

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Аналитические модели релятивистских аккреционных дисков

В.В. Журавлёв

Представлен не литературный обзор, а по возможности детальное и последовательное описание двух аналитических моделей дисковой аккреции на вращающиеся чёрные дыры: стандартного релятивистского диска и искривлённого релятивистского диска. Несмотря на разницу в возрасте, обе модели являются весьма актуальными в современных астрофизических исследованиях свойств чёрных дыр. Изложение построено так, что читатель имеет возможность выяснить многие технические подробности, которые были опущены в оригинальных статьях, при этом имея лишь общие знания по общей теории относительности и релятивистской гидродинамике и мало обращаясь к дополнительным источникам.

Ключевые слова: аккреция, аккреционные диски, чёрные дыры, гидродинамика

PACS numbers: 04.20.Cv, 04.70.Bw, 47.10.A–, 47.10.ad, 97.10.Gz

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201506a.0561

Содержание

1. Релятивистский стандартный аккреционный диск (561).
1.1. Пространство-время в окрестности вращающейся чёрной дыры. 1.2. Выбор системы отсчёта. 1.3. Построение модели стандартного диска.
 2. Релятивистский изгибный аккреционный диск (573).
2.1. Вводные замечания. 2.2. Выбор системы отсчёта. 2.3. Система изгибных уравнений. 2.4. Стационарный изгибный диск.
 3. Заключение (590).
- Список литературы (591).

1. Релятивистский стандартный аккреционный диск

В первой части работы изложим построение модели стандартного аккреционного диска вокруг вращающейся чёрной дыры со строгим учётом эффектов общей теории относительности. Эта модель была впервые описана в работе [1] и с тех пор используется в многочисленных исследованиях для получения строгих свидетельств существования чёрных дыр как в двойных звёздных системах, так и в центрах активных галактических ядер. И по сей день её актуальность несомненна, поскольку именно полный учёт общерелятивистских свойств движения вещества в диске и распространения выходящего с его поверхности излучения даёт принципиальную возможность определить из наблюдений положение внутреннего края диска, а следовательно, и темп вращения самой чёрной дыры. Моделирование

наблюдательных проявлений релятивистских дисков было начато в работе [2], в качестве более поздних репрезентативных примеров можно привести работы [3, 4] (см. также ссылки в них и на них). Кроме того, релятивистский стандартный аккреционный диск служит основой для построения теории более сложных дисков искривлённой формы, возникновение которых предсказывается в случае, когда аккрецирующее вещество находится вне экваториальной плоскости вращающейся чёрной дыры. Такая теория изложена в работе [5] и подробно представлена в разделе 2.

Всюду ниже используется естественная для ОТО система единиц, в которой $G = c = 1$. Считая, кроме этого, что масса измеряется в единицах массы чёрной дыры, M , мы получаем возможность измерять длины в единицах половины шварцшильдовского гравитационного радиуса, $R_g/2$, так как $R_g/2 = GM/c^2 = 1$ в принятой системе, а времена — в единицах времени прохождения световым сигналом указанного единичного расстояния.

Кроме того, при нумерации компонент векторов и тензоров будем пользоваться латинскими индексами $i, j, k, \dots$ и будем считать, что они пробегает значения от 0 до 3, где нулевой индекс соответствует временной координате. Также везде, где это необходимо, будет подразумеваться правило суммирования по повторяющимся индексам, введённое Эйнштейном.

1.1. Пространство-время в окрестности вращающейся чёрной дыры

1.1.1. Метрика Керра. Свойства пространства-времени в окрестности вращающейся чёрной дыры описываются аксиально-симметричной и стационарной метрикой следующего вида (см., например, книгу [6], параграф 4.2):

$$ds^2 = \frac{\varrho^2 \Delta}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\varrho^2} (d\phi - \omega dt)^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta} dR^2 - \varrho^2 d\theta^2, \quad (1.1)$$

В.В. Журавлёв. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп. 13, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: zhuravlev@sai.msu.ru

Статья поступила 11 декабря 2014 г.,
после доработки 19 января 2015 г.

где выбрана сигнатура $(1, -1, -1, -1)$ и использованы обозначения

$$\Sigma^2 = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \\ \varrho^2 = R^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = R^2 - 2R + a^2.$$

Координаты $\{t, \phi, R, \theta\}$ называются координатами Бойера–Линдквиста. Вдалеке от тяготеющего объекта пространственная часть этих координат в пределе равного нулю параметра вращения чёрной дыры, a , переходит в обычные сферические координаты, где ϕ — угол, отсчитываемый в азимутальном направлении. В той же ситуации, но при a , отличном от нуля, координаты Бойера–Линдквиста переходят в обобщённые сферические координаты, в которых поверхности постоянной радиальной координаты, $R = \text{const}$, являются сфероидом с отношением полуосей, равным $R/(R^2 + a^2)^{1/2}$.

Пространство-время, задаваемое (1.1), обладает осевой симметрией относительно прямой $\theta = 0$, называемой осью вращения чёрной дыры; плоскость же, соответствующая $\theta = \pi/2$, называется её экваториальной плоскостью.

В формуле (1.1) фигурирует важная величина

$$\omega = \frac{2aR}{\Sigma^2}, \quad (1.2)$$

имеющая размерность частоты и являющаяся угловой скоростью, которую дополнительно приобретают в направлении вращения чёрной дыры все без исключения свободно движущиеся наблюдатели.

Как описано в литературе, посвящённой строению вращающихся чёрных дыр (см., например, книгу [7], параграф 58), метрика (1.1) обладает несколькими особенностями гиперповерхностями, включая горизонт событий и эргосферу. Однако, как будет показано ниже, для рассматриваемой астрофизической задачи важно знать прежде всего динамику свободного кругового движения частиц в экваториальной плоскости тяготеющего объекта. Мы увидим, что такое движение обладает дополнительными особенностями по сравнению с соответствующей ньютоновской задачей. Отметим ещё, что в разделе 2 нам понадобится представление о слабо эллипсоидальных орбитах, слегка наклонённых по отношению к экваториальной плоскости.

Нас интересует модель стандартного, а значит, геометрически тонкого аккреционного диска. Здесь мы рассматриваем основной случай, когда диск является плоским. По определению это стационарный поток вещества, обладающий зеркальной симметрией относительно своей срединной плоскости и осевой симметрией относительно прямой, перпендикулярной этой плоскости. Очевидно, что такая модель течения может быть согласована с динамическими уравнениями, в которых заложена осевая симметрия метрики, только если плоскость симметрии диска совпадает с экваториальной плоскостью чёрной дыры. Тогда для решения задачи достаточно знать вид метрики вблизи плоскости $\theta = \pi/2$. Переходя к цилиндрическим координатам стандартной заменой

$$r = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta,$$

разложим все метрические коэффициенты g_{ik} в (1.1) в ряд по степеням малого отношения $z/r \ll 1$. Для модели

геометрически тонкого диска нам будет достаточно знать поправки к g_{ik} за счёт выхода из экваториальной плоскости точностью не выше $(z/r)^2$. Действительно, одно из уравнений, описывающих диск, а именно, проекция релятивистского аналога уравнения Эйлера на направление, перпендикулярное плоскости диска, должно быть нечётным по отношению к замене $z \rightarrow -z$ в силу зеркальной симметрии диска. Это означает, что в его разложении в ряд по z/r должны фигурировать только нечётные степени z/r . В силу главного предположения о малости z/r нам достаточно учесть первую степень этого отношения. Это, в свою очередь, соответствует разложению g_{ik} вплоть до квадратичных членов, так как в динамических уравнениях фигурируют лишь первые производные от g_{ik} , характеризующие "напряжённость" гравитационного поля.

Заметим, однако, что гидродинамические уравнения содержат ещё вторую ковариантную производную от поля скоростей (см. ниже), а значит, в итоговых выражениях могут появиться и вторые производные от g_{ik} по z , что, казалось бы, заставляет удерживать в g_{ik} и вклад порядка $(z/r)^3$. Но этого не требуется, поскольку, как следует из явного вида тензора энергии-импульса, такие члены могут появиться только будучи домноженными на какой-либо из коэффициентов вязкости, которые в свою очередь не могут по величине превышать порядка z/r уже хотя бы потому, что пропорциональны характерной длине перемешивания в жидкости. Последняя же, как обычно предполагается заранее, не превышает толщины диска.

Что касается остальных уравнений, а именно (см. ниже): двух проекций релятивистского аналога уравнения Эйлера в плоскости диска, уравнения энергетического баланса и закона сохранения энергии покоя, то из тех же соображений симметрии следует, что они являются чётными относительно замены $z \rightarrow -z$, а значит, ведущим будет вклад из метрики, соответствующий лишь нулевому порядку по z/r .

Используя обсуждаемые разложения и соотношения для дифференциалов координат,

$$dR = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^2}\right) dr + \frac{z}{r} dz, \\ d\theta = \frac{z}{r} \frac{dr}{r} - \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \frac{dz}{r},$$

находим метрику в следующем виде (см. также работу [8]):

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2}{r} + \frac{z^2}{r^3} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2}\right)\right] dt^2 - \\ - \left[r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r} - \frac{a^2 z^2}{r^2} \left(1 + \frac{5}{r} + \frac{2a^2}{r^3}\right)\right] d\phi^2 + \\ + \frac{2a}{r} \left[2 - \frac{z^2}{r^2} \left(3 + \frac{2a^2}{r^2}\right)\right] dt d\phi - \\ - \left\{1 - \frac{z^2}{r^2 D} \left[\frac{3}{r} - \frac{4}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} \left(3 - \frac{6}{r} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\right]\right\} \frac{dr^2}{D} - \\ - \frac{2z}{rD} \left(\frac{2}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right) dr dz - \\ - \left[1 + \frac{z^2}{r^2 D} \left(\frac{2}{r} - \frac{2a^2}{r^3} + \frac{a^4}{r^4}\right)\right] dz^2, \quad (1.3)$$

где введено обозначение

$$D = 1 - \frac{2}{r} + \frac{a^2}{r^2}.$$

Мы и дальше, за несколькими исключениями, будем придерживаться обозначений, которые введены в оригинальной работе Новикова и Торна [1] для поправочных релятивистских коэффициентов.

Наконец, приведём здесь вид обратной матрицы g^{ik} , соответствующей двухконтрвариантному метрическому тензору:

$$g^{ik} = \begin{vmatrix} (g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2)^{-1} & \begin{vmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & -g_{tt} \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & (g_{rr}g_{zz} - g_{rz}^2)^{-1} & \begin{vmatrix} g_{zz} & -g_{rz} \\ -g_{rz} & -g_{rr} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

1.1.2. Круговые экваториальные геодезические. Выражение для круговых экваториальных геодезических удобно найти, используя факт экстремальности расстояния, откладываемого вдоль них. Здесь мы следуем изложению, данному в книге [9, параграфы 13.10 и 13.13]. Действительно, для времениподобных траекторий должен быть минимален функционал

$$S = \int L ds = \int g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} ds,$$

что эквивалентно выполнению уравнений Эйлера–Лагранжа для L :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (1.5)$$

где $U_g^i \equiv dx^i/ds \equiv \dot{x}^i$ — 4-скорость в координатах Бойера–Линдквиста. Поскольку L не зависит явно от t и ϕ , видим, что в нашем случае должны сохраняться величины

$$g_{tt}U_g^t = k, \\ g_{\phi i}U_g^i = -h,$$

где по смыслу k и h — соответственно временная и азимутальная ковариантные компоненты 4-скорости.

В явном виде, используя компоненты g_{ik} из (1.3) при $z = 0$, имеем

$$\left(1 - \frac{2}{r}\right) \dot{t} + \frac{2a}{r} \dot{\phi} = k, \quad (1.6)$$

$$\frac{2a}{r} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}\right) \dot{\phi} = -h. \quad (1.7)$$

Пока будем считать, что движение не обязательно круговое и $U_g^r \neq 0$. Вместо r -компоненты уравнений Эйлера–Лагранжа удобнее записать просто условие нормировки 4-скорости частиц с ненулевой массой:

$$g^{tt}k^2 - 2g^{t\phi}kh + g^{\phi\phi}h^2 + g^{rr}(U_r)^2 = 1. \quad (1.8)$$

Это даёт следующее уравнение для k и h :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = \frac{k^2 - 1}{2}, \quad (1.9)$$

где мы ввели эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{r} + \frac{h^2 - a^2(k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{(h - ak)^2}{r^3}. \quad (1.10)$$

Условиями кругового движения будут, во-первых, $\dot{r} = 0$ и, во-вторых, $\ddot{r} = 0$ — для того чтобы частица оставалась на круговой орбите. Последнее условие эквивалентно тому, что равна нулю производная по r от V_{eff} :

$$1 + \frac{a^2(k^2 - 1) - h^2}{r} + \frac{3(h - ak)^2}{r^2} = 0. \quad (1.11)$$

Условие (1.9) при $\dot{r} = 0$ и условие (1.11) позволяют определить k и h как функции r и затем, используя (1.6) и (1.7), найти U_g^t и U_g^ϕ .

Для выполнения первой задачи перейдём к переменной $u \equiv h - ak$ и, чтобы облегчить выкладки, сделаем замену $u \equiv 1/r$. Тогда равенство (1.9), взятое с $\dot{r} = 0$, и равенство (1.11) дают следующее уравнение для u :

$$u^2[(3u - 1)^2 - 4a^2u^3]\mu^4 - 2u[(3u - 1)(a^2u - 1) - 2ua^2(u - 1)]\mu^2 + (au - 1)^2 = 0. \quad (1.12)$$

Решение (1.12) для интересующего нас случая устойчивой круговой орбиты с вращением по направлению вращения самой чёрной дыры имеет вид

$$\mu = -\frac{a\sqrt{u} - 1}{[u(1 - 3u + 2au^3/2)]^{1/2}}. \quad (1.13)$$

Используя (1.13) и уравнение (1.9), взятое при $\dot{r} = 0$, находим константы h и k , а также сами компоненты U_g^i :

$$U_g^t = C^{-1/2} B, \quad U_g^\phi = (r^3 C)^{-1/2}, \quad U_g^r = U_g^z = 0, \quad (1.14)$$

где

$$B = 1 + \frac{a}{r^{3/2}}, \quad C = 1 - \frac{3}{r} + \frac{2a}{r^{3/2}}. \quad (1.15)$$

Нетрудно проверить, что модуль данного вектора равен единице:

$$g_{ik} U_g^i U_g^k = 1.$$

Угловая скорость по часам бесконечно удалённого наблюдателя (отсчитывающего на своих часах координатное время t), соответствующая такому движению, будет равна

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = r^{-3/2} B^{-1}. \quad (1.16)$$

Как видно, в шварцшильдовском случае эта величина точно совпадает с известным кеплеровским значением.

1.1.3. Радиус последней устойчивой орбиты. Условием устойчивости кругового движения должно быть исчезновение минимума функции $V_{\text{eff}}(r, h(r_c), k(r_c))$ при $r = r_c$, где r_c — радиус круговой орбиты. Это эквивалентно условию

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_c} = 0,$$

что приводит нас к следующему уравнению:

$$z^4 - 6z^2 + 8az - 3a^2 = 0, \quad (1.17)$$

где $z \equiv r^{1/2}$.

Следуя методу Феррари (см., например, [10]), запишем соответствующее вспомогательное кубическое уравнение:

$$y^3 - 12y^2 + 12(3 + a^2)y - 64a^2 = 0. \quad (1.18)$$

Действительный корень уравнения (1.18) связан с решением Кардано соответствующего неполного кубического уравнения и даётся выражением

$$y_1 = -2(1 - a^2)^{1/3}[(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}] + 4. \quad (1.19)$$

Далее, зная y_1 , можно воспользоваться решением Феррари и записать квадратное уравнение, которое даёт два действительных корня (1.17):

$$p^2 + \sqrt{y_1}p + \frac{1}{2}\left(-6 + y_1 - \frac{8a}{\sqrt{y_1}}\right) = 0. \quad (1.20)$$

Наибольший из корней уравнения (1.20), p_1 , и задаёт интересующую нас границу устойчивости кругового движения пробных тел в экваториальной плоскости, которую мы обозначим как $r = r_{\text{ms}}$. Итак,

$$r_{\text{ms}} = p_1^2 = 3 + \frac{4a}{\sqrt{y_1}} - \left(-\frac{y_1^2}{4} + 4a\sqrt{y_1} + 3y_1\right)^{1/2}. \quad (1.21)$$

Нетрудно проверить, что результат (1.21) совпадает с выражением, данным в [11] (см. там формулу (15k)), учитывая, что вспомогательные величины $Z_{1,2}$ из [11] в наших обозначениях имеют вид $Z_1 \equiv 3 - y_1/2$ и $Z_2 \equiv 4a/\sqrt{y_1}$ для $a \geq 0$.

В случае шварцшильдовской метрики, $a = 0$, получаем известный результат, что круговое движение становится неустойчивым при $r < 6$, т.е. на расстояниях, меньших трёх гравитационных радиусов, от чёрной дыры. Для медленного вращения, $1 \gg a > 0$, имеем $r_{\text{ms}} \approx 6 - 4\sqrt{6}a/3$, а значит, зона устойчивости сдвигается ближе к горизонту событий. В предельном случае $a = 1$ величина $r_{\text{ms}} = 1$, т.е. совпадает с положением гравитационного радиуса экстремально вращающейся чёрной дыры.

