионов, т.е. при $v_0 > c_s$, возмущение сносится течением вперёд. В этом случае коллектор тока не может влиять на процессы в источнике ионов.

Тот факт, что критерий Бома почти всегда, за исключением немногих искусственных моделей, выполняется в форме равенства, детально обсуждается Риманом [30]. Он приводит несколько аргументов в пользу такой трактовки критерия Бома. Один из них по сути повторяет рассуждения Аллена [65], которое в той или иной форме также воспроизводится в работах [63, 66–71].

Критерий Бома в системе с несколькими сортами ионов обсуждается в работах [72, 73].

8. Плазменное уравнение

Переходя к кинетическому описанию, рассмотрим слой плазмы, окружённый двумя параллельными поглощающими стенками при $z = \pm L$. Система считается симметричной относительно срединной плоскости $z = 0$, поэтому мы ограничимся областью $z \geq 0$. Плазма состоит из электронов и одного сорта однозарядных положительных ионов. Как и в теории Бома, распределение электронов считаем больцмановским с заданной температурой T_e . Ионы возникают в результате ионизации холодного однородного фона нейтрального газа. Следовательно, ионы рождаются с нулевой начальной скоростью и затем движутся исключительно в направлении электрического поля. Функцию распределения ионов $F(z, v_z)$ найдём из кинетического уравнения

$$v_z \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{e}{m_i} \frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial F}{\partial v_z} = S_i \delta(v_z), \quad (50)$$

где S_i обозначает источник ионов, как и в разделах 5 и 6. Для удобства введём безразмерные величины

$$\epsilon = \frac{m_i v_z^2}{2T_e} + \frac{e\varphi}{T_e}, \quad \chi = \frac{e\varphi}{T_e}, \quad s(\chi) = \frac{z}{L},$$

$$\sigma(\chi) = \frac{LS_i}{n_0 c_s}, \quad n = \frac{n_i}{n_0},$$

где L по-прежнему определяет характерную длину ионизации (но её величина будет уточнена ниже), n_0 — по-прежнему плотность электронов при $\chi = 0$, а $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ — по-прежнему скорость ионного звука. Как подчеркнуто обозначением $s = s(\chi)$, мы рассматриваем безразмерный потенциал χ , а не безразмерную координату s в качестве независимой переменной. Соответственно этому введём безразмерную функцию распреде-

ления

$$f(\epsilon, \chi) = \frac{c_s}{n_0} F(z, v_z) \quad (51)$$

как функцию безразмерной энергии ϵ и безразмерного потенциала χ . В этих обозначениях кинетическое уравнение (50) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = \sigma(\chi) s'(\chi) \delta(\epsilon - \chi), \quad (52)$$

где $s' = ds/d\chi$ — величина, обратная напряжённости электрического поля. Интегрируя уравнение (52), предположим, что потенциал $\chi(s)$ есть монотонно убывающая функция, подобно изображённой штриховой линией на рис. 5, так что нуль аргумента дельта-функции $\delta(\epsilon - \chi)$ в правой части при заданной энергии ϵ может найтись не более чем в одной точке. Поскольку правая часть уравнения (52) равна нулю всюду, за исключением точки $\chi = \epsilon$, функция распределения $f(\epsilon, \chi)$ на самом деле не зависит от своего второго аргумента, за исключением этой точки, где функция $f(\epsilon)$ имеет разрыв. Следовательно,

$$f(\epsilon, \chi) = \begin{cases} f_-(\epsilon) & \text{при } \chi < \epsilon, \\ f_+(\epsilon) & \text{при } \chi > \epsilon \end{cases} \quad (53)$$

и

$$f_+(\chi) - f_-(\chi) = \sigma(\chi) s'(\chi).$$

В монотонно убывающем потенциале $\chi(s)$ точка с потенциалом χ недоступна для ионов с энергией $\epsilon < \chi$. Следовательно,

$$f_+(\epsilon) = 0, \quad f_-(\epsilon) = -\sigma(\epsilon) s'(\epsilon), \quad (54)$$

где $s' < 0$. В таком случае плотность ионов равна

$$n = \int_{\chi}^{\chi_{\text{pl}}} \frac{f_-(\epsilon)}{\sqrt{2(\epsilon - \chi)}} d\epsilon = - \int_{\chi}^{\chi_{\text{pl}}} \frac{\sigma(\epsilon) s'(\epsilon)}{\sqrt{2(\epsilon - \chi)}} d\epsilon, \quad (55)$$

где χ_{pl} есть максимальная величина потенциала в плазме (она же равна потенциалу квазинейтральной плазмы вне области, где действуют источники ионизации). Поскольку в безразмерных переменных плотность электронов равна $\exp(\chi)$, уравнение Пуассона для самосогласованного потенциала χ принимает вид

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \chi}{ds^2} = \exp(\chi) - n = \exp(\chi) + \int_{\chi}^{\chi_{\text{pl}}} \frac{\sigma(\epsilon) s'(\epsilon)}{\sqrt{2(\epsilon - \chi)}} d\epsilon. \quad (56)$$

В определение безразмерной скорости ионизации $\sigma = LS_1/n_0 c_s$ входят неизвестные пока толщина зоны ионизации L и плотность электронов n_0 в том месте, где $\chi = 0$. Полагая, как и в разделе 6, что $S_1 = S_q n_e^q$ и $L = n_0 c_s / S_q n_0^q$, имеем

$$\sigma(\chi) = \exp(q\chi) \quad (57)$$

для моделей ионизации с разными значениями параметра q . Окончательное определение L и n_0 , таким образом, откладывается до момента, когда будет вычислена координата s_p дебаевского слоя.

В плазменном приближении слагаемое с ϵ^2 в уравнении Пуассона (56) опускают, переходя к "плазменному

уравнению" (the plasma equation), которое, по сути, является условием квазинейтральности:

$$\int_{\chi}^{\chi_{\text{pl}}} \frac{\sigma(\epsilon) s'(\epsilon)}{\sqrt{2(\epsilon - \chi)}} d\epsilon = - \exp(\chi). \quad (58)$$

Плазменное уравнение принадлежит к типу интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Впервые его получили и исследовали численно Тонкс и Ленгмюр [19]. Харрисон и Томпсон решили это уравнение при помощи преобразования Абеля [61]:

$$\sigma(\chi) s'(\chi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{d}{d\chi} \int_{\chi}^{\chi_{\text{pl}}} \frac{\exp(\eta)}{\sqrt{\eta - \chi}} d\eta. \quad (59)$$

Вычислив интеграл, получаем

$$\sigma(\chi) s'(\chi) = - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\exp(\chi_{\text{pl}})}{\sqrt{\chi_{\text{pl}} - \chi}} - \sqrt{\pi} \exp(\chi) \operatorname{erfi}(\sqrt{\chi_{\text{pl}} - \chi}) \right], \quad (60)$$

где

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(t^2) dt,$$

а скорость ионизации $\sigma(\chi)$ определена в уравнении (57). Интересно, что функция распределения ионов

$$f(\epsilon, \chi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\exp(\chi_{\text{pl}})}{\sqrt{\chi_{\text{pl}} - \epsilon}} - \sqrt{\pi} \exp(\epsilon) \operatorname{erfi}(\sqrt{\chi_{\text{pl}} - \epsilon}) \right], & \chi < \epsilon < \chi_{\text{pl}} \\ 0, & \epsilon < \chi \text{ или } \chi_{\text{pl}} < \epsilon \end{cases} \quad (61)$$

не зависит от $\sigma(\chi)$.

Согласно (60), производная $s'(\chi)$ начинается с сингулярности при $\chi \rightarrow \chi_{\text{pl}}$, монотонно уменьшается (по абсолютной величине) при $\chi < \chi_{\text{pl}}$ и обращается в нуль при $\chi = \chi_{\text{pl}} - 0,854$. В точке сингулярности при $\chi = \chi_{\text{pl}}$ электрическое поле обращается в нуль, поэтому потенциал $\chi(s)$ имеет там максимум. А вот нуль производной $s'(\chi)$ представляет сингулярность в электрическом поле, которая, как мы видели в разделе 6, соответствует дебаевскому слою. Корень уравнения $s'(\chi) = 0$ не зависит от вида функции $\sigma(\chi)$, поэтому он универсален для всех моделей ионизации. Следуя соглашению, принятому в разделе 6, вновь условимся, что потенциал на входе в дебаевский слой близок к нулю. Тогда корень уравнения $s'(0) = 0$ даёт величину максимума потенциала

$$\chi_{\text{pl}} = 0,854. \quad (62)$$

Плотность плазмы в максимуме $n_{\text{pl}} = \exp(\chi_{\text{pl}}) n_0$ в 2,349 раза больше, чем плотность n_0 на входе в дебаевский слой. Заметим, что величина (62) на 23% больше, чем аналогичное по смыслу значение (46) в разделе 6. И тем более она превышает значение $\chi_{\text{pl}} = 1/2$, которое чаще всего используют при вычислении перепада плотности в пределах дебаевского предслоя [11–13, 24, 74].

