

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности

К.П. Зыбин, В.А. Сирота

Статистические свойства мелкомасштабных возмущений скорости в однородной и изотропной гидродинамической турбулентности хорошо изучены экспериментально и методами численного моделирования, но они до сих пор не имеют однозначного теоретического объяснения. Общепринятая концепция дробления вихрей как главного механизма турбулентности не только не может объяснить ряд наблюдаемых фактов, но и содержит внутренние противоречия. В обзоре обсуждается альтернативная концепция, согласно которой определяющим процессом является не распад, а растяжение вихрей. Эволюция растягивающихся вихревых нитей — филаментов — и их свойства выводятся из уравнения Навье–Стокса. Модель растягивающихся вихревых филаментов позволяет объяснить степенную зависимость структурных функций скорости и перемежаемость их показателей, придавая конкретный физический смысл основанной на размерных соображениях мультифрактальной теории. Модель вихревых филаментов — единственная модель, объясняющая наблюдаемые различия показателей продольных и поперечных структурных функций.

Ключевые слова: гидродинамика, турбулентность, статистическая теория

PACS numbers: 47.10.ad, 47.27.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201506b.0593

Содержание

1. Введение (593).
 - 1.1. Краткий обзор проблемы.
 - 1.2. Каскадная модель.
 - 1.3. Мультифрактальная теория.
 - 1.4. Вихревые нити — альтернативная концепция турбулентности?
2. Стохастическое уравнение для мелкомасштабных флуктуаций (599).
 - 2.1. Традиционная постановка: введение внешней силы.
 - 2.2. Введение крупномасштабных пульсаций скорости.
 - 2.3. Мелкомасштабный предел.
3. Асимптотический анализ модифицированного стохастического уравнения Навье–Стокса: предел нулевой вязкости (600).
 - 3.1. Асимптотическое поведение T-экспонент.
 - 3.2. Асимптотика решения уравнения (20).
 - 3.3. Свойства полученного решения.
4. Упрощенная модель: детали решения и учёт вязкости (603).
 - 4.1. Упрощенная модель без случайности.
 - 4.2. Эволюция спектра.
 - 4.3. Влияние вязкости.
5. Флуктуации вокруг ляпуновских показателей и перемежаемость (606).
 - 5.1. Флуктуации показателей матрицы d .
 - 5.2. Обратимость времени.
6. Структурные функции скорости (607).
 - 6.1. Продольные и поперечные корреляторы.
 - 6.2. Определение показателей структурных функций.

7. Заключение (610).

Список литературы (611).

1. Введение

Турбулентность — сложное природное явление, в последние полвека ставшее объектом приложения интенсивных усилий физиков, математиков и инженеров. Спектр задач, возникающих при изучении турбулентности, очень широк, и в настоящем обзоре мы ограничимся рассмотрением только одной проблемы: теоретического описания мелкомасштабных возмущений в однородной и изотропной гидродинамической турбулентности. Создание теории, позволяющей вычислить "из первых принципов" всевозможные корреляторы случайно пульсирующего потока жидкости, далеко от завершения, несмотря на большие успехи, достигнутые в течение более чем семи десятилетий после опубликования в 1941 г. пионерских работ Колмогорова [1, 2]. Значительный прогресс техники экспериментов и вычислительной техники, достигнутый в последнее время, существенно расширил множество измеряемых величин и соответствующих ограничений в теории. Более того, современные результаты экспериментов и численного моделирования, на наш взгляд, существенно меняют традиционное физическое представление об устройстве турбулентного течения.

Поэтому настоящий обзор не преследует цели дать всеобъемлющее рассмотрение соответствующей литературы; вместо этого мы кратко обрисовываем сложившуюся концепцию и сосредоточимся на трудностях, с которыми

К.П. Зыбин, В.А. Сирота. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: zubin@lpi.ru, sirota@lpi.ru

Статья поступила 20 января 2015 г.

она сталкивается. Затем мы представим модель, которая, по-видимому, более адекватно описывает экспериментальные данные.

1.1. Краткий обзор проблемы

Итак, мы будем обсуждать свойства турбулентного течения в масштабах, много меньших характерных размеров всего потока (например, радиуса трубы); на таких масштабах течение, по-видимому, можно считать статистически однородным и изотропным. Большая часть энергии содержится в крупных вихрях. Область масштабов, много меньших энергонесущего, но всё же достаточно больших для того, чтобы вязкость была несущественна, называется инерционным интервалом.

Поскольку описать движение турбулентной среды динамическими средствами невозможно, используется статистическое описание: вычисляются корреляторы скорости, удельной диссипации энергии и т.д. В частности, наиболее часто используются продольные и поперечные структурные функции скорости:

$$S_n^{\parallel}(l) = \left\langle \left([\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \cdot \frac{\mathbf{l}}{l} \right)^n \right\rangle, \quad (1)$$

$$S_n^{\perp}(l) = \left\langle \left| [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \times \frac{\mathbf{l}}{l} \right|^n \right\rangle.$$

Это моменты n -го порядка приращения скорости между двумя близкими точками, разнесёнными на вектор \mathbf{l} ; усреднение проводится по всем парам точек, разделённых расстоянием l (т.е. по всем \mathbf{r} и по всем направлениям \mathbf{l})¹.

Колмогоров в работе [1] 1941 г., предположив конечность средней скорости диссипации энергии ε при стремлении вязкости ν к нулю, вычислил точное значение продольной структурной функции третьего порядка в пределе $\nu \rightarrow 0, l \rightarrow 0$:

$$S_3^{\parallel}(l) = -\frac{4}{5} \varepsilon l. \quad (2)$$

Для структурных функций второго порядка Колмогоров, используя размерные соображения, получил степенной закон [2]

$$S_2^{\perp}(l) \propto S_2^{\parallel}(l) \propto \varepsilon^{2/3} l^{2/3}. \quad (3)$$

Подробное обсуждение вывода соотношения (3) приводится в книгах [3, 4].

Этот знаменитый закон "двух третей" хорошо согласуется с экспериментальными данными не только в гидродинамических [5, 6], но и во многих других средах, включая, например, лабораторную и космическую плазму [7].

Что можно сказать о высших корреляторах, $n > 3$? Если распространить колмогоровский размерный анализ на этот случай (чего сам Колмогоров не делал!), то можно легко получить степенную зависимость структурных функций от l , причём с показателем степени, линейно зависящим от порядка n . Действительно, в колмогоровской теории предполагается существование только одного параметра — скорости диссипации энергии; доста-

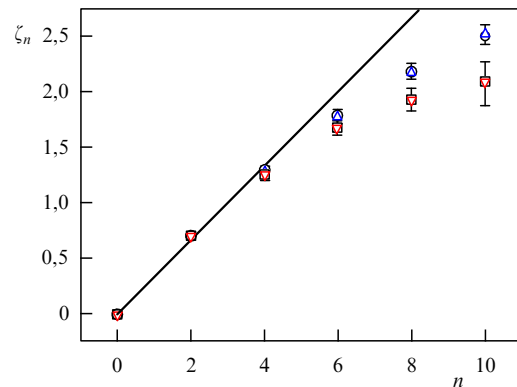


Рис. 1. Показатели степени продольных и поперечных структурных функций скорости: результаты численного моделирования [8] (кружки и квадраты) и [9] (треугольники вершиной вверх и вниз). Прямая, имеющая наклон 1/3, соответствует (4).

точно предположить, например, что функция распределения $F(\delta v_{\parallel}; l)$ зависит только от одного аргумента (ниже индекс \parallel для краткости опускаем):

$$F(\delta v; l) = F\left(\frac{\delta v}{\sqrt{\langle \delta v^2(l) \rangle}}\right).$$

Тогда с учётом (3) имеем

$$\langle \delta v^n(l) \rangle = \int F(\delta v; l) (\delta v)^n d(\delta v) \propto \sqrt{\langle \delta v^2(l) \rangle}^n \propto l^{n/3}. \quad (4)$$

Однако дальнейшие исследования показали, что проблема сложнее, чем кажется на первый взгляд. По мере развития техники эксперимента, мощностей компьютеров и методов численного моделирования выяснилось, что структурные функции в инерционном интервале подчиняются степенному закону

$$S_n^{\parallel}(l) \propto l^{\zeta_n^{\parallel}}, \quad S_n^{\perp}(l) \propto l^{\zeta_n^{\perp}}.$$

Показатели структурных функций $\zeta_n^{\parallel}, \zeta_n^{\perp}$, вычисленные и измеренные при значениях n от нуля до $n = 10$ (рис. 1), существенно отличаются от показателей закона (4). Это различие является отражением перемежаемости турбулентности. Напомним, что перемежаемым является такой процесс, для которого квадрат n -го коррелятора много меньше $2n$ -го коррелятора, $S_n^2 \ll S_{2n}$. Перемежаемость связана с сильными редкими флуктуациями и, как видно из (4), она означает, что существует более одного параметра.

Почему несправедливо соотношение (4)? Оказывается, что неверна предпосылка об однородности ε : диссипация энергии, как показали измерения, распределена по пространству крайне неравномерно [5]. Таким образом, гипотеза о том, что ε — единственный размерный параметр в задаче, не выполняется, а значит, вывод о степенной зависимости структурных функций основан на неверных предпосылках. (Заметим, что сам факт степенной зависимости, тем не менее, подтверждается экспериментами.)

Неясно также соотношение между продольными и поперечными структурными функциями одинаковых порядков. Теория даёт $S_2^{\perp} \propto S_2^{\parallel}$ и $S_3^{\perp} \propto S_3^{\parallel}$ [3], и среди теоретиков распространено мнение, что показатели степени

¹ В силу эргодичности среднее по объёму предполагается равным среднему по ансамблю.

должны совпадать во всех порядках. Однако в последние годы в ряде работ [10–13] обнаружено уверенное различие между показателями ζ_n^{\parallel} и ζ_n^{\perp} при $n > 3$ (см. рис. 1).

Итак, возникают следующие вопросы.

• Почему структурные функции высших порядков всё же удовлетворяют степенному закону?

• Почему показатель степени зависит от порядка n нелинейно (и как именно)?

• Совпадают ли показатели степеней ζ_n^{\parallel} и ζ_n^{\perp} при $n > 3$? Если нет, то почему и насколько они различаются?

Прежде чем перейти к обсуждению ответов на эти вопросы, заметим, что существуют различные подходы к описанию однородной изотропной турбулентности. Экспериментальные данные и результаты численного решения уравнения Навье–Стокса при близких значениях числа Рейнольдса хорошо согласуются между собой. Никто не сомневается в том, что уравнение Навье–Стокса правильно описывает явление. С инженерной точки зрения проблема, таким образом, практически решена. С математической точки зрения для полной гармонии надо только доказать теоремы существования и единственности решения уравнения Навье–Стокса [14]. Задача очень сложна, но на этом пути достигнуты значительные успехи (о сингулярностях в уравнении Навье–Стокса см. в разделе 1.2). Однако заметим, что существование решений доказано, по крайней мере, для уравнения Навье–Стокса, в котором к "вязкому" слагаемому $\nu \Delta u$ добавлен член с производной более высокого порядка (достаточно Δ^α , где $\alpha \geq 5/4$ (см. [15, 16])). Поскольку $\nu \Delta u$ — только первый член разложения (по малым градиентам скоростей) действующих в жидкости сил, полное уравнение, описывающее результаты любого эксперимента, всегда содержит поправки высших порядков и, значит, его решение, несомненно, существует.

На наш взгляд, проблема заключается в другом — необходимо понять, как и откуда возникают такие нетривиальные корреляционные свойства и, если возможно, выделить в турбулентном течении объекты, ответственные за появление этих свойств.

Настоящий обзор посвящён попытке конструктивного ответа на эти вопросы.

1.2. Каскадная модель

Турбулентное движение подразумевает сосуществование большого количества вихрей различных масштабов. Основная физическая концепция, которая ассоциируется с турбулентностью с начала XX в., — это концепция каскада дробящихся вихрей, которую ввёл Ричардсон. Считается, что крупные вихри в турбулентном потоке последовательно дробятся на более мелкие, формируя турбулентный каскад (рис. 2), подобно тому как происходит дробление камней в лавине или как энергичная космическая частица генерирует лавину элементарных частиц при столкновении с молекулами воздуха.

В каждом из перечисленных процессов существует некоторая сохраняющаяся величина: в случае дробления камней — это суммарная масса частей, для космической частицы — суммарная энергия. В турбулентном каскаде сохраняющейся величиной является поток энергии, протекающей из крупных масштабов в мелкие. В крупных масштабах задаётся накачка энергии (обычно обусловленная неустойчивостью течения), а в мелких масштабах "лавина" диссипирует из-за наличия вязкости. Вихри промежуточных масштабов как раз и образуют инер-

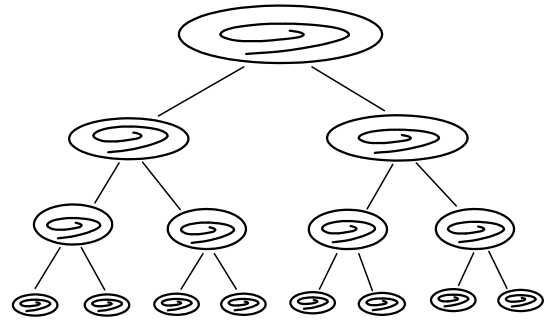


Рис. 2. Каскад дробящихся вихрей. Образ, ассоциированный с теорией Колмогорова (см. [4]).

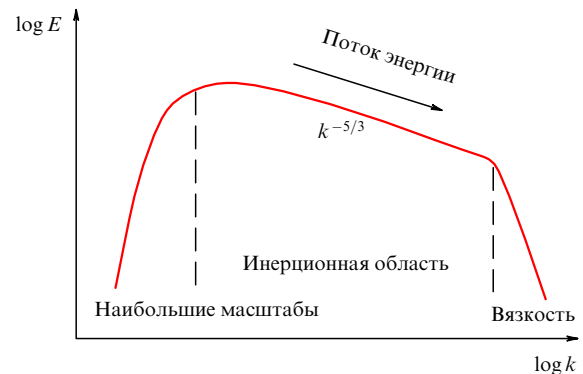


Рис. 3. Спектр Колмогорова–Ричардсона. Энергия накачивается в систему на масштабах наибольших вихрей, дроблением вихрей переносится на всё меньшие масштабы, проходит через весь инерционный интервал и диссипирует на "вязких" масштабах. В колмогоровской теории предполагается, что поток энергии при больших числах Рейнольдса определяется только накачкой и он не зависит от числа Рейнольдса.