В процессе аккреции газовые элементы в диске медленно приближаются к r_{ms} , теряя свой угловой момент из-за действия вязких сил. Как только газовые элементы оказываются в области $r < r_{\text{ms}}$, в силу неустойчивости кругового движения им больше не требуется терять угловой момент для сближения с чёрной дырой. Это означает, что внутри r_{ms} происходит свободное падение вещества, и в модели стандартного аккреционного диска предполагается, что r_{ms} является его внутренней границей.

1.2. Выбор системы отсчёта

1.2.1. Базисы в общей теории относительности. Законы механики, формулирующиеся в виде векторных уравнений, могут быть записаны в символическом виде, безотносительно к какому-либо наблюдателю и какой-либо системе координат. Но физика не существует без измерения, при котором мы получаем набор числовых величин,

описывающих природный процесс. В ньютоновской механике это означало, что наблюдатель вводит систему координат, а затем в каждой точке пространства произвольным образом строит тройку базисных векторов. Система координат и базисные векторы при этом могут эволюционировать со временем, текущим везде одинаково. Прибор для измерения времени вместе с координатной сеткой и векторным базисом являются системой отсчёта, в которой любая физическая величина, будь то скаляр, вектор или тензор, может быть измерена, т.е. ей может быть сопоставлено число или набор чисел.

Ситуация в релятивистской механике отличается тем, что мы уже не говорим о времени отдельно — оно становится четвёртым измерением в пространственно-временном континууме. Поэтому выбор системы отсчёта сводится к построению системы координат и четвёрки базисных векторов, определённой в каждой точке пространства-времени. Указанную совокупность базисных векторов в общем случае принято называть тетрадой. Универсального наблюдателя теперь не существует, говорят лишь об их совокупности, движущейся по определённому семейству мировых линий. Если при этом один из ортов тетрады, условно соответствующий временному направлению, является везде касательным к этим мировым линиям, то говорят, что данная тетрада "переносится" наблюдателями. Последнее легко понять, ведь в таком базисе 4-скорость каждого наблюдателя в любой момент времени имеет ненулевую проекцию только на "временной" орт, иными словами, наблюдатели покоятся в этом базисе, т.е. переносят его с собой.

Координатное представление. Итак, выбор системы координат и выбор тетрады являются независимыми процедурами. Тем не менее если имеется система координат, x^i , то тетраду часто выбирают так, что каждый базисный вектор, e_i , является касательным к соответствующей координатной линии. При этом модули ортов такого, как говорят, координатного базиса фиксируются тем фактом, что их попарные скалярные произведения должны быть равны соответствующим метрическим коэффициентам:

$$(e_i e_k) = g_{ik}. \quad (1.22)$$

Напомним, что в курсах дифференциальной геометрии (см. также параграфы 3.1–3.4 в книге [9]) такие координатные орты вводятся как объекты, изоморфные частным производным по координатам от произвольной скалярной функции на многообразии,

$$e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.23)$$

Любой (касательный) вектор является линейной комбинацией координатных ортов, а коэффициенты этой линейной комбинации называются контравариантными компонентами вектора.

Дополнительно к e_i вводят так называемый дуальный базис e^i , орты которого удовлетворяют условию

$$(e_i e^j) = \delta_i^j, \quad (1.24)$$

где δ_i^j — символ Кронекера. Условие (1.24) говорит о том, что каждый орт дуального базиса имеет единичную

проекцию на соответствующий себе орт исходного базиса и ортогонален всем остальным ортам исходного базиса.

Дуальные координатные орты, в свою очередь, вводятся как объекты, изоморфные дифференциалам координат,

$$\mathbf{e}^j \equiv dx^j. \quad (1.25)$$

Если далее использовать тот факт, что произвольный касательный вектор $\mathbf{A}$ может быть альтернативно разложен в линейную комбинацию дуальных координатных ортов, коэффициенты которой называются ковариантными компонентами вектора, то получим известное правило опускания векторных индексов:

$$\begin{aligned} A_k &= A_i (\mathbf{e}^i \mathbf{e}_k) = (A_i \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_k = (A^i \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_k = \\ &= A^i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) = A^i g_{ik}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Таким же образом легко показать, что если ввести обозначение $g^{ik} \equiv (\mathbf{e}^i \mathbf{e}^k)$, то за счёт дуальности базисов матрица g^{ik} является обратной матрице g_{ik} и имеет место также правило поднятия векторных индексов. Аналогично представление в координатных базисах распространяется и на общий случай тензоров.

Тетрадное представление. В этом и следующем разделах мы преимущественно следуем изложению, данному в параграфе 7 книги [12]. Допустим, что теперь мы хотим спроецировать всё те же векторы и тензоры на произвольную тетраду, задаваемую соотношениями

$$\mathbf{e}_{(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.27)$$

здесь $e_{(a)}^i$ — совокупность неких функций координат, а в скобки заключены индексы, нумерующие тетрадные орты.

Из того же условия дуальности (1.24) введём дуальную тетраду:

$$\mathbf{e}^{(a)} = e^{(a)}_i dx^i, \quad (1.28)$$

здесь $e^{(a)}_i$ — матрица, обратная матрице $e_{(a)}^i$.

В данных матрицах встречаются два сорта индексов: координатные и тетрадные. Координатные индексы могут быть опущены или подняты при помощи метрики (1.1). Как дополнительное ограничение на тетраду положим, что

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \quad e^{(a)i} e^{(b)}_i = \eta^{(a)(b)}, \quad (1.29)$$

где

$$\eta_{(a)(c)} \eta^{(c)(b)} = \delta_{(a)}^{(b)} \quad (1.30)$$

— взаимнообратные матрицы и $\eta_{(c)(b)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — матрица Минковского. Иными словами, мы требуем здесь, чтобы исходная и дуальная тетрады были ортонормированы в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве.

Используя указанные соотношения, нетрудно показать, что

$$e^{(a)}_i e_{(a)j} = g_{ij}, \quad (1.31)$$

а значит, верно следующее альтернативное выражение для квадрата интервала:

$$ds^2 = \eta_{(a)(b)} (e^{(a)}_i dx^i) (e^{(b)}_k dx^k) = \eta_{(a)(b)} \mathbf{e}^{(a)} \mathbf{e}^{(b)}, \quad (1.32)$$

которое пригодится в дальнейшем.

Обратим внимание на то, что величины в скобках в правой части (1.32) можно рассматривать как бесконечно малые смещения вдоль соответствующих ортов тетрады, поэтому во введённом тетрадном представлении с ортонормированной тетрадой квадрат интервала принимает точно такой же вид, как в пространстве Минковского в специальной теории относительности. Аналогично, выражения (1.27) можно рассматривать как производные по направлению вдоль ортов тетрады — и это именно те комбинации, в которые переходят привычные частные производные по координатам в координатном базисе, когда мы переходим от него к тетраде.

Используя приведённые только что определения и соотношения, легко увидеть, как выражаются тетрадные компоненты векторов и тензоров через свои координатные компоненты. Тетрадные компоненты вектора записываются как

$$A_{(a)} = e_{(a)}^i A_i, \quad A^{(a)} = e_i^{(a)} A^i = \eta^{ab} A_{(b)}. \quad (1.33)$$

И наоборот,

$$A_i = e_i^{(a)} A_{(a)}, \quad A^i = e_{(a)}^i A^{(a)}.$$

Аналогичные выражения можно записать для тензоров произвольной валентности. Например, для дважды ковариантного тензора имеем

$$T_{(a)(b)} = e_{(a)}^i e_{(b)}^j T_{ij} = e_{(a)}^i T_{i(b)},$$

и обратно:

$$T_{ij} = e_i^{(a)} e_j^{(b)} T_{(a)(b)} = e_i^{(a)} T_{(a)j}. \quad (1.34)$$

В заключение отметим, что из соотношений (1.33) и изоморфизма (1.25) следует выражение для контравариантных компонент 4-скорости в тетрадном представлении:

$$U^{(a)} = \frac{\mathbf{e}^{(a)}}{ds}, \quad (1.35)$$

т.е. это по-прежнему единичный касательный вектор вдоль мировой линии, только его компоненты даются теперь малыми смещениями вдоль соответствующих ортов дуального базиса. При помощи (1.33) легко узнавать связь между привычными координатными компонентами 4-скорости, $U^i = dx^i/ds$, и её тетрадными компонентами. Ковариантные тетрадные компоненты определяются из контрвариантных по стандартному правилу специальной теории относительности: при опускании индекса, соответствующего пространственной компоненте, знак компоненты меняется на противоположный.

Ковариантная производная в тетрадном представлении. Вычислим производную по направлению тетрадного орта от ковариантной компоненты вектора:

$$\begin{aligned} A_{(a)(b)} &= e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} e_{(a)}^j A_j = \\ &= e_{(b)}^i [e_{(a)}^j A_{j;i} + A_k e_{(a);i}^k]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь ; обозначает обычную ковариантную производную в координатном базисе.

Выражение (1.36) переписываем в виде

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + e_{(a)k;i} e_{(b)}^i e_{(c)}^k A^{(c)}, \quad (1.37)$$

откуда имеем

$$e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i = A_{(a),(b)} - \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}, \quad (1.38)$$

где $\gamma_{(c)(a)(b)}$ — так называемые коэффициенты вращения Риччи,

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = e_{(b)k;i} e_{(c)}^i e_{(a)}^k. \quad (1.39)$$

Важный момент состоит в том, что для ортонормированных базисов, удовлетворяющих условию (1.29), коэффициенты $\gamma_{(a)(b)(c)}$ антисимметричны по первым двум индексам. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= (\eta_{(b)(a)})_{,i} = (e_{(b)k} e_{(a)}^k)_{,i} = e_{(b)k;i} e_{(a)}^k + e_{(b)k} e_{(a);i}^k = \\ &= e_{(b)k;i} e_{(a)}^k + e_{(b)}^k e_{(a)k;i}. \end{aligned}$$

Сравнивая это соотношение с (1.39), убеждаемся в указанном свойстве коэффициентов вращения Риччи.

Наконец, обсудим ещё одно полезное свойство (1.39) — для вычисления этих коэффициентов требуются лишь частные производные от компонент ортов тетрадного базиса, а значит, нет необходимости в знании символов Кристоффеля. Действительно, если ввести вспомогательные комбинации

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(b)i;j} [e_{(a)}^j e_{(c)}^i - e_{(a)}^i e_{(c)}^j], \quad (1.40)$$

и переписать их в виде

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(a)}^i e_{(c)}^j [e_{(b)i;j} - e_{(b)j;i}], \quad (1.41)$$

то можно в последнем выражении заменить обычные производные на ковариантные, в силу того что добавочные члены с символами Кристоффеля симметричны по индексам i, j . Тогда выражение (1.41) равно просто разности $\gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}$.

Но в таком случае

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}] \quad (1.42)$$

и, используя (1.40), можно вычислить коэффициенты вращения Риччи, беря лишь частные производные от компонент ортов тетрадного базиса.

Обратим теперь внимание на формулу (1.38). В её левой части стоит просто проекция на тетрадный базис дважды ковариантного тензора, являющегося результатом взятия ковариантной производной от некоторого векторного поля. Поэтому данная комбинация сохраняет свой смысл ковариантной производной от вектора, взятой в некоординатном базисе. Далее, правая часть (1.38) имеет точно такой же вид, как и ковариантная производная, взятая в координатном базисе, с той лишь разницей, что тут фигурируют теперь тетрадные индексы (которые можно поднимать и опускать, в том числе и у $\gamma_{(a)(b)(c)}$, при помощи метрики Минковского). Можно показать, что всё то же самое имеет место и для случая

контравариантных компонент векторного поля и для тензорных полей вообще.

Итак, поскольку покомпонентное выражение для ковариантной производной сохраняет тот же вид и в тетрадном базисе, принято использовать все те же обозначения и термины, которые применяются при работе в координатном базисе. В частности, коэффициенты вращения Риччи называют просто символами связности данного базиса. Ещё раз подчеркнём, что их нельзя путать с символами Кристоффеля, которые представляют другой предельный случай символов связности в координатном базисе и обладают другой симметрией по индексам.

1.2.2. Тетрада, переносимая вращающимися наблюдателями. Построим тетрадный базис, связанный в каждой точке пространства-времени с наблюдателями, движущимися вокруг чёрной дыры по окружностям параллельно её экваториальной плоскости с угловой скоростью Ω . Строго при $z = 0$ это будет свободное движение вдоль найденных в разделе 1.1.2 геодезических. Однако при любом малом выходе из экваториальной плоскости такое движение, соответствующее неизменному z , будет возможно лишь при наличии какой-то поддерживающей его внешней силы, в случае диска, к примеру, ею является вертикальный градиент газового давления.

Построение необходимо начать с того, что направить временной орт нашей тетрады вдоль обсуждаемой мировой линии. Используя вектор 4-скорости геодезической, найденной в разделе 1.1.2, запишем его в виде

$$\mathbf{e}_{(t)} = (U_g^t + Z_0) \frac{\partial}{\partial t} + U_g^\phi \frac{\partial}{\partial \phi},$$

где мы добавили поправку $Z_0(z/r)$ к временной компоненте, поскольку должны потребовать равенства единице модуля вектора $\mathbf{e}_{(t)}$ и вне экваториальной плоскости, тогда как сам вектор U_g остаётся единичным лишь точно при $z = 0$. Ясно, что именно с учётом указанной поправки $\mathbf{e}_{(t)}$ будет соответствовать 4-скорости реального движения. Если вычислить, пользуясь метрикой (1.3), модуль $\mathbf{e}_{(t)}$, то можно увидеть, что он равен единице при следующем условии:

$$Z_0 = -\left(\frac{z}{r}\right)^2 \frac{H}{2rGC^{1/2}},$$

где мы ввели поправочные релятивистские коэффициенты

$$G = 1 - \frac{2}{r} + \frac{a}{r^{3/2}}, \quad (1.43)$$

$$H = 1 - \frac{4a}{r^{3/2}} + \frac{3a^2}{r^2}. \quad (1.44)$$

Итак, орт $\mathbf{e}_{(t)}$ переносится наблюдателем, который вращается вокруг чёрной дыры с частотой, равной ϕ -компоненте $\mathbf{e}_{(t)}$ и не зависящей от z . Эта частота соответствует свободному круговому движению в экваториальной плоскости чёрной дыры, а вращение происходит в плоскостях постоянного z .

Вычислим теперь временной орт дуального базиса. В соответствии с правилами поднимания и опускания тетрадных и координатных индексов имеем

$$\mathbf{e}^{(t)} = (U_g^t g_{tt} + U_g^\phi g_{t\phi}) dt + (U_g^t g_{\phi t} + U_g^\phi g_{\phi\phi}) d\phi.$$

Далее, рассмотрим часть метрики (1.3), содержащую дифференциалы dr и dz . Её можно переписать в следующем виде (см. результат (1.32) раздела 1.2.1):

$$ds_{rz}^2 = -[e^{(r)}]^2 - [e^{(z)}]^2,$$

где

$$e^{(r)} = |g_{rr}|^{1/2} dr - \frac{g_{rz}}{|g_{rr}|^{1/2}} dz,$$

$$e^{(z)} = \left(|g_{zz}| - \frac{g_{rz}^2}{|g_{rr}|} \right)^{1/2} dz$$

— соответственно радиальный и вертикальный орты дуального базиса. Непосредственной подстановкой в условие ортонормированности (1.29) координатных компонент векторов $e^{(t)}$, $e^{(r)}$ и $e^{(z)}$ легко убедиться в выполнении (1.29) для них.

Из того же условия ортонормированности тетрады нам осталось теперь определить четвёртый орт, соответствующий азимутальному направлению.

Из трёх условий ортогональности трём уже известным векторам получаем, что для совместности этих условий необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$e^{(\phi)}_r = e^{(\phi)}_z = 0,$$

а между временной и азимутальной компонентами была связь

$$e^{(\phi)}_\phi = -e^{(\phi)}_t \frac{e^{(t)}_t}{e^{(t)}_\phi}.$$

Наконец, условие нормировки для $e^{(\phi)}$ даёт квадратное уравнение для $e^{(\phi)}_t$, и знак решения выбирается из дополнительного требования выбора правой тройки пространственных ортов тетрады.