Далее будем считать, что максимум потенциала расположен в центре плазмы при $s = 0$. Профили потенциала, найденные в результате интегрирования уравнения (60) для трёх значений параметра q , показаны на

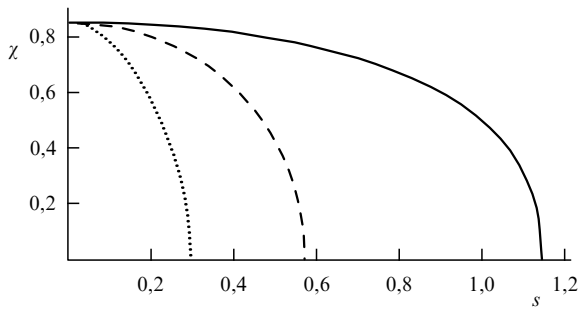


Рис. 6. Профиль потенциала в зоне ионизации в кинетической модели "плазменного уравнения" при $q = 0$ (сплошная линия), $q = 1$ (штриховая линия) и $q = 2$ (пунктирная линия).

рис. 6. Результат интегрирования можно также записать в неявной форме:

$$s(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(\chi) \operatorname{erfi}(\sqrt{\chi_{pl} - \chi})$$

при $q = 0$,

$$s(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(\frac{1}{2} + \chi - \chi_{pl} \right) \operatorname{erfi}(\sqrt{\chi_{pl} - \chi}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(\chi_{pl} - \chi) \sqrt{\chi_{pl} - \chi} \right]$$

при $q = 1$ и

$$s(\chi) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{p-1} \left[\sqrt{q} \exp[-(q-1)\chi_{pl}] \operatorname{erfi}(\sqrt{q(\chi_{pl}-\chi)}) - \exp[-(q-1)\chi] \operatorname{erfi}(\sqrt{\chi_{pl}-\chi}) \right]$$

в общем случае. Вблизи сингулярности

$$\chi = \frac{\sqrt{s_p - s}}{0,579}, \tag{63}$$

где $s_p = 1,144$ при $q = 0$, $s_p = 0,572$ при $q = 1$ и $s_p = 0,296$ при $q = 2$. Сравнение с результатами расчёта в разделе 6 показывает, что координаты сингулярности s_p в кинетической и гидродинамической моделях приблизительно совпадают.

Помимо уже упоминавшихся работ [19, 61], решение плазменного уравнения (56) было исследовано в работах [4, 30, 32, 33, 75].

Сингулярность при $\chi \rightarrow 0$ сглаживается, если вернуться к уравнению Пуассона (56). Тогда производная $s'(\chi)$ нигде не обращается в нуль (а электрическое поле нигде не обращается в бесконечность). Поскольку, согласно приближённому выражению (63), $s'(\chi) \sim -\chi$ при $\chi \rightarrow 0$, отклонение от него приведёт к тому, что разность $\exp(\chi) - n$ в правой части уравнения при $\chi \rightarrow 0$ будет величиной порядка $\chi^{3/2}$, а не нулём. Поэтому квазинейтральное приближение нарушается там, где

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \chi}{ds^2} \sim \chi^{3/2}.$$

Подставляя сюда выражение (63), нетрудно оценить толщину дебаевского слоя, а затем и потенциал в точке

сшивки квазинейтрального решения с точным:

$$\delta s_D = s_p - s_s \sim \varepsilon^{8/9}, \quad \delta \xi_D = \xi_p - \xi_s \sim \varepsilon^{-1/9}, \quad \chi_s \sim \varepsilon^{4/9}.$$

Здесь, как и в разделе 6, индекс s помечает величины, относящиеся к этой точке. В размерных величинах

$$\delta z_D \sim \lambda_D^{8/9} L^{1/9}, \quad \varphi_s \sim -\frac{T_e \lambda_D^{4/9}}{e L^{4/9}}, \quad E_s \sim \frac{T_e}{e \lambda_D^{4/9} L^{5/9}}, \tag{64}$$

что несколько отличается от аналогичных величин (43)–(45), вычисленных в гидродинамическом приближении.

Подробнее область между зоной ионизации и дебаевским слоем исследована в работах [32, 76].

Для того чтобы описать дебаевский слой количественно, задачу надо переформулировать в дебаевском масштабе, заменив $s = z/L$ на $\xi = z/\lambda_D = s/\varepsilon$. В этом масштабе уравнение Пуассона

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = \exp(\chi) - n \tag{65}$$

не содержит малый параметр ε , поэтому пространственным зарядом нельзя пренебрегать. С другой стороны, дебаевский слой является бесстолкновительным. Следовательно, функция распределения ионов в этом слое (при $\chi < 0$) известна в виде предела $f(\varepsilon, 0)$ функции распределения (61) на краю квазинейтральной плазмы (при $\chi \rightarrow 0$), причём $f(\varepsilon, 0) = 0$ при $\varepsilon < 0$. Таким образом, плотность ионов в дебаевском слое равна

$$n(\chi) = - \int_0^{\chi_{pl}} \frac{\sigma(\varepsilon) s'(\varepsilon)}{\sqrt{2(\varepsilon - \chi)}} d\varepsilon = \exp(\chi) - \int_0^{\chi} \frac{\sigma(\varepsilon) s'(\varepsilon)}{\sqrt{2(\varepsilon - \chi)}} d\varepsilon. \tag{66}$$

Подстановка (66) в уравнение (65) в пределе $\chi \rightarrow 0-$ даёт

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = -0,947(-\chi)^{3/2},$$

откуда получаем асимптотику

$$\chi = - \left(\frac{4,59}{\xi_p - \xi} \right)^4 \tag{67}$$

при $\xi \rightarrow -\infty$, которая качественно отличается от асимптотики (12), найденной в гидродинамическом приближении.

Подстановка функции распределения $f(\varepsilon, 0)$ в обобщённый критерий Бома (48) приводит к условию

$$\int_0^{\chi_{pl}} \frac{\sigma(\eta) |s'(\eta)|}{[2(\chi - \eta)]^{3/2}} d\eta \leq 1. \tag{68}$$

Можно показать, что оно выполняется в форме равенства [30, 61]. При этом потоковая скорость ионов на входе в дебаевский слой немного превышает скорость ионного звука:

$$v_0 = \int v_z F dv_z = c_s \int_0^{\chi_{pl}} \sigma(\eta) |s'(\eta)| d\eta = 1,144 c_s. \tag{69}$$

Вероятно, этот факт связан с тем, что, как указано выше, перепад потенциала в зоне ионизации на 23% больше, чем предсказывает теория Бома.

9. Локализованный источник ионов

Избавимся от предположения, что ионы рождаются с нулевой скоростью. Интересный и точно решаемый пример локализованного в пространстве источника ионов, который инжектирует в плазму ионы с конечной начальной скоростью, рассмотрен Коэном и Рютовым [35]. Он приблизительно соответствует тому, как пользователи должны задавать источник ионов для компьютерных программ PBGUNS [77] и POISSON-2 [78, 79], и в определённом смысле опровергает утверждение, что критерий Бома почти всегда выполняется в форме равенства $v_0 = c_s$. В примере Коэна и Рютова возникает сверхзвуковой поток ионов со скоростью $v_0 > c_s$, однако сделано не вполне естественное предположение, что размер зоны ионизации меньше дебаевской длины, $L < \lambda_D$. Напротив, ранее мы всегда предполагали, что $L \gg \lambda_D$.

Коэн и Рютов рассматривали одномерную плазму, помещённую между двумя плоскими коллекторами ионов. Локализованный источник ионов находился в плоскости симметрии задачи $z = 0$ посередине между поглощающими стенками. Он инжектировал ионы с конечной начальной скоростью v_{in} симметрично в обе стороны. Вследствие симметрии электрическое поле в плоскости $z = 0$ должно равняться нулю, $E(0) = 0$.

Если начальная скорость ионов v_{in} равна скорости звука c_s , то потенциал $\varphi_{in} = \varphi(0)$ в плоскости инжекции устанавливался на уровне потенциала квазинейтральной плазмы $\varphi_s \approx 0$ на входе в дебаевский слой, поэтому скорость ионов v_0 в квазинейтральной области плазмы также равнялась c_s и критерий Бома выполнялся в виде равенства $v_0 = c_s$. При $v_{in} < c_s$ потенциал φ_{in} в точке инжекции оказывался больше φ_s , и вблизи источника возникал дебаевский слой, где ионы ускорялись до сверхзвуковой скорости $v_0 > c_s$. В пределе $v_{in} \rightarrow 0$ скорость ионов в квазинейтральной части плазмы приближалась к значению $v_0 = 1,585 c_s$, которое в работе Дубинова и Сенилова [80] было объявлено максимальной скоростью истечения ионов из плазменного эмиттера. Однако мы покажем, что существуют решения с потоковой скоростью $v_0 > 1,585 c_s$, хотя для них не выполняется граничное условие $E(0) = 0$.