ционный интервал, в котором происходит перекачка энергии от крупных вихрей к мелким (рис. 3). Заметим, что в теории слабой турбулентности, где существуют волны, подобная картина распада волн действительно имеет место [17].

Из концепции распадающихся вихрей, по-видимому, исходил Колмогоров в своих работах по теории турбулентности. Отсюда возникла картина турбулентного течения, в которой поток энергии не зависит от масштаба (при стремлении вязкости к нулю), — это представление является физической основой колмогоровской теории.

Концепция дробящихся вихрей, хотя она и сыграла большую иллюстративную и историческую роль, сталкивается с определёнными трудностями.

Во-первых, непонятно, как происходит дробление вихря. Для этого надо, чтобы вихрь растянулся, затем изогнулся в виде восьмерки и, наконец, пересоединились линии тока (рис. 4). Однако пересоединение вихревых нитей возможно только за счёт вязкости ν , при этом время пересоединения $\sim l^2/\nu$, где l — характерный размер области пересоединения. Для того чтобы время пересоединения вихря было значительно меньше времени его вязкой диссипации (т.е. чтобы вихри успели, много раз пересоединившись, создать каскад), необходимо предположить, что вихрь в месте пересоединения — очень тонкий (сингулярный в пределе $\nu \rightarrow 0$).

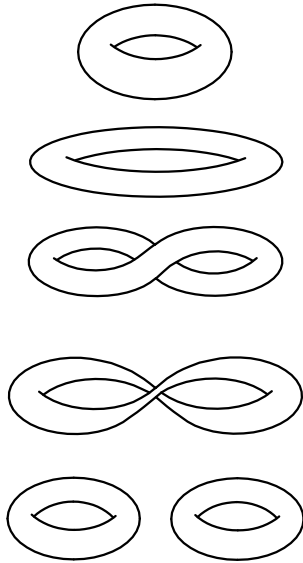


Рис. 4. Распад вихря. Схематическое представление эволюции типичного вихря в каскадной модели. Вихревые линии лежат на торах. Для того чтобы пересоединение линий могло произойти, вихрь (тор) должен быть очень тонким в окрестности точки пересоединения. В пределе нулевой вязкости для пересоединения необходимо возникновение сингулярности.

Вопрос о возможности возникновения сингулярности в несжимаемой жидкости, описываемой уравнением Эйлера, является объектом многочисленных исследований [18–20], но до сих пор остаётся открытым. Если ответ отрицателен, то механизм дробления вихрей неясен. Если сингулярность возникает, то самого этого факта уже достаточно для объяснения скейлинга структурных функций (см. ниже). Таким образом, в последнем случае концепция множественного дробления крупномасштабных вихрей оказывается излишней.

Во-вторых, в последнее время появились сообщения о наблюдении в экспериментах и численном моделировании долгоживущих когерентных структур — вихревых нитей, или филаментов [21]. На процесс возникновения вихревых структур указывают и недавние акустические измерения [22].

То, что ротор скорости — завихренность $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ — распределён в пространстве крайне неоднородно и области высокой завихренности образуют сложную переплетённую сеть тонких нитей, было известно уже довольно давно [23, 24]. Однако работы [21, 25] демонстрируют, что эти нити в действительности являются устойчивым динамическим образованием. Используя современные мощные компьютеры и технику вейвлет-анализа, удаётся выделить в зависящем от времени поле скоростей две компоненты: шум и когерентные (неслучайные) структуры. Выясняется, что именно когерентные структуры обеспечивают выполнение закона "двух третей" (3): корреляторы, вычисленные по областям, занимаемым ими (точнее, по полю скоростей, восстановленному из "когерентного" фурье-образа), практически совпадают с реальными, а если "вырезать" из поля скоростей когерентные структуры, то вычисленные по оставшемуся "шуму" структурные функции оказываются тривиальными, $\langle (\delta v)^2 \rangle \propto l^2$, и много меньшими реальными. Преобладающая часть энергии осцилляций и энтропии (диссипации) также сосредоточена в когерентных структурах.

Время жизни когерентных структур в несколько раз превышает корреляционное время — время оборота крупномасштабного вихря t_0 . Таким образом, само существование таких структур противоречит концепции каскада. Действительно, в колмогоровской теории $\delta v(\varepsilon, l) \sim l^{1/3}$, а значит, характерное для вихря с масштабом l время $t_l(\varepsilon, l) \sim l^{2/3} \ll t_0$ — других параметров в инерционном интервале нет, и время распада по порядку величины совпадает с временем оборота вихря. Поэтому, согласно каскадной модели, в течение корреляционного времени должны успеть последовательно распасться все вихри, от самых больших до имеющих масштаб η , на котором существенна вязкость.

Наконец, поскольку диссипация происходит в узких областях, их фурье-образ даёт широкий спектр (а не диссипацию при $k \approx 1/\eta$, как в случае каскада). Кроме того, в реальных условиях накачка турбулентности связана с неустойчивостью в узких пограничных слоях, их фурье-образ также даёт широкий спектр. Таким образом, утрачивается смысл инерционного интервала как области масштабов, в которой накачка и диссипация энергии отсутствуют.

Существует ли альтернатива идее каскада? В качестве таковой может рассматриваться гипотеза о возникновении сингулярностей в поле завихренности. Если предположить существование степенной зависимости скорости от какой-нибудь координаты, то нетрудно "организовать" степенное поведение структурных функций. Правда, нелинейная зависимость показателей от порядка функции потребует бесконечного множества особенностей разных степеней.

Могут ли сингулярности действительно появляться через конечное время (при гладких начальных условиях), неизвестно ни для уравнения Эйлера, ни для уравнения Навье–Стокса. В этом направлении ведутся интенсивные исследования, и найдены различные ограничения. Например, показано, что хаусдорфова размерность множества особенностей вязкого течения в четырёхмерном пространстве-времени не превышает единицы [26], т.е. даже если сингулярности и имеются, то они очень редки (см. также [27]). С другой стороны, как мы упоминали в разделе 1.1, доказано, что течение будет регулярным, если вязкое слагаемое $\nu \Delta \mathbf{v}$ заменить выражением $-\nu(-\Delta)^\alpha \mathbf{v}$, где $\alpha \geq 5/4$ [15, 16]². Вероятно, уравнение Навье–Стокса вообще не допускает особенностей, но доказать это пока не удалось. В уравнении Эйлера, напротив, естественно было бы ожидать возникновения особенностей, поскольку механизм сглаживания отсутствует. Однако ни численные расчёты, ни теоретический анализ пока не могут ни подтвердить, ни опровергнуть последнее утверждение. Возможно, именно образование устойчивых структур (филаментов, "блинов" и т.д.) препятствует появлению сингулярности [4, 20, 28].

1.3. Мультифрактальная теория

Важным свойством уравнения Эйлера является его масштабная инвариантность, т.е. инвариантность относительно преобразований

$$r \rightarrow r' = \gamma r, \quad v \rightarrow v' = \gamma^h v, \quad t \rightarrow t' = \gamma^{1-h} t \quad (5)$$

для любых γ и h .

² Это слагаемое гораздо естественнее выглядит в фурье-пространстве: $-\nu k^{2\alpha} \mathbf{v}$.

Это обстоятельство послужило основой для различных методов исследования турбулентности, использующих размерный анализ, в том числе ренормгрупповых методов [29, 30] и моделей с построением теории возмущений [31, 32]. Наиболее распространённой, результативной и общепризнанной является мультифрактальная модель, предложенная в работе [33]. (Современный обзор см. в [34].) На этой модели мы остановимся подробнее.

Имея одно решение, можно с помощью преобразования (5) получить бесконечное множество решений для каждого заданного h . Таким образом, весь ансамбль решений можно разбить на классы, индекслируемые различными значениями h . Предположение модели состоит в том, что в каждом h -классе основной вклад в структурные функции скорости дают решения, которые внутри некоторой области $S_h \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \propto l^h.$$

Фрактальная размерность области S_h , обозначаемая как $D(h)$, предполагается независимой от конкретного вида течения.

В колмогоровской теории предполагалась глобальная масштабная инвариантность с одним универсальным параметром $h = 1/3$. Таким образом, мультифрактальная модель является обобщением колмогоровской теории для случая локальной масштабной инвариантности. Различные перемежаемые скейлинговые характеристики (плотности вероятностей, корреляторы скоростей, ускорений, диссипации и т.д.) выражаются в мультифрактальной модели через одну функцию — $D(h)$.

Введение "фрактальной размерности" $D(h)$ основано на математической теории больших отклонений (Large Deviation Theory). Действительно, естественно ожидать, что при $l \ll L$, где L — корреляционный масштаб турбулентности, структурные функции и другие характеристики определяются редкими событиями (в противном случае получился бы тривиальный результат $\langle \Delta v^n \rangle \sim l^n$). Теория больших отклонений утверждает: вероятность P того, что приращение скорости будет иметь скейлинг h , т.е. вероятность попадания соответствующей пары точек $\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{l}$ в область S_h , описывается (просто вследствие отсутствия масштаба) степенной функцией:

$$P = l^{3-D(h)}. \tag{6}$$

Если функция $D(h)$ известна, то все структурные функции выражаются как

$$\langle \Delta v^n \rangle = \int l^{nh} l^{3-D(h)} d\mu(h).$$

Здесь $\mu(h)$ определяет относительные веса разных h ; с точностью до логарифмических добавок можно считать, что $\mu(h) = h$.

Все обсуждаемые здесь приближения оправданы в пределе $l \rightarrow 0$, и в этом случае интеграл легко вычислить методом перевала:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \langle \Delta v^n \rangle(l)}{\ln l} = \zeta_n, \tag{7}$$

$$\zeta_n = \min_h (nh + 3 - D(h)).$$

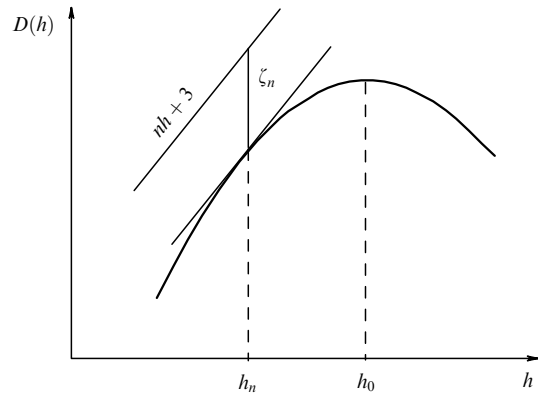


Рис. 5. Определение ζ_n по зависимости $D(h)$. Величина h_n удовлетворяет уравнению $D'(h_n) = n$, в этой точке расстояние от графика $D(h)$ до прямой $nh + 3$ достигает минимума.

Как видно из (7), показатель ζ_n связан с $D(h)$ преобразованием Лежандра. На рисунке 5 показан простой геометрический смысл этой связи. Не ограничивая общности, можно считать $D(h)$ вогнутой кривой, т.е. $D'' < 0$. Тогда существует и обратное соотношение:

$$D(h) = \min_n (nh + 3 - \zeta_n). \tag{8}$$

Таким образом, любому набору показателей ζ_n соответствует какая-то функция $D(h)$. Мультифрактальная модель позволяет связать различные виды корреляторов, выразив их через $D(h)$, но не отвечает на вопрос о том, чему равна $D(h)$, и, соответственно, не позволяет вычислить ζ_n без дополнительных предположений.

Работа [33], в которой было введено понятие мультифрактальности, называется "О сингулярной структуре развитой турбулентности". Действительно, приведённое выше феноменологическое изложение подразумевает существование в турбулентном потоке сингулярностей. Это можно показать на следующем примере.

Рассмотрим пару точек из области S_h , тогда

$$\delta v_{\parallel}(l) = Cl^h.$$

Расстояние между точками l изменяется со временем по закону

$$\frac{dl}{dt} = \delta v_{\parallel}(l),$$

отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dl}{dt} = Cl^h,$$

решение которого имеет вид

$$l = (l_0^{1-h} + (1-h)Ct)^{1/(1-h)}.$$

Нетривиальный скейлинг возникает тогда, когда $h < 1$. При отрицательных C решение существует конечное время:

$$t_0 = \frac{l_0^{1-h}}{|C|(1-h)}.$$

Это означает, что мультифрактальная модель предполагает возникновение сингулярности в решении уравнения Эйлера в момент t_0 . Причём в разных точках простран-

ства (относящихся к разным S_h) сингулярность возникает в разное время, кроме того, степень сингулярности $1/(1-h)$ зависит также от точки пространства.

Всё это напоминает решение трёхмерного уравнения Римана–Хопфа [3, 35]. Однако возникновение особенностей в уравнении Римана–Хопфа связано со сжимаемостью газа. Более того, уравнение Римана–Хопфа описывает предел, противоположный пределу несжимаемой жидкости: оно соответствует скорости звука $c_s \rightarrow 0$, в то время как несжимаемость означает $c_s \rightarrow \infty$. Кроме того, в уравнении Римана–Хопфа возможны сингулярности всего нескольких различных степеней и число этих сингулярностей всегда конечно, а в уравнении Эйлера, согласно мультифрактальной модели, они могут быть практически произвольными ($h > 0$) и их степени образуют сплошной спектр.

Поскольку вопрос о возникновении каких-либо сингулярностей в уравнении Эйлера не решён, наличие в модели бесконечного множества разнообразных сингулярностей крайне нежелательно. Для преодоления этой трудности была разработана вероятностная интерпретация мультифрактальной модели. Вместо индивидуальных реализаций поля скоростей обсуждаются функции плотности вероятностей $P(\delta v, l)$:

$$\langle \delta v^p \rangle = \int \delta v^p P(\delta v, l) d\delta v, \quad (9)$$

где вероятность $P(\delta v, l)$ найти в потоке δv определяется мультифрактальной вероятностью $P(h, l) \propto l^{3-D(h)}$ (6) и скейлингом $\delta v \propto l^h$:

$$P(\delta v, l) \propto \frac{l^{3-D(\ln \delta v / \ln l)}}{\delta v \ln l}.$$

Выражение (9) обладает всеми скейлинговыми свойствами, но не требует интерпретации мультифрактала как набора структур или сингулярностей в пространстве и позволяет распространить понятие размерности D на любые отрицательные значения. Однако в статистической интерпретации мы отказываемся от обсуждения каких-либо структур.