В итоге получаем форму дуального тетрадного базиса с главными поправками по z/r за счёт выхода из экваториальной плоскости:

$$\begin{aligned} e^{(t)} = & C^{-1/2} \left\{ G + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{1}{2rG} \times \right. \\ & \times \left[D + \frac{2a}{r^{3/2}} \left(F - \frac{a}{r^{3/2}} + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \Big\} dt - \\ & - C^{-1/2} \left\{ r^{1/2} F + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{a}{rG} Z_1 \right\} d\phi, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} e^{(\phi)} = & - \left\{ \left(\frac{D}{rC} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{1-a/r}{r^{3/2}} (DC)^{-1/2} \right\} dt + \\ & + \left\{ rB \left(\frac{D}{C} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{B}{(DC)^{1/2}} - \frac{H}{G} \left(\frac{D}{C} \right)^{1/2} \right] \Big\} d\phi, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} e^{(r)} = & D^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{2D} \left(\frac{z}{r} \right)^2 Z_2 \right\} dr + \\ & + \frac{z}{r} D^{-1/2} \left(\frac{2}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right) dz, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$e^{(z)} = \left(1 + \frac{z^2}{r^3} \right) dz. \quad (1.48)$$

Теперь, чтобы получить исходный базис, с использованием которого и будут выписаны уравнения, нам достаточно вычислить матрицу, обратную $e^{(a)}_i$, которая даст:

$$e_{(t)} = C^{-1/2} \left[B - \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{H}{2rG} \right] \frac{\partial}{\partial t} + (r^3 C)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} e_{(\phi)} = & \left[\frac{F}{(rCD)^{1/2}} + O\left(\frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial t} + \\ & + \left[\frac{G}{r(DC)^{1/2}} + O\left(\frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$e_{(r)} = \left[D^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{Z_2}{D^{1/2}} \right] \frac{\partial}{\partial r}, \quad (1.51)$$

$$e_{(z)} = -\frac{z}{r^2} \left(2 - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(1 - \frac{z^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.52)$$

В записи исходного и дуального базисов введены следующие обозначения для новых поправочных релятивистских коэффициентов:

$$F = 1 - \frac{2a}{r^{3/2}} + \frac{a^2}{r^2}, \quad (1.53)$$

$$Z_1 = 3 - \frac{5}{r} - \frac{a}{r^{1/2}} + \frac{3a}{r^{3/2}} - \frac{3a^2}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a^3}{r^{7/2}}, \quad (1.54)$$

$$Z_2 = \frac{3}{r} - \frac{4}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} \left(3 - \frac{6}{r} + \frac{2a^2}{r^2} \right). \quad (1.55)$$

Здесь мы не стали выписывать поправки $\sim O(z^2/r^2)$ в выражении для азимутального орта исходного базиса в силу их громоздкости, а кроме того, как будет видно ниже, они попросту не понадобятся в расчёте стандартного аккреционного диска.

Напомним, что для удобства мы сохранили здесь и выше обозначения, введённые в работе [1], для коэффициентов B, C, D, F, G , оставив, однако, более привычный взгляду читателя стандартный стиль латинских букв. Кроме того, коэффициент H тождествен коэффициенту C , введённому в работе [8]. Также обратим внимание, что другие два коэффициента A и V , введённые в этой же работе, тождественны нашим коэффициентам D и C соответственно. Можно убедиться, что выписанные в [1] исходный и дуальные базисы совпадают с приведёнными здесь при $z = 0$.

Используя формулы (1.45)–(1.48) и (1.35), легко получить, что решение (1.14) действительно даёт $U^{(a)} = (1, 0, 0, 0)$ в экваториальной плоскости.

Коэффициенты связности. Используя (1.40), а затем (1.42) и зная матрицы исходного и дуального базисов, выписанные выше, рассчитаем коэффициенты связности $\gamma_{(a)(b)(c)}$.

Из 64 коэффициентов 16 равны нулю в силу антисимметричности $\gamma_{(a)(b)(c)}$ по первым двум индексам. По этой же причине из остальных достаточно узнать половину, т.е. 24 коэффициента. При этом, поскольку нас интересует область вблизи экваториальной плоскости чёрной дыры, имеет смысл сразу разделить эти коэффициенты на те, которые в главном порядке $\sim (z/r)^0$, и те, которые пропорциональны первой степени z/r . Как было

упомянуто в разделе 1.1.1, последние должны фигурировать в вертикальной проекции релятивистского аналога уравнения Эйлера, первые же — в остальных уравнениях.

Можно показать, что

1) если среди индексов $\gamma_{(a)(b)(c)}$ нет индекса (z) , то $\gamma_{(a)(b)(c)} \sim (z/r)^0$,

2) если есть только один такой индекс, то $\gamma_{(a)(b)(c)} \sim z/r$, и, наконец,

3) если в $\gamma_{(a)(b)(c)}$ появляется сразу два индекса (z) , то такой коэффициент будет второго порядка малости по z/r .

Действительно, обратим внимание на формулу (1.40). Здесь в квадратных скобках фигурируют компоненты исходного базиса, которые суммируются с производными по координатам от компонент дуального базиса (поднятие тетрадного индекса может повлиять только на знак компоненты).

Для случая (1) $(a), (b), (c) \neq (z)$. Поскольку в (t) -, (ϕ) - и (r) -ортах исходного базиса отсутствуют z -компоненты, ненулевой вклад в $\gamma_{(a)(b)(c)}$ могут дать только слагаемые, в которых не стоят производные по z от компонент дуального базиса и нет z -компоненты дуального (r) -орта. Только в этих двух случаях мог бы появиться вклад $\sim z/r$, а значит, мы приходим к выводу о справедливости утверждения (1).

Пусть в (1.40) теперь индекс $(b) = (z)$. Но тогда ненулевой вклад может дать только слагаемое с z -компонентами (t) -, (ϕ) - и (r) -ортов исходного базиса, которые отсутствуют. Поэтому для проверки случая (2) остаётся рассмотреть вариант, когда в (1.40) $(a) = (z)$ либо $(c) = (z)$. При этом вклад дают слагаемые, содержащие отдельно либо r -, либо z -компоненты (z) -орта исходного базиса. В первом варианте пропорциональность z/r даётся как раз компонентой $e_{(z)}^r$, во втором — производной по z от одной из компонент дуального базиса, всегда чётной по z , как нетрудно проверить.

В справедливости утверждения (3) предлагаем убедиться читателю.

Подсчёт показывает, что должно быть 9 коэффициентов связностей, не содержащих индекса (z) , а значит, чётных по z , и 12 коэффициентов, содержащих индекс (z) и нечётных по z . Расчёт даёт, что лишь 4 коэффициента первого типа не равны нулю, а именно:

$$\gamma_{(t)(\phi)(r)} = -\frac{1}{2} \frac{H}{r^{3/2}C}, \quad \gamma_{(t)(r)(\phi)} = -r^{-3/2}, \quad (1.56)$$

$$\gamma_{(\phi)(r)(t)} = -r^{-3/2}, \quad \gamma_{(\phi)(r)(\phi)} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rD^{1/2}). \quad (1.57)$$

Для вычисления коэффициентов (1.56), (1.57) достаточно использовать базисы, взятые без поправок по z . При построении модели стандартного диска также будут важны следующие факты. Во-первых, прямой проверкой можно убедиться, что остальные 5 коэффициентов связностей этого типа равны нулю с поправками $\sim (z/r)^2$ включительно. Это строгий результат, поскольку в обсуждаемых коэффициентах $\gamma_{(a)(b)(c)}$ отсутствуют производные по z от компонент базиса, а значит, возможные неучтённые поправки за счёт членов $\sim (z/r)^3$ в $e_z^{(r)}$ и $e_z^{(z)}$ не могут дать вклада. Во-вторых, сразу же добавим, что прямая проверка точно так же показывает, что коэффициент $\gamma_{(t)(z)(z)} = 0$ с точностью до членов $\sim (z/r)^2$ включительно.

Расчёт всех не равных нулю коэффициентов второго типа гораздо более трудоёмок. Но, как можно будет

увидеть ниже, единственный такой необходимый нам коэффициент имеет вид

$$\gamma_{(z)(t)(t)} = \frac{z}{r^3} \frac{H}{C}.$$

Обратим внимание на то, что все коэффициенты связности типа $\gamma_{(a)(t)(t)}$ равны нулю в плоскости $z = 0$. Это согласуется с тем, что 4-скорость $U^{(a)} = (1, 0, 0, 0)$ должна удовлетворять уравнению геодезической при $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{DU^a}{Ds} &= U^b \mathbf{e}_{(b)}(U^{(a)}) + \eta^{(a)(c)} \gamma_{(c)(b)(d)} U^{(b)} U^{(d)} = \\ &= \gamma_{(a)(t)(t)} = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

1.2.3. Уравнения релятивистской гидродинамики. Везде ниже будем пользоваться только тетрадными компонентами векторов, тензоров и ковариантных производных. Поэтому начиная с этого раздела мы заменяем тетрадный стиль обозначений стандартным стилем, принятым, в частности, и при использовании координатного базиса. Это значит, что мы не будем заключать теперь тетрадные индексы в скобки, будем использовать для них латинские буквы i, j, k ¹, а символы связности будем обозначать буквой Γ .

Тензор энергии-импульса вязкой жидкости с наличием потока энергии имеет вид (см., например, параграф 4.3 в книге [13] или параграф 22.3 в книге [14])

$$\begin{aligned} T^{ik} &= (\rho + \epsilon + p) U^i U^k - p \eta^{ik} + 2\eta \sigma^{ik} + \\ &+ \zeta \Theta P^{ik} - U^i q^k - U^k q^i, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где $\rho, \epsilon, p, \eta, \zeta$ — плотность энергии покоя, плотность внутренней энергии, давление и два коэффициента вязкости, измеряемые в локально сопутствующем жидкости объёме. $\mathbf{q}$ — это поток энергии внутри жидкости, измеряемый локально сопутствующим наблюдателем.

Тензор сдвига

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{2} (U^i_{;j} P^{jk} + U^k_{;j} P^{ji}) - \frac{1}{3} U^j_{;j} P^{ik}. \quad (1.60)$$

Проекционный тензор

$$P^{ik} = \eta^{ik} - U^i U^k. \quad (1.61)$$

Дивергенция 4-скорости

$$\Theta = U^i_{;i}. \quad (1.62)$$

Релятивистский аналог уравнения Эйлера записывается как

$$P_{is} T^{sk}_{;k} = 0. \quad (1.63)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$U_s T^{sk}_{;k} = 0, \quad (1.64)$$

закон сохранения энергии покоя —

$$(\rho U^k)_{;k} = 0. \quad (1.65)$$

¹ Если среди индексов появляется один из символов t, ϕ, r, z , то будем считать, что соответствующий индекс принимает такое значение.

Ковариантная производная в некоординатном базисе

$$A^i{}_{;j} = \mathbf{e}_j(A^i) + \Gamma_{kj}^i A^k,$$

дивергенция двухконтрвариантного тензора второго ранга

$$A^{ij}{}_{;j} = \mathbf{e}_j(A^{ij}) + \Gamma_{kj}^i A^{kj} + \Gamma_{kj}^j A^{ik}.$$

Вектор потока энергии и тензор сдвига (тензор деформации, свободный от чистого растяжения) являются чисто пространственноподобными объектами:

$$U_i q^i = 0, \quad U_i \sigma^{ik} = 0, \quad \sigma_i^i = 0. \quad (1.66)$$

1.3. Построение модели стандартного диска

1.3.1. Базовые предположения и уравнение вертикального баланса. Итак, мы рассматриваем диск с точки зрения наблюдателей, вращающихся вокруг чёрной дыры вблизи её экваториальной плоскости с релятивистской кеплеровской частотой. Прежде чем приступить к записи динамических уравнений в проекциях на тетраду (1.49) – (1.52), обсудим базовые предположения, лежащие в основе модели, а также следствия, к которым они ведут. Помимо очевидных предположений, что поток аксиально-симметричен и стационарен, т.е. производные ∂_t и ∂_ϕ отсутствуют, безусловно, главным допущением, которое мы уже использовали, является малая толщина диска, $\delta = h(r)/r \ll 1$, где $h(r)$ — характерная протяжённость диска вдоль оси z , более точно — его полутолщина.

Симметрия диска относительно плоскости $z = 0$ говорит о том, что величины U^t , U^ϕ , U^r , q^t , q^ϕ , q^r , ρ , p , η , ζ , ϵ являются чётными по z , а U^z и q^z — нечётными.

Будем также считать, что в обсуждаемой модели характерный масштаб вариаций указанных величин вдоль радиального направления много больше такого масштаба в вертикальном направлении², т.е. их отношение не меньше, чем $\sim \delta^{-1}$.

Далее, из кинематических соображений понятно, что

$$U^z \sim \delta U^r. \quad (1.67)$$

Если считать, что поток энергии, задаваемый вектором $\mathbf{q}$, пропорционален градиенту плотности внутренней энергии, ϵ , то для наблюдателя, локально сопутствующего потоку, $q_{\text{loc}}^t = 0$, q_{loc}^ϕ , $q_{\text{loc}}^r \sim \delta q_{\text{loc}}^z$. Принимая во внимание (1.67), видим, что проекция $\mathbf{q}$ на 4-скорость кругового экваториального движения также мала, т.е. $\sim \delta q_{\text{loc}}^z$. Используя обычные лоренцевы преобразования, поймём, что q^t , q^ϕ , $q^r \sim \delta q^z$, т.е. относительно тетрады поток энергии тоже должен быть направлен преимущественно перпендикулярно плоскости диска.

Держа в уме всю эту информацию, рассмотрим теперь подробнее проекцию релятивистского аналога уравнения Эйлера (1.63) на орт $\mathbf{e}_z$:

$$T^{zk}{}_{;k} + U_z U_s T^{sk}{}_{;k} = 0. \quad (1.68)$$

² Обратим внимание, что в отношении компонент скоростей в плоскости диска, U^r и U^ϕ , необходимо в действительности заранее предположить, что и в вертикальном направлении они могут заметно меняться лишь на масштабах $\sim r$, иначе в тензоре сдвига могут появиться члены, которые динамически дадут большой вклад в уравнении вертикального баланса, и это приведёт к диску совсем другого типа по сравнению с тем базовым случаем, который нам здесь интересен.

Воспользовавшись указанными только что свойствами симметрии физических величин и аналогичными свойствами симметрии ортов базиса и коэффициентов связностей (последние становятся нечётными по z , если хотя бы один индекс у них выпадает на z), обсуждавшихся в разделе 1.2.2, легко убедиться, что уравнение (1.68) действительно нечётно по z . Далее видно, что первое слагаемое в (1.68) даёт отдельно член $\partial_z p$, а другие члены, содержащие p , заведомо меньше в силу малости U^z . Все остальные члены в совокупности можно всегда записать как $\sim z \rho f(r)(1 + g(r, z))$, где функция $g(r, z) \sim O(\delta^0)$.

Итак, приходим к важному выводу, что обязательно

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \sim \delta \ll 1. \quad (1.69)$$

Это значит, что в тонком диске величины p , $\partial_r p \sim \delta^2$, т.е. являются малыми величинами по сравнению с доминирующим действием в этом же направлении гравитационной силы. Следовательно, частицы, составляющие диск, обязаны двигаться по траекториям, близким к геодезическим. Очевидно, в стационарном и осесимметричном потоке этому могут соответствовать лишь две ситуации: когда вещество движется по почти радиальным линиям к центру тяготения (и удельный угловой момент в диске везде близок к нулю) либо когда вещество движется по почти круговым орбитам (а удельный угловой момент, наоборот, максимален). Отметим, что оба эти случая совместимы с перечисленными выше общими предположениями о структуре течения и результатом (1.69). Однако в последнем случае в главном порядке по δ будет соблюдаться строгое вертикальное гидростатическое равновесие в диске, иными словами, (1.68) можно будет записать как

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \sim z f(r)(1 + \delta^2 + \dots). \quad (1.70)$$

Когда же поток почти радиальный, поправки в скобках в (1.70) не будут малыми величинами и будут даваться вкладом за счёт преобладающего радиального движения, когда из-за изменения толщины диска частицы будут вынуждены на каждом радиусе ускоряться в направлении z .

Таким образом, модель стандартного диска содержит ещё одно независимое предположение о близости траекторий частиц жидкости к круговым экваториальным орбитам вокруг чёрной дыры, а значит, мы будем дополнительно считать, что в нашей системе отсчёта U^ϕ , $U^r \sim s U^t$ при $s \ll 1$, и позднее сможем увидеть, как этот второй малый параметр соотносится с δ .

Следовательно, мы будем записывать уравнения сначала не только в главном порядке по δ , но и в предположении, что $s = 0$, т.е. что поток вещества геодезический и $U^i = (1, 0, 0, 0)$. А затем, в случае необходимости, будем дополнительно проверять, какой вклад могут дать главные члены по s .

Деформация поля скоростей. Найдём сначала в главном порядке отличные от нуля компоненты тензора сдвига. Во-первых, дивергенция скорости принимает нулевое значение:

$$\Theta = U^j{}_{;j} = \Gamma_{kj}^j U^k = \Gamma_{0j}^j = 0. \quad (1.71)$$

Далее имеем

$$U^i{}_{;j} P^{jk} = \Gamma_{ik}^i \eta^{kk} - \Gamma_{ii}^i$$

и, учитывая симметризацию по индексам i и k , получаем, что единственные ненулевые компоненты тензора сдвига σ^{jk} есть

$$\sigma^{r\phi} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{tr}^\phi + \Gamma_{t\phi}^r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{H}{r^{3/2}C} + r^{3/2}\right) = \frac{3}{4}\frac{D}{r^{3/2}C}, \quad (1.72)$$

$$\sigma^{rz} = -\frac{1}{2}\Gamma_{t\phi}^z = O(z). \quad (1.73)$$

Уравнение гидростатического равновесия. Подставляя в (1.68) $U^i = (1, 0, 0, 0)$ и учитывая малость (в силу малой скорости звука в потоке) нескольких ненулевых членов, содержащих η и компоненты $\mathbf{q}$, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \Gamma_{tt}^z = -\rho \frac{z}{r^3} \frac{H}{C}. \quad (1.74)$$

Радиальное направление. Радиальная проекция релятивистского уравнения Эйлера при $s = 0$ запишется как

$$T^{rk}{}_{;k} = 0, \quad (1.75)$$

и за исключением членов $\sim \delta^4$, содержащих коэффициенты связности и компоненты $\mathbf{q}$, имеем только один отличный от нуля член порядка δ^2 вида³

$$-[p\eta^{rk}]_{;k} = D^{1/2} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Очевидно, уравновесить его нужно главными членами $\sim s$. Понятно, что рассмотреть необходимо прежде всего вклад от

$$[\rho U^r U^k]_{;k},$$

и здесь он может быть только от членов, содержащих какой-либо коэффициент связности нулевого порядка по z и временную компоненту скорости. Такой член только один: $2\Gamma_{t\phi}^r U^t U^\phi = 2r^{-3/2} U^\phi$.