Переходя к вычислениям, рассмотрим слой плазмы между двумя параллельными поглощающими стенками при заданном источнике ионов:

$$S_i(z, v_z) = S_0 \delta(z) [\delta(v_z - v_{in}) + \delta(v_z + v_{in})]. \quad (70)$$

Предполагается, что функция $S_i(z, v_z)$ чётная по обоим аргументам и достаточно быстро убывает вне области источника, так что зависимость от координаты

z можно представить дельта-функцией, как в формуле (70). Начальная скорость v_{in} , вообще говоря, не равна нулю. Как мы увидим, потенциал $\varphi(z)$ имеет максимум $\varphi_{in} = \varphi(0)$ в точке инжекции ионов, поэтому вблизи источника нет точек остановки ионов, т.е. $m_i v_{in}^2 / 2 + e\varphi_{in} > e\varphi(z)$ при всех $z > 0$. Следовательно, скорость ионов

$$v_z = \sqrt{v_{in}^2 + \frac{2e}{m_i} [\varphi_{in} - \varphi(z)]} \quad (71)$$

нигде не обращается в нуль, а плотность ионов

$$n_i = \frac{S_0}{v_z} \quad (72)$$

нигде не обращается в бесконечность. Относительно плотности электронов n_e по-прежнему будем считать, что она подчиняется распределению Больцмана (2). Поскольку электрический потенциал определён с точностью до константы, эту константу всегда можно выбрать так, что $n_i = n_e$ при $\varphi = 0$. Тогда

$$n_0 = \frac{S_0}{\sqrt{v_{in}^2 + 2e\varphi_{in}/m_i}} \quad (73)$$

есть плотность электронов в той части квазинейтральной области, где $\varphi = 0$.

Вводя безразмерные величины

$$\chi = \frac{e\varphi}{T_e}, \quad \xi = \frac{z}{\lambda_D}, \quad u_0^2 = \frac{m_i v_{in}^2 + 2e\varphi_{in}}{T_e},$$

где по-прежнему $\lambda_D = \sqrt{T_e / 4\pi e^2 n_0}$, из уравнения Пуассона (1д) получаем уравнение (6) для безразмерного потенциала χ . Оно допускает полезную механическую аналогию, уже использованную в разделе 2. Согласно (8), это уравнение имеет интеграл энергии

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^2 + U(\chi)$$

и описывает движение воображаемой псевдочастицы в эффективном потенциале $U(\chi)$, который задан формулой (7), если интерпретировать χ и ξ как координату и время в некоторой механической системе.

Эффективный потенциал $U(\chi)$ при $\chi = 0$ имеет либо минимум, если $u_0^2 < 1$, либо максимум, если $u_0^2 > 1$, как показано на рис. 7, поэтому точка $\chi = 0$ является стационарной для псевдочастицы с нулевой энергией $W = 0$.

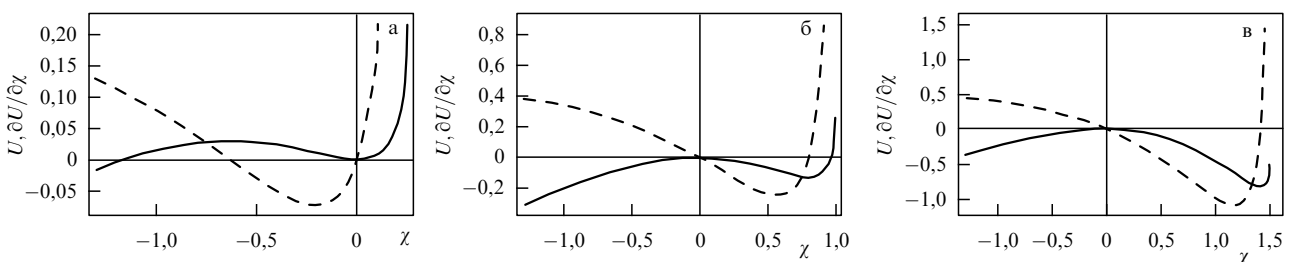


Рис. 7. График эффективного потенциала $U(\chi)$ (сплошная линия) и его производной $\partial U(\chi)/\partial \chi$ (штриховая линия): (а) $u_0^2 = 1/2$, (б) $u_0^2 = 2$, (в) $u_0^2 = 3$.

Рассмотрим движение псевдочастицы с энергией $W \rightarrow 0+$ (т.е. $W \rightarrow 0$ при $W > 0$).

В случае $u_0^2 < 1$ (рис. 7а) такая псевдочастица заперта в окрестности минимума эффективной энергии вблизи $\chi = 0$, поэтому не существует такого решения, которое связывало бы квазинейтральную область $\chi \approx 0$ с униполярным слоем $\chi \lesssim -4$.

Ситуация меняется, если $u_0^2 > 1$. В этом случае вся область $\chi < 0$ становится доступной для псевдочастицы с $W \rightarrow 0+$. Нетрудно видеть, что "время", которое такая псевдочастица тратит на то, чтобы достичь поглощающей стенки (коллектора ионов) где-то в области $\chi \rightarrow -\infty$, будет очень большим, так как псевдочастица почти останавливается вблизи максимума эффективного потенциала при $\chi = 0$ и находится там очень долго, прежде чем ускорится и продолжит движение в сторону стенки. В реальной системе часть траектории такой псевдочастицы соответствует длинной квазинейтральной зоне между источником ионов и дебаевским слоем. В этой зоне электрический потенциал изменяется чрезвычайно медленно.

Анализируя решение уравнения Пуассона в разделе 2, мы фактически предполагали, что псевдочастица стартует из какой-то точки $\chi \rightarrow 0-$ с малой "скоростью" $d\chi/d\xi \rightarrow 0-$. Далее в этом разделе мы продолжим это решение в область $\chi > 0$ и увидим, что там образуется второй дебаевский слой вблизи источника, в котором происходит предварительное ускорение инжектированных ионов.

Существенно, что в интервале

$$1 < u_0^2 < 2,513 \tag{74}$$

существует второй нуль функции $U(\chi)$ при $\chi = \chi_{in} > 0$, как показано на рис. 7б. Верхняя граница интервала (74) определяется из уравнения $U(u_0^2/2) = 0$ (см. ниже). Траектория псевдочастицы, которая стартует с нулевой "скоростью" $d\chi/d\xi = 0$ из точки, близкой к $\chi = \chi_{in}$, удовлетворяет граничному условию $E(0) = 0$ на источнике ионов, которое следует из симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$. С другой стороны, для такой траектории $W \rightarrow 0$, поэтому она "тормозит" вблизи $\chi = 0$, формируя длинную квазинейтральную зону, которая затем переходит в дебаевский слой, как показано на рис. 8а, б сплошной линией. Безразмерная локальная скорость ионов

$$u = \frac{v_i}{c_s} = \sqrt{u_0^2 - 2\chi}$$

показана на рис. 8 штриховой линией. На рисунке 8а, б её начальное значение

$$u_{in} = \sqrt{u_0^2 - 2\chi_{in}}$$

в точке инжекции больше нуля. Однако оно стремится к нулю при $u_0^2 \rightarrow 2,513$. Напротив, $\chi_{in} \rightarrow 0$ и, следовательно, $u_{in} \rightarrow u_0 \rightarrow 1$ при $u_0^2 \rightarrow 1$. Как видно из рис. 8а, б, инжектированные ионы ускоряются до сверхзвуковой скорости за время, пока они движутся через дебаевский слой в зоне предварительного ускорения вблизи источника ионов, где $\chi > 0$. Набранная скорость остаётся приблизительно постоянной за время движения ионов через квазинейтральную плазму, где $\chi \approx 0$. Затем ионы снова начинают ускоряться во втором дебаевском слое, где $\chi < 0$.

В случае $u_0^2 > 2,513$ (рис. 7в) второй нуль эффективного потенциала $\chi = \chi_{in} > 0$ исчезает, так как функция $U(\chi)$ становится комплексной при $\chi > u_0^2/2$. В результате выясняется, что граничное условие $d\chi/d\xi = 0$, соответствующее обращению в нуль электрического поля $E(0)$ в плоскости симметрии, не может быть выполнено.

Если отказаться от условия $E(0) = 0$ (либо отказавшись от требования симметрии задачи, либо допустив разрыв электрического поля с двух сторон плоскости $z = 0$), то точка $U = 0$ ничем не выделена. Тогда источник можно поместить в любую точку в области существования решения $\chi < u_0^2/2$, где $U \leq 0$ (рис. 8б, в). При этом значение $\chi = u_0^2/2$ в точке инжекции соответствует нулевой начальной скорости ионов $u_{in} = 0$.