Таким образом, хотя мультифрактальная теория способна (с формальной точки зрения) правильно описать наблюдаемые корреляционные функции развитой турбулентности, она не отвечает на вопрос о том, как в течении могут появиться такие решения.

1.4. Вихревые нити — альтернативная концепция турбулентности?

Итак, концепция распада вихрей противоречит ряду наблюдений, а возникновение сингулярностей за конечное время остаётся гипотезой. В то же время многие авторы указывали на возможную важную роль вихревых нитей в общей картине турбулентности (см., например, [36]). В работах [37, 38] запутанная сеть вихревых трубок рассматривается как фрактал, соответствующий траектории случайного блуждания без самопересечений. Из свойств случайного блуждания выводится (к сожалению, в далёких от реальности модельных предположениях) колмогоровский закон двух третей (3), несмотря на то что никакой диссипации в такой перемежаемой модели, конечно, нет.

В работе [39] строится основанная на идее вихревых нитей феноменологическая модель, которая позволяет получить реалистичные соотношения, связывающие по-

казатели степеней структурных функций разных порядков.

Однако в указанных работах большое внимание уделяется взаимному расположению вихревых нитей, геометрии образуемой ими сети, а структурные элементы сети (вихри) считаются заданными. При этом остаётся за кадром эволюция отдельных филаментов. Между тем именно эта эволюция способна, как нам кажется, предоставить физический механизм, альтернативный идее каскада.

В работах [40–43] мы попытались заполнить этот пробел. В следующих разделах мы подробно опишем полученные в этих работах результаты. Здесь же мы обрисовем в общих чертах картину, в которую эти результаты складываются.

Эволюция области вокруг локального максимума завихренности выглядит как последовательность вращений и деформаций. Хотя силы, действующие на эту область жидкости, случайны, их суммарное действие, как оказывается, содержит систематическую составляющую: на фоне случайных вращений происходит экспоненциальное растяжение (и вследствие несжимаемости — соответствующее поперечное сжатие), что соответствует образованию филамента. Причём завихренность становится сильно перемежаемой, ансамблевые средние от ω^n нелинейно зависят от n , $\langle \omega^{2n} \rangle \gg \langle \omega^n \rangle^2$.

По мере вытягивания филамента профиль скорости "выстраивается" степенным образом всюду, за исключением узкой нестационарной области в самом его центре. Поэтому, несмотря на отсутствие сингулярности в центре, структурные функции получаются степенными. Перемежаемость их показателей определяется различием геометрии филаментов, вносящих наибольший вклад в корреляторы разных порядков (или, в терминах мультифрактальной теории, в разные h -классы). Тем самым мультифрактальная модель получает чёткое и наглядное обоснование.

Что происходит в центре филамента? В случае малой, но ненулевой вязкости возрастание завихренности прекращается тогда, когда поперечное сжатие достигает масштабов, на которых вязкость существенна. В отсутствие вязкости сингулярность возникает в центре филамента через *бесконечное* время. Однако в каждый конечный момент времени распределения завихренности и скорости остаются гладкими. При этом решение отличается от стационарного "вязкого" только в узкой нестационарной области в центре — нестационарность заменяет собой вязкость. Хотя в "невязком" решении начальные возмущения не сглаживаются, они переносятся во всё меньшие масштабы. Таким образом, решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса ведут себя одинаково в пределе больших времён и нулевой вязкости.

Итак, модель растягивающегося вихревого филамента обладает всеми достоинствами "сингулярных" моделей, но в ней нет сингулярности; она обеспечивает перенос энергии по масштабам, хотя и предполагает его сильную перемежаемость; наконец, она может прояснить природу диссипативной аномалии — независимости диссипации энергии от вязкости при $\nu \rightarrow 0$. В самом деле, даже в отсутствие вязкости, когда диссипации вообще нет, поток энергии по масштабам сохраняется благодаря бесконечному сужению сердцевин вихрей.

Обсуждению и обоснованию модели растягивающегося вихревого филамента и посвящён настоящий обзор.

2. Стохастическое уравнение для мелкомасштабных флуктуаций

2.1. Традиционная постановка: введение внешней силы
Знаменитая работа Колмогорова [2] начинается со слов: "При изучении турбулентности естественно считать компоненты скорости случайными величинами". Далее, усредняя с различными весами уравнение Навье–Стокса (используя при этом результаты работы [44]), Колмогоров получает [1] соотношение между корреляторами S_2^{\parallel} и S_3^{\parallel} (см. подробнее [3]):

$$-\frac{4}{5} \varepsilon l = S_3 - 6\nu \frac{\partial S_2}{\partial l} \quad (10)$$

(в наших обозначениях). Здесь введена величина

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle, \quad (11)$$

которую Колмогоров называл "темп рассеяния энергии"³. В пределе $\nu \rightarrow 0$ отсюда следует соотношение (2) для третьей структурной функции.

Позднее соотношение (10) было выведено несколько иначе [4]. Фактически более поздний вывод потребовался потому, что с математической точки зрения рассуждения Колмогорова выглядят недостаточно строгими. Действительно, уравнение Навье–Стокса — динамическое, но как тогда понимать первую фразу, что скорость — случайная величина? Далее, колмогоровское определение величины ε (11) вызывает ассоциации с затухающей турбулентностью. В современной литературе, как правило, обсуждается стационарная турбулентность, но тогда $\partial \langle v^2 \rangle / \partial t = 0$ и величина ε нуждается в другом определении.

Для преодоления этих трудностей в правую часть уравнения Навье–Стокса вводят внешнюю случайную силу $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (12)$$

После этого уравнение становится стохастическим, а скорость \mathbf{v} — случайной. Сила \mathbf{F} полагается стационарным однородным и изотропным случайным процессом, обычно гауссовым. Ожидается, что статистические свойства мелкомасштабных пульсаций не зависят от способа введения \mathbf{F} , для этого сила \mathbf{F} должна быть по крайней мере крупномасштабной. Причём это означает не только то, что коррелятор быстро убывает на масштабах, меньших размера крупномасштабных пульсаций L , но и то, что любая реализация случайного процесса \mathbf{F} содержит лишь крупномасштабные гармоники.

Предполагается, что введённая таким образом сила не только привносит стохастичность в уравнение Навье–Стокса, но и "вкачивает" энергию в поток. Тогда при условии стационарности и стремлении вязкости к нулю ε определяется как $\varepsilon = \langle \mathbf{F}\mathbf{v} \rangle$.

Трудно поверить, что Колмогоров не видел вышеприведённых теоретических возражений и не понимал, что всё можно "исправить", введя в правую часть случайную силу. Однако он этого не сделал — видимо,

генерация случайного течения случайной силой казалась ему какой-то другой задачей. Это действительно так — в частности, при таком подходе для обеспечения стационарности процесса необходима диссипация; она обеспечивает стационарность, хотя в окончательный результат не входит⁴. При колмогоровском подходе соотношение (2) может быть получено точно и для уравнения Эйлера (при его выводе использовалось лишь усреднение по пространству). Заметим, что в природе проявление колмогоровского закона часто встречается в случае, в котором диссипация неважна (например, в космической плазме [7]).

С другой стороны, внешняя сила, вообще говоря, не обязательно вкачивает энергию в систему. То, что знак $\langle \mathbf{F}\mathbf{v} \rangle$ положителен, является актом веры и ниоткуда не следует. Возможна также ситуация, когда $\langle \mathbf{F}\mathbf{v} \rangle = 0$ и накачки энергии нет, а стабилизация исходного течения происходит вследствие нелинейности⁵.

И наконец, в реальном турбулентном потоке внешние объёмные силы не действуют. Турбулентность (и стохастичность) генерируется неустойчивостью крупномасштабных вихрей на основном эргонесущем масштабе. В этом смысле колмогоровское определение величины ε является "более правильным", лучше соответствует физике процесса. Для того чтобы формализовать появление случайности в малых масштабах, вероятно, более естественным было бы ввести случайные граничные условия; строго говоря, требуется доказательство эквивалентности различных постановок.

В любом случае крупномасштабные силы, которые генерируют стохастичность в мелких масштабах, должны быть как-то связаны с крупномасштабными флуктуациями скоростей. То есть эти случайные величины не должны быть независимыми: механизм, генерирующий случайность, уже присутствует в каком-то смысле в уравнении Навье–Стокса. В идеале хотелось бы выделить крупномасштабные случайные флуктуации, а затем исследовать динамику мелкомасштабных.

Для исполнения этой программы мы предлагаем другой подход — задание вместо крупномасштабной силы F крупномасштабных пульсаций скорости. В свете проведённого выше обсуждения такой подход, по-видимому, более соответствует физике процесса. Кроме того, этот подход, в отличие от "стандартного" метода, позволяет существенно упростить задачу. Степень его эквивалентности традиционному введению внешней случайной силы обсуждается в разделе 2.2.

2.2. Введение крупномасштабных пульсаций скорости

Итак, введём случайное поле $\tilde{\mathbf{U}}$ такое, что $\nabla \tilde{\mathbf{U}} = 0$. Для того чтобы это поле сделать крупномасштабным на масштабах $l \ll L$, сгладим его согласно соотношению

$$\mathbf{U}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \int \tilde{U}_i(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \exp\left(-\frac{\rho^2}{L^2}\right) d\boldsymbol{\rho}, \quad (13)$$

тогда $\nabla \mathbf{U} = 0$.

³ Здесь, как и у Колмогорова, опущено слагаемое $l \partial S_2 / \partial t$, малое по сравнению с ε при малых l .

⁴ Это выражается в обязательности порядка пределов: сначала $t \rightarrow \infty$, потом $\nu \rightarrow 0$.

⁵ Пример динамической системы с таким поведением — нелинейный осциллятор. Появление внешней силы приводит к сдвигу фазы, так что $\langle \mathbf{F}\mathbf{v} \rangle = 0$, а не к систематическому возрастанию энергии.

Теперь мы *определим* случайную крупномасштабную силу \mathbf{F} согласно соотношению

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla\pi + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \nu\Delta\mathbf{U}, \quad \nabla\mathbf{F} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) одновременно является определением функции $\pi(\mathbf{r}, t)$. По построению очевидно, что \mathbf{F} — крупномасштабная сила, удовлетворяющая сформулированным в разделе 2.1 условиям. (Производная по времени не вносит дополнительных трудностей. Кроме того, как мы увидим в разделе 3, в окончательные результаты входит только функция \mathbf{U} и её интегралы, но не производные.)

Теперь подставим эту случайную силу \mathbf{F} в правую часть уравнения (12) и будем искать его решение в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \quad P = p + \pi.$$

Тогда для функции \mathbf{u} мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + (\mathbf{U}\nabla)u_i + (\mathbf{u}\nabla)U_i + (\mathbf{u}\nabla)u_i = -\nabla_i p + \nu\Delta u_i, \quad \nabla_i u_i = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) является стохастической версией уравнения Навье–Стокса, в которое стохастичность введена с помощью задания случайного крупномасштабного течения, а не крупномасштабной силы. Пульсации скорости \mathbf{U} выступают здесь как параметрический шум. Подобные заданные пульсации скорости в качестве параметрического шума исследовались ранее в рамках линейной задачи о переносе пассивного скаляра в работах [45–47], где они полагались гауссовыми. При этом было показано, что корреляционные функции скаляра обладают свойством перемежаемости.

Заметим, что уравнение (15) является переформулировкой уравнения (12), однако сила \mathbf{F} не присутствует в окончательном уравнении, а вся случайность задана величиной \mathbf{U} . Конечно, такой способ задания \mathbf{F} несколько сужает область её возможных значений. Впрочем, это не больший произвол, чем тот, который допускают, предполагая само существование случайной силы, действующей во всём объёме жидкости.

2.3. Мелкомасштабный предел

Упростим теперь уравнение (15). Заметим, во-первых, что дрейфовая часть скорости $\mathbf{U}(0, t)$ не входит в окончательный результат, так как в однородной и изотропной турбулентности все корреляторы зависят от разности координат. Поэтому дрейфовую часть скорости $\mathbf{U}(0, t)$ можно без утраты общности положить равной нулю посредством выбора соответствующей системы отсчёта (т.е. замены $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} - \mathbf{U}(0, t)$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \int \mathbf{U}(0, t) dt$).

Далее нас будут интересовать области размером $r \ll L$; гладкая функция \mathbf{U} внутри такой области может быть разложена в ряд Тейлора по параметру r/L :

$$U_i(\mathbf{r}, t) = A_{ij}(t)r_j + A_{ijk}(t)\frac{r_j r_k}{L} + A_{ijkl}(t)\frac{r_j r_k r_l}{L^2} + \dots, \quad A_{ii} = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты $A_{ijk}(t)$, $A_{ijkl}(t)$, ... имеют размерность обратного времени и определяются характерным временем T оборота задаваемых U крупномасштабных вихрей.

Перейдём теперь к пределу $L \rightarrow \infty$, оставляя время T постоянным. Все члены в правой части уравнения (16), кроме первого, обратятся в нуль⁶. В результате из (15) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + (A_{kj}r_j \nabla_k)u_i + A_{ik}u_k + (\mathbf{u}\nabla)u_i = -\nabla_i p + \nu\Delta u_i, \quad \nabla_i u_i = 0. \quad (17)$$

Это главное уравнение нашей теории. Оно является точным следствием уравнения Навье–Стокса в пределе $r \ll L$. Крупномасштабный тензор деформации скорости A_{ij} заменяет внешнюю силу. Задавая статистические свойства этого тензора, можно вычислить статистические свойства мелкомасштабных пульсаций.

3. Асимптотический анализ модифицированного стохастического уравнения Навье–Стокса: предел нулевой вязкости

Теперь мы перейдём к анализу уравнения (17) в асимптотике больших времён t . Мы не будем сразу искать стационарное решение, как это делается в стандартном подходе, где предел $t \rightarrow \infty$ берётся обязательно при конечной вязкости. Поэтому мы можем сначала перейти к пределу $\nu \rightarrow 0$. Вклад диссипации мы обсудим в разделе 4.3.

Итак, рассмотрим вместо уравнения Навье–Стокса уравнение Эйлера, т.е. положим в (17) $\nu = 0$.