Отсюда делаем важный вывод, что $s \sim \delta^2$, т.е. компоненты скорости в плоскости диска

$$U^r, U^\phi \sim \delta^2, \quad (1.76)$$

что пригодится нам для определения баланса сил в азимутальном направлении.

1.3.2. Азимутальное направление. Рассмотрим последнюю проекцию релятивистского уравнения Эйлера, его компоненту вдоль азимутального орта. Поступим опять так же, как и выше, и запишем сначала члены, имеющиеся

в случае $s = 0$. Снова берём $U^i = (1, 0, 0, 0)$ и видим, что

$$[(\rho + \epsilon + p) U^\phi U^k]_{;k} = 0,$$

поскольку $\Gamma_{tt}^\phi = 0$ с точностью до членов $\sim \delta^2$ включительно (см. обсуждение в конце раздела 1.2.2). Далее, член с давлением отсутствует в силу осевой симметрии, а члены с q^i могут дать вклад порядка не выше δ^4 .

Остаётся рассмотреть вклад

$$\begin{aligned} [2\eta\sigma^{\phi k}]_{;k} &= D^{1/2}(2\eta\sigma^{r\phi})_{;r} + (2\eta\sigma^{\phi z})_{;z} + 4\eta\Gamma_{r\phi}^\phi \sigma^{r\phi} + \eta O(\delta^2) = \\ &= -\frac{3}{2}D^{1/2}\left(\eta\frac{D}{r^{3/2}C}\right)_{;r} + (\eta\Gamma_{z\phi}^t)_{;z} + \\ &+ 3\eta(rD^{1/2})_{;r}\frac{D}{r^{5/2}C} + \eta O(\delta^2). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Здесь мы также имеем дело со вторым порядком δ^2 , поэтому необходимо определить главный вклад от членов $\sim s$. Опять же смотрим лишь преобладающую часть за счёт вклада идеальной жидкости:

$$(\eta\phi_i - U_\phi U_i)[\rho U^i U^k]_{;k}.$$

Второй частью выражения, пропорциональной U_ϕ , здесь можно пренебречь, так как член в квадратных скобках не может дать вклад нулевого порядка по δ^0 , поскольку отсутствуют коэффициенты связности вида $\Gamma_{tt}^i \sim \delta^0$, как обсуждалось в конце раздела 1.2.2.

В результате имеем

$$\begin{aligned} [\rho U^\phi U^k]_{;k} &= \rho\Gamma_{lk}^\phi U^l U^k + \rho\Gamma_{lk}^k U^\phi U^l = \rho(\Gamma_{tr}^\phi + \Gamma_{rt}^\phi) U^r = \\ &= -\rho \frac{U^r}{r^{3/2}} \left(\frac{1}{2}\frac{H}{C} - 1\right) \equiv \rho \frac{U^r}{2r^{3/2}} \frac{E}{C}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

где

$$E = 1 - \frac{6}{r} + \frac{8a}{r^{3/2}} - \frac{3a^2}{r^2}. \quad (1.79)$$

Теперь введём обозначение

$$T_v \equiv \int_{-h}^{+h} T_v^{r\phi} dz = 2\sigma^{r\phi} \int_{-h}^{+h} \eta dz. \quad (1.80)$$

T_v — это проинтегрированная по вертикали плотность потока ϕ -й компоненты импульса в радиальном направлении.

Тогда, интегрируя (1.77) и (1.78) также по всей толщине диска и объединяя их в одно уравнение, имеем

$$\frac{\partial T_v}{\partial r} + \frac{2T_v}{rD} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{\Sigma U^r}{2r^{3/2}CD^{1/2}} = 0, \quad (1.81)$$

где вклад от $\sigma^{\phi z}$ принимает нулевое значение в силу своей нечётности по z и мы пренебрегаем зависимостью U^r от z , которая даёт поправку следующего порядка малости в силу примечания 2. В формуле (1.81) мы ввели поверхностную плотность диска

$$\Sigma \equiv \int_{-h}^{+h} \rho dz. \quad (1.82)$$

Важное уравнение (1.81) при известных граничных условиях на внутреннем краю диска позволяет узнать

³ Порядок компонент q^i можно оценить следующим образом. В стационарном случае дивергенция потока энергии должна быть порядка мощности, выделяемой за счёт вязкой диссипации, которая, в свою очередь, пропорциональна некоему скаляру, характеризующему степень сдвига скорости, и коэффициенту вязкости η . В нашем случае коэффициент $\eta < \rho h c_s \sim \delta^2$. Дивергенция же даётся главным образом членом $\partial_z q^z$. Отсюда видно, что $q^z \sim \delta^3$, а $q^{t,\phi,r} \sim \delta^4$.

профиль $T_v(r)$ для диска, если известно распределение радиальной скорости вдоль него.

Заметим, что уравнение для T_v может быть также получено из закона сохранения углового момента, что было использовано в оригинальной работе [1] (см. там выражения (5.6.3)–(5.6.6)).

1.3.3. Закон сохранения энергии покоя. Радиальный перенос импульса. Чтобы решить уравнение (1.81), необходимо узнать дополнительно профиль радиальной скорости. Его нетрудно получить, используя закон сохранения энергии покоя (1.65):

$$\mathbf{e}_r(\rho U^r) + \mathbf{e}_z(\rho U^z) + \Gamma_{ki}^i \rho U^k = 0. \quad (1.83)$$

Очевидно, что подстановка $U^i = (1, 0, 0, 0)$ не даёт ненулевых членов вплоть до $\sim \delta^2$ включительно (см. обсуждение в конце раздела 1.2.2). В нашей системе отсчёта это имеет тривиальное объяснение — круговое осесимметричное вращение соответствует нулевой дивергенции скорости. Нетрудно проверить, что из членов $\sim s$ в уравнение неразрывности войдут лишь следующие:

$$D^{1/2}(\rho U^r)_{,r} + (\rho U^z)_{,z} - \frac{(r D^{1/2})_{,r}}{r} \rho U^r = 0, \quad (1.84)$$

где последнее слагаемое возникает из-за вклада $\Gamma_{r\phi}^{\phi} \rho U^r$, а аналогичные члены с участием других компонент скоростей если и появляются, то в порядке не ниже $\sim \delta^4$.

После интегрирования по z вклад от второго слагаемого в (1.84) примет нулевое значение, поскольку $\rho \rightarrow 0$ далеко от экваториальной плоскости диска, и будем иметь

$$(\Sigma U^r r D^{1/2})_{,r} = 0. \quad (1.85)$$

Комбинация под знаком производной в (1.85) является постоянной величиной, которая должна быть идентифицирована с потоком вещества в радиальном направлении. После дополнительного интегрирования по ϕ получаем, что

$$2\pi \Sigma U^r r D^{1/2} = -\dot{M}, \quad (1.86)$$

где $\dot{M} > 0$ — темп, с которым в диск поступает вещество где-то на бесконечности, т.е. темп аккреции.

Подставляя (1.86) в (1.81), для T_v в итоге имеем

$$\frac{dT_v}{dr} + P_1 T_v + P_2 = 0, \quad (1.87)$$

где

$$P_1 = \frac{2}{rD} \left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

$$P_2 = -\frac{\dot{M}}{4\pi} \frac{E}{r^{5/2} C D}.$$

Решение (1.87) с граничным условием $T|_{r_{\text{ms}}} = 0$ записывается в виде

$$T_v = \frac{1}{F(r)} \int_{r_{\text{ms}}}^r P_2(x) F(x) dx, \quad (1.88)$$

$$F(r) = \exp \left(\int_{r_{\text{ms}}}^r P_1(x) dx \right). \quad (1.89)$$

Интеграл (1.89) элементарно берётся, и в результате получаем

$$T_v = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 D} \int_{r_{\text{ms}}}^r \frac{E}{r^{1/2} C} dr. \quad (1.90)$$

1.3.4. Баланс энергии. Здесь необходимо расписать уравнение (1.64). Как и раньше, положим $U^i = (1, 0, 0, 0)$ и найдём главные члены по δ . Как и в случае с азимутальной проекцией релятивистского уравнения Эйлера, здесь не дадут вклада "идеальные" члены $[(\rho + \epsilon + p) U^i U^k]_{,k}$ и $p \eta^{0k}_{,k}$. Из сдвигового члена имеем

$$\begin{aligned} [2\eta \sigma^{rk}]_{,k} &= \Gamma_{lk}^l \sigma^{lk} = 2\eta [(\Gamma_{l\phi r} + \Gamma_{lr\phi}) \sigma^{r\phi} + O(\delta^2)] = \\ &= 2\eta [4\sigma^{r\phi} + O(\delta^2)]. \end{aligned}$$

От членов, содержащих q^i , имеем вклад от быстрого изменения компоненты потока энергии перпендикулярно диску с изменением z :

$$(U^t q^k)_{,k} = \frac{\partial q^z}{\partial z} + O(\delta^4).$$

Суммируя всё вместе, получаем из уравнения баланса энергии:

$$\frac{\partial q^z}{\partial z} = 4\eta (\sigma^{r\phi})^2 = \frac{3}{2} T_v^{\text{rf}} \frac{D}{r^{3/2} C}, \quad (1.91)$$

откуда после интегрирования поперёк диска получаем важное соотношение:

$$Q = \frac{3}{4} \frac{D}{r^{3/2} C} T_v, \quad (1.92)$$

где $Q = q^z(z=h)$ — поток энергии в вертикальном направлении на выходе из диска. Зная Q , мы можем вычислить радиальный профиль эффективной температуры поверхности диска, поскольку по определению $Q = \sigma T_{\text{eff}}^4$. Это универсальный результат теории стандартного аккреционного диска: T_{eff} не зависит от конкретной природы диссипации кинетической энергии вещества и механизма переноса тепловой энергии к поверхности диска, а также пропорционален величине $\dot{M}$, умноженной на некую универсальную известную функцию r .

Таким образом, имеем явный вид проинтегрированного по толщине диска вязкого напряжения, T_v , и явный вид потока лучистой энергии с его поверхности, Q . В то же время нам известна лишь комбинация ΣU^r , а не каждая из этих величин по отдельности. Кроме того, необходимо определить профиль полутолщины диска, $h(r)$, а также распределение внутри него температуры, давления и объёмной плотности, $T(r, z)$, $p(r, z)$ и $\rho(r, z)$ соответственно. Для этого мы должны выполнить расчёт вертикальной структуры диска.

1.3.5. Уравнение переноса энергии и вертикальная структура диска. Вертикальная структура диска определяется тремя уравнениями. Два из них были уже получены нами — это уравнение вертикального гидростатического равновесия (1.74) и уравнение производства тепловой энергии (1.91).

Недостающим уравнением является уравнение переноса диссипирующей в диске энергии. В простейшем случае считается, что за него ответственна диффузия

фотонов в разогретом веществе. Строго говоря, нам необходимо записать релятивистский аналог закона лучистой теплопроводности. Последний, в свою очередь, является предельным вариантом кинетического уравнения Больцмана для фотонов в случае, когда длина их свободного пробега много меньше характерного пространственного масштаба задачи. Его релятивистскому обобщению посвящён раздел 2.6 работы [1]. Полное уравнение переноса дано там под номером 2.6.22, но в его левой части второе слагаемое следует домножать на интенсивность I_ν вследствие опечатки в тексте. Стандартный переход к диффузионному приближению даёт следующее уравнение (см. выражение 2.6.43 в [1]):

$$q^i = \frac{1}{\tilde{\kappa}\rho} \frac{4}{3} bT^3 P^{ik} (e_k(T) + a_k T), \quad (1.93)$$

где $\tilde{\kappa}$ — росселандово среднее непрозрачности вещества, T — температура, b — радиационная константа, $a_k \equiv U_{k,j} U^j$ — 4-ускорение. Обсуждение уравнения (1.93) можно также найти на с. 165 книги [13].

Глядя на (1.93), прежде всего заключаем, что 4-ускорение не превышает порядка δ^2 , поскольку сама 4-скорость отличается от геодезического значения (свободного кругового экваториального движения) только во втором порядке по δ . В то же время производная в первом слагаемом в скобках правой части (1.93) для $k = z$, наоборот, поднимает порядок по δ , поскольку T , как и ϵ , существенно меняется поперёк диска. В результате, как уже обсуждалось в разделе 1.3.1, мы видим, что главной компонентой вектора $\mathbf{q}$ является q^z , и она определяется уравнением

$$q^z = -\frac{1}{3\tilde{\kappa}\rho} \frac{\partial(bT^4)}{\partial z}, \quad (1.94)$$

которое для тонкого диска идентично ньютоновской форме.

Уравнения (1.74), (1.91) и (1.94) должны быть дополнены уравнением состояния вещества,

$$p(\rho, T),$$

законом непрозрачности для него,

$$\tilde{\kappa}(\rho, T),$$

и явным видом

$$\eta(\rho, T) \text{ либо } T_\nu^{r\phi}(\rho, T)$$

в зависимости от типа параметризации турбулентной вязкости в диске.

Кроме того, необходимо поставить граничные условия на отрезке интегрирования $z \in [0, h]$. В простейшем случае будем считать, что у диска отсутствует атмосфера и

$$\rho|_{z=h} = T|_{z=h} = 0.$$

Далее, поток энергии отсутствует в экваториальной плоскости диска,

$$q^z|_{z=0} = 0.$$

И, наконец,

$$2 \int_0^h T_\nu^{r\phi} dz = T_\nu.$$

Обратим внимание, что выписанные только что уравнения и граничные условия для вертикальной структуры диска автоматически гарантируют выполнение соотношений (1.86), (1.90) и (1.92) для радиальной структуры диска.

Выполнив расчёт вертикальной структуры, мы сможем узнать распределение поверхностной плотности, используя (1.82), и затем U^r , используя (1.86).

1.3.6. Параметризация турбулентной вязкости и явная структура диска. Уже оценочные расчёты, выполненные в работах [1, 15] по описанному в разделе 1.3.5 алгоритму, показывают, что при достаточно большом темпе аккреции $\dot{M}$, который является свободным параметром задачи, во внутренних частях аккреционного диска начинает преобладать давление излучения. Оценку порогового значения $\dot{M}$ можно найти, например, в [15] (см. там выражение 2.18). При этом оказывается, что толщина диска вдали от его внутреннего края не зависит от r , и при $\dot{M}$ порядка и выше эддингтоновского значения, $\dot{M}_{\text{сг}}$, при котором диск достигает эддингтоновской светимости, во внутренней части диска $\delta > 1$, что соответствует сферизации потока (см. выражение 7.1 работы [15] и обсуждение после него). Кроме того, последующие исследования показали, что радиационно-доминированная область обладает тепловой неустойчивостью [16] и конвективной неустойчивостью [17].

Это означает, что для корректного описания внутренних областей аккреционных дисков при больших темпах аккреции, когда возрастает δ , в уравнениях необходимо учитывать члены следующего порядка по δ . Оказывается, что речь идёт об учёте радиального градиента давления $\sim \delta^2$ в радиальном балансе сил, а также об адвективном члене, $U^r T \partial S / \partial r \sim \delta^4$, который появляется в балансе энергии и учитывает радиальный перенос тепловой энергии. Последнее физически означает, что время диффузии тепла в вертикальном направлении становится сравнимым со временем его адвекции за счёт радиального переноса вещества. Иными словами, нарушается главное свойство описываемой здесь модели стандартного аккреционного диска — локальность энергетического баланса в диске, когда тепло, генерирующееся из-за диссипации турбулентной энергии, высвечивается с его поверхности на тех же радиусах. Было найдено, что учёт новых членов также позволяет правильно описать область вблизи r_{ms} , где в стандартной модели $U^r \rightarrow \infty$, и прийти к устойчивому относительно тепловых возмущений стационарному решению с $\delta < 1$ для $\dot{M}$ порядка и выше $\dot{M}_{\text{сг}}$, которое было названо "слим-диском" (см. работы [18, 19] и ссылки на них, а также, к примеру, работу [20]). Эти результаты были впоследствии подтверждены численными расчётами (см., например, [21, 22]). Добавим, что переход от стандартного диска к слим-диску по мере роста $\dot{M}$ в релятивистской модели с вращающейся чёрной дырой должен происходить ещё раньше в силу большей эффективности аккреции, имеющей место как из-за того, что уменьшается r_{ms} , так и из-за того, что угловой момент вещества дополнительно уносится излучением с поверхности диска.

Считая, что $\dot{M} \ll \dot{M}_{\text{сг}}$, выполним оценочный расчёт профиля полутолщины диска, который пригодится нам в следующей части работы, на примере простейшего случая, когда основной вклад в давление вносит полностью

ионизованная водородная плазма, т.е.

$$p = \frac{2\rho k_B T}{m_p}, \quad (1.95)$$

где m_p — масса протона, k_B — постоянная Больцмана, а непрозрачность для излучения определяется томсоновским рассеянием, $\bar{\kappa} = \kappa_T = 0,4 \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}$.

Также будем считать, что кинематическая вязкость ν не зависит от z и может быть параметризована в виде

$$\nu = \alpha c_s h, \quad (1.96)$$

где $0 < \alpha < 1$ — параметр Шакуры, определяющий турбулентную вязкость в диске (см. [15, 23]), а c_s — значение скорости звука в экваториальной плоскости диска. При этом в силу (1.95)

$$c_s^2 = \frac{2k_B T_c}{m_p}, \quad (1.97)$$

где $T_c = T(z=0)$.