В упоминавшейся программе PBGUNS воображаемый источник ионов локализован на задней стенке камеры плазменного эмиттера. Ионы выпускаются с этой стенки с заданной начальной скоростью. Насколько мы знаем, равенство нулю электрического поля на этой стенке не предполагается, поэтому соответствующее распределение потенциала можно описать частью сплошной линии на рис. 8, которая начинается с любой её точки, расположенной слева от квазинейтральной зоны, если начальная скорость ионов меньше скорости звука. В квазинейтральной зоне течение сверхзвуковое, а электрическое поле почти равно нулю. Следовательно, решение, которое стартует из какой-либо точки в квазинейтральной зоне, описывает сверхзвуковой источник ионов, в котором дебаевский слой предускорения отсутствует. Для такого источника в формуле (73) надо считать $\varphi_{in} = 0$. В реальных устройствах сверхзвуковые ионы инжектируются в плазму с помощью дуговых источников [81].

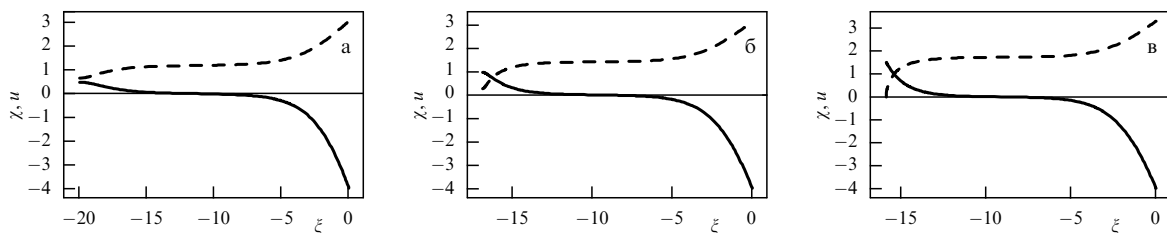


Рис. 8. Профиль потенциала $\chi(\xi)$ (сплошная линия) и локальной скорости u (штриховые линии) при $W = 0,5 \times 10^{-4}$: (а) $u_0^2 = 1,4$; (б) $u_0^2 = 2,0$; (в) $u_0^2 = 3,0$. Пик χ слева — дебаевский слой предускорения вблизи локализованного источника ионов; яма χ справа — дебаевский слой, переходящий в униполярный слой; полочка посередине — квазинейтральная зона, при $W \rightarrow 0$ она становится очень длинной.

10. Ток эмиссии

В пределах дебаевского слоя, где роль ионизации и кулоновских столкновений ничтожна вследствие его малой толщины, плотность тока ионов является константой,

$$j_p = en_i v_i = en_0 v_0, \quad (75)$$

которую мы будем называть *током эмиссии*. Критерий Бома (17) ограничивает ток эмиссии снизу:

$$j_p \geq en_0 c_s. \quad (76)$$

А существует ли ограничение сверху?

В недавней статье [80] Дубинов и Сенилов утверждают, что такое ограничение существует. Как отмечено в работе [82], своё утверждение они основывают на формальных рассуждениях. Аналогично тому, как это сделано в разделе 9, они рассматривают движение псевдо-частицы в эффективном потенциале $U(\chi)$ при $W \rightarrow 0+$, анализируя её траекторию, которая начинается вблизи максимума $U(\chi)$ при $\chi = 0$ с небольшой положительной скоростью $d\chi/d\xi > 0$. Эта траектория сначала пролегает в сторону, обратную коллектору ионов, отражается вблизи $\chi = \chi_{in} > 0$ и лишь затем уходит в сторону коллектора при $\chi \rightarrow -\infty$. Поскольку, как мы видели в разделе 9, точка отражения $\chi = \chi_{in}$ исчезает при $u_0^2 > 2,513$, такая траектория существует только в интервале (74). Из этого факта авторы статьи [80] заключают, что потоковая скорость ионов $v_0 = u_0 c_s$ может находиться в сравнительно узком диапазоне

$$c_s < v_0 < 1,585 c_s, \quad (77)$$

хотя и не поясняют, почему ленгмюровский слой в области $\chi < 0$ должен как-либо зависеть от существования точки отражения в области $\chi > 0$.

В реалистичной постановке задачи о плазменном эмиттере [2] в глубине плазмы должен быть расположен источник ионов. Как показано в разделе 9, если ионы рождаются с малой скоростью, то вблизи источника возникает дебаевский слой, в котором электрическое поле ускоряет ионы до скорости, предписываемой критерием Бома. Именно такому слою соответствует часть траектории псевдо-частицы между $\chi = \chi_{in}$ и $\chi = 0$. С другой стороны, в том же разделе указано, что подходящие решения существуют даже при $u_0^2 > 2,513$, если допустить существование источников, которые инжектируют в плазму поток ионов со скоростью, существенно превышающей скорость звука. Такие источники, по-видимому, должны быть неоднородными, поскольку в одномерных системах с объёмной ионизацией критерий Бома выполняется в виде равенства, поэтому скорость истечения ионов автоматически устанавливается равной или близкой к скорости звука. Как показано в разделе 6, в гидродинамическом приближении $v_0 = c_s$ и, следовательно,

$$j_p = en_0 c_s, \quad (78)$$

тогда как кинетическая теория, изложенная в разделе 8, предсказывает

$$j_p = 1,144 en_0 c_s. \quad (79)$$

Основной вывод, который следует из этих теорий, состоит в том, что плотность тока эмиссии полностью определяется процессами внутри плазмы. Как указано в

монографии [2], в этом состоит принципиальное отличие плазменного эмиттера от термоэмиссии с поверхности твёрдого электрода. В диоде с термоэмиссией внешний потенциал контролирует плотность тока эмиссии через механизм ограничения эмиссии пространственным зарядом. В случае плазменного эмиттера ток эмиссии задан, поэтому внешний потенциал контролирует размер диодного промежутка и плазма занимает ровно такую часть диодного промежутка, чтобы ток эмиссии сравнялся с током, который предписывает закон Чайлда–Ленгмюра.

В некоторых публикациях в выражение для тока эмиссии (78) добавляют множитель $\exp(-1/2) \approx 0,61$ (см., например, [11–13, 24, 74]). При этом вместо n_0 подразумевается концентрация плазмы n_{pl} в той области, где потоковая скорость ионов равна нулю, тогда как в формулах (78) и (79) n_0 — это концентрация плазмы на входе в дебаевский слой, где скорость ионов равна c_s . Такая форма представления тока эмиссии не вполне последовательна, поскольку тогда эмиссионный ток выражается через величины, которые относятся к разным частям плазмы. С другой стороны, такая форма вполне естественна в том случае, когда толщина предслоя значительно меньше линейных размеров плазмы, как это случается при зондовых измерениях параметров плазмы.

Зонды используют, если температура и плотность плазмы сравнительно невелики, иначе зонды сгорают. При температуре $T_e = 1$ эВ и плотности $n = 10^{12}$ см⁻³ длина свободного пробега составляет всего 1 см и толщина предслоя также будет несколько сантиметров. Если она меньше линейных размеров плазмы, то j_p лучше выражать через плотность плазмы n_{pl} за пределами предслоя, а не через плотность n_0 на "входе" в дебаевский слой. Если считать, как в разделе 3, что перепад потенциала в предслое равен $1/2$ (в единицах T_e/e), то $n_{pl} = n_0 \exp(1/2) = 1,649 n_0$ и формула (78) эквивалентна

$$j_p = 0,607 en_{pl} c_s. \quad (80)$$

Однако гидродинамическая модель, описанная в разделе 6, предсказывает, что перепад потенциала в предслое равен $\ln 2 = 0,693$, а $n_{pl} = 2n_0$. Тогда получается, что

$$j_p = 0,5 en_{pl} c_s. \quad (81)$$

В кинетической модели, сформулированной в разделе 8, $n_{pl} = n_0 \exp(0,854) = 2,349 n_0$, а формула (79) эквивалентна

$$j_p = 0,487 en_{pl} c_s. \quad (82)$$

В таком виде она совпадает с формулой (3.69) в монографии Форрестера [4]. Как ранее было отмечено в работе [39], формулы (81) и (82) дают близкий результат. А вот формула (80), полученная из (78) с помощью эвристических рассуждений, по-видимому, не вполне точна.

11. Численное моделирование плазменного эмиттера

В реальных источниках ионов с плазменным эмиттером плазма создаётся в дуговом, ВЧ или поверхностно-плазменном разряде (см., например, [83–94]). Расчёт

таких источников в двумерной или трёхмерной геометрии проводят с помощью численных кодов. Численное моделирование источников с плазменным эмиттером оказывается более сложной задачей, нежели моделирование источников с твёрдым эмиттером. Основная трудность расчёта состоит в том, что заранее не известна форма границы плазмы. В многоапертурных системах плазма соприкасается с металлической сеткой (metal grid) с большим количеством отверстий. Если диаметр отверстий значительно больше дебаевской длины, то говорят об эмиссии заряженных частиц со *свободной поверхности плазмы* (free plasma surface), а саму эту поверхность называют *плазменным мениском* (plasma meniscus) [13, 74, 95–98]. Его форма и положение зависят от способа создания плазмы, её потенциала, плотности и распределения частиц плазмы по скоростям, а также от формы фокусирующих электродов. Дополнительные усложнения связаны с необходимостью учёта нескольких сортов заряженных частиц и нейтрального газа. Приходится вводить новые понятия, такие как квазинейтральность, дебаевская длина, длина свободного пробега, сечение ионизации и т.п.