Как упоминалось в разделе 1.4, изменение скорости \mathbf{u} под действием внешнего поля A представляет собой наложение случайных вращений и систематических деформаций. Наша первая задача — разделить эти две компоненты.

Прежде всего избавимся от линейных членов; для этого сделаем замену переменных $\mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{w}$:

$$u_i(\mathbf{r}, t) = g_{i\mu}(t) w_\mu(\mathbf{X}, t), \quad X_\nu = q_{\nu j}(t) r_j, \quad (18)$$

где матрицы $g_{i\mu}(t)$ и $q_{\nu j}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{g}_{i\alpha} + A_{ij} g_{j\alpha} &= 0, & g_{i\alpha}(0) &= \delta_{i\alpha}, \\ \dot{q}_{\gamma i} + q_{\gamma j} A_{ji} &= 0, & q_{\gamma j}(0) &= \delta_{\gamma j}. \end{aligned} \quad (19)$$

(Латинские буквы в индексах соответствуют старой системе отсчёта, а греческие — новой.)⁷

Подставляя в (17) соотношения (18), получим

$$\begin{aligned} g_{i\mu} \left(\frac{\partial w_\mu}{\partial t} + q_{\kappa\gamma} g_{\gamma\alpha} w_\alpha \frac{\partial w_\mu}{\partial X_\kappa} \right) &= -q_{\nu i} \frac{\partial p}{\partial X_\nu}, \\ q_{\nu i} g_{i\mu} \frac{\partial w_\mu}{\partial X_\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

⁶ Сделанный предельный переход осуществляет разделение масштабов величин \mathbf{U} и \mathbf{u} . Для того чтобы это приближение было справедливым, спектр \mathbf{u} не должен с течением времени "уходить" в область больших масштабов. Как мы увидим в разделах 3, 4, это условие действительно выполняется для интересующих нас решений.

⁷ Заметим, что (18) — это преобразования не координатного, а фазового пространства: скорости и координаты преобразуются по-разному.

Поскольку A_{ij} — случайный процесс, матрицы $g_{\mu\nu}$ и $q_{\mu j}$ также являются случайными. Для анализа решения при $t \rightarrow \infty$ необходимо знать их асимптотику.

3.1. Асимптотическое поведение Т-экспонент

Как видно из (19), матрицы $g_{\mu\nu}$ и $q_{\mu j}$ можно представить в виде Т-экспонент. В случае, когда матрица A является гауссовым случайным процессом, эти величины вычислены в [48]. Однако, как мы увидим в разделе 5.2, для теории турбулентности такое ограничение на A не годится: в этом случае поток энергии, передаваемой крупномасштабными пульсациями в меньшие масштабы, был бы равен нулю. Для анализа решения в общем случае произвольных A рассмотрим дискретную аппроксимацию: последовательность n -х моментов времени, разделённых интервалами Δt . Пусть компоненты $A_{ij}(t) = (A_n)_{ij}$ постоянны внутри каждого интервала. Тогда решение уравнения (19) примет следующий вид:

$$q_n = q_{n-1} \exp(-A_n \Delta t),$$

отсюда

$$q_N = \exp(-A_1 \Delta t) \exp(-A_2 \Delta t) \dots \exp(-A_N \Delta t). \quad (21)$$

Для дальнейшего нам понадобится разложение Ивасавы: любая вещественная унимодулярная матрица q представляема в виде

$$q = z(q) d(q) s(q), \quad (22)$$

где z — верхняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными единице, d — диагональная матрица с положительными собственными значениями, s — матрица вращения.

Согласно (21) матрица q_N представляет собой произведение N случайных действительных унимодулярных матриц⁸, реализуемых одним и тем же распределением вероятности. Асимптотическое поведение таких объектов подробно изучено в математической литературе (краткий обзор представлен в [49]), получен ряд важных результатов. В частности, при разумных предположениях о распределении A доказаны следующие теоремы⁹:

1) с вероятностью единица существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \ln d_i(q_N) = \lambda_i$, где λ_i — некоторые неслучайные числа, характеризующие случайный процесс A_n и являющиеся одинаковыми для всех его реализаций; $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ (упорядочение возникло благодаря присутствию в разложении Ивасавы треугольной матрицы, которая нарушает равноправие осей) и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Величины λ_i называются ляпуновскими показателями [50];

2) распределение величины $\eta_i = (\ln d_i(q_N) - \lambda_i N) / \sqrt{N}$ является асимптотически близким к гауссову и сходится к нему (слабо) при $N \rightarrow \infty$ [51, 52];

3) с вероятностью единица $z(q_N)$ сходится при $N \rightarrow \infty$: $z(q_N) \rightarrow z_\infty$. В отличие от ляпуновских показателей, z_∞ зависит от конкретной реализации A_n [53];

4) в асимптотике $N \rightarrow \infty$ случайные величины $\eta_i(q_N)$ и $z(q_N)$ независимы [54].

Для наших дальнейших целей теоремы 1–4 могут быть кратко сформулированы в следующем виде:

$$z(q_N) \rightarrow z_\infty, \quad \eta_i(q_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \xi_i(n),$$

$$d(q_N) = \text{diag} \left(e^{\lambda_1 N + \eta_1 \sqrt{N}}, e^{\lambda_2 N + \eta_2 \sqrt{N}}, e^{\lambda_3 N + \eta_3 \sqrt{N}} \right), \quad (23)$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Здесь $\eta_i(q_N)$ и ξ_i — стационарные случайные процессы с нулевым средним. Напомним, что матрица z_∞ — случайная величина, а λ_i — константы, зависящие только от статистических характеристик случайного процесса A_n . Матрица $s(q_N)$ — быстро изменяющаяся функция N , сильно зависящая от конкретной реализации.

Переход к пределу $N \rightarrow \infty$ соответствует $t \rightarrow \infty$ при постоянном Δt . Для того чтобы вернуться от дискретного описания к непрерывному, нужно затем ещё взять предел $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда N заменится величиной t , λ_i и ξ_i перенормируются и показатели экспоненты в (23) примут вид $\lambda_i t + \int \xi_i dt$.

3.2. Асимптотика решения уравнения (20)

Обратимся к уравнению (20). Для простоты изложения ограничимся пока рассмотрением симметричных матриц A_{ij} . Далее мы покажем, что это ограничение несущественно. Из симметрии $A_{ij} = A_{ji}$ следует, что

$$g_{\mu\nu}(t) = q_{\mu\nu}(t).$$

Тогда уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial t} + q_{\kappa i} g_{i\alpha} w_\alpha \frac{\partial w_\mu}{\partial X_\kappa} = - \frac{\partial p}{\partial X_\mu}, \quad (24)$$

$$q_{\nu i} g_{i\mu} \frac{\partial w_\mu}{\partial X_\nu} = 0.$$

Заметим, что в (24) входит лишь комбинация матриц $q_{\mu i} g_{i\nu}$. Замечательно, что в этой комбинации множитель $s(q)$ исчезает:

$$qg = qq^T \simeq z_\infty d^2 [q(t)] z_\infty^T,$$

$$d^2 [q(t)] = \exp(2\lambda_3 t + 2\eta_3 \sqrt{t}) \text{diag}(0, 0, 1) + \dots$$

Мы оставили здесь только наиболее быстро возрастающую компоненту. Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, то $\lambda_3 > 0$. Пренебрегая членами, возрастающими медленнее, получим

$$qg = C \exp(2\lambda_3 t + 2\eta_3 \sqrt{t}) \equiv C \exp(2\chi t),$$

где (с точностью $O(\exp[(\lambda_2 - \lambda_3)t])$) C является постоянной (не зависящей от t) случайной симметричной матрицей, $C = z_\infty \text{diag}(0, 0, 1) z_\infty^T$.

Введём теперь новый вектор $\mathbf{W} = C\mathbf{w}$ вместо \mathbf{w} . Тогда из (24) получим

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \exp(2\chi t) \left(\mathbf{W} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \mathbf{W} = -C \frac{\partial P}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} = 0,$$

$$\chi = \lambda_3 + \frac{\eta_3}{\sqrt{t}}.$$

⁸ Унимодулярность — следствие бесследовости A_n , т.е. несжимаемости жидкости.

⁹ Заметим, что при доказательстве теорем не предполагается ни симметрии, ни гауссовости матриц A .

Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ примет вид

$$\left(\mathbf{W} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\right) \mathbf{W} = -C \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \Pi, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} = 0, \quad (25)$$

$$P = \exp(2\chi t) \Pi.$$

Матрица C — симметричная и независимая от времени, так что она всегда может быть диагонализирована некоторым поворотом системы координат. Таким образом, уравнение (25) эквивалентно стационарному уравнению Эйлера, а его решения соответствуют различным стационарным конфигурациям гидродинамического течения.

Заметим, что от всего случайного процесса $A_{ij}(t)$ в уравнении (25) осталось только шесть случайных чисел, образующих матрицу C . Конечно, это произошло благодаря специальному выбору переменных (\mathbf{X}, \mathbf{W}) : вся случайность "осталась" в быстро изменяющихся со временем s -компонентах матриц q и g .

Далее, в правой части уравнения (25) стоит давление; однако ситуация, в которой давление в некоторой области возрастает экспоненциально, становясь в пределе бесконечным, крайне маловероятна. Как мы увидим в разделе 6.2, такое возможно только для особых решений, соответствующих предельным вихрям. Поэтому в общем случае при $t \rightarrow \infty$ естественно ожидать, что $\Pi \rightarrow 0$. Таким образом, в (25) мы приходим к вырождению нелинейности:

$$\left(\mathbf{W} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\right) \mathbf{W} = 0. \quad (26)$$

Этот результат согласуется с выводами работы [20] о "подавлении" (исчезновении) нелинейности. Как мы увидим в разделе 3.3, уравнение (26) описывает растяжение вихревого филамента. Давление, хотя оно и играет определяющую роль в балансе сил поперёк вихря [55], не участвует в растяжении вихря. Отсутствие влияния нелинейности на экспоненциальное возрастание завихренности впервые обсуждалось в [40], и оно было там обосновано физическими соображениями.

Вернёмся теперь к общему случаю $A \neq A^T$. В уравнение (20) входят две случайные матрицы: qg и $g^{-1}q^T$. Согласно определению (19) матрица g может быть представлена как

$$g(A) = (q(A^T))^T. \quad (27)$$

Здесь и ниже под $q(A)$, $z(A)$, $d(A)$, $s(A)$ подразумеваются функционалы $q[A(t)]$, $z[A(t)]$, ... Учитывая (27) и снова используя разложение Ивасава (22), получим

$$qg = z(A) d(A) s(A) s^T(A^T) d(A^T) z^T(A^T).$$

Две матрицы вращения уже не сокращаются, а дают в произведении ещё одну матрицу вращения \tilde{S} . Наиболее быстро возрастающие компоненты всех матриц d — матричные элементы d_{33} , поэтому и в произведении $d(A)\tilde{S}d(A^T)$ определяющим при $t \rightarrow \infty$ будет матричный элемент (3, 3), пропорциональный их произведению. После умножения слева и справа на треугольные матрицы z получим асимптотику

$$qg \simeq \alpha(t) C_1 \exp[(\chi(A) + \chi(A^T))t], \quad (28)$$

где C_1 — независимая от времени матрица, $\alpha(t) = \tilde{S}_{33}$ — быстро меняющийся случайный множитель.

Чтобы найти асимптотику матрицы $g^{-1}q^T$, воспользуемся равенством $g(A)q(-A) = I$, очевидным образом следующим из (21) и аналогичного выражения для g . Тогда

$$g^{-1}q^T = q(-A)q^T(A) = z(-A)d(-A)s(-A)s^T(A)d(A)z^T(A).$$

Из рассуждений, полностью аналогичных приведённым выше, следует

$$g^{-1}q^T \simeq \beta(t) C_2 \exp[(\chi(-A) + \chi(A))t], \quad (29)$$

где C_2 — постоянная матрица, $\beta(t)$ — случайная функция.

Для того чтобы выяснить, какое из слагаемых, содержащих (28) и (29), возрастает быстрее, надо сравнить неслучайные части их показателей. Поэтому (с вероятностью единица) слагаемым с давлением в (20) можно пренебречь, если $\lambda_3(A^T) > \lambda_3(-A)$.

Можно показать [43, 56], что $\lambda_3(-A) = -\lambda_1(A^T)$. Кроме того, за исключением некоторых патологических случаев, $\lambda_i(A^T) = \lambda_i(A)$. Поэтому указанное условие выполняется в том и только в том случае, когда $\lambda_2(A) < 0$. Как мы увидим в разделе 5.2, $\lambda_2 = 0$ соответствует течению, симметричному относительно обращения времени. Если такое вырождение не имеет места (а в случае ненулевого потока энергии в малые масштабы Т-симметрия, конечно, обязательно будет нарушена), то (28) и (29) заведомо возрастают с разной скоростью. В общем случае связать знак последнего неравенства с направлением потока энергии пока не удалось, однако в рамках упрощённой модели, рассматриваемой в разделах 4, 5, выбор $\lambda_2(A) < 0$ соответствует правильному знаку потока энергии. Таким образом, мы снова приходим к ситуации (26).

3.3. Свойства полученного решения

Для выяснения общих свойств решения (25) вернёмся к переменным (\mathbf{r}, \mathbf{u}) . Мы снова ограничимся случаем симметричных матриц $A = A^T$. Общий случай анализируется аналогичным образом и приводит к тем же результатам; небольшие различия мы оговорим ниже. Кроме того, в этом разделе мы пока пренебрежём случайным шумом в показателе экспоненты матрицы d . Это приближение будет оправдано в разделе 6, а вклад η в решение будет обсуждаться в разделе 5.

Принимая во внимание соотношения (18), (19), (22), получим

$$\mathbf{u} = g\mathbf{w} = gC^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}) = q^T C^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}) = s^T d z^T C^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{X}),$$

$$\mathbf{X} = q\mathbf{r} = z d s \mathbf{r}.$$

Для того чтобы выделить случайное вращение, сделаем ещё одну замену переменных:

$$\mathbf{r}' = s\mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = s\mathbf{u}. \quad (30)$$

Эта система отсчёта случайно вращается, так как матрица s — случайная функция времени (в отличие от матриц z и d , которые со временем становятся всё более регулярными функциями). Введём вместо вектора $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ новую векторную функцию:

$$\mathbf{V}(y) = z^T C^{-1}\mathbf{W}(zy).$$

Тогда

$$\mathbf{u}' = d\mathbf{V}(d\mathbf{r}'), \quad (31)$$

или в более подробной записи

$$u'_i = \exp(\lambda_i t) V_i(\exp(\lambda_1 t)r'_1, \exp(\lambda_2 t)r'_2, \exp(\lambda_3 t)r'_3)$$

(заметим, что здесь нет суммирования).