Из уравнения (1.94) получаем

$$\int_0^h dz q^z \rho = -\frac{1}{3\kappa_T} b T^4 \Big|_0^h = \frac{1}{3\kappa_T} b T_c^4.$$

С другой стороны,

$$\int_0^h dz q^z \rho = C_q Q \int_0^h \rho dz = \frac{1}{2} C_q \Sigma Q,$$

где C_q — некий поправочный коэффициент порядка единицы, соответствующий разности между выходящим потоком излучения, Q , и его средним значением в толще диска. В итоге получаем, что

$$T_c = \left(\frac{3\kappa_T}{2} \frac{C_q}{b} \Sigma Q \right)^{1/4}. \quad (1.98)$$

Далее, предполагая для простоты, что энтропия постоянна по z , мы можем в (1.74) после деления на ρ перейти к энтальпии, $dw = dp/\rho$, в левой части уравнения и, проинтегрировав (1.74), получить центральное значение w , $w_c \equiv w(z=0)$:

$$w_c = - \int_0^h dw = \int_0^h \frac{z}{r^3} \frac{H}{C} = \frac{h^2}{2r^3} \frac{H}{C}.$$

Отсюда, учитывая, что $w_c = nc_s^2$, где n — индекс политропы, получаем

$$c_s^2 = \frac{h^2}{2nr^3} \frac{H}{C}. \quad (1.99)$$

Наконец, видим, что в силу определения (1.80), параметризации (1.96) и равенства (1.90)

$$T_v = \frac{3}{2} \frac{D}{r^{3/2} C} \alpha \Sigma c_s h = \frac{\dot{M}}{2\pi} \frac{Y}{r^{3/2} D}, \quad (1.100)$$

где после второго равенства мы специально ввели новую величину

$$Y \equiv (2r)^{-1/2} \int_{r_{\text{ms}}}^r \frac{E}{r^{1/2} C} dr, \quad (1.101)$$

которая в ньютоновском пределе, далеко от внутренней границы диска, стремится к единице.

Равенств (1.92), (1.97)–(1.99) нам достаточно, чтобы исключить из (1.100) все неизвестные величины, кроме Σ и свободных параметров, $\dot{M}$ и α . В итоге будем иметь следующий профиль Σ :

$$\Sigma = \Sigma_0 \alpha^{-4/5} \dot{M}^{3/5} r^{-3/5} C^{3/5} D^{-8/5} H^{2/5} Y^{3/5}, \quad (1.102)$$

где в размерной константе Σ_0 собраны все прочие физические постоянные и числовые коэффициенты, фигурировавшие здесь в вычислениях. Получить её явный вид и числовое значение (зависящее от значения массы чёрной дыры, на которую у нас нормируются все величины) мы предоставляем читателю.

Используя теперь формулы (1.97)–(1.99) и (1.102), можно получить и искомый профиль $h(r)$. Запишем здесь результат для угла раскрытия диска, $\delta(r) = h(r)/r$:

$$\delta(r) = \delta_* r^{1/20} C^{9/20} D^{-1/5} H^{-9/20} Y^{1/5}, \quad (1.103)$$

где δ_* — константа, задающая характерное значение δ для диска.

2. Релятивистский изгибный аккреционный диск

2.1. Вводные замечания

В разделе 1 мы описали плоский диск, лежащий в экваториальной плоскости чёрной дыры. Для него была очевидна осесимметричная структура, согласующаяся с осевой симметрией пространства вокруг чёрной дыры. Если мы теперь откажемся от главного предположения о том, что поток вещества на всех расстояниях совмещён с указанной плоскостью, то возникает вопрос, какова может быть динамика такого более сложного потока — как стационарная, так и нестационарная. Будет ли эта конфигурация хоть как-то похожа на диск или нет? Для рассматриваемых здесь тонких дисков ответ на этот вопрос оказывается положительным при соблюдении некоторых ограничений.

Исходной причиной, вызывающей деформацию (к примеру, первоначально плоского) диска, является то, что вращение чёрной дыры формирует дополнительное, нецентральное гравитационное воздействие на его газовые элементы. Можно показать, что вдалеке от горизонта событий, но вблизи от экваториальной плоскости чёрной дыры это воздействие выражается осесимметричным полем силы, лежащей в каждой точке пространства вдоль радиальных направлений, проходящих через ось вращения чёрной дыры и параллельных экваториальной плоскости (см. книгу [24], гл. 3, параграф А). Эта сила называется гравитомагнитной и даётся в этом случае следующим выражением:

$$F_{\text{GM}} = \frac{4a\Omega}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (2.1)$$

где Ω — кеплеровская частота, а $\partial/\partial r$ — радиальный координатный орт цилиндрической системы координат. Очевидно, что эта внешняя сила способна изменить собственный угловой момент вращения элементов диска (а значит, и деформировать диск), если последние движутся вне экваториальной плоскости чёрной дыры. При этом работает только проекция гравитомагнитной силы на направление углового момента, пропорцио-

нальная синусу угла между ним и осью вращения чёрной дыры. Как мы увидим чуть ниже, ограничение, позволяющее по-прежнему говорить о новой конфигурации (и стационарной, и нестационарной) как о диске, требует малости гравитомангнитной силы по сравнению с центральной гравитационной силой, т.е. требует малости параметра a , $a \ll 1$. Кроме того, может быть сформулировано ещё одно ограничение, заключающееся в том, что выход тонкого диска из экваториальной плоскости, а также степень его отклонения от плоской формы (т.е. искривление, изгиб) не должны превышать некоторых малых значений, чтобы диск оставался гидродинамически устойчивым (см. [25], параграф 7 и [5], параграф 4.2.4).

Разобьём мысленно тонкий плоский диск на кольца малой ширины. В каждом кольце движение газовых элементов происходит преимущественно под действием силы гравитационного притяжения со стороны центрального объекта. Соответствующее характерное время этого движения даётся величиной $t_d \sim \Omega^{-1}$. Вместе с тем t_d определяет и характерное время восстановления гидростатического равновесия поперёк кольца, так как отношение толщины кольца к его радиальному размеру является величиной порядка отношения скорости звука к скорости орбитального движения. К этому же выводу можно прийти, если вспомнить, что величина вертикального градиента давления в δ раз меньше, чем величина гравитационного ускорения газового элемента единичной массы, т.е. ровно во столько же раз, во сколько вертикальный размер кольца отличается от радиального. Таким образом, можно заключить, что если другие силы, воздействующие на данное кольцо диска со стороны соседних колец либо со стороны чёрной дыры, приводят к динамике с характерным временем t_{ev} , много большим динамического, $t_{ev} \gg t_d$, то в таком кольце сохраняется гидростатическое равновесие, иными словами, кольцо остаётся плоским, и весь поток сохраняет дискообразную форму. То, что это выполняется в плоском диске, — не вызывает сомнений, поскольку мы имеем дело лишь со взаимодействием одинаково ориентированных колец посредством вязкой силы, действующей в азимутальном направлении, а также с изменением импульса за счёт притока и оттока аккрецирующего сквозь кольцо вещества, причём оба указанных процесса происходят на диффузионной шкале времени, $t_v \sim \Omega^{-1} \delta^{-2} \gg t_d$.

Теперь выведем диск из экваториальной плоскости чёрной дыры на малый угол $\beta \ll 1$. Если раньше гравитомангнитная сила давала вклад лишь в модуль ускорения газовых элементов, движущихся по круговым орбитам, то теперь, за счёт своей ненулевой проекции ($\propto \beta$) на направление углового момента газовых элементов, она заставит их орбиты прецессировать вокруг оси вращения чёрной дыры. Для свободных частиц этот эффект подробно описан во второй половине следующего раздела на языке разности частот кругового и вертикального движений. Там же показано, что частота прецессии много меньше круговой частоты при условии $a \ll 1$ (см. выражение (2.12)), что и означает выполнение условия $t_{ev} \gg t_d$ уже для составленных из газовых элементов колец.

Выражение (2.12) показывает, что прецессия колец будет дифференциальной, т.е. будет зависеть от расстояния до центра. В результате относительная ориентация первоначально соосных колец изменится и диск потеряет

плоскую форму. Однако помним, что в силу условия $t_{ev} \gg t_d$ каждое из колец будет вести себя "жёстко" в своём вертикальном направлении, тоже теперь изменяющемся с r . Новая конфигурация будет напоминать искривлённый (или изгибный) диск, т.е. поток вещества, который всё же будет симметричен относительно некой, теперь уже не плоской, поверхности, которую можно назвать экваториальной поверхностью изгибного диска. При этом сечение экваториальной поверхности какой-либо плоскостью, проходящей через центр, даёт окружность, т.е. мгновенную форму орбит газовых элементов, обращающихся на данном расстоянии r . Диск превращается в набор колец, наклонённых на постоянный угол β по отношению к экваториальной плоскости чёрной дыры, но с зависящим от r положением линии узлов, т.е. оси пересечения плоскостей колец с экваториальной плоскостью чёрной дыры. Линия узлов задаётся теперь позиционным углом $\gamma(r)$, отсчитываемым в экваториальной плоскости в положительном направлении от некоего одного направления до восходящего узла данного кольца. Ключевым моментом здесь является то, что градиент давления в изгибном диске, направленный (как и в тонком диске вообще) почти по нормальям к его искривлённой поверхности, теперь неортогонален плоскостям колец, составляющих диск. В то же время он остаётся ортогональным азимутальному направлению вдоль каждого кольца, поскольку оно касательно к поверхности диска. Поэтому заключаем, что теперь градиент давления имеет две проекции. Одна, главная, лежит вдоль направления оси вращения каждого кольца. Обозначим её условно как $(\nabla p)_\xi$, где ξ — расстояние от экваториальной поверхности изгибного диска, отсчитываемое вдоль направления оси вращения кольца (т.е. ξ сводится к z в случае плоского диска). Сразу заметим, что $(\nabla p)_\xi \propto \xi$ в силу сохраняющегося гидростатического равновесия поперёк кольца. Вторая проекция градиента давления, которую обозначим условно как $(\nabla p)_r$, лежит в плоскости кольца вдоль радиального направления, соединяющего центр диска и данный газовый элемент кольца. Отношение двух обсуждаемых проекций — малая величина, пропорциональная скорости изменения ориентации колец в диске, которая, в свою очередь, зависит от выбранного радиального направления в плоскости данного кольца. Из чисто геометрических соображений ниже будет строго получено, что для случая диска с $\beta = \text{const}$ отношение $(\nabla p)_r / (\nabla p)_\xi \propto \beta d\gamma/dr \cos \psi$, где ψ — угол, отсчитываемый в азимутальном направлении данного кольца от его восходящего узла до рассматриваемого газового элемента. Обратим внимание, что нормаль к поверхности изгибного диска ортогональна к плоскости кольца лишь в двух диаметрально противоположных точках — там, где его плоскость пересекается с плоскостями соседних колец. Для случая $\beta = \text{const}$ это точки с $\psi = \pm \pi/2$. В то же время, в другой паре точек с $\psi = 0, \pi$ величина $(\nabla p)_r$, наоборот, достигает наибольшего положительного (отрицательного) значения.

Таким образом, если в плоском диске в радиальном направлении, в главном порядке по $\delta \ll 1$, динамику контролировала лишь сила тяготения, а поправками $\sim \delta^2$ мы пренебрегали, то в изгибном диске в радиальном балансе дополнительно начинает участвовать радиальная проекция градиента давления, величина которой, с одной стороны, зависит от степени изгиба, а с другой, возрастает пропорционально расстоянию от экватори-

альной поверхности диска, ξ . При этом, поскольку она также гармонически зависит от азимутального положения газовых элементов, последние (в случае $\xi \neq 0$) начинают испытывать с её стороны периодическое воздействие с периодом орбитального движения и их орбиты превращаются в эллипсы с малым эксцентриситетом. Как известно, частота собственных малых радиальных колебаний свободных частиц, находящихся на вытянутых орбитах, есть эпициклическая частота, κ . Поскольку обсуждаемая проекция градиента давления возбуждает именно такие колебания, профиль эпициклической частоты, $\kappa(r)$, будет являться важной характеристикой, определяющей форму как стационарных, так и нестационарных изгибных конфигураций. В следующем разделе мы дадим вывод необходимого нам релятивистского профиля $\kappa(r)$ для экваториальных круговых орбит в метрике Керра (см. выражение (2.8)). Сразу отметим здесь важный момент, что в выделенном случае ньютоновского тяготения $\kappa = \Omega$, а значит, при воздействии с такой же частотой на газовые элементы внешней вынуждающей силы должен происходить резонанс, т.е. амплитуда возмущённого движения, характеризваемая возмущением орбитальной скорости v , в кольцах изгибного диска должна неограниченно расти. Этот рост, однако, всегда ограничивается присутствием турбулентной вязкости в диске. Действительно, поскольку величина вынуждающей силы $\propto \xi$, то же самое будет присуще и амплитуде v . Но это будет означать присутствие сдвига скорости, $\partial_\xi v$, в каждом кольце диска в его вертикальном направлении. В совокупности с присутствующим всегда в диске вертикальным градиентом плотности, а значит, и вертикальным градиентом динамической вязкости, мы получим объёмную вязкую силу, тормозящую раскачку резонансной силой отдельных слоёв кольца. Заметим, что вблизи чёрной дыры, где частота κ становится отличной от Ω , амплитуда v остаётся ограниченной и в отсутствие вязких сил. С этим связана возможность существования вблизи чёрных дыр стационарных изгибных дисков с малой вязкостью, у которых $\beta(r)$ принимает осциллирующую форму (см. [25]).

Итак, мы видим, что изгиб диска, вызванный действием гравитомагнитной силы, обязательно ведёт к появлению возмущения кругового орбитального движения газовых элементов в кольцах диска. Поле скоростей этого возмущения, v , имеет зависимость от r (помимо пропорциональности ξ , что мы выяснили чуть выше), которая определяется текущей формой изгиба диска. В силу соотношения неразрывности потока это влечёт появление неоднородностей плотности вне экваториальной поверхности изгибного диска, $\rho_1 \propto \xi$. При этом, поскольку $(\nabla p)_r \propto \cos \psi$, эти неоднородности принимают противоположные знаки в диаметрально противоположных точках каждого данного кольца. Но последнее означает, что на кольцо начинает действовать отличный от нуля суммарный момент центральной силы тяготения, влияющей на избытки плотности вне экваториальной плоскости кольца (т.е. вне $\xi = 0$). Обозначим его T_g . Поскольку диск тонкий и составляющая гравитационного ускорения вдоль оси кольца уже сама по себе $\propto \xi$, соответствующая сила тяготения, а вместе с ней и T_g квадратичны по ξ . Кроме того, напомним, что момент T_g пропорционален малой степени изгиба, $T_g \propto \beta \, dy/dr$. Таким образом, мы приходим к выводу, что динамика колец изгибного диска контролируется T_g , наряду с мо-

ментом гравитомагнитной силы, с которой мы начали изложение данной вводной части. Отметим, что в рассмотренном нами случае $\beta = \text{const}$ величина $(\nabla p)_r$, а вслед за ней и величина ρ_1 принимают максимальные абсолютные (и противоположные по знаку) значения при $\psi = 0, \pi$, т.е. на линии узлов каждого кольца⁴. Но это означает, что T_g лежит в плоскости, образуемой угловым моментом каждого кольца и осью вращения чёрной дыры. В силу симметрии задачи суммарный вклад в T_g с других азимутов не изменяет его направление. Следовательно, сразу после того, как гравитомагнитная сила превращает воображаемый наклонённый плоский диск в изгибный с $\beta = \text{const}$, вступающая в игру гравитационная сила, действующая на асимметрично распределённое относительно поверхности $\xi = 0$ вещество диска, стремится изменить уже саму величину угла наклона колец, т.е. либо уложить их в экваториальную плоскость чёрной дыры, либо вывести из неё. С другой стороны, как только β становится зависящим от r , максимумы абсолютных значений $(\nabla p)_r$ сдвигаются от линии узлов каждого кольца диска на некие другие значения ψ , что означает появление в T_g составляющей, которая даёт вклад также и в прецессионное движение колец диска, подобно гравитомагнитному моменту.

Описанная в общих чертах картина динамики изгибного диска усложняется присутствием ненулевой вязкости в диске. Прежде всего, каждое кольцо диска начинает подвергаться воздействию вязкой силы, возникающей из-за разности направлений его тангенциальной скорости и тангенциальных скоростей соседних колец. Эта разность максимальна на тех направлениях, где пересекаются плоскости колец, т.е. как раз там, где $(\nabla p)_r$ принимает нулевое значение. В рассмотренном выше примере конфигурации с $\beta = \text{const}$ — это положения $\psi = \pm \pi/2$, т.е. перпендикулярно линии узлов колец. При этом, поскольку вязкая сила пропорциональна разности тангенциальных скоростей, она направлена в этих местах перпендикулярно плоскости кольца, с разными знаками по разные стороны от линии узлов. Значит, соответствующий момент силы, T_v , в свою очередь, перпендикулярен плоскости, образуемой угловым моментом кольца и осью вращения чёрной дыры. Иными словами, в данном случае вязкое взаимодействие между кольцами диска даёт вклад только в их прецессионное движение вокруг направления вращения чёрной дыры. Опять же заметим, что из-за коэффициента вязкий момент T_v пропорционален величинам, входящим в выражение для разности направлений тангенциальной скорости соседних колец, $T_v \propto \beta \, dy/dr$ и, конечно, за счёт коэффициента вязкости $T_v \propto \xi^2$. Важно упомянуть, что, как только воздействие T_g приводит к появлению профиля $\beta(r)$, T_v начинает также способствовать и укладке/выведению кольца из экваториальной плоскости чёрной дыры. Это происходит по тем же причинам, по которым T_g , наоборот, начинает давать вклад также и в прецессионное движение, как мы указывали выше.