В сильноточных источниках заряженных частиц дебаевская длина зачастую слишком мала по сравнению с размерами устройства, чтобы численные коды могли разрешить её при разумном шаге разностной сетки. При расчёте таких устройств либо сгущают разностную сетку вблизи мениска, либо используют модель плазмы с резкой границей. В последнем случае реальное распределение потенциала в дебаевском слое заменяют модельными граничными условиями на свободной поверхности плазмы, причём плазма вплоть до этой поверхности считается квазинейтральной. С внешней стороны к плазме с резкой границей примыкает униполярный слой без промежуточного дебаевского слоя. Одномерная теория, изложенная в предшествующих разделах, призвана помочь правильно сформулировать граничные условия для таких численных кодов. Обсуждению формы плазменного мениска и соответствующих граничных условий на свободной поверхности плазмы посвящён раздел 12, а здесь мы дадим краткий обзор вычислительных кодов для моделирования источников ионов с плазменным эмиттером.

Из-за сложности задачи количество таких кодов заметно меньше, чем для решения других задач электронной оптики. Существующие коды включают три основных модуля: решение уравнений Максвелла для электрических и магнитных полей или уравнения Пуассона для электрического потенциала, решение кинетических уравнений для функции распределения заряженных частиц плазмы или их гидродинамических аналогов и итерационную процедуру согласования этих решений.

Для численного решения кинетических и гидродинамических уравнений используют метод макрочастиц, различные разностные схемы [99], метод интегральных уравнений [100], метод конечных элементов [101] и их комбинации. Для моделирования плазмы и пучков в нестационарных задачах часто используют метод "частиц в ячейках" (PIC или CIC) [102]. В стационарных задачах применяется метод траекторий или метод токовых трубок [99]. Выбор того или иного метода зависит от конкретной задачи.

Перечень вычислительных кодов для моделирования плазменного эмиттера, которые были созданы на раннем

этапе развития вычислительной техники, приведён в обзоре Вилтона с соавторами [103]. Он посвящён источникам отрицательных ионных пучков и особенностям их двух- и трёхмерного моделирования. Ниже мы кратко обсудим вычислительные коды, которые активно развиваются в настоящее время.

11.1. PBGUNS

Интерактивный код PBGUNS (Particle Beam GUN Simulations) [77, 104, 105] разрабатывается с 1960 г. сначала для моделирования электронных, а затем и ионных пучков. Он является 2,5-мерным кодом (2,5D), т.е. двумерным в координатном пространстве и трёхмерным в пространстве скоростей, причём вычисляются все три компонента магнитного поля. Электроны эмитирующей плазмы в нём моделируются бальцовским распределением плотности, а ионы — методом токовых трубок, которые стартуют с внутренней поверхности плазменной камеры, где плотность тока и скорость ионов заданы пользователем. Рекомендованная начальная энергия ионов соответствует электронной температуре. Объёмная плотность заряда эмитированного потока ионов находится из уравнения неразрывности токовых трубок на квадратной сетке, которая сгущается вблизи свободной поверхности плазмы. Распределение электрического потенциала вычисляется итерационно с использованием метода релаксации для разностных схем на квадратной сетке. PBGUNS вычисляет форму плазменного мениска и не требует, чтобы пользователь знал её кривизну или какие-либо другие параметры пучка или плазмы, однако пользователь должен задать начальное положение и форму мениска.

PBGUNS позволяет решать широкий класс задач формирования и транспортировки релятивистских и нерелятивистских электронных и ионных (положительных и отрицательных) пучков в системах с плазменным и твёрдым эмиттером. Он содержит удобный интерактивный интерфейс для ввода и вывода информации и большой архив типовых заданий. К его недостаткам можно отнести неустойчивость счёта, которая, по-видимому, обусловлена как относительно малым для статистики количеством траекторий, так и близостью режимов работы источника к физически неустойчивым состояниям. Кроме того, в коде предусмотрена только одна плазменная область, что не позволяет проводить моделирование встречных электронных и ионных пучков, эмитируемых из двух и более плазменных областей одновременно.

11.2. COBRA-3

Трёхмерный код COBRA-3 [106–108] разработан для моделирования формирования сильноточных ионных пучков в системах с плазменным эмиттером в самосогласованных электрических и магнитных полях. Уравнение Пуассона в разностной форме решается итерационным методом верхней релаксации, уравнения движения ионов численно интегрируются с учётом вклада ионов в пространственный заряд. Распределение электронов считается бальцовским. COBRA-3 позволяет находить форму свободной поверхности плазмы, которая эмитирует ионы с различным зарядовым состоянием. Параметры эмитируемых ионов определяются по базе экспериментальных данных. Возможен учёт собственного магнитного поля токов [109].

Предшественником COBRA-3 был код AXCEL [110–112].

11.3. POISSON-2

Пакет прикладных программ POISSON-2 [78, 79, 113–118] предназначен для решения 2,5-мерных (плоских и осесимметричных) стационарных задач электронной и ионной оптики релятивистских сильноточных источников. POISSON-2 позволяет рассчитывать источники с частицами 10 типов, эмитируемыми одновременно с нескольких поверхностей. Алгоритмы моделирования плазменных эмиттеров в POISSON-2 разрабатывались с начала 1980-х годов при учёте столкновительных, ионизационных, перезарядных и т.д. процессов в ускорителях с газовым наполнением [114, 115].

Развитие пакета активизировалось с 2006 г. в связи с проведением экспериментов по генерации мощных электронных пучков большой длительности в ускорителях с плазменными эмиттерами для нагрева плазмы в открытых системах для магнитного удержания плазмы [116]. В настоящее время пакет позволяет моделировать одновременную генерацию электронного и ионного пучков, эмитированных навстречу друг другу с поверхности катодной и анодной плазмы, причём форма пучков и эмиссионных поверхностей вычисляется в итерационном процессе согласования полей и токовых трубок [78].

На рисунке 9 показан пример расчёта осесимметричной элементарной ячейки многоапертурного источника электронов, которые инжектируются в плазму открытой плазменной ловушки за анодом; в результате нагрева электронами плазма расширяется и вытекает в ускоряющий зазор с большой направленной скоростью.

Двумерное уравнение Пуассона решается методом интегральных уравнений, а поток частиц рассчитывается методом токовых трубок. Токовые трубки характеризуются центральной траекторией и переменным сечением. Релятивистские уравнения движения решаются методом Бёриса [119]. Плотность объёмного заряда вычисляется в центра ячейки прямоугольной неравномерной сетки при решении уравнения непрерывности. Потенциалы и электрические поля рассчитываются в узлах сетки и интерполируются на координаты частиц. Магнитное поле определяется как сумма заданного внешнего поля и собственного магнитного поля токовых трубок.

Дебаевский радиус считается бесконечно малым, поэтому в пакете POISSON-2 используется модель плазмы

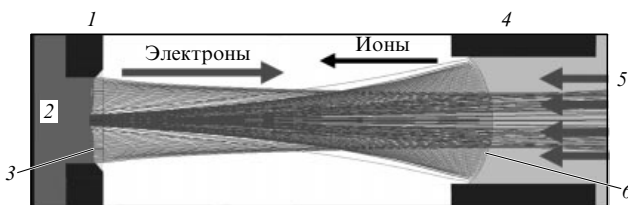


Рис. 9. Пример моделирования ячейки многоапертурного источника пучка электронов с помощью пакета POISSON-2. Электроны пучка, попадая в плазму за анодом, вызывают её нагрев и расширение в сторону катода: 1 — катод, 2 — плазма, 3 — граница катодной плазмы, 4 — анод, 5 — поток плазмы из магнитной ловушки, 6 — граница анодной плазмы. Напряжение на диоде $U = 100$ кВ, ускоряющий зазор $d = 12$ мм, плотности электронного и ионного тока 60 А см^{-2} и 1 А см^{-2} соответственно, направленная энергия ионов 7 кэВ .

с резкой границей. Электрическое поле на границе конечно и определяется параметрами плазмы по формулам, аналогичным (9), (28), в которых дополнительно учтён пространственный заряд частиц встречного потока, как показано на рис. 9. Согласование полей и токовых траекторий проводится итерационным методом с релаксацией объёмного заряда. Положение и форма свободной границы плазмы уточняются в другом итерационном процессе за счёт перемещения её узлов по одной из координат. Итерации прекращаются при совпадении плотности тока эмиссии, определяемого параметрами плазмы, с током, предписываемым законом Чайлда–Ленгмюра в ускоряющей промежутке. Более подробный алгоритм вычисления формы плазменного мениска описан в разделе 12.