Итак, во вращающейся системе координат \mathbf{r}' в асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решение не является случайным. Действительно, третья компонента скорости, u'_3 , доминирует, и элемент жидкости вытягивается (и, соответственно, сжимается) экспоненциально с различными коэффициентами вдоль разных осей. При этом зависимость скорости \mathbf{u}' от переменной r'_3 — самая сильная. Заметим, однако, что из условия $\nabla \mathbf{u} = 0$ следует $\partial V_3 / \partial r_3 = 0$.

Вычислим теперь ротор скорости:

$$\omega'_k = \varepsilon_{kji} \frac{\partial u'_i}{\partial r'_j} = \varepsilon_{kji} \exp(\lambda_i t) \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \exp(\lambda_j t).$$

Так как $\sum_i \lambda_i = 0$, отсюда $\omega_k \propto \exp(-\lambda_k t)$. Следовательно, завихренность направлена в основном вдоль оси r'_1 :

$$\omega' \simeq \omega'_1 = \exp(-\lambda_1 t) f(\exp(\lambda_3 t)r'_3). \quad (32)$$

Здесь $f = \varepsilon_{1ji} \partial V_i / \partial y_j$. Заметим также, что, поскольку $\omega' = s\omega$, модуль завихренности одинаков во вращающейся и покоящейся системах отсчёта: $\omega = \omega'$.

Всё это верно и для произвольных матриц $A \neq A^T$, хотя замена переменных (30) обобщается преобразованием $\mathbf{r}' = s\mathbf{r}$, $\mathbf{u}' = s(A^T)\mathbf{u}$, которое не является вращением и не имеет такого наглядного смысла. В общем случае вместо (31) выполняется соотношение $\mathbf{u}' = d(A^T)\mathbf{V}(d(A)\mathbf{r}')$. Но из изотропии распределения A следует $d(A) = d(A^T)$, и результат оказывается тем же самым.

Итак, завихренность переносится от границ к центру и экспоненциально возрастает со временем. Однако во всём объёме такое поведение невозможно. Действительно, тогда экспоненциально возрастали бы со временем энергия потока и диссипация.

Для поддержания стационарного состояния мы должны потребовать, чтобы в некоторой точке объёма жидкости $r'_3 \approx L$ завихренность оставалась примерно постоянной,

$$\omega(t, L) \sim 1. \quad (33)$$

На самом деле достаточно более слабого условия — отсутствия экспоненциального возрастания. Такое условие осуществимо в точке общего положения. Но, как мы увидим в дальнейшем, выбор условия даёт отличия лишь в предэкспоненте и не влияет на значение показателя структурной функции. Поэтому для простоты мы воспользуемся условием (33).

С учётом граничного условия (33) для любого момента времени t' имеем $f(\exp(\lambda_3 t')L) \sim \exp(\lambda_1 t')$. Выбирая t' таким образом, чтобы выполнялось равенство $\exp(\lambda_3 t)r'_3 = \exp(\lambda_3 t')L$, мы можем представить решение (32) в следующем виде:

$$\omega(t, r'_3) \propto \left(\frac{r'_3}{L}\right)^{\lambda_1/\lambda_3}. \quad (34)$$

Поскольку при выводе (32) использованы асимптотические приближения из раздела 3.1, требуется, чтобы время t было достаточно велико, поэтому уравнение (23) справедливо для некоторого $t > t_0$. Тогда (34) справедливо для всех времён $t > t^*(r'_3) = (1/\lambda_3) \ln(r'_3/L) + t_0$, или при $r'_3 > L \exp[\lambda_3(t_0 - t)]$. При меньших r'_3 влияние граничных условий ещё не чувствуется и ω определяется начальными условиями.

Таким образом, (34) не означает наличия сингулярности. Для любого конечного момента времени распределение завихренности сглажено в области максимума, причём размер сглаженной части убывает со временем. Тем не менее выражение (34) обеспечивает степенную зависимость в структурных функциях. Итак, мы вывели степенное, или скейлинговое (но ещё не мультискейлинговое), поведение завихренности непосредственно из стохастического уравнения Эйлера (17) [43].

В разделе 4 мы обсудим упрощённую модель полученного решения, которая поможет лучше проиллюстрировать его свойства, а также выяснит роль вязкости. Затем мы обсудим мультифрактальные свойства решения.

4. Упрощённая модель: детали решения и учёт вязкости

Итак, решение стохастического уравнения (17) на больших временах в специальном образом выбранной системе координат (30) оказывается квазиодномерным и неслучайным (в основном). Случайность сосредоточена в матрице s , "управляющей" вращениями системы координат. Для того чтобы лучше понять полученное решение, рассмотрим простой пример одномерного детерминированного течения с аналогичными свойствами.

Идея состоит в том, чтобы "выпрямить" случайный поток, исключив вращения системы отсчёта. Для этого мы зафиксируем матрицу A_{ij} . Кроме того, для простоты ограничимся рассмотрением одномерной мелкомасштабной скорости $u = u_y(x, t)$; общий случай $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ даёт аналогичные результаты, но записывается более громоздко. Мы увидим, что в этом сдвиговом течении нелинейность исчезает так же, как и в общем случае, и решение оказывается точно таким же, как и (32).

На основе этой модели мы обсудим влияние вязкости и механизм возникновения мультифрактального решения.

4.1. Упрощённая модель без случайности

Рассмотрим поле скоростей вида

$$v_x = -ax, \quad v_y = -by + u(x, t), \quad v_z = -cz.$$

Величины a, b, c — параметры крупномасштабной матрицы A_{ij} . Из несжимаемости следует

$$a + b + c = 0.$$

Для простоты анализа предположим, что a и b постоянны (хотя решение может быть получено и для произвольных функций $a(t), b(t)$). Пусть также

$$a > b > c, \quad b < 0.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} a^2 x &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - ax \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - bu(x, t) + b^2 y &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ c^2 z &= -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (35)$$

Поскольку градиент давления оказывается линейным по переменным x, y, z , отсюда следует

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2}{2} x^2 + \frac{b^2}{2} y^2 + \frac{c^2}{2} z^2,$$

что соответствует определению (14). Остаётся ещё не зависящая от y часть второго из уравнений (35), которая имеет вид

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - ax \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - bu(t, x) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36), описывающее эволюцию мелкомасштабной компоненты скорости, аналогично (17). В инерционном интервале масштабов скорости малы (по сравнению с крупномасштабными), а завихренности велики, поэтому далее мы будем обсуждать завихренность, а не скорость. Так как $\omega(t, x) \equiv \omega_z = \partial u / \partial x$, соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - ax \frac{\partial \omega}{\partial x} + c\omega = 0. \quad (37)$$

Уравнения (36) и (37) могут быть получены из (17) в частном случае постоянной диагональной матрицы A и одномерной сдвиговой скорости $u(x, t) = u_y$. Однако легко увидеть, что уравнению (37) удовлетворяет любая функция, для которой выполнено условие (32), если взять

$$a = \lambda_3, \quad c = \lambda_1, \quad r'_3 = x.$$

Таким образом, решения уравнения (37) показывают зависимость модуля завихренности от переменной r'_3 в общем случае.

Мы проведём анализ решения уравнения (37) в области $x \in [0, 1]$ при $t \geq 0$. Выберем граничное условие в виде

$$\omega(t, 1) = 1, \quad (38)$$

что является аналогом (33). Для выполнения граничного условия (38) начальное условие $\omega(0, x) = \omega_0(x)$ должно удовлетворять требованию

$$\omega_0(1) = 1, \quad a \frac{\partial \omega_0}{\partial x}(1) - c = 0.$$

Легко проверить, что все решения уравнения (37) удовлетворяют соотношению

$$\omega(t, x) = \exp[-c(t - t')] \omega(t', x \exp[a(t - t')]) \quad (39)$$

(при условии, что все величины в этом равенстве определены, т.е. $t \geq t' \geq 0$, $x \exp[a(t - t')] \leq 1$). Как видно из

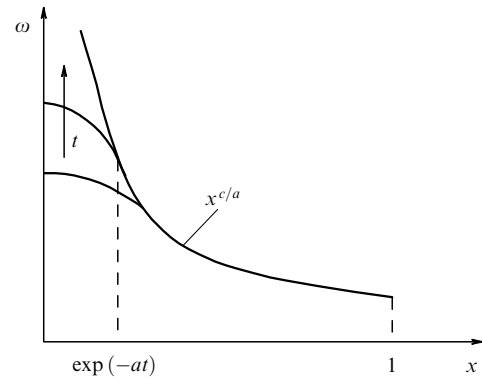


Рис. 6. Иллюстрация к уравнениям (40), (41): эволюция пространственного распределения завихренности со временем.

(39), завихренность, увеличиваясь, "распространяется" от больших x к меньшим.

Для любого $x > \exp(-at)$, выбирая $t'(x, t): x = \exp[-a(t - t')]$, получим

$$\omega(t, x) = \exp[-c(t - t')] \omega(t', 1) = x^{c/a}, \quad (40)$$

$$x > \bar{x}(t) = \exp(-at).$$

Таким образом, величина ω в этой области определяется границей, это степенная функция x , не зависящая от времени.

Для малых значений x провести ту же процедуру нельзя, так как соответствующее t' оказалось бы отрицательным. Выбор $t' = 0$ даёт

$$\omega(t, x) = \exp(-ct) \omega_0(x \exp(at)), \quad x < \bar{x}(t). \quad (41)$$

Влияние граничных значений не распространяется на эту внутреннюю область, и профиль ω в ней всё ещё определяется начальными условиями. Таким образом, всюду, кроме сужающейся внутренней области, функция $\omega(x)$ является постоянной и подчиняется степенному закону; однако при малых x всегда остаётся узкая область нестационарности, и завихренность в центре ($x = 0$) неограниченно возрастает со временем, но в любой момент остаётся конечной (рис. 6). Полностью аналогичная картина имеет место и в общем случае (32), (34).

Но что будет происходить, если мы выберем другие граничные условия? Пусть завихренность на границе не фиксирована, как в (38), а зависит от времени произвольным образом: $\omega(t, 1) = f(t)$. Тогда при достаточно больших t , выбирая $t'(t, x): x = \exp[-a(t - t')]$, получим

$$\omega(t, x) = x^{c/a} f\left(t + \frac{1}{a} \ln x\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x^{c/a} f(t)$$

для любого заданного x . Таким образом, любые разумные (точнее, более медленные, чем экспонента) функции f не изменяют степенного закона, а влияют лишь на коэффициент, который становится зависящим от времени (рис. 7). Поскольку граничные условия соответствуют крупным масштабам, характерное время изменения по порядку величины совпадает с временем оборота большого вихря. То же справедливо и в общем случае (34).

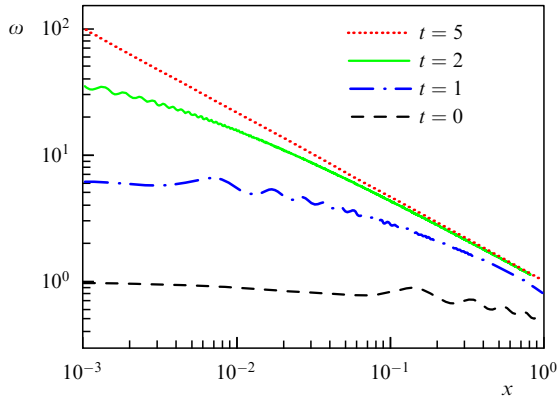


Рис. 7. Эволюция распределения завихренности для частного случая $a = 3, b = -1$,

$$\omega_0(x) = \{1 + [x + 0,1 \sin(10\pi x)]^{2/3}\}^{-1},$$

$$\omega(t, 1) = \{\exp(-2t) + [1 + 0,1 \exp(-3t) \sin(10\pi \exp(3t))]^{2/3}\}^{-1}.$$

Область сильных осцилляций со временем смещается в сторону всё меньших x , а в инерционном интервале флуктуации становятся пренебрежимо малыми и устанавливается степенной закон.

4.2. Эволюция спектра

Обсудим теперь решение (40), (41) в терминах преобразования Фурье. Это полезно, так как позволяет, с одной стороны, сопоставить полученный результат с идеей каскада, а с другой — учесть вязкость.

Фурье-образ завихренности имеет вид¹⁰

$$\omega(t, k) = \exp(-ct) \int_0^{\bar{x}(t)} \exp(ikx) \omega_0(x \exp(at)) dx + \int_{\bar{x}(t)}^\infty \exp(ikx) x^{c/a} dx.$$

Первый интеграл, который может быть представлен в виде

$$\exp(-ct) \exp(-at) \int_0^1 \exp[iky \exp(-at)] \omega_0(y) dy \simeq \simeq \exp(bt) \omega_0(k \exp(-at)),$$

слабо зависит от k для всех $k < \bar{k} = \exp(at)$ и экспоненциально затухает со временем. (Напомним, что $a > 0$ и при $t \rightarrow \infty \bar{k} \gg 1$.) Второй интеграл, который имеет вид

$$k^{b/a} \int_{k\bar{x}(t)}^\infty \exp(iy) y^{c/a} dy,$$

является степенной функцией при $k < \exp(at)$ и при больших k быстро убывает.

Итак, функция $\omega(t, k)$ имеет ступенчатый профиль, причём ступенька движется вправо (в область больших k) экспоненциально быстро.

Для наглядной иллюстрации этого свойства решения рассмотрим частный пример, для которого легко вычислить фурье-образ аналитически. Сейчас мы не будем требовать соблюдения граничного условия (38), так как

¹⁰ В разделе 4.1 мы ограничили x отрезком $[0, 1]$, так что нужно было бы обсуждать не интеграл, а ряд Фурье. Однако $x = 1$ соответствует масштабу L , поэтому нас интересует коротковолновый предел $k \gg 1$, эквивалентный $L \rightarrow \infty$. Кроме того, ниже мы распространим область значений x на всю положительную полуось.