Вдобавок к возникновению T_v , аналогично тому как это происходит в плоском аккреционном диске, в случае изгибного диска вязкость приводит к радиальному диф-

⁴ Стремясь к точности изложения, важно добавить ещё, что указанное совпадение азимутальных положений максимумов $(\nabla p)_r$ и ρ_1 имеет место только в пренебрежении действием вязкости на газовые элементы кольца.

фузионному переносу компоненты углового момента, параллельной экваториальной плоскости чёрной дыры (и ненулевой именно для наклонённого/изгибного диска) — по направлению к центру диска в результате простого переноса аккрецирующего вещества и на его периферию в результате ответного оттока углового момента. А в случае релятивистского диска происходит дополнительная потеря обсуждаемой компоненты углового момента за счёт потока тепловой энергии, уносимой излучением с поверхности диска (см. выражение (С6) в работе [5]).

Все упомянутые силы, участвующие в динамике изгибных дисков, появятся в так называемом "твистовом" уравнении — главном уравнении теории изгибных дисков. Вывести и проанализировать его — наша основная цель в следующих разделах данной работы.

2.1.1. Слабовозмущённое свободное круговое экваториальное движение: эпициклическая частота и частота вертикальных колебаний. Изгибный диск предполагает движение вещества вне экваториальной плоскости метрики Керра и, как мы обсуждали выше, не обязательно круговое в проекции на неё. Поэтому сначала проведём анализ особенностей движения свободных частиц, находящихся на орбитах, немного отличающихся от строго круговых экваториальных.

Сначала предположим, что частицы по-прежнему находятся точно в экваториальной плоскости, но их движение слегка отличается от кругового. Задачу можно решить, используя релятивистские гидродинамические уравнения в отсутствие давления и предполагая, что существует малая добавка к скорости чисто кругового движения. При этом вместо уравнений (1.63) и (1.64) в данном случае оказывается проще использовать исходные уравнения в виде

$$T^{ik}_{;k} = 0, \quad (2.2)$$

где в рассматриваемом случае свободного движения $T^{ik} = \rho U^i U^k$ и считается, что $\rho = \text{const}$. В силу последнего предположения поле скоростей, как следует из закона сохранения энергии покоя (1.65), будет бездивергентным, и (2.2) эквивалентно следующему уравнению:

$$U^i_{;k} U^k = 0. \quad (2.3)$$

Теперь мы выделяем из поля 4-скоростей малую добавку к основному круговому экваториальному движению, обозначая её как v^i . При этом невозмущённое движение соответствует покою в проекции на тетраду (1.49)–(1.52), использованную нами для построения модели плоского аккреционного диска, т.е. задаётся 4-скоростью $U_0^i = \{1, 0, 0, 0\}$. Подставляя в (2.3) сумму $U_0^i + v_i$, получаем линейные уравнения для малых возмущений 4-скорости v_i , которую считаем функцией только t :

$$v^i_{;k} U_0^k + U_0^i v^k_{;k} = 0. \quad (2.4)$$

Учитывая, что $U_0^i_{;k} = \Gamma^i_{tk}$, получаем для $i = 1, 2$ систему уравнений

$$v^r_{;t} + \Gamma^r_{t\phi} v^\phi = C^{-1/2} B \frac{dv^r}{dt} - 2r^{-3/2} v^\phi = 0, \quad (2.5)$$

$$v^\phi_{;t} + \Gamma^{\phi}_{tr} v^r = C^{-1/2} B \frac{dv^\phi}{dt} + r^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H}{C}\right) v^r = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, малые возмущения компонент 4-скорости в экваториальной плоскости вращающейся чёрной дыры осциллируют со временем. Например, v^r подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 v^r}{dt^2} + \frac{2C}{r^3 B^2} \left(1 - \frac{H}{2C}\right) v^r = 0, \quad (2.7)$$

из которого следует, что квадрат частоты указанных осцилляций, являющейся по определению эпициклической частотой, даётся выражением

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= r^{-3} B^{-2} (2C - H) = \\ &= r^{-3} \left(1 + \frac{a}{r^{3/2}}\right)^{-2} \left(1 - \frac{6}{r} + \frac{8a}{r^{3/2}} - \frac{3a^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Несколько другой вывод κ можно найти в приложении работы [26]. Важно обратить внимание, что в уравнении (2.8) стоит производная по координатному времени, а значит, эпициклическая частота определена по часам бесконечно удалённого наблюдателя, как и введённая нами раньше круговая частота (1.16). Сравнивая уравнение (1.17), которое задаёт положение последней устойчивой экваториальной круговой орбиты в метрике Керра, r_{ms} , с (2.8), видим, что $\kappa^2(r_{\text{ms}}) = 0$. При $r < r_{\text{ms}}$ эпициклическая частота становится мнимой величиной, а уравнение (2.7) порождает экспоненциально растущие решения. Так и должно быть, поскольку в этой области свободное круговое движение вокруг вращающейся чёрной дыры становится неустойчивым. В разделе 1.1.3 этот результат получен исходя из анализа формы эффективного центробежного потенциала, в котором находится движущаяся по экваториальной круговой орбите пробная частица. Тем не менее, как мы видим, альтернативным образом можно определить r_{ms} , рассчитав профиль $\kappa^2(r)$ в метрике Керра.

Хорошо известно, что особенностью ньютоновского гравитационного потенциала является так называемое кеплеровское вырождение, означающее, что для некругового движения в нём $\kappa = \Omega$, вследствие чего нерелятивистские орбиты являются замкнутыми. Однако указанная симметрия нарушается при переходе к релятивистскому свободному движению и, насколько мы видим, κ отлична от Ω уже в окрестности невращающейся чёрной дыры ($a = 0$), где её квадрат становится равным

$$\kappa^2 = r^{-3} \left(1 - \frac{6}{r}\right) = \Omega^2 \left(1 - \frac{6}{r}\right) < \Omega^2. \quad (2.9)$$

Неравенство эпициклической и круговой частот и приводит к известному эффекту смещения главной оси эллиптической орбиты. Вдалеке от горизонта событий шварцшильдской чёрной дыры, т.е. при $r \gg 1$, частота поворота орбиты, или, как говорят, частота эйнштейновской прецессии, равна $\Omega_p \approx 3/r^{5/2}$.

Теперь предположим, что мы вращаемся вместе с пробной частицей на некоем радиусе. При рассмотрении задачи в проекции на тетраду (1.49)–(1.52) эта частица будет оставаться в покое. На этот раз придадим ей малую скорость в направлении, перпендикулярном экваториальной плоскости. Из уравнения гидростатического равновесия для плоского диска (1.74) видно, что в нашей вращающейся системе отсчёта частица, будучи свободной, окажется подверженной ускорению, пропорцио-

нальному z и стремящемуся вернуть её обратно к положению $z = 0$. Иными словами, пробная частица будет совершать гармонические колебания с квадратом частоты, равным

$$\Omega_v^{12} = \frac{H}{r^3 C}, \quad (2.10)$$

где индекс 1 напоминает, что частота измеряется в системе отчёта, сопутствующей частице в её главном, круговом экваториальном движении. Чтобы переопределить эту частоту по часам наблюдателя на бесконечности, что было сделано и с круговой, и с эпициклической частотами, мы должны поделить Ω_v^1 на фактор различия в скорости хода собственного времени частицы и времени наблюдателя на бесконечности, т.е. на t -компоненту 4-скорости (1.14). Таким образом, квадрат частоты вертикальных колебаний даётся выражением

$$\Omega_v^2 = r^{-3} B^{-2} H = r^{-3} \left(1 + \frac{a}{r^{3/2}}\right)^{-2} \left(1 - \frac{4a}{r^{3/2}} + \frac{3a^2}{r^2}\right), \quad (2.11)$$

совпадающим, например, с выражением, приведённым в статье [27] (см. также работу [28]). Из (2.11) видно, что в отсутствие вращения чёрной дыры $\Omega_v = \Omega$. Это значит, что вертикальное и круговое движения совершаются с одинаковым периодом, и суммарное перемещение свободной частицы будет по-прежнему представлять из себя движение по круговой замкнутой орбите, плоскость которой, однако, будет уже слабо наклонена по отношению к исходной экваториальной плоскости. Ситуация изменится с появлением параметра $a \neq 0$, так как при $\Omega_v \neq \Omega$ орбита перестанет быть замкнутой, и её плоскость начнёт движение вокруг направления, совпадающего с осью вращения чёрной дыры. Возникнет прецессия плоскости орбиты вокруг оси вращения чёрной дыры, и частота этой прецессии будет равна разнице круговой и вертикальной частот. Посмотрим, каким выражением даётся частота прецессии слабо наклонённой орбиты в случае медленно вращающейся чёрной дыры, т.е. при $a \ll 1$:

$$\begin{aligned} \Omega_{LT} = \Omega - \Omega_v &\approx r^{3/2} \left(1 - \frac{a}{r^{3/2}}\right) - \\ &- r^{3/2} \left(1 - \frac{3a}{r^{3/2}}\right) = \frac{2a}{r^3} \ll \Omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

эта величина есть просто угловая скорость увлечения вращением чёрной дыры свободных наблюдателей (см. формулу (1.2)) в пределе $a \ll 1$. Частоту Ω_{LT} ещё называют частотой Лензе – Тирринга.

В самом общем случае, когда пробная частица выведена из чисто кругового экваториального движения одновременно и в вертикальном, и в горизонтальном направлениях, её перемещение в пространстве представляется как движение по слабо эллиптической орбите, как плоскость, так и линия апсид которой поворачиваются с угловой скоростью, пропорциональной разности между круговой и вертикальной частотами и разности между круговой и эпициклической частотами соответственно. При этом для $a \ll 1$ прецессия плоскости орбиты будет происходить на характерных временах, много больших динамического времени, $t_{LT} \gg t_d$, где $t_{LT} \sim \Omega_{LT}^{-1}$, см. обсуждение в предыдущем разделе.

2.2. Выбор системы отсчёта

2.2.1. Вид метрики. Итак, исходя из общих заключений, сделанных в разделе 2.1, будем рассматривать случай медленно вращающейся чёрной дыры, $a \ll 1$. Следовательно, достаточно будет взять метрику Керра в линейном приближении по a . Тогда формула (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{2}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2}{R}\right)^{-1} dR^2 - \\ &- R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + 4 \frac{a}{R} \sin^2 \theta d\phi dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Метрика (2.13) идентична метрике для невращающейся чёрной дыры, записанной в координатах Шварцшильда, за исключением одного недиагонального члена, ответственного за прецессию Лензе – Тирринга.

Наша главная цель в этом разделе — ввести релятивистскую систему отсчёта, отслеживающую изгиб диска. Из соображений симметрии в такой системе отсчёта уравнения движения вещества должны выглядеть наиболее просто. Как и в случае с плоским диском, удобнее всего пользоваться неким ортонормированным некоординатным базисом. Чтобы этот базис отслеживал форму диска, необходимо, чтобы два его пространственных орта были локально ориентированы по касательной к поверхности симметрии диска. В каждой точке пространства для этого нужно взять орты "плоского" базиса, определяемые, скажем, экваториальной плоскостью чёрной дыры, и выполнить их вращение на углы β и γ , задающие форму диска. Для этого проще всего использовать орты декартовой системы координат, в которой ось z направлена вдоль оси вращения чёрной дыры. Однако сначала надо понять, какой четырёхмерный ортонормированный базис (его дуальная тетрада должна превращать метрику (2.13) в метрику Минковского) в пределе плоского пространства даст в качестве своей пространственной части орты декартовой системы координат.

Этого можно добиться, выполнив замену радиальной переменной в (2.13), а именно, от R перейти к так называемой "изотропной" радиальной координате, R_I :

$$R = R_I \left(1 + \frac{1}{2R_I}\right)^2. \quad (2.14)$$

Подстановка (2.14) в (2.13) даёт

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(\frac{1 - 1/(2R_I)}{1 + 1/(2R_I)}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{1}{2R_I}\right)^4 \times \\ &\times (dR_I^2 + R_I^2 d\theta^2 + R_I^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + \\ &+ 4 \frac{a \sin^2 \theta}{R_I(1 + 1/(2R_I))^2} dt d\phi, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где во втором слагаемом стоит элемент объёма сферической системы координат. Теперь легко перейти к декартовым координатам заменой $\{x = R_I \cos \phi \sin \theta, y = R_I \sin \phi \sin \theta, z = R_I \cos \theta\}$. С учётом того, что $R_I^2 \sin^2 \theta d\phi = x dy - y dx$, имеем

$$\begin{aligned} ds^2 = &K_1^2 dt^2 + 2aK_1 K_3 (x dy - y dx) dt - \\ &- K_2^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$K_1 = \frac{1 - 1/(2R_1)}{1 + 1/(2R_1)}, \quad K_2 = \left(1 + \frac{1}{2R_1}\right)^2, \\ K_3 = \frac{2}{R_1^3} \frac{1}{1 - 1/(2R_1)^2}, \quad (2.17)$$

т.е. $K_{1,2,3}$ являются функциями только $R_1 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Метрика (2.16) порождает следующий дуальный базис:

$$\mathbf{e}^t = K_1 dt + aK_3(x dy - y dx), \quad \mathbf{e}^x = K_2 dx, \\ \mathbf{e}^y = K_2 dy, \quad \mathbf{e}^z = K_2 dz. \quad (2.18)$$

Обратим внимание, что базис (2.18) соответствует наблюдателям, покоящимся в шварцшильдовских координатах, так как их мировая линия, задаваемая условием $U^i = \mathbf{e}^i/ds = \{1, 0, 0, 0\}$, отвечает равенствам $dx = dy = dz = 0$. Однако их часы синхронизованы таким образом, что свет за одинаковые промежутки времени, определяемые ортом $\mathbf{e}^t$, пролетает, как и положено, одинаковое физическое расстояние в любом направлении, определяемом комбинацией ортов $\mathbf{e}^{x,y,z}$. Если же наблюдатели пользовались бы координатным временем t , то обнаружили бы, например, что при посылке светового сигнала в азимутальном направлении в сторону вращения чёрной дыры он пробегает большее расстояние, чем то, которое за это же время преодолел бы в противоположном направлении. Последнее является следствием увлечения пространства вращающейся чёрной дырой и эквивалентно также известному наклонению световых конусов в азимутальном направлении. Наконец, отметим, что в принципе возможен другой выбор ортонормированного базиса, в котором также нивелируется эффект увлечения пространства. Такой базис называется базисом локально невращающихся наблюдателей, которые запускаются в азимутальном направлении с угловой скоростью, равной частоте (1.2), это математически соответствует тому, что вместо временного орта мы бы корректировали азимутальный орт (см. [29]).

Итак, далее нам будет необходимо придать вращение пространственной части (2.18), такое, чтобы получить изгибный дуальный базис, а вслед за ним и исходный базис, который, как мы помним, непосредственно необходим для записи проекций гидродинамических уравнений. Для этого сначала введём изгибные цилиндрические координаты.

2.2.2. Изгибные координаты. Определим изгибные цилиндрические координаты $\{\tau, r, \psi, \xi\}$ так, чтобы условие $\xi = 0$ давало координатную поверхность, совпадающую с экваториальной поверхностью изгибного диска. Здесь τ, r, ψ и ξ — новая временная координата и изгибные аналоги радиальной, азимутальной и вертикальной цилиндрических координат⁵. Впервые это было предложено сделать в работах [30, 31]. На каждом фиксированном $r = \text{const}$ угол ψ отсчитывается в положительном направлении от восходящего узла окружности $\xi = 0$, пересекающей экваториальную плоскость чёрной дыры. Связь между $\{\tau, r, \psi, \xi\}$ и $\{t, x, y, z\}$ можно получить

чередой вращений, выполняемых на каждом радиальном расстоянии на углы $\beta(r, \tau)$ и $\gamma(r, \tau)$.

Возьмём радиус-вектор с координатами

$$\begin{bmatrix} \tau \\ r \cos \psi \\ r \sin \psi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

из которых три пространственные декартовы координаты заданы в системе координат, ось z которой наклонена на угол $\beta(r, \tau)$ относительно оси вращения чёрной дыры, а ось x лежит в экваториальной плоскости чёрной дыры и повернута в ней на угол $\gamma(r)$ относительно некоего единого для всех r направления.