11.4. ELIS

Среди кодов для решения задач плазменной эмиссионной электроники отметим также разработку ELIS белорусской группы Груздева [120–122]. ELIS позволяет рассчитывать всего два типа геометрии источника, а именно: полый катод с эмиссионным отверстием и полый катод, покрытый эмиссионной сеткой. Код предназначен для моделирования эмиссии электронных (а не ионных) потоков из плазменного эмиттера. Он позволяет учесть процессы ионизации газа электронами в ускоряющем зазоре, вторичную ион-электронную эмиссию с поверхности катода, а также влияние потока вторичных ионов на эмиссионную плазму. Потоки электронов, эмитированных с поверхности плазменного мениска, моделируются токовыми трубками, потоки вторичных ионов и электронов определяются из решения гидродинамических уравнений. Распределение потенциала и электрических полей в системе находится в результате решения уравнения Пуассона разностными методами на прямоугольной сетке. Код ELIS решает самосогласованные стационарные и квазистационарные задачи. Он имеет модульную структуру, содержит удобный интерфейс ввода-вывода данных. Мы предполагаем, что данный программный комплекс имеет хорошие перспективы для моделирования плазменных эмиттеров положительных ионов после добавления соответствующих расчётных модулей. Уже в нынешнем виде он охватывает круг наиболее существенных процессов, происходящих при работе плазменных эмиттеров.

12. Плазменный мениск

В разделе 10 мы говорили, что в одномерной теории внешний потенциал контролирует толщину униполярного слоя и плазма занимает ровно такую часть диодного промежутка, чтобы ток эмиссии j_p сравнялся с током $j_{3/2}$, который предписывает закон Чайлда–Ленгмюра. В двумерной геометрии (рис. 10) края плазменного мениска привязаны к тройной точке (triple point) на апертуре выходного отверстия, поэтому величина диодного промежутка в ограниченных пределах регулируется изменением формы плазменного мениска. Как утверждается в некоторых работах [13, 74, 123], поверхность мениска будет плоской, если $j_p = j_{3/2}$, будет вогнута в сторону плазмы, если $j_p < j_{3/2}$, и выгнута наружу, если $j_p > j_{3/2}$. Ясно также, что форма плазменного мениска влияет на фокусировку пучка, который вытягивается из плазменного эмиттера. Предполагается, что наилучшая

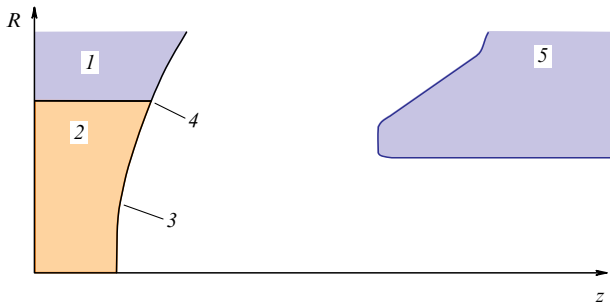


Рис. 10. Плазменный эмиттер в двумерной геометрии: 1 — фокусирующий электрод, 2 — плазма, 3 — эмиссионная поверхность плазмы (плазменный мениск), 4 — тройная точка, 5 — ускоряющий электрод. Края плазменного мениска примыкают к фокусирующему электроду в тройной точке. При оптимальном напряжении на ускоряющем зазоре поверхность плазменного мениска плавно, без излома, переходит в ту часть поверхности фокусирующего электрода, которая обращена в сторону коллектора ионов.

фокусировка достигается, если поверхность фокусирующего электрода, обращенная в сторону коллектора, имеет пирсовскую форму [88, 90, 91, 124–126] и плавно сопряжена с плазменным мениском [13], как показано на рис. 10.

Определение формы плазменного мениска в экспериментальных условиях чрезвычайно затруднено, однако установлено, что существуют оптимальные условия, при которых достигается наилучшая фокусировка пучка ионов [97, 127]. Известно, что пучок не удастся провести через транспортный канал, если в расчетах с помощью программы PBGUNS на плазменном мениске вблизи тройной точки наблюдается образование выпуклости в сторону диодного промежутка [127]. Фокусировка пучка также ухудшается, если $j_p < j_{3/2}$ и плазменный мениск смещается в глубь апертуры выходного отверстия.

Дебаевский слой формируется не только на свободной границе плазмы (на плазменном мениске), но и на её границе с фокусирующим электродом внутри плазменной камеры. Однако условия формирования этих дебаевских слоёв существенно различны. Если через свободную поверхность из объёма плазмы выходят практически только ионы, то на стенки плазменной камеры уходят преимущественно электроны, поскольку плазма в целом должна оставаться квазинейтральной. Тем не менее в дебаевском слое у стенки камеры ионы ускоряются, а электроны тормозятся, как и в дебаевском слое на свободной поверхности, так как электроны более подвижны, чем ионы. Следовательно, плазма приобретает небольшой положительный потенциал относительно стенок камеры (относительно фокусирующего электрода) и большой положительный потенциал относительно коллектора ионов. Чтобы уменьшить ток на стенки плазменной камеры, их делают магнитоизолированными.

Алгоритмы расчёта формы плазменного мениска, вероятно, относятся к числу наиболее оберегаемых секретов разработчиков вычислительных кодов. Нам не удалось найти сколь-нибудь ясного изложения этих алгоритмов, за исключением статьи Хамфриса [74], в которой описан способ численного моделирования плазменного эмиттера положительных ионов при помощи метода конечных элементов в сочетании с динамической генерацией треугольной конформной сетки. Часть элементов сетки считается принадлежащей плазме, другая часть принадлежит ускоряющему зазору.

Поверхность мениска идентифицируется как объединение граней элементов сетки, по которым элементы одного сорта склеены с элементами другого сорта. Утверждается, что такой подход обеспечивает высокую точность, обладает универсальностью и адаптивностью, необходимой для расчёта сложных многоапертурных эмиссионных поверхностей. Узлы сетки в процессе итераций смещаются так, чтобы уменьшить неравномерность плотности тока эмиссии на поверхности мениска. Критерием остановки итерационного процесса является достижение однородной плотности тока эмиссии, причём автор статьи не поясняет, почему плотность тока эмиссии должна быть однородной. Он постулирует это требование.

Опишем в общих чертах алгоритм определения формы плазменного мениска в пакете программ POISSON-2, соавтором которого является В.Т. Астрелин — один из авторов данной статьи. В отличие от алгоритма Хамфриса [74], распределение плотности тока эмиссии j_p заранее не предполагается постоянным на поверхности плазменного мениска. Оно вычисляется примерно так, как это сделано в программе PBGUNS. На задней стенке плазменной камеры пользователь задаёт угловое распределение, скорость и плотность ионов (здесь мы не рассматриваем источники электронов, которые пакет POISSON-2 также может моделировать). Поскольку в квазинейтральной плазме электрическое поле отсутствует, эти ионы движутся по баллистическим траекториям.

Такая модель приблизительно соответствует инъекции ионов со сверхзвуковой скоростью $v_{in} > c_s$ в квазинейтральную часть плазмы с нулевым потенциалом $\varphi = 0$, как это описано в разделе 9. Часть траекторий оканчивается на внутренних стенках плазменной камеры. Такие ионы считаются потерянными. Другие траектории выходят на свободную поверхность плазмы и формируют ток эмиссии. При этом распределение плотности тока эмиссии j_p оказывается неоднородным и на периферии выходного отверстия j_p обычно меньше, чем на его оси. Выбрав некоторое значение $\varphi = \varphi_p$, например $\varphi_p = -4T_e/e$, в качестве потенциала свободной границы плазмы, с помощью формул из раздела 9 можно найти величину потоковой скорости ионов v_p и величину электрического поля E_p на этой границе [79].

Вне плазмы тонкий слой, примыкающий к её границе, рассматривается как плоский диод, где плотность тока ограничена пространственным зарядом ионов, которые вытягиваются из плазмы. Толщина диода d должна быть задана пользователем и обычно равна двум-трем шагам разностной сетки. Напряжение U на таком диоде определяется из результатов расчёта потенциала на предыдущей итерации. По известным величинам U , v_p , E_p и d в результате решения одномерного уравнения Пуассона вычисляется плотность тока в диоде $j_{3/2}$. Эта плотность тока используется для вычисления параметров токовых трубок в ускорительном зазоре. Затем в результате итерационного процесса происходит согласование полей и токовых трубок в ускорительном зазоре. После завершения этого процесса выполняется один шаг другого итерационного процесса, в котором производится перемещение узлов плазменного мениска. Затем вновь повторяется итерационный процесс согласования полей и токовых трубок и т.д. Итерации прекращаются, когда j_p совпадает с $j_{3/2}$.