ранее мы убедились, что достаточно потребовать отсутствия экспоненциального возрастания $\omega(t, 1)$. Соответственно, если последнее выполняется, то можно и не ограничиваться отрезком $0 \leq x \leq 1$.

Возьмём, например, начальное распределение завихренности в виде

$$\omega_0(x) = (1 + ix)^{c/a} + (1 - ix)^{c/a}.$$

В соответствии с (37), (39) эволюция $\omega(t, x)$ имеет вид

$$\omega(x, t) = \exp(-ct) \left[(1 + i \exp(at)x)^{c/a} + (1 - i \exp(at)x)^{c/a} \right] = = 2 \exp(-ct) (1 + x^2 \exp(2at))^{c/2a} \cos \frac{\phi c}{a},$$

где $\phi = \arctan [x \exp(at)]$. (Для $x \gg \exp(-at)$ имеем: $\phi \simeq \simeq \pi/2, \omega \propto x^{c/a}$ — вновь степенная зависимость.)

Преобразование Фурье этой функции имеет простой вид:

$$\omega(k, t) = |k|^{b/a} \exp[-|k| \exp(-at)]. \tag{42}$$

Спектр экспоненциально обрезан при $k \sim \bar{x}^{-1} = \exp(at)$. Такое же обрезание имеет место при ненулевой вязкости, но в случае диссипации граница обрезания не зависит от времени, здесь же граница спектра постоянно движется в сторону больших значений k .

Обычно такая ступенчатая функция, распространяющаяся в сторону больших k , интерпретируется как каскад пересоединяющихся (дробящихся) вихрей. Мы видим, что здесь такое решение возникло по совсем другим причинам. При этом энергия, однако, также переносится в область малых масштабов. В разделе 5.2 мы ещё вернёмся к обсуждению процесса переноса энергии.

Обычно считается, что диссипация необходима для получения стационарной статистической картины турбулентности. Тем не менее рассмотренная модель показывает, что стационарный спектр (так же, как и стационарные корреляторы скорости и завихренности) может быть получен в некоторой области масштабов и в отсутствие диссипации.

4.3. Влияние вязкости

Легко обобщить (35), включив в рассмотрение вязкость. Добавим в правую часть уравнения (36) член $\nu \Delta u$; поскольку скорость зависит только от одного аргумента, это уравнение примет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - ax \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - bu(x, t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Соответствующий член с вязкостью должен быть добавлен и в правую часть уравнения (37). Переходя к новым переменным $q = x \exp(at)$, получим

$$\frac{\partial \omega(q, t)}{\partial t} + c\omega(q, t) = \nu \exp(2at) \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2}.$$

Последнее уравнение легко решается с помощью преобразования Фурье:

$$\omega(q, t) = \int \tilde{\omega}(\tilde{k}, t) \exp(i\tilde{k}q) d\tilde{k},$$

$$\tilde{\omega}(\tilde{k}, t) = C_1(\tilde{k}) \exp \left\{ -ct - \frac{\nu}{2a} \tilde{k}^2 [\exp(2at) - 1] \right\}.$$

Возвращаясь к фурье-образу $\omega(x, t)$, находим

$$\begin{aligned}\omega(x, t) &= \int \omega(k, t) \exp(ikx) dk, \\ \omega(k, t) &= \exp(bt) \omega_0(k \exp(-at)) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{\nu}{2a} k^2 [1 - \exp(-2at)]\right\}.\end{aligned}$$

В частности, для рассмотренного в разделе 4.2 примера (42) с учётом вязкости получим

$$\begin{aligned}\omega(k, t) &= |k|^{b/a} \exp[-|k| \exp(-at)] \\ &\times \exp\left\{-\frac{\nu}{2a} k^2 [1 - \exp(-2at)]\right\}.\end{aligned}$$

Видно, что вязкость и наличие сужающейся области экспоненциального возрастания при малых x во всех случаях дают похожие результаты: оба эффекта приводят к экспоненциально резкому обрезанию спектра. Но нестационарность создаёт "движущуюся ступеньку" при $k \sim \exp(at)$, а завал, создаваемый вязкостью, — более крутой, кроме того, для времён $t \gtrsim 1/2a$ он становится стационарным при $k \sim \sqrt{2a/\nu}$.

Итак, вязкое и невязкое решения не различаются в области волновых чисел $|k| < \exp(at)$, $|k| < \sqrt{2a/\nu}$. Хотя возмущения в отсутствие вязкости и не сглаживаются, они переносятся в область меньших масштабов. Таким образом, решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса в пределе $t \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$ совпадают. В этом смысле уравнение Эйлера можно трактовать как невязкий предел уравнения Навье–Стокса.

5. Флуктуации вокруг ляпуновских показателей и перемежаемость

5.1. Флуктуации показателей матрицы d

В разделе 4 мы рассматривали модель, в которой крупномасштабные пульсации скорости были неслучайными, а матрица A — постоянной. Мы убедились в том, что эта модель даёт степенную зависимость завихренности от координаты (40) и тем самым обеспечивает скейлинговое (степенное) поведение корреляторов. Однако в реальной турбулентности имеет место не скейлинг, а мультискейлинг — показатели степеней структурных функций и корреляторов нелинейно зависят от их порядка (см. рис. 1). Такую картину можно получить, учитывая случайный характер матрицы A .

Действительно, согласно теоремам, приведённым в разделе 3.1, элементы диагональной матрицы $d(q_N)$ имеют вид

$$d_i = \exp\left(\lambda_i t + \int \xi_i(t) dt\right),$$

где $\xi_i(t)$ — стационарные случайные процессы с нулевыми средними. Если положить дисперсию ξ_i равной нулю, то ляпуновские экспоненты обеспечат, как мы видели, степенное распределение завихренности; флуктуации ξ_i могут быть причиной мультискейлинга. Точный анализ стохастического уравнения (17) с учётом этих флуктуаций может, на наш взгляд, дать полную теорию. Однако мы ограничимся обобщением рассмотренной в

разделе 4 модели, чтобы показать на её примере, как учёт флуктуаций приводит к перемежаемости.

Прежде чем переходить к анализу решений, напомним, что, согласно центральной предельной теореме, при достаточно больших значениях $t - t'$ случайные величины η_i — гауссовы,

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{t - t'}} \int_{t'}^t \xi_i(t'') dt''.$$

(Множитель $\sqrt{t - t'}$ введён для нормировки.) Поскольку вследствие несжимаемости $\det d = 1$, отсюда следует $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть две (вообще говоря, не независимые) величины η_1 и η_3 с матрицей ковариации

$$\Gamma_{ij} = \langle \eta_i \eta_j \rangle = \begin{pmatrix} D_1 & D_{13} \\ D_{13} & D_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция $K(\mathbf{y}) = \langle \exp(i\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}) \rangle$ выражается через Γ_{ij} следующим образом:

$$K(\mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{1}{2} y_i \Gamma_{ij} y_j\right), \quad i, j \in \{1, 3\}.$$

Для дальнейшего нам понадобятся моменты вида

$$\begin{aligned}\langle \exp(\alpha_i \eta_i) \rangle &= K(-i\alpha_1, -i\alpha_3) = \\ &= \exp\left(\frac{D_1}{2} \alpha_1^2 + D_{13} \alpha_1 \alpha_3 + \frac{D_3}{2} \alpha_3^2\right).\end{aligned}$$

Итак, стохастическое обобщение модели (37) имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (a + \xi_3(t)) x \frac{\partial \omega}{\partial x} + (c + \xi_1(t)) \omega = 0. \quad (43)$$

(Напомним, что в упрощённой модели $a = \lambda_3 > 0$, $c = \lambda_1 < 0$.) Все соотношения раздела 4 могут быть легко обобщены для этого случая: в частности, (39) переходит в

$$\begin{aligned}\omega(t, x) &= \exp\left[-c(t - t') - \int_{t'}^t \xi_1 dt\right] \times \\ &\times \omega\left(t', x \exp\left[a(t - t') + \int_{t'}^t \xi_3 dt\right]\right).\end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим сначала, что происходит с решением в центре, $x = 0$. Выбирая $t' = 0$, получим

$$\omega(t, 0) = \exp\left(-ct - \int_0^t \xi_1 dt\right) \omega(0, 0).$$

Моменты этой величины выражаются как

$$\begin{aligned}\langle \omega^n(t, 0) \rangle &= \exp(-nct) \langle \exp(-n\eta_1 \sqrt{t}) \rangle \omega^n(0, 0) = \\ &= \exp\left(-nct + \frac{D_1}{2} n^2 t\right).\end{aligned} \quad (45)$$

Экспоненциальная расходимость характеризует решение внутри нестационарной внутренней области возрастающей завихренности (41). Ширина \bar{x} этой области определяется условием

$$\bar{x} \simeq \exp(-at - \eta_3 \sqrt{t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ значение \bar{x} с вероятностью единица экспоненциально убывает. Таким образом, добавление шума к ляпуновским экспонентам a и c увеличивает темп возрастания завихренности в центре профиля филамента (причём тем сильнее, чем больше завихренность — вследствие перемежаемости (45)) и уменьшает скорость сужения растущей области.

Обратимся теперь к внешней области, $x > \bar{x}(t)$. По аналогии с (40) выберем $t'(x, t)$ таким образом, чтобы

$$x = \exp \left[-a(t - t') - \int_{t'}^t \xi_3 dt \right]. \tag{46}$$

Тогда

$$\omega(t, x) = \exp \left[-c(t - t') - \int_{t'}^t \xi_1 dt \right] \omega(t', 1).$$

Выражая $\exp(t - t')$ через x и η , получим

$$\omega(t, x) = x^{c/a} \exp \left[\int_{t'}^t \left(\frac{c}{a} \xi_3 - \xi_1 \right) dt \right].$$

При достаточно малых x ($(-\ln x)/a \gg 1$) последнее уравнение можно представить в виде

$$\omega(t, x) = x^{c/a} \exp \left[\left(\frac{c}{a} \eta_3 - \eta_1 \right) \sqrt{t - t'} \right]. \tag{47}$$

Величина $t'(x, t)$ теперь является случайной и определяется уравнением (46). Вычислить средние от (47) поэтому оказывается сложным, но при малых x хорошее приближение к правильному результату можно получить, взяв вместо величины $t - t'$ её среднее значение $\langle t - t' \rangle = (-\ln x)/a$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \omega^n \rangle &\simeq x^{nc/a} \left\langle \exp \left[n \left(\frac{c}{a} \eta_3 - \eta_1 \right) \left(\frac{-\ln x}{a} \right)^{1/2} \right] \right\rangle = \\ &= x^{n \frac{c}{a} \frac{n^2}{a} \left(\frac{c^2 D_3}{a^2 2} - \frac{c}{a} D_{13} + \frac{D_1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Итак, мы получили степенную зависимость моментов завихренности от координаты с нелинейным по n показателем степени. Полученный скейлинг моментов завихренности, естественно, эквивалентен скейлингу структурных функций скорости:

$$\langle \Delta v^n(l) \rangle \sim \langle \omega^n \rangle l^n \sim l^{\zeta_n}, \tag{48}$$

$$\zeta_n = -\frac{b}{a} n - \frac{1}{a} \left(\frac{c^2}{a^2} \frac{D_3}{2} - \frac{c}{a} D_{13} + \frac{D_1}{2} \right) n^2.$$

Похожая зависимость была получена ранее в работе [57] в рамках оболочечной модели уравнения Навье–Стокса.

Соотношения (48) объясняют перемежаемость, т.е. нелинейную зависимость показателей структурных функций от их порядка [4]. При этом линейная по n часть определяется ляпуновскими экспонентами, а нелинейность задаётся шумом.

Нелинейность показателей структурных функций описывается мультифрактальной моделью. Вид зависимости $\zeta_n(n)$ однозначно связан с фрактальной размерностью $D(h)$ (7), (8). Поэтому выведенная здесь из уравнения Навье–Стокса квадратичная (в первом приближе-

нии) зависимость показателей определяет форму $D(h)$ и тем самым является обоснованием мультифрактального описания.

5.2. Обратимость времени

К сожалению, численные значения ляпуновских экспонент λ_i (и, соответственно, коэффициентов в (48)) не определяются теоремами — они зависят от свойств крупномасштабных пульсаций, поэтому требуется отдельное исследование для вычисления λ_i . Однако можно получить некоторые общие ограничения на свойства крупномасштабных пульсаций. Например, в [45, 58] для полярного разложения матриц q, g (для которого справедливы подобные теоремы) показано, что коэффициент λ_2 равен нулю, если случайные матрицы A_{ij} подчиняются гауссовой статистике. Это верно и для разложения Ивасава. Более того, $\lambda_2 = 0$ для любого статистически изотропного распределения, т.е. распределения, плотность вероятности которого инвариантна относительно вращений R :

$$P(A) = P(RAR^{-1}), \quad \forall R \in \text{SO}(3),$$

при выполнении дополнительного условия [56]

$$P[A_{ij}(t)] = P[-A_{ij}(t)].$$

Напомним, что величина A_{ij} определяется соотношением (16) как $\partial U_i / \partial r_j$, где \mathbf{U} — крупномасштабная скорость потока. Поэтому преобразование $A \rightarrow -A$ представляет собой обращение времени. Следовательно, симметрия $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = -\lambda_3$ соответствует инвариантности относительно изменения знака времени.

Однако крупномасштабные турбулентные пульсации должны быть такими, чтобы возникал поток энергии, направленный внутрь турбулентного потока. Это должно нарушать симметрию во времени. Действительно, средний поток энергии крупномасштабных пульсаций через сферу радиусом r выражается как

$$\langle \Phi \rangle = \left\langle \int U^2 \mathbf{U} ds \right\rangle = \left\langle A_{ij} A_{im} A_{kp} \int r_j r_m r_p \frac{r_k}{r} r^2 d\Omega \right\rangle \propto \langle \text{tr} A^3 \rangle.$$

Этот поток при любом r должен быть направлен внутрь сферы, следовательно, $\langle \text{tr} A^3 \rangle < 0$. Пока неясно, какие именно ограничения последнее требование накладывает на λ_i ; однако для рассмотренной нами простой модели без случайных вращений оно даёт $\lambda_2 = b < 0$.