Повернём теперь последовательно эту систему координат на угол $\beta(r, \tau)$ вокруг её оси x в отрицательном направлении, а затем на угол $\gamma(r, \tau)$ вокруг нового положения её оси z в отрицательном направлении. После этих двух поворотов указанная система координат перейдёт в единую на всех r "плоскую" декартову систему, с плоскостью xu , совпадающей с экваториальной плоскостью чёрной дыры. При этом новые координаты радиус-вектора получаются домножением (2.19) сначала на матрицу

$$A_1(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

а затем на матрицу

$$A_2(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

В итоге получаем следующую связь изгибных цилиндрических и "плоских" декартовых координат, взятую в линейном приближении по малому β :

$$t = \tau, \\ x = r \cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma (r \sin \psi - \xi \beta), \\ y = r \sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma (r \sin \psi - \xi \beta), \\ z = r \beta \sin \psi + \xi. \quad (2.22)$$

2.2.3. Тетрада, переносимая отслеживающими изгибными наблюдателями. Перейдём от "плоского" базиса (2.18) к изгибному, выполнив в каждой точке пространства вращение его пространственных ортов на углы изгиба. Для этого надо сначала выполнить вращение, строго обратное тому, которое мы произвели в разделе 2.2.2. Это значит, что мы должны взять базис (2.18) в виде столбца и умножить его сначала на матрицу $A_2(-\gamma)$, а затем на матрицу $A_1(-\beta)$. После этого, поскольку мы хотим получить базис, соответствующий (изгибной) цилиндрической системе координат, необходимо дополнительно "довернуть" тройку пространственных ортов на азимутальный угол ψ . Последнее делается дополнительным домножением базиса на матрицу $A_2(-\psi)$.

В качестве результата будем иметь изгибный дуальный базис, в который входят некоторые линейные комбинации "плоских" координатных ортов, $\{dt, dx, dy, dz\}$. Теперь остаётся получить его в виде линейных комбинаций координатных ортов изгибной системы координат,

⁵ Под r везде ниже будет подразумеваться изгибная радиальная координата.

$\{d\tau, dr, d\psi, d\xi\}$, для чего достаточно взять дифференциалы закона преобразования координат (в линейном приближении по β он дан в (2.22)) и подставить их в полученный после вращений изгибный дуальный базис. Можно проверить, что в линейном по β и a приближении будем иметь

$$\mathbf{e}^\tau = (K_1 - ar\xi K_3 \partial_\varphi U) d\tau + a\xi K_3 \partial_\varphi (Z - rW) dr + arK_3 (r - \xi Z) d\varphi - arK_3 \partial_\varphi Z d\xi, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{e}^r = -\xi K_2 U d\tau + K_2 (1 - \xi W) dr, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{e}^\varphi = -\xi K_2 \partial_\varphi U d\tau - \xi K_2 \partial_\varphi W dr + rK_2 d\varphi, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{e}^\xi = rK_2 U d\tau + rK_2 W dr + K_2 d\xi, \quad (2.26)$$

где мы ввели новую азимутальную переменную $\varphi = \psi + \gamma(r, \tau)$ и перешли к частным производным по соответствующим новым координатам.

Также мы ввели новые переменные, характеризующие геометрию диска:

$$\Psi_1 = \beta \cos \gamma, \quad \Psi_2 = \beta \sin \gamma, \quad (2.27)$$

и будем теперь пользоваться ими вместо углов β и γ , и, кроме того,

$$Z = \beta \sin \psi = \Psi_1 \sin \varphi - \Psi_2 \cos \varphi, \quad U = \dot{Z}, \quad W = Z', \quad (2.28)$$

где частные производные по τ и r обозначены соответственно точкой и штрихом.

Видно, что при $\beta = \gamma = 0$ базис (2.23)–(2.26) переходит в "плоский" базис (2.18) с учётом дополнительного перехода к декартовым координатам.

Как мы обсуждали выше, наблюдатели, переносащие базис (2.18), покоятся относительно шварцшильдовских координат. Напротив, наблюдатели, соответствующие базису (2.23)–(2.26), движутся в пространстве, отслеживая меняющуюся (при нестационарной динамике) форму изгибного диска.

Как мы видели в разделе 1, исходный базис, на который проецируются в дальнейшем гидродинамические уравнения, получается обращением матрицы дуального базиса. Используя (2.23)–(2.26), в линейном по β и a приближении имеем

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{1}{K_1} \left(\partial_\tau + \xi U \partial_r + \frac{\xi}{r} \partial_\varphi U \partial_\varphi - rU \partial_\xi \right), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{K_2} \left(-a\xi \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi Z \partial_\tau + (1 + \xi W) \partial_r + \frac{\xi}{r} \partial_\varphi W \partial_\varphi - rW \partial_\xi \right), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{K_2} \left(-a \frac{K_3}{K_1} (r - \xi Z) \partial_\tau - a\xi \frac{K_3}{K_1} rU \partial_r + \left(\frac{1}{r} - a\xi \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi U \right) \partial_\varphi + ar \frac{K_3}{K_1} rU \partial_\xi \right), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{K_2} \left(ar \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi Z \partial_\tau + \partial_\xi \right). \quad (2.32)$$

Имея и исходный, и дуальные базисы, при помощи алгоритма, изложенного в разделе 1.2.1, вычисляем коэффициенты связности. Эта, весьма трудоёмкая, однако прямая, процедура даёт в линейном приближении по β и a следующие ненулевые коэффициенты связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau\tau\tau} &= \frac{K'_1}{K_1 K_2}, \quad \Gamma_{\tau r\varphi} = \frac{K_3}{K_2^2} \left(1 - \frac{1}{2} (r - \xi Z) K_4 \right), \\ \Gamma_{\tau r\xi} &= -a \frac{K_3}{K_2^2} \partial_\varphi Z \left(1 - \frac{1}{2r} (r^2 + \xi^2) K_4 \right), \quad \Gamma_{\tau\varphi r} = -\Gamma_{\tau r\varphi}, \\ \Gamma_{\tau\varphi\xi} &= a \frac{K_3}{K_2^2} \left(Z + \frac{\xi}{2r} (r - \xi Z) K_4 \right), \quad \Gamma_{\tau\xi\tau} = \frac{\xi}{r} \frac{K'_1}{K_1 K_2}, \\ \Gamma_{\tau\xi r} &= -\Gamma_{\tau r\xi}, \quad \Gamma_{\tau\xi\varphi} = -\Gamma_{\tau\varphi\xi}, \\ \Gamma_{r\varphi\tau} &= \frac{\xi}{r} \frac{1}{K_1} \partial_\varphi U - \Gamma_{\tau r\varphi}, \quad \Gamma_{r\varphi r} = \frac{\xi}{r} \frac{1}{K_2} \partial_\varphi W, \\ \Gamma_{r\varphi\varphi} &= \frac{(rK_2)'}{rK_2^2} - a\xi \frac{K_3}{K_1 K_2} \partial_\varphi U, \quad \Gamma_{r\xi\tau} = \frac{U}{K_1} - \Gamma_{\tau r\xi}, \\ \Gamma_{r\xi r} &= \frac{W}{K_2} - \frac{\xi}{r} \frac{K'_2}{K_2^2}, \quad \Gamma_{r\xi\varphi} = -ar \frac{K_3}{K_1 K_2} U, \\ \Gamma_{r\xi\xi} &= \frac{K'_2}{K_2^2}, \quad \Gamma_{\varphi\xi\tau} = \frac{1}{K_1} \partial_\varphi U - \Gamma_{\tau\varphi\xi}, \\ \Gamma_{\varphi\xi r} &= \frac{1}{K_2} \partial_\varphi W, \quad \Gamma_{\varphi\xi\varphi} = -\frac{\xi}{r} \frac{K'_2}{K_2^2} - ar \frac{K_3}{K_1 K_2} \partial_\varphi U, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где введено обозначение $K_4 \equiv (K_3/K_1)(K_1/K_3)'$. Остальные ненулевые Γ_{ijk} , как обычно, получаются с учётом их антисимметричности по первым двум индексам.

Итак, базис (2.29)–(2.32) вместе с его коэффициентами связности (2.33) является суммой двух разных частей: главной части, остающейся при $\beta = 0$, и малой добавочной части $\propto \beta$. В дальнейшем для удобства будем обозначать первую B_0 , а вторую B_1 .

2.3. Система изгибных уравнений

2.3.1. Проекция на изгибный базис динамических уравнений для тонкого диска.

Разделение уравнений на две системы, описывающие плоский диск и изгибный диск. Возьмём уравнения релятивистской гидродинамики в их исходном виде:

$$T^{ik}_{;k} = 0, \quad (2.34)$$

где тензор энергии-импульса и входящие в него величины описаны в разделе 1.2.3. Уравнения (2.34) должны быть теперь спроецированы на изгибный базис (2.29)–(2.32). Для выполнения этой процедуры будем использовать предположение о малости угла $\beta \ll 1$. Иными словами, математически мы будем рассматривать изгиб диска как малое возмущение к его "основному" состоянию, т.е. к модели плоского диска, или, как ещё говорят, к модели соответствующего возмущениям бэкграунда. Важно упомянуть, что появление изгиба ведёт к возникновению в уравнениях новых членов не только за счёт искривления базиса, но и за счёт появления дополнительных возмущений самих физических величин, входящих в тензор энергии-импульса, таких как плотность, давление, 4-скорость.

Таким образом, для изгибного диска вместо (2.34) будем иметь

$$((T_0^{ik} + T_1^{ik})_{;k})_0 + ((T_0^{ik} + T_1^{ik})_{;k})_1 = 0, \quad (2.35)$$

где T_0^{ik} соответствует бэграунду, а T_1^{ik} — малое *эйлерово* возмущение тензора энергии-импульса. Индексом 0 после обозначения ковариантной дивергенции мы отмечаем то, что она берётся в базисе B_0 , тогда как индекс 1 означает, что она берётся в базисе B_1 .

Действие ковариантной дивергенции с индексом 0 на T_0^{ik} , очевидно, даёт 0, поскольку это уравнения, описывающие бэграунд:

$$(T_0^{ik})_{;k} = 0. \quad (2.36)$$

Тогда в линейном по β приближении имеем изгибные уравнения:

$$(T_1^{ik})_{;k} + (T_0^{ik})_{;k} = 0. \quad (2.37)$$

Мы считаем, что в искривлённом диске 4-скорость, давление, плотность энергии покоя, внутренняя энергия, коэффициент вязкости и плотность потока энергии, определённые в их стандартном смысле (см. раздел 1.2.3), имеют вид соответственно

$$U^i = U_0^i + v^i, \quad p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1,$$

$$\eta = \eta_0 + \eta_1, \quad q^i = q_0^i + q_1^i,$$

где индексами 0 обозначаются величины, относящиеся к бэграунду, а индексами 1 — к возмущениям; v^i — возмущение 4-скорости⁶.

Итак, T_0^{ik} является тензором энергии-импульса, в который входят только невозмущённые величины в соответствии с определением (1.59), а его возмущение имеет вид

$$T_1^{ik} = w_1 U_0^i U_0^k + w_0 (v^i U_0^k + U_0^i v^k) - p_1 \eta^{ik} + 2\eta_1 \sigma_0^{ik} + 2\eta_0 \sigma_1^{ik} - U_0^i q_1^k - U_0^k q_1^i - v^i q_0^k - v^k q_0^i, \quad (2.38)$$

где $w_0 = \rho_0 + \epsilon_0 + p_0$ — энтальпия бэграунда, а $w_1 = \rho_1 + p_1 + \epsilon_1$ — её возмущение.

Кроме того, σ_0^{ik} является тензором сдвига, в который входят только невозмущённые величины в соответствии с определением (1.60), а σ_1^{ik} — его возмущённая часть, имеющая вид

$$\begin{aligned} \sigma_1^{ik} = & \frac{1}{2} [(v_{;j}^i)_0 P_0^{jk} + (v_{;j}^k)_0 P_0^{ji}] - \frac{1}{3} (v_{;j}^j)_0 P_0^{ik} + \\ & + \frac{1}{2} [(U_{0;j}^i)_0 P_1^{jk} + (U_{0;j}^k)_0 P_1^{ji}] - \frac{1}{3} (U_{0;j}^j)_0 P_1^{ik} + \\ & + \frac{1}{2} [(U_{0;j}^i)_1 P_0^{jk} + (U_{0;j}^k)_1 P_0^{ji}] - \frac{1}{3} (U_{0;j}^j)_1 P_0^{ik}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где P_0^{ik} — проекционный тензор, в который входят только невозмущённые величины в соответствии с опре-

делением (1.61), а его возмущение записывается как $P_1^{ik} = -U_0^i v^k - U_0^k v^i$.

Ниже везде у невозмущённых величин будем опускать индексы 0. Кроме того, части тензора энергии-импульса, отвечающей вязкому взаимодействию в диске, мы будем, где это целесообразно, приписывать индекс v , $T_v^{ik} \equiv 2\eta\sigma^{ik}$.

Дополнительные соотношения, использующиеся при записи уравнений. Данные ниже соотношения справедливы с точностью до членов порядка $\propto \delta^2$, чего будет достаточно для излагаемой здесь теории изгибных дисков в главном порядке по малому параметру δ . Такое упрощение позволяет при выводе обсуждаемых соотношений считать, что в соответствующем бэграунде отличны от нуля только U^τ и U^φ , а $U^r \propto \delta^2$, и величина U^r может быть на время положена равной нулю.

Прежде всего отметим, что везде ниже будет использована связь между компонентами U^τ и U^φ :

$$(U^\tau)^2 = (U^\varphi)^2 + 1, \quad (2.40)$$

которая следует из выражения для нормы 4-скорости в ортонормированном базисе. Также связь (2.40) будет полезна и в своей дифференциальной форме, т.е.

$$U^\tau dU^\tau = U^\varphi dU^\varphi. \quad (2.41)$$

Далее, поскольку имеет место и нормировка 4-скорости в искривлённом диске, а возмущение 4-скорости считается малым, то в линейном по её амплитуде приближении

$$\begin{aligned} (U^\tau + v^\tau)^2 - (U^\varphi + v^\varphi)^2 = \\ = (U^\tau)^2 + 2U^\tau v^\tau - (U^\varphi)^2 - 2U^\varphi v^\varphi = 1, \end{aligned}$$

а значит, с учётом (2.40) v^i "ортогонально" U^i :

$$U^\tau v^\tau = U^\varphi v^\varphi. \quad (2.42)$$

Наконец, из условия пространственноподобности σ^{ik} имеем

$$\sigma^{r\tau} U^\tau = \sigma^{r\varphi} U^\varphi,$$

а значит, в используемом в этой части базисе B_0 в модели плоского диска наряду с $T_v^{r\varphi}$ в интересующем нас порядке по δ будет отличен от нуля и $T_v^{r\tau}$, причём

$$T_v^{r\tau} = \frac{U^\varphi}{U^\tau} T_v^{r\varphi}. \quad (2.43)$$

Заметим, что в базисе (1.49)–(1.52), сопутствующем азимутальному движению, был отличен от нуля только элемент $T_v^{r\varphi}$ (см. выражение (1.72)).

Уравнение свободного азимутального движения. Величины, соответствующие модели бэграунда и входящие в изгибные уравнения (2.37), должны быть отдельно получены из уравнений (2.36). Однако для этого нам достаточно воспользоваться результатами раздела 1, учтя лишь переход от базиса (1.49)–(1.52) к базису B_0 .

Тем не менее в процессе вывода изгибных уравнений также необходимо будет использовать некоторые из

⁶ Чтобы сократить объём приводимых выражений, не будем выписывать член со второй вязкостью ζ : используя анализ, который детально изложен ниже, можно показать, что этот член не даёт вклада в итоговые уравнения в главном порядке по малым параметрам задачи.

уравнений (2.36), записанные именно в базисе B_0 . Речь идёт об r - и ξ -проекциях этих уравнений, в главном порядке по малой толщине плоского диска описывающих, как мы знаем, его азимутальное вращение в экваториальной плоскости чёрной дыры и его вертикальное гидростатическое равновесие. Важно подчеркнуть, что эти соотношения справедливы как для стационарного, так и для нестационарного аккрецирующего потока, для любой параметризации вязкости, а также для любой конкретной вертикальной и радиальной его структуры. Лишь бы выполнялось главное условие $\delta \ll 1$.

На первом этапе записи изгибных уравнений нам будет необходима только r -проекция (2.36). Положив $T^{ik} = \rho U^i U^k$, получаем, что $T^{rk}_{;k} = 0$ даст

$$\frac{K'_1}{K_1} (U^\tau)^2 + a \frac{K_3}{K_2} (2 - rK_4) U^\tau U^\varphi - \frac{(rK_2)'}{rK_2} (U^\varphi)^2 = 0. \quad (2.44)$$

В выкладках будет применяться именно комбинация (2.44), однако можно убедиться, что в совокупности с (2.40) в линейном по a приближении она даёт решение

$$U^\varphi = (r_S - 3)^{-1/2} (1 - ar_S^{-1/2} (r_S - 3)^{-1}), \quad (2.45)$$

где мы перешли к шварцшильдовской радиальной координате r_S , эквивалентной координате r , использовавшейся в разделе 1 в выражении для U_g^φ (см. формулу (1.14)). Легко проверить, что $U_g^\varphi = U^\varphi / r_S$, как и должно быть с учётом перехода от координатного базиса к базису B_0 .

Условие "калибровки" изгибной системы координат. Главное кинематическое условие, которым регламентируется изгибная система отсчёта, заключается в постоянстве вертикальных положений жидких частиц:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad (2.46)$$

что обеспечивается быстрым по сравнению с динамическим временем изменения изгиба установлением гидростатического равновесия поперёк диска, как мы обсуждали в разделе 2.1. Однако, как было замечено ещё в работе [32], важным моментом является то, что это не означает равенства нулю проекции 4-скорости жидкости на орт e_ξ , поскольку наш базис некоординатный и его орты не являются касательными к координатным линиям.