13. Заключение

В настоящей статье с единых позиций изложены ключевые результаты одномерной теории плазменного эмиттера положительных ионов. Критерий Бома сформулирован в простой и обобщённой формах. Изложена теория униполярного слоя и теория двух масштабов, которые позволяют дать количественное определение толщины бесстолкновительного дебаевского слоя. В доступной форме описаны кинетическая и гидродинамическая модели формирования дебаевского слоя и зоны ионизации в дебаевском предслое. Показано, что, за исключением некоторых искусственных моделей ионизации, критерий Бома выполняется в виде равенства. Вычислен ток эмиссии плазменного эмиттера в гидродинамическом и кинетическом приближении.

Кратко описаны существующие численные коды для моделирования источников положительных ионов в двумерной и трёхмерной геометрии. Их критический анализ в свете изложенной в статье аналитической теории позволяет сделать вывод о том, что наименее проработанной частью этих кодов является моделирование процессов внутри плазмы. В частности, аналитическая теория предсказывает, что критерий Бома в реальных условиях выполняется в виде равенства, поэтому потоковая скорость ионов на входе в дебаевский слой равна (в гидродинамическом пределе) или близка (в кинетической теории) к скорости ионного звука. Однако численные коды дают пользователю возможность задавать начальную скорость ионов произвольной величины.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-50-00080). Авторы благодарны А.В. Анисееву, Ю.И. Бельченко, В.И. Давыденко, И.В. Кандаурову, Д.И. Сковородину и А.В. Сорокину за обсуждение отдельных вопросов, рассмотренных в статье.

Список литературы

- Gabovich M D *Физика и техника плазменных источников ионов* (М.: Атомиздат, 1972)
- Gabovich M D, Плешивцев Н В, Семашко Н Н *Пучки ионов и атомов для управляемого термоядерного синтеза и технологических целей* (М.: Энергоатомиздат, 1986); Gabovich M D, Pleshivtsev N V, Semashko N N *Ion and Atomic Beams for Controlled Fusion and Technology* (New York: Consultants Bureau, 1989)
- Gabovich M D *УФН* **121** 259 (1977); Gabovich M D *Sov. Phys. Usp.* **20** 134 (1977)
- Forrester A T *Large Ion Beams: Fundamentals of Generation and Propagation* (New York: Wiley, 1988) Ch. 3; Форрестер А Т *Интенсивные ионные пучки* (М.: Мир, 1992)
- Крейндель Ю Е *Плазменные источники электронов* (М.: Энергоатомиздат, 1977)
- Коваль Н Н и др. *Эмиссионная электроника* (Сер. Электроника, Под ред. Ю С Протасова) (М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009)
- Bohm D "Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath", in *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields* (National Nuclear Energy Ser. Manhattan Project Technical Section, Division I, Vol. 5, Eds A Guthrie, R K Wakerling) (New York: McGraw-Hill, 1949) p. 77–86
- Chen F F, in *Plasma Diagnostic Techniques* (Pure and Applied Physics, Vol. 21, Eds R H Huddlestone, S L Leonard) (New York: Academic Press, 1965) Ch. 3
- Chapman B *Glow Discharge Processes: Sputtering and Plasma Etching* (New York: Wiley, 1980) Ch. 4
- Chen F F *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* Vol. 1 (New York: Plenum Press, 1984) Ch. 8
- Lieberman M A, Lichtenberg A J *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (New York: Wiley, 1994) Ch. 6
- Chen F F, Chang J P *Lecture Notes on Principles of Plasma Processing* (New York: Kluwer Acad./Plenum Publ., 2003)
- Humphries S *Charged Particle Beams* (Mineola: Dover Publ., 2013) Ch. 7
- Stangeby P C *The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices* (Plasma Physics Series, Vol. 7) (Bristol: Institute of Physics Publ., 2000)
- Langmuir I *General Electric Rev.* **26** 731 (1923)
- Langmuir I, Mott-Smith H *General Electric Rev.* **27** 449 (1924)
- Langmuir I *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **14** 627 (1928)
- Langmuir I *Phys. Rev.* **33** 954 (1929)
- Tonks L, Langmuir I *Phys. Rev.* **34** 876 (1929)
- Каган Ю М, Перель В И *УФН* **81** 409 (1963); Kagan Yu M, Perel' V I *Sov. Phys. Usp.* **6** 767 (1964)
- Huddlestone R H, Leonard S L (Eds) *Plasma Diagnostic Techniques* (New York: Academic Press, 1965); Хаддлстоун Р, Леонард С (Ред.) *Диагностика плазмы* (М.: Мир, 1967)
- Козлов О В *Электрический зонд в плазме* (М.: Атомиздат, 1969)
- Lochte-Holtgreven W *Plasma Diagnostics* (Amsterdam: North-Holland, 1968); Лохте-Хольтгревен В (Ред.) *Методы исследования плазмы. Спектроскопия, лазеры, зонды* (М.: Мир, 1971)
- Давыденко В И, Иванов А А, Вайсен Г *Экспериментальные методы диагностики плазмы* (Новосибирск: Изд. Центр НГУ, 1999)
- Riemann K U, Tsendin L J. *Appl. Phys.* **90** 5487 (2001)
- Child C D *Phys. Rev. Ser. I* **32** 492 (1911)
- Langmuir I *Phys. Rev.* **2** 450 (1913)
- Riemann K U *Phys. Plasmas* **10** 3432 (2003)
- Caruso A, Cavaliere A *Nuovo Cimento* **10** 26 1389 (1962)
- Riemann K U *J. Phys. D Appl. Phys.* **24** 493 (1991)
- Riemann K U *J. Tech. Phys.* **41** 89 (2000)
- Riemann K U *J. Phys. D Appl. Phys.* **36** 2811 (2003)
- Riemann K U *Phys. Plasmas* **13** 063508 (2006)
- Hall L S *Phys. Fluids* **4** 388 (1961)
- Cohen R H, Ryutov D D *Contrib. Plasma Physics* **44** 111 (2004)
- Cipolla J W, Silevitch M B *J. Plasma Phys.* **25** 373 (1981)
- Allen J E *Plasma Sources Sci. Technol.* **18** 014004 (2009)
- Котельников И А *Лекции по физике плазмы* (М.: Бином, 2013)
- Никулин С П, в сб. *Труды 2-го Крейнделевского семинара "Плазменная эмиссионная электроника"*, Улан-Удэ, 17–24 июня 2005 г. (2005) с. 51–53
- ЛондерЯИ, УльяновКН *Физика плазмы* **39** 849 (2013); LonderYaI, Ul'yanov K N *Plasma Phys. Rep.* **39** 849 (2013)
- Allen J E, Thonemann P C *Proc. Phys. Soc. B* **67** 768 (1954)
- Scheuer J T, Emmert G A *Phys. Fluids* **31** 3645 (1988)
- Godyak V A *Phys. Lett. A* **89** 80 (1982)
- Godyak V A, Sternberg N *Phys. Rev. A* **42** 2299 (1990)
- Браун С *УФН* **133** 693 (1981); Brown S C, in *Gaseous Electronics* Vol. 1 *Electrical Discharges* (Eds M N Hirsh, H J Oskam) (New York: Academic Press, 1978) p. 1
- Котельников И А *Вестник НГУ* (3) 108 (2008)
- Franklin R N, Snell J *Phys. Plasmas* **7** 3077 (2000)
- Franklin R N, Snell J *Phys. Plasmas* **8** 643 (2001)
- Ульянов К Н *Теплофиз. высоких температур* **38** 367 (2000); Ul'yanov K N *High Temp.* **38** 344 (2000)
- Никулин С П *Изв. вузов. Физика* (4) 3 (2011); Nikulin S P *Russ. Phys. J.* **54** 393 (2011)
- Kino G S, Shaw E K *Phys. Fluids* **9** 587 (1966)
- Lam S H *Phys. Fluids* **8** 73 (1965)
- Lam S H *Phys. Fluids* **8** 1002 (1965)
- Franklin R N, Ockendon J R *J. Plasma Phys.* **4** 371 (1970)
- Riemann K U *Phys. Plasmas* **4** 4158 (1997)
- Godyak V, Sternberg N *Phys. Plasmas* **9** 4427 (2002)
- Allen J E *Phys. Plasmas* **10** 1528 (2003)
- Tskhakaya D D, Shukla P K *Phys. Plasmas* **10** 3437 (2003)
- Benilov M S *Phys. Plasmas* **10** 4584 (2003)
- Franklin R N *Phys. Plasmas* **10** 4589 (2003)
- Harrison E R, Thompson W B *Proc. Phys. Soc.* **74** 145 (1959)
- Boyd R L F, Thompson J B *Proc. R. Soc. Lond. A* **252** 102 (1959)
- Bertotti B, Cavaliere A *Nuovo Cimento* **10** 35 1244 (1965)
- Allen J E, in *Plasma Physics* Vol. 1 (Ed В E Keen) (London: Institute of Physics, 1974)