6. Структурные функции скорости

6.1. Продольные и поперечные корреляторы

Возросшая точность экспериментов и численных расчётов позволяет измерять по отдельности показатели продольных и поперечных структурных функций скорости (1). Оказывается, что при $n > 3$ эти показатели различаются, причём $\zeta_n^\perp < \zeta_n^\parallel$ [10–13]. К этим результатам многие теоретики относятся скептически: ранее предполагалось, что структурные функции одного порядка имеют одинаковые показатели. Основанием для такого предположения служили два аргумента: во-первых, все корреляторы в однородной и изотропной среде могут, по колмогоровскому предположению, зависеть только от одного аргумента — скорости диссипации

энергии ε ; во-вторых, интегрированием уравнения Навье–Стокса можно получить цепочку уравнений, связывающих все возможные (продольно-поперечные) структурные функции скорости [55, 59], и в этой цепочке структурные функции разных сортов окажутся сильно "запутанными" между собой, так что "разделить" их представляется трудным.

Однако эти аргументы не выглядят непреодолимой проблемой и, по-видимому, могут быть пересмотрены: действительно, первый из них относится скорее к амплитудам, чем к показателям степени, которые не зависят от ε . Когда выяснилось, что показатели ζ_n нелинейно зависят от n , наивное продолжение колмогоровской модели было заменено мультифрактальной теорией. Значения ζ_n в мультифрактальной теории определяются функцией $D(h)$, которая не может быть найдена из размерных соображений. Аналогичным образом различие ζ_n^\perp и ζ_n^\parallel , с точки зрения мультифрактальной модели, означает просто существование двух разных функций: $D^\parallel(h)$ и $D^\perp(h)$ [34]. Что касается второго аргумента, то соотношение $S_n \propto l^{\zeta_n}$ справедливо только в формальном пределе $l \rightarrow 0$. В действительности при конечных l имеет место ряд $S_n = \alpha_n l^{\zeta_n} + \beta_n l^{\zeta_n^{(2)}} + \dots$, где второстепенные члены обладают более высокими степенями. При $\zeta_n^\perp < \zeta_n^\parallel$ ведущим оказывается $S_n^\perp \propto l^{\zeta_n^\perp}$, а величина S_n^\parallel вполне может быть компенсирована следующими членами ряда S_n^\perp .

С точки зрения модели растягивающихся вихрей асимметрия продольных и поперечных движений не только не кажется странной, но, наоборот, является совершенно естественной. Действительно, вихрь — это объект, поперечные скорости которого значительно больше продольных. Если рассмотреть в качестве иллюстрации течение, состоящее из случайно ориентированных цилиндрических вихрей с твердотельным вращением — набора "волчков", то продольная структурная функция окажется просто равной нулю, а в каждой точке будет иметь место сильная анизотропия. В то же время течение остаётся статистически изотропным вследствие случайной (изотропной) ориентации осей "волчков".

Конечно, в реальном течении существуют разные вихри, которые дают различные вклады в структурные функции обоих типов (мы обсудим это подробнее в разделе 6.2). Однако локальная асимметрия внутри каждого вихря, задаваемая направлением завихренности, и в общем случае является естественной причиной неравенства корреляторов.

Основные возражения против наблюдаемого различия показателей ζ_n^\parallel , ζ_n^\perp заключаются в том, что это различие вызвано конечностью числа Рейнольдса [60] или неустранённой крупномасштабной анизотропией [61] в реальных экспериментах и численных расчётах и оно будет уменьшаться с улучшением их качества.

Проблема также осложнена тем, что продольные и поперечные структурные функции различных порядков демонстрируют разные зависимости от числа Рейнольдса. Например, в [9, 62] показано, что структурные функции различных порядков при одной и той же вязкости обрезаются на разных масштабах. Этот факт затрудняет введение универсального определения инерционного интервала, в котором следует ожидать степенных зависимостей. Поэтому многие авторы предлагают относиться к различию показателей с осторожностью [61].

В последнее время, однако, были приведены свидетельства в пользу того, что разница показателей структурных функций, по-видимому, не зависит от числа Рейнольдса [13]. К аналогичным выводам приходили и авторы более ранних работ [11, 12].

Что касается крупномасштабной анизотропии, которая может повлиять на результаты измерений (или расчёта) на малых масштабах, то её влияния действительно очень сложно избежать. С точки зрения вихревой модели, основной вклад в структурные функции вносят филаменты — вихревые нити, причём чем выше порядок функции, тем более вытянутые вихревые нити её определяют. Длина этих нитей легко может достичь порядка масштаба неоднородности. Такая нить, "зацепившаяся" за границу жидкости, способна создать наблюдаемую в экспериментах или расчётах анизотропию, особенно заметную в корреляторах высших порядков. Однако неоднородность вряд ли существенно исказит внутреннюю структуру вихря и, следовательно, вряд ли существенно изменит показатели структурных функций, а будет влиять только на предэкспоненту. Тогда с увеличением масштаба неоднородности L анизотропия уменьшится, а разница между продольной и поперечной компонентами сохранится.

Таким образом, мы полагаем, что наблюдаемое различие показателей ζ_n^\perp и ζ_n^\parallel является не следствием несовершенства экспериментов и вычислений, а реальным физическим эффектом, обусловленным локальной анизотропией турбулентной среды — случайным направлением вектора завихренности.

6.2. Определение показателей структурных функций

Применим теперь изложенную в разделах 2–5 теорию для нахождения структурных функций скорости. Модель растягивающихся вихревых филаментов подразумевает, что структурные функции различных порядков определяются различными видами вихрей. При этом каждый отдельный вихрь имеет степенной профиль скорости; показатель степени определяется конкретной реализацией случайного шума $\zeta(t)$, характеризующего крупномасштабные пульсации.

В разделе 5 в рамках упрощённой модели мы вывели выражение (48), описывающее степенное поведение структурных функций скорости:

$$S_n(l) \propto l^{\zeta_n}, \quad \zeta_n = \alpha n - \beta n^2. \quad (49)$$

При этом, поскольку приращения скоростей были получены из завихренности, речь идёт о поперечной структурной функции. Квадратичная зависимость показателей ζ_n выглядит разумно: она удовлетворяет условию вогнутости $\zeta_n'' < 0$ (это ограничение на ζ_n следует из неравенства Гёльдера для моментов случайных величин [4]). Однако условие ограниченности скорости $\zeta_n' \geq 0$ означает, что применимость (49) ограничена некоторым максимальным значением $n_{\max} \leq \alpha/(2\beta)$. Выясним, в чём причина такого ограничения и как устроены показатели при $n > n_{\max}$.

Пусть вихревой филамент имеет распределение скорости $v \sim r^\gamma$ (и, соответственно, завихренности $\omega \sim r^{\gamma-1}$). Чем меньше γ , т.е. чем "сингулярнее" это распределение, тем больше будет вклад данного филамента в структурные функции скорости при больших n . Однако вследствие конечности скорости (и давления) γ не может быть

отрицательным¹¹. Возможен ли филамент с $\gamma = 0$? Да, этот "предельный вихревой филамент" имеет цилиндрическую симметрию и профиль скорости

$$\mathbf{v} = \left[\mathbf{e}_z, \frac{\mathbf{r}}{r} \right]. \quad (50)$$

Такому распределению скорости соответствует логарифмически расходящееся давление. Значит, при сколь угодно малом $h > 0$ существует конфигурация со сходящимся давлением.

Интегрирование rdr в аксиально симметричном филаменте даёт l^2 (более точное выражение см. ниже); поскольку $\Delta v \sim l^0$, определяемая этим предельным филаментом структурная функция не зависит от n : $S_n(l) \propto l^2$ для любого n .

Таким образом, зависимость (49) должна перейти в горизонтальную асимптоту с $\zeta_{n \rightarrow \infty} = 2$. Из этого условия следует ограничение на коэффициенты α, β в (49):

$$\zeta(n \geq n_{\max}) = \frac{\alpha^2}{4\beta} = 2.$$

В качестве второго соотношения возьмём колмогоровский закон четырёх пятых: $\zeta_3 = 1$. Тогда коэффициенты в (49) определяются однозначно:

$$\zeta_n^\perp = \begin{cases} 0,391n - 1,91 \times 10^{-2}n^2, & n \leq 10,2, \\ 2, & n > 10,2. \end{cases} \quad (51)$$

Все приведённые выше рассуждения естественным образом могут быть выражены в терминах мультифрактальной модели, и тогда используемые в ней понятия приобретут наглядный физический смысл. Действительно, различные виды вихрей соответствуют разбиению пространства на h -классы, в каждом из которых флуктуации скоростей подчиняются скейлинговому закону $\delta v(l, h) \sim l^h, l \rightarrow 0$ (см. раздел 1.3).

Согласно (7) (см. также рис. 5) большим значениям n соответствуют малые h . Из условия ограниченности скоростей (или неубывания ζ_n) следует $h \geq 0$. Найденный нами предельный вихрь (50) принадлежит классу $h = 0$, что означает $\delta v \propto l^0 = \text{const}$. Как видно из (7), тот факт, что $h_{\min} = 0$, как раз соответствует наличию горизонтальной асимптоты ζ_n . Аксиальная симметрия филамента (50) задаёт размерность соответствующего h -класса:

$$\zeta_\infty^\perp = 2, \quad D^\perp(0) = 1. \quad (52)$$

Показатели (51) соответствуют квадратичной зависимости $D(h) = 3 - 2(1 - h/\alpha)^2$ в интервале от $h_{\min} = 0$ до $h_{\max} = \alpha$.

До сих пор мы рассматривали поперечную структурную функцию. Обратимся теперь к продольной. Предположим, что соотношение (49), хотя оно было выведено для поперечных функций, выполняется (вообще говоря, с другими коэффициентами) и для показателей продольных структурных функций.

Вычисление продольной и поперечной структурных функций для (50) в пределе $n \rightarrow \infty$ можно провести

непосредственно [63], в результате получим

$$\left\langle \left| \Delta \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{l}}{l} \right|^n \right\rangle \propto \frac{2^n}{n} l^2 \ln \frac{L}{l}, \quad \left\langle \left| \Delta \mathbf{v} \frac{\mathbf{l}}{l} \right|^n \right\rangle \propto n^{-5/2} l^2. \quad (53)$$

Показатель степени в обоих случаях равен двум. Однако вклад филамента (50) в поперечную структурную функцию с увеличением n возрастает, становясь определяющим при $n \rightarrow \infty$, тогда как вклад в продольную функцию стремится к нулю. Это естественно: основное движение в вихрях — круговое, и продольные приращения скоростей малы по сравнению с поперечными. Вклад в продольную структурную функцию велик на изгибах вихревых нитей. Учёт изгиба добавит к корреляторам (53) слагаемое следующего порядка по l/L . Это и будет главным членом для продольной структурной функции при $n \rightarrow \infty$:

$$\zeta_\infty^\parallel = 3, \quad D^\parallel(0) = 0. \quad (54)$$

В [63] построено соответствующее $h = 0$ предельное распределение скорости, определяющее поведение $D^\parallel(0)$, подобно тому как (50) определяет $D^\perp(0)$. Такой предельный филамент для продольной структурной функции должен быть сильно ("предельно") изогнутым. Например, в сферических координатах "предельная" конфигурация имеет вид $\mathbf{v} = (v_r(\theta), v_\theta(\theta), 0)$. Чтобы обеспечить выполнение условия $h = 0$, решение, как и в случае цилиндрического предельного филамента (50), не зависит от r , но теперь r — расстояние не до оси, а до центра сферы. Усредняя по $r^2 dr$, получим, что структурная функция пропорциональна l^3 .

Разница между двумя предельными значениями, (52) и (54), при $n \rightarrow \infty$ практически полностью определяет разницу между функциями ζ_n^\perp и ζ_n^\parallel .

Используя (54) как условие, налагаемое на коэффициенты α, β в (49), с учётом $\zeta_3^\parallel = 1$ получим

$$\zeta_n^\parallel = \begin{cases} 0,367n - 1,12 \times 10^{-2}n^2, & n \leq 16,3, \\ 3, & n > 16,3. \end{cases} \quad (55)$$

Сравнение теоретических предсказаний (51), (55) с результатами численного моделирования [8, 9] проведено на рис. 8. Теоретическая кривая оказывается очень

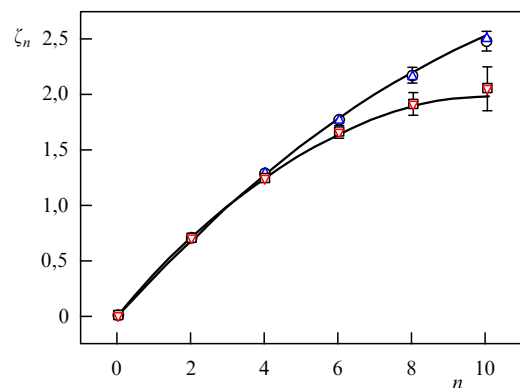


Рис. 8. Показатели продольной (верхняя кривая) и поперечной (нижняя кривая) структурных функций скорости: результаты численного моделирования [8] (кружки и квадраты соответственно) и [9] (треугольники вершиной вверх и вниз), сплошные кривые — теория (51), (52).

¹¹ В действительности бесконечное давление привело бы к разрыву среды, т.е. к образованию полости в центре вихря.

близкой к результатам численного моделирования и лежит в пределах ошибок измерений. Подчеркнём, что (51), (55) не являются результатом подгонки и не содержат подгоночных параметров.

Правда, представленная нами простая модель имеет некоторую трудность: две параболы, показанные на рис. 8, совпадают в точках $n = 0$ и $n = 3$, следовательно, не совпадают в точке $n = 2$. Это противоречит точному теоретическому утверждению, что $\zeta_2^{\parallel} = \zeta_2^{\perp}$. Данная трудность возникла из-за приближения функции ζ_n квадратичной зависимостью. Конечно, это только первые члены разложения, существуют слагаемые и более высоких порядков. Однако расхождение между ζ_2^{\parallel} и ζ_2^{\perp} в (51), (55) очень мало, оно составляет $1,6 \times 10^{-2}$. Поэтому коэффициент при следующем — кубическом — члене разложения (так же, как и поправки к первым двум) очень мал, $\leq 10^{-4}$. Следовательно, неучтённая здесь часть ζ_n очень слабо — практически незаметно для глаза — изменяет теоретическую кривую, представленную на рис. 8. Единственное, что неучтённая часть ζ_n может изменить, — это темп приближения кривой к своему асимптотическому пределу при $n \rightarrow \infty$. Вклад этих членов существен при $10 < n < 15$. Сам факт выхода показателей на плато является точным следствием теории (а именно существования "предельных" вихрей, соответствующих $h = 0$). Выход показателей структурных функций на горизонтальную асимптоту при $n \rightarrow \infty$ обсуждался в [64]; насыщение существует также и в теории пассивного скаляра [58].