По определению

$$v^\xi = \frac{e^\xi}{ds}.$$

Используя (2.26), имеем

$$v^\xi = rK_2 U \frac{d\tau}{ds} + rK_2 W \frac{dr}{ds},$$

в это соотношение $d\tau/ds$ и dr/ds должны быть подставлены в нулевом порядке по β , иными словами, как величины, соответствующие динамике плоского диска. Выражения для e^τ , e^φ и e^r при $\beta = 0$ дают

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{K_1} \left(U^\tau - ar^2 K_3 \frac{d\varphi}{ds} \right), \quad \frac{dr}{ds} = \frac{U^r}{K_2}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{U^\varphi}{rK_2}, \quad (2.47)$$

где по определению $U^i \equiv e^i/ds$. В итоге получаем

$$v^\xi = rU^\tau K \frac{K_2}{K_1} U + rU^r W, \quad (2.48)$$

где

$$K = 1 - ar \frac{K_3}{K_2} \frac{U^\varphi}{U^\tau}.$$

В (2.48) скорости U^τ и U^r должны быть взяты из соответствующего решения для плоского диска (бэкграунда).

Явный вид системы уравнений, описывающей изгибный диск. Теперь, с учётом результатов (2.40)–(2.48), нам предстоит выписать в явном виде уравнения (2.37), удержав только члены в главном порядке по двум малым параметрам: δ и $u \equiv t_d/t_{ev}$ ⁷. При этом мы учитываем, что величины "теплого" происхождения в бэкграунде малы, т.е. $p, e, \eta \propto \delta^2 \rho$, а $q^\xi \propto \delta^3 \rho$, $q^{\tau, \varphi} \propto \delta^4$ (см. раздел 1).

Отложим пока рассмотрение эффектов неидеальности жидкости. Заметим, что это соответствует не только равенству нулю членов, в которые входит коэффициент вязкости и плотность потока энергии либо их возмущения, но и отсутствию вклада $\propto U^r$. Процедуру отбора ведущих членов в приближении идеальной жидкости начнём с рассмотрения вторых слагаемых в τ -, r - и φ -проекциях (2.37). Оказывается, что такие члены здесь $\propto \delta\beta$, причём в r -проекции (2.37) такой вклад представляет из себя проекцию вертикального градиента давления на плоскость орбитального движения вещества в искривлённом диске (см. анализ в разделе 2.1, где мы обозначили указанную величину как $(\nabla p)_r$). Кроме того, в τ - и φ -проекциях (2.37) также участвуют члены $\propto \delta^{-1} u \beta$, которые тоже необходимо удержать. С другой стороны, первые слагаемые в τ -, r - и φ -проекциях (2.37) дают члены, в которые входят эйлеровы возмущения скоростей, $v^{\tau, r, \varphi}$, а также эйлерово возмущение плотности энергии покоя, ρ_1 . Отсюда заключаем, что

$$v^{\tau, r, \varphi} \propto \max \{ \delta, \delta^{-1} u \} \beta, \quad \rho_1 \propto \max \{ \delta, \delta^{-1} u \} \rho \beta. \quad (2.49)$$

Кроме того, по причинам, которые станут ясны чуть ниже, мы временно удержим в обсуждаемых проекциях частные производные по времени от v^i и ρ_1 , несмотря на то что они ещё в u^{-1} раз меньше, чем сами эти величины. Наконец, заметим, что в первых слагаемых τ - и φ -проекций (2.37) также появятся члены с комбинацией $\partial_\xi \rho v^\xi$, которые по амплитуде ограничены порядком $\propto \max \{ \delta, \delta^{-1} u \} \beta$ в силу выражения (2.48).

Теперь, используя результат (2.49), нетрудно отобрать ведущие члены, входящие в τ -, r - и φ -проекции (2.37) из-за неидеальности жидкости. Наибольшие хлопоты тут доставляет вклад за счёт возмущения тензора сдвига, $2\eta\sigma_1^{ik}$, входящий в T_1^{ik} (см. выражения (2.38) и

⁷ Как мы обсуждали, малость t_d/t_{ev} необходима для того, чтобы аккреционный поток, выведенный из экваториальной плоскости чёрной дыры, мог по-прежнему рассматриваться как "диск". В свою очередь, это обеспечивается совместно как малостью того же δ , так и тем, что $t_d/t_{LT} \ll 1$ (см. раздел 2.1.1).

(2.39)). Однако в большинство слагаемых этого вклада входят совместно $\eta \propto \delta^2$ и $v^i \propto \delta\beta$, поэтому очевидно, что необходимо учесть лишь те из них, в которых производная по ξ (понижающая порядок по δ) встречается дважды. Этот факт сильно сокращает количество "вязких" членов, которые необходимо оставить. Кроме того, по аналогичным соображениям в уравнения не войдут члены с $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_1$ и η_1 . Наконец, ещё раз обратим внимание, что, кроме упомянутых только что чисто "вязких" членов, необходимо не забыть и про вклад за счёт радиальной адвекции, появляющейся в бэкграунде при ненулевой вязкости. Речь идёт о тех членах, которые могут появиться в "невязкой" части тензора энергии-импульса (см. первое слагаемое в (1.59)) из-за отличной от нуля величины $U^r \propto \delta^2$.

Итак, приняв во внимание все перечисленные доводы и не забывая пользоваться соотношениями, полученными в трёх предыдущих разделах, будем иметь τ -, r - и ϕ -проекции (2.37) в виде

$$\begin{aligned} & K \frac{K_2}{K_1} (U^\tau)^2 \dot{\rho}_1 + \left(2U^\phi - ar \frac{K_3}{K_2} \frac{(U^\phi)^2 + (U^\tau)^2}{U^\tau} \right) \frac{K_2}{K_1} \rho \dot{v}^\phi + \\ & + \frac{1}{r} U^\tau U^\phi \partial_\phi \rho_1 + \frac{1}{r} \frac{(U^\phi)^2 + (U^\tau)^2}{U^\tau} \rho \partial_\phi v^\phi + \\ & + \partial_r (\rho U^\tau v^r) + \partial_\xi \rho U^\tau v^\xi + \frac{(rK_1^2 K_2^2)'}{rK_1^2 K_2^2} \rho U^\tau v^r + F_v^\tau = \\ & = r \partial_\xi \rho (U^\tau)^2 K \frac{K_2}{K_1} U + \frac{\xi}{r} \rho U^\tau U^\phi \partial_\phi W, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & K \frac{K_2}{K_1} U^\tau \dot{v}^r + \frac{U^\phi}{r} \partial_\phi v^r - \\ & - \left[2 \frac{K_1'}{K_1 U^\phi} + a \frac{K_1}{rK_2 U^\tau} \left(\frac{r^2 K_3}{K_1} \right)' \right] v^\phi + \frac{1}{\rho} F_v^r = \\ & = W r \frac{\partial_\xi p}{\rho} - a \xi \frac{K_3^2}{K_1 K_2} \left(\frac{K_1}{K_3} \right)' Z U^\tau U^\phi, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & K \frac{K_2}{K_1} U^\tau U^\phi \dot{\rho}_1 + \left(\frac{(U^\phi)^2 + (U^\tau)^2}{U^\tau} - 2ar \frac{K_3}{K_2} U^\phi \right) \frac{K_2}{K_1} \rho \dot{v}^\phi + \\ & + \frac{(U^\phi)^2}{r} \partial_\phi \rho_1 + 2 \frac{U^\phi}{r} \rho \partial_\phi v^\phi + \partial_r (\rho U^\phi v^r) + \partial_\xi \rho U^\phi v^\xi + \\ & + \frac{(r^2 K_1 K_2^3)'}{r^2 K_1 K_2^3} U^\phi \rho v^r - a \frac{K_1}{rK_2} \left(\frac{r^2 K_3}{K_1} \right)' U^\tau \rho v^r + F_v^\phi = \\ & = K \frac{K_2}{K_1} r \partial_\xi \rho U^\tau U^\phi U + \frac{\xi}{r} \rho (U^\phi)^2 \partial_\phi W, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где

$$K = 1 - ar \frac{K_3}{K_2} \frac{U^\phi}{U^\tau},$$

а $F_v^{\tau, r, \phi}$ — суммарный вклад за счёт ненулевых вязких сил, а также за счёт радиальной адвекции вещества в бэкграунде $\propto U^r$.

В явном виде

$$\begin{aligned} F_v^\tau &= \frac{U^\phi}{U^\tau} (\partial_\xi T_v^{\phi\xi} - r W \partial_\xi T_v^{r\phi}) - r \partial_\xi \rho U^\tau U^r W, \quad F_v^r = \partial_\xi T_v^{r\xi}, \\ F_v^\phi &= (\partial_\xi T_v^{\phi\xi} - r W \partial_\xi T_v^{r\phi}) - r \partial_\xi \rho U^\phi U^r W, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$\begin{aligned} T_v^{r\xi} &= -\frac{\eta}{K_2} (\partial_\xi v^r + U^\phi \partial_\phi W), \\ T_v^{\phi\xi} &= -\frac{\eta}{K_2} \left(\partial_\xi v^\phi - 2a \frac{K_3}{K_2} U^\tau (U^\phi)^2 Z \right), \\ T_v^{r\phi} &= -\eta r \left(\frac{U^\phi}{rK_2} \right)'. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Обратим внимание, что по смыслу величины $T_v^{r\xi}$, $T_v^{\phi\xi}$ — это возмущения тензора вязких напряжений. Как видим, из-за кривизны базиса в них входят и члены $\propto \beta$, дающие вклад в возмущение тензора сдвига. Напротив, $T_v^{r\phi}$ — величина, относящаяся к бэкграунду. Тем не менее мы здесь для лаконичности использовали для них единое обозначение с индексом v . Наконец, в (2.50)–(2.54) мы считаем, что в релятивистских коэффициентах K_1 , K_2 и K_3 аргумент R_1 заменён на r , так как $R_1^2 = r^2 + \xi^2$, и учёт зависимости от ξ всегда даёт здесь лишь малую поправку $\propto \delta^2$.

Нам осталось выписать явный вид ξ -проекции (2.37). Точно так же начнём с вклада членов в приближении идеальной жидкости, причём на этот раз распишем сначала первое слагаемое в (2.37). При этом выясняется, что в качестве ведущих по δ членов в это слагаемое, в частности, входят ρv^ϕ и ρ_1 , но домноженные дополнительно на ξ . Это значит, что их амплитуда ограничена порядком $\max\{\delta^2, u\}\beta$. Кроме того, v^ξ теперь фигурирует в слагаемом вида $U^\phi \rho \partial_\phi v^\xi$, что также означает повышение порядка малости на коэффициент δ по сравнению с (2.50)–(2.52) — видим, что в формулах (2.50) и в (2.52) v^ξ фигурировало в комбинации с $\partial_\xi \rho$. Также из всех членов "теплого" происхождения мы теперь должны будем удержать член с $\partial_\xi p_1$, поскольку он тоже имеет порядок δ^2 в силу того, что $p_1 \sim \delta^2 p_1 \propto \rho \delta^3 \beta$.

Переходя теперь ко второму слагаемому в ξ -проекции (2.37), выпишем все члены вплоть до порядка $\propto \max\{\delta^2, u\}\beta$. Из аналогичных соображений члены, появляющиеся из-за неидеальности жидкости (включая и "адвективные", пропорциональные U^r), будем удерживать тут также с повышением малости на коэффициент δ по сравнению с тем, что мы делали в (2.50)–(2.52).

Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & U^\phi \partial_\phi v^\xi + r \frac{\partial_\xi p_1}{\rho} + \xi \frac{(U^\phi)^2}{r} \left(1 - 2ar \frac{K_3}{K_2} \frac{U^\tau}{U^\phi} \right) \frac{\rho_1}{\rho} + \\ & + 2\xi U^\phi v^\phi \left[\frac{K_1'}{K_1} - \frac{K_2'}{K_2} - \frac{ar}{2} \frac{K_3^2}{K_1 K_2} \left(\frac{K_1}{K_3} \right)' \left(\frac{U^\tau}{U^\phi} + \frac{U^\phi}{U^\tau} \right) \right] + \\ & + \frac{r}{\rho} F_v^\xi = - \left[\frac{K_2}{K_1} \partial_\phi U - 2a \frac{K_3 Z}{K_2} + a \frac{\xi^2}{r} \frac{K_3^2 Z}{K_1 K_2} \left(\frac{K_1}{K_3} \right)' \right] \times \\ & \times r U^\tau U^\phi + ar^2 \frac{K_3}{K_1} (U^\phi)^2 \partial_\phi U, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned} F_v^\xi &= \frac{1}{rK_1 K_2^3} \partial_r (rK_1 K_2^3 T_v^{r\xi}) + \partial_\xi T_v^{\xi\xi} + \frac{1}{r} \partial_\phi T_v^{\phi\xi} + \\ & + \partial_\phi W (T_v^{r\phi} + T_{\text{adv}}^{r\phi}) + a \frac{K_1}{rK_2} \left(\frac{r^2 K_3}{K_1} \right)' \times \\ & \times \partial_\phi Z \left(\frac{U^\phi}{U^\tau} T_v^{r\phi} + \frac{U^\tau}{U^\phi} T_{\text{adv}}^{r\phi} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

и $T_{\text{adv}}^{r\varphi} = \rho U^\varphi U^r$. Мы не приводим здесь явный вид $T_v^{\xi\xi}$, так как он не потребуется в окончательной форме изгибных уравнений.

В (2.55), (2.56) везде, кроме второго слагаемого в квадратных скобках в правой части (2.55), в релятивистских коэффициентах K_1 , K_2 и K_3 аргумент R_1 заменяется на r . Исключительность указанного слагаемого заключается в том, что оно одно во всём уравнении (2.55) имеет нулевой порядок по рассматриваемым нами малым параметрам δ и u . Поскольку, однако, в (2.55) мы удерживали члены $\propto \max\{\delta^2, u\}$, необходимо было бы учесть в указанном слагаемом поправки $\propto \delta^2$ за счёт зависимости от ξ релятивистских коэффициентов K_2 и K_3 . Мы не сделали этого по причине, которая будет обсуждаться в следующем разделе.

2.3.2. Завершение вывода изгибных уравнений. Итак, мы выписали изгибные уравнения в ведущем порядке по малым параметрам δ и u . При этом в них также учтены все линейные по параметру Керра a поправки. Если на время положить $a = 0$ и посмотреть на уравнение (2.55), увидим, что, с одной стороны, в него входят члены, пропорциональные скорости изменения искривлённости диска, $\propto U$, а с другой — члены, содержащие возмущения физических величин и ограниченные порядком $\propto \delta^2$. Таким образом, можно сказать, что только за счёт собственных внутренних сил тонкий искривлённый диск эволюционирует на большой временной шкале, такой что $u \sim \delta^2$. Тогда становится окончательно ясно, что уравнения (2.50)–(2.52) ограничены порядком $\propto \delta$, а уравнение (2.55) — порядком $\propto \delta^2$.

В то же время при появлении отличного от нуля параметра a в правой части (2.55) возникает "большой" член, имеющий нулевой порядок по δ и $\propto aZ$. Этот член и описывает гравитомагнитное воздействие вращающейся чёрной дыры на наклонённый/искривлённый диск. Чтобы удовлетворить соразмерности всех слагаемых, фигурирующих в (2.55), мы должны положить, что $a \sim \delta^2$. Но тогда понятно, что все поправочные добавки $\sim a$ в уравнениях (2.50)–(2.52) имеют следующий порядок малости по δ и могут быть опущены. То же самое касается и всех членов $\propto a\delta^2$ в уравнении (2.55), включая и поправку $\propto \delta^2$, связанную с зависимостью релятивистских коэффициентов от R_1 в самом гравитомагнитном члене.

Фактически это означает, что, рассматривая динамику изгибного тонкого аккреционного диска в окрестности медленно вращающейся чёрной дыры, достаточно использовать модель бэкграунда, т.е. соответствующего плоского диска, полученную в шварцшильдовской метрике, при $a = 0$. Само же ограничение медленным вращением чёрной дыры, напомним, следовало из того, что в противном случае уже нельзя было бы говорить об (в том числе и нестационарном) аккреционном потоке как о диске в силу того, что в нём не соблюдалось бы условие вертикального гидростатического равновесия (см. раздел 2.1). Конечно же, эти выводы относятся только к слабо наклонённым/искривлённым и геометрически тонким дискам, $\beta \ll 1$, $\delta \ll 1$.

Итак, далее мы полагаем $a = 0$ во всех членах, кроме гравитомагнитного. Это значительно упрощает дальнейшие выкладки, необходимые для получения изгибных уравнений в их окончательном виде. Займёмся сначала уравнениями (2.50) и (2.52). Удобно перейти к их комбинациям, в которых будет фигурировать либо $\dot{\rho}$, либо $\dot{v}^\varphi$.

Исключение $\dot{v}^\varphi$ даст при $a = 0$ выражение

$$U^\varphi \partial_\varphi \rho_1 + \frac{1}{(U^\tau)^2} \rho \partial_\varphi v^\varphi + \frac{U^\tau}{K_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_2^2 \frac{\rho v^r}{U^\tau} \right) = \\ = \xi U^\varphi \rho \partial_\varphi W + \frac{U^\varphi}{(U^\tau)^2} (\partial_\xi T_v^{\varphi\xi} - r W \partial_\xi T_v^{r\varphi}), \quad (2.57)$$

где мы опустили слагаемое $\dot{\rho}_1$ как величину следующего порядка малости по δ по сравнению с остальными. В ньютоновском пределе, когда $r \rightarrow