65. Allen J E *J. Phys. D Appl. Phys.* **9** 2331 (1976)
66. Cavaliere A, Engelmann F, Sestero A *Phys. Fluids* **11** 158 (1968)
67. Franklin R N *Plasma Phenomena in Gas Discharges* (Oxford: Clarendon Press, 1976)
68. Prewett P D, Allen J E *Proc. R. Soc. Lond. A* **348** 435 (1976)
69. Braithwaite N St J, Allen J E *J. Phys. D Appl. Phys.* **21** 1733 (1988)
70. Raadu M A, Rasmussen J J *Astrophys. Space Sci.* **144** 43 (1988)
71. Raadu M A *Phys. Rep.* **178** 25 (1989)
72. Baalrud S D, Hegna C C *Phys. Plasmas* **18** 023505 (2011)
73. Дубинов А Е, Сенилов Л А *ЖТФ* **82** (8) 50 (2012); Dubinov A E, Senilov L A *Tech. Phys.* **57** 1090 (2012)
74. Humphries S (Jr.) *J. Comput. Phys.* **204** 587 (2005)
75. Emmert G A et al. *Phys. Fluids* **23** 803 (1980)
76. Riemann K U *Phys. Fluids* **24** 2163 (1981)
77. FAR-TECH Inc PBGUNS Manual, FAR-TECH, Inc., 2013, <http://far-tech.com/pbguns/manuals.html>
78. Astrelin V et al., in *15th Intern. Symp. on High-Current Electronics, September 21–26, 2008, Tomsk, Russia*
79. Астрелин В Т *Успехи прикладной физики* **1** 574 (2013)
80. Дубинов А Е, Сенилов Л А *Письма в ЖТФ* **37** (19) 23 (2011); Dubinov A E, Senilov L A *Tech. Phys. Lett.* **37** 900 (2011)
81. Давыденко В И, Димов Г И, Росляков Г В *ДАН* **271** 1380 (1983); Davydenko V I, Dimov G I, Roslyakov G V *Sov. Phys. Dokl.* **28** 685 (1983)
82. Котельников И А, Сковородин Д И *Физика плазмы* (2015), направлена в журнал
83. Abdrashitov G F et al., in *Plasma Science, 1995. IEEE Conf. Record — Abstracts., 1995 IEEE Intern. Conf.* (1995) p. 121
84. Davydenko V I et al. *Rev. Sci. Instrum.* **68** 1418 (1997)
85. Ivanov A A et al. *Rev. Sci. Instrum.* **71** 3728 (2000)
86. Abdrashitov G F et al. *Rev. Sci. Instrum.* **72** 594 (2001)
87. Davydenko V I, Ivanov A A *Rev. Sci. Instrum.* **75** 1809 (2004)
88. Davydenko V I, Ivanov A A, Korepanov S A, Kotelnikov I A *Rev. Sci. Instrum.* **77** 03B902 (2006)
89. Den Hartog D J et al. *Rev. Sci. Instrum.* **77** 10F122 (2006)
90. Davydenko V I, Ivanov A A, Kotelnikov I A, Tiunov M A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **576** 259 (2007)
91. Kotelnikov I A et al. *Rev. Sci. Instrum.* **79** 02B702 (2008)
92. Listopad A A et al. *Rev. Sci. Instrum.* **81** 02B104 (2010)
93. Sorokin A et al. *Rev. Sci. Instrum.* **81** 02B108 (2010)
94. Belchenko Yu I et al. *AIP Conf. Proc.* **1515** 167 (2013)
95. Becker R *Rev. Sci. Instrum.* **67** 1132 (1996)
96. Turek M и др. *ПТЭ* (1) 101 (2009); Turek M et al. *Instrum. Exp. Tech.* **52** 90 (2009)
97. Lawrie S R et al. *Rev. Sci. Instrum.* **81** 02A707 (2010)
98. Miyamoto K et al. *Appl. Phys. Lett.* **102** 023512 (2013)
99. Ильин В П *Численные методы решения задач электрофизики* (М.: Наука, 1985)
100. Тозони О В *Математические модели для расчета электрических и магнитных полей* (Киев: Наукова думка, 1964); Tozoni O V *Mathematical Models for the Evaluation of Electric and Magnetic Fields* (London: Iliffe, 1968)
101. Strang G, Fix G J *An Analysis of the Finite Element Method* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973); Стрэнг Г, Фикс Дж *Теория метода конечных элементов* (М.: Мир, 1977)
102. Григорьев Ю Н, Вшивков В А, Федорук М П *Численное моделирование методами частиц-в-ячейках* (Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004)
103. Whealton J H et al. *J. Appl. Phys.* **64** 6210 (1988)
104. Boers J E, in *Plasma Science, 1993. IEEE Intern. Conf.* (1993) p. 213
105. Boers J E, in *Proc. of the Particle Accelerator Conf., 1995 Vol. 4* (1995) pp. 2312–2313
106. Spädtke P, Mühle C *Rev. Sci. Instrum.* **71** 820 (2000)
107. Spädtke P *Rev. Sci. Instrum.* **75** 1643 (2004)
108. Spädtke P, in *The Physics and Technology of Ion Sources* 2nd ed. (Ed. I G Brown) (New York: Wiley, 2006) p. 41–60
109. Litovko I V *Cybernetics Syst. Analysis* **44** 780 (2008)
110. Spaedtke P "AXCEL code", Ing. Buro fur Naturwissenschaft und Programmentwicklung (1983)
111. Spaedtke P "AXCEL-GSI Code", Report GSI GSI-38-9 (1983)
112. Spaedtke P, in *Proc. 1984 Linear Accelerator Conf., Seeheim, Germany* (1984) p. 356
113. Астрелин В Т, Иванов В Я *Автоматрия* **3** 92 (1980)
114. Астрелин В Т, Иванов В Я, в сб. *Труды IV Всесоюзного семинара "Методы расчета электронно-оптических систем"* (Новосибирск, 1982) с. 10–14
115. Астрелин В Т, Иванов В Я *Автоматрия* **4** 87 (1982)
116. Астрелин В Т и др., в сб. *Забабихинские научные чтения: Сборник материалов IX Международной конф. Тезисы* (Снежинск, 2007) с. 115–116
117. Астрелин В Т, Кандауров И В, Трунев Ю А *ЖТФ* **84** (2) 106 (2014); Astrelin V T, Kandaurov I V, Trunev Yu A *Tech. Phys.* **59** 258 (2014)
118. Astrelin V T, Davydenko V I, Kolmogorov A V *Изв. вузов. Физика* **57** (11-3) 128 (2014)
119. Boris J P, in *Proc. of the 4th Conf. on Numerical Simulation of Plasmas* (Washington, D.C.: Naval Res. Lab., 1970) pp. 3–67
120. Петрович О Н, Груздев В А *Прикладная физика* (2) 79 (2012)
121. Петрович О Н "Моделирование электронно-оптических систем с плазменным эмиттером", Дисс. ... канд. тех. наук (Новополоцк, Беларусь: Полоцкий государственный университет, 2013)
122. Свешников В М, Залесский В Г, Петрович О Н *Прикладная физика* (2) 40 (2012)
123. Kenichi A et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **15** 1343 (1976)
124. Pierce J R *J. Appl. Phys.* **11** 548 (1940)
125. Pierce J R *Theory and Design of Electron Beams* (New York: Van Nostrand, 1954)
126. Radley D E *J. Electron. Control* **4** 125 (1958)
127. Сорокин А В, Частное сообщение (2015)

Theory of plasma emitter of positive ions

I.A. Kotelnikov, V.T. Astrelin

G.I. Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation; Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, 630090 Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: I.A.Kotelnikov@inp.nsk.su, V.T.Astrelin@inp.nsk.su

The results obtained to date by the one-dimensional theory of the emission of positive ions by a plasma are reviewed from a unified point of view. A simple and a generalized forms of the Bohm criterion are discussed. The unipolar sheath model and the two-scale theory are outlined. Kinetic and hydrodynamic models for the formation of the Debye sheath and of the ionization zone in the pre-sheath are described. It is shown that except for some artificial ionization models, the Bohm criterion is fulfilled in the equality form. The emission current from the plasma emitter is calculated in the hydrodynamic and kinetic approximations. Existing numerical codes for the simulation of positive ion sources in two and three dimensions are briefly described.

Keywords: Bohm criterion, plasma sheaths, space-charge-dominated beams, plasma simulation

PACS numbers: 41.75.Ak, 41.85.Ar, 52.25.Jm, 52.40.Kh, 52.59.Bi, 52.59.Sa, **52.65.-y**
Bibliography — 127 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (7) 753–771 (2015)

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201507c.0753
Received 26 March 2015, revised 7 May 2015
Physics – Uspekhi **58** (7) (2015)