Таким образом, концепция вытягивающихся вихрей позволяет не только объяснить природу перемежаемости в развитой турбулентности и придать простой смысл идее мультифрактальности, но и получить дополнительную информацию, благодаря которой показатели структурных функций вычисляются с хорошей точностью.

Заметим также, что, поскольку главный вклад в структурную функцию вносят вихревые филаменты, наиболее существенными при $l \rightarrow 0$ становятся не продольные, а поперечные структурные функции, более трудные для измерения. Более "привычные" продольные структурные функции оказываются связанными с более редкими явлениями ("скрученные" филаменты); в цепочках уравнений [55, 59] они будут второстепенными членами. Этой асимметрии соответствует и знак наблюдаемого в вычислениях и экспериментах неравенства: показатели продольных структурных функций больше, чем показатели поперечных. Поэтому построенная теория хорошо описывает главный член — поперечные структурные функции — и оказывается менее достоверной для продольных.

7. Заключение

Итак, в настоящем обзоре мы обсудили наблюдаемые статистические характеристики однородной и изотропной гидродинамической турбулентности и подходы к их объяснению. Мы описали парадигму, основанную на идее дробления вихрей, и указали её недостатки: невозможность объяснить существование долгоживущих когерентных структур, отсутствие механизма дробления вихря и необходимость привлечения гипотезы о возникновении сингулярностей, трудности с объяснением степенного характера структурных функций выс-

ших порядков и их перемежаемости, а также наблюдаемого неравенства продольных и поперечных компонент.

Мы обсудили также альтернативную концепцию — модель растягивающихся вихревых нитей (филаментов). Существование вихревых нитей является экспериментальным фактом, а их конфигурация — предметом большого числа работ; однако разрабатываемая нами динамическая модель отличается тем, что она описывает эволюцию отдельного вихря. Именно растяжение филамента является, с нашей точки зрения, главным процессом, определяющим статистику мелкомасштабных движений в турбулентном течении.

Причина возрастания завихренности и дальнейшего растяжения вихревого филамента состоит в том, что случайные силы, хотя они и деформируют вихревой филамент в различных направлениях, приводят к его систематическому растяжению. Чтобы выделить эту систематическую тенденцию, мы отказались от обычного способа введения стохастичности в уравнение Навье–Стокса посредством добавления в него случайной крупномасштабной силы. Мы полагаем независимой случайной величиной крупномасштабные пульсации скорости, выделяя их в уравнении Навье–Стокса как параметрический шум. Такой способ введения случайности физически обоснован и естествен, так как механизм, генерирующий случайность, уже присутствует в уравнении. Кроме того, полученная в результате стохастическая формулировка уравнения Навье–Стокса (15), (17) позволяет существенно упростить решение.

Оказывается, что при определённом преобразовании переменных в асимптотике $t \rightarrow \infty$ наступает вырождение нелинейности: давление, хотя оно и играет определяющую роль в балансе сил, удерживающих филаменты от распада, не влияет на их растяжение. Поэтому уравнение (26), управляющее эволюцией завихренности, оказывается относительно простым. Анализ его решения (32) показывает, что внутри филамента возникает степенное распределение завихренности, однако сингулярности не возникает даже в пределе $\nu = 0$, поскольку в центре филамента всегда остаётся экспоненциально сужающаяся со временем нестационарная область, обеспечивающая гладкость решения. Таким образом, полученное решение обладает всеми преимуществами степенного распределения завихренности, и в то же время оно лишено недостатков "сингулярных" моделей.

С точки зрения полученного решения, случайность в уравнении (17) разбивается на две части: случайные вращения координат и шум вокруг ляпуновских экспонент. Упрощённая модель, в которой исключены случайные вращения, позволяет наглядно проиллюстрировать свойства решения, обсудить подробности предельного перехода $\nu \rightarrow 0$ и исследовать влияние оставшегося, не связанного с вращениями, шума — случайной неравномерности растяжения филамента. Оказывается, что эта неравномерность приводит к нелинейной зависимости показателей структурных функций скорости от их порядка (48), т.е. к перемежаемости.

Таким образом, показано, что исследование эволюции вихревых филаментов позволяет объяснить как степенной характер структурных функций, так и их перемежаемость. Тем самым указаны объекты, "населяющие" различные h -классы мультифрактальной теории, что позволяет вернуть ей изначальный смысл, не вводя

вероятностной формулировки и одновременно не предполагающая существования сингулярностей.

Модель вихревых филаментов — единственная на сегодня теория, объясняющая обнаруженное в экспериментах и численных расчётах различие показателей продольных и поперечных структурных функций скорости. Согласно этой модели, найденное различие не обусловлено конечным числом Рейнольдса, а является фундаментальным свойством турбулентности. Таким образом, если в дальнейшем будет уверенно подтверждено различие ζ_n^\perp и ζ_n^\parallel , то это станет подтверждением данной теории.

Показатели (51), (55), вычисленные на основе модели, совпадают с данными численного моделирования в пределах ошибок (см. рис. 8). При этом теория предсказывает насыщение ζ_n^\perp с предельным значением $\zeta_\infty^\perp = 2$. Что касается продольных структурных функций, то, поскольку $\zeta_n^\perp < \zeta_n^\parallel$, они оказываются второстепенными по отношению к поперечным. Поэтому, хотя результат (55) и описывает экспериментальные данные, с точки зрения теории его достоверность меньше, чем достоверность результата для поперечной компоненты.

Работа поддержана Программой президиума РАН "Нелинейная динамика в математических и физических науках".

Список литературы

1. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **32** (1) 19 (1941); Перевод на англ. яз.: Kolmogorov A N *Selected Works of A. N. Kolmogorov* Vol. 1 (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991) p. 324
2. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** (4) 299 (1941); Перевод на англ. яз.: Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
4. Фриш У *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: ФАЗИС, 1998); Frisch U *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
5. Гурвич А С *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* **7** 1042 (1960)
6. Champagne F H *J. Fluid Mech.* **86** 67 (1978)
7. Будаев В П, Савин С П, Зелёный Л М *УФН* **181** 905 (2011); Budaev V P, Savin S P, Zelenyi L M *Phys. Usp.* **54** 875 (2011)
8. Benzi R et al. *J. Fluid Mech.* **653** 221 (2010)
9. Gotoh T, Fukayama D, Nakano T *Phys. Fluids* **14** 1065 (2002)
10. Herweijer J A, van de Water W, in *Advances in Turbulence V. Proc. of the Fifth European Turbulence Conf., Siena, Italy, 5–8 July 1994* (Ed. R Benzi) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1995) p. 210
11. Chen S et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2253 (1997)
12. Dhruva B, Tsuji Y, Sreenivasan K R *Phys. Rev. E* **56** R4928 (1997)
13. Grauer R, Homann H, Pinton J-F *New J. Phys.* **14** 063016 (2012)
14. The Clay Mathematics Institute (CMI): Millennium Problems, <http://www.claymath.org/millennium-problems>
15. Lions J L *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires* (Paris: Dunod, 1969)
16. Mattingly J C, Sinai Ya G *Commun. Contemp. Math.* **1** 497 (1999)
17. Zakharov V E, L'vov V S, Falkovich G *Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence* (Berlin: Springer, 1992)
18. Кузнецов Е А, Рубан В П *ЖЭТФ* **118** 893 (2000); Kuznetsov E A, Ruban V P *JETP* **91** 775 (2000)
19. Orlandi P, Pirozzoli S, Carnevale G F *J. Fluid Mech.* **690** 288 (2012)
20. Gibbon J D et al. *Nonlinearity* **27** 2605 (2014)
21. Okamoto N et al. *Phys. Fluids* **19** 115109 (2007)
22. Kopev V, Chernyshev S *Int. J. Aeroacoustics* **13** 39 (2014)
23. Brachet M E et al. *Phys. Fluids A* **4** 2845 (1992)
24. She Z-S, Jackson E, Orszag S A *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 101 (1991)
25. Farge M, Pellegrino G, Schneider K *Phys. Rev. Lett.* **87** 054501 (2001)
26. Cafarelli L, Kohn R, Nirenberg L *Commun. Pure Appl. Math.* **35** 771 (1982)
27. Constantin P, in *New Perspectives in Turbulence* (Ed. L Sirovich) (New York: Springer-Verlag, 1991) p. 229
28. Frisch U, in *Chaotic Behavior of Deterministic Systems, Les Houches, Session XXXV, 1981* (Eds G Iooss, R H G Helleman, R Stora) (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1983) p. 665
29. Yakhot V, Orszag S A *Phys. Rev. Lett.* **57** 1722 (1986)
30. Eyink G, Goldenfeld N *Phys. Rev. E* **50** 4679 (1994)
31. Белиничер В И, Львов В С *ЖЭТФ* **93** 533 (1987); Belinicher V I, L'vov V S *Sov. Phys. JETP* **66** 303 (1987)
32. Chertkov M et al. *Phys. Rev. E* **52** 4924 (1995)
33. Parisi G, Frisch U, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (Proc. Intern. School of Physics "Enrico Fermi", Course 88, Eds M Ghil, R Benzi, G Parisi) (Amsterdam: North-Holland, 1985) p. 84
34. Boffetta G, Mazzino A, Vulpiani A *J. Phys. A Math. Theor.* **41** 363001 (2008)
35. Арнольд В И, Варченко А Н, Гусейн-заде С М *Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов* (М.: Наука, 1982); Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N *Singularities of Differentiable Maps Vol. 1 The Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts* (Boston: Birkhäuser, 1985)
36. Moffatt H K, Kida S, Ohkitani K *J. Fluid Mech.* **259** 241 (1994)
37. Chorin A J *Commun. Math. Phys.* **132** 519 (1990)
38. Chorin A J, Akae J H *Physica D* **52** 403 (1991)
39. She Z-S, Leveque E *Phys. Rev. Lett.* **72** 336 (1994)
40. Зыбин К П, Сирота В А, Ильин А С, Гуревич А В *ЖЭТФ* **132** 510 (2007); Zybin K P, Sirota V A, Ilyin A S, Gurevich A V *JETP* **105** 455 (2007)
41. Zybin K P, Sirota V A, Ilyin A S, Gurevich A V *Phys. Rev. Lett.* **100** 174504 (2008)
42. Zybin K P, Sirota V A, Ilyin A S *Phys. Rev. E* **82** 056324 (2010)
43. Zybin K P, Sirota V A *Phys. Rev. E* **88** 043017 (2013)
44. de Karman T, Howarth L *Proc. R. Soc. Lond. A* **164** 192 (1938)
45. Falkovich G, Gawedzki K, Vergassola M *Rev. Mod. Phys.* **73** 913 (2001)
46. Balkovsky E, Lebedev V *Phys. Rev. E* **58** 5776 (1998)
47. Falkovich G, Lebedev V *Phys. Rev. E* **50** 3883 (1994)
48. Gamba A, Kolokolov I V *J. Stat. Phys.* **85** 489 (1996)
49. Легчиков А В *УМН* **51** (1) 51 (1996); Letchikov A V *Russ. Math. Surv.* **51** 49 (1996)
50. Furstenberg H *Trans. Am. Math. Soc.* **108** 377 (1963)
51. Тутубалин В Н *Теория вероятн. и ее примен.* **10** 19 (1965); Tutubalin V N *Theory Probab. Appl.* **10** 15 (1965)
52. Тутубалин В Н *Теория вероятн. и ее примен.* **22** 209 (1977); Tutubalin V N *Theory Probab. Appl.* **22** 203 (1978)
53. Тутубалин В Н *Теория вероятн. и ее примен.* **14** 319 (1969); Tutubalin V N *Theory Probab. Appl.* **14** 313 (1969)
54. Тутубалин В Н *Теория вероятн. и ее примен.* **13** 63 (1968); Tutubalin V N *Theory Probab. Appl.* **13** 65 (1968)
55. Hill R J *J. Fluid Mech.* **434** 379 (2001); physics/0102063
56. Ил'ин А С, Зыбин К П *Phys. Lett. A* **379** 650 (2015)
57. L'vov V S, Pomyalov A, Procaccia I *Phys. Rev. E* **63** 056118 (2001)
58. Balkovsky E, Fouxon A *Phys. Rev. E* **60** 4164 (1999)
59. Yakhot V *Phys. Rev. E* **63** 026307 (2001)

60. Biferale L, Procaccia I *Phys. Rep.* **414** 43 (2005)
61. Zhou T, Antonia R A *J. Fluid Mech.* **406** 81 (2000)
62. Schumacher J, Sreenivasan K R, Yakhot V *New J. Phys.* **9** 89 (2007)
63. Sirota V A, Zybin K P *Phys. Scripta* (T155) 014005 (2013); Zybin K P, Sirota V A, arXiv:1204.1465
64. Yakhot V *J. Fluid Mech.* **495** 135 (2003)

Stretching vortex filaments model and the grounds of statistical theory of turbulence

K.P. Zybin, V.A. Sirota

*Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: zybin@lpi.ru, sirota@lpi.ru*

Although statistical properties of small-scale velocity perturbations in homogeneous and isotropic hydrodynamic turbulence are well studied experimentally and numerically, no definite theoretical explanation is available yet. The concept of breaking vortices commonly accepted as the primary turbulent mechanism not only fails to account for a number of facts but also is self-contradictory. This review discusses an alternative concept according to which the stretching of vortices rather than their decay is the determining process. The evolution of stretching vortex filaments and their properties are derived directly from the Navier–Stokes equation. The model of stretching vortex filaments explains the power-law behavior of velocity structure functions and the intermittency of their exponents, thus imparting physical meaning to multifractal theory which is based on dimensional considerations. The vortex filaments model is the only theory that explains the observed differences between the scaling exponents of longitudinal and transverse structure functions.

Keywords: hydrodynamics, turbulence, statistical theory

PACS numbers: 47.10.ad, 47.27.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201506b.0593

Bibliography — 64 references

Received 20 January 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (6) 593–612 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (6) (2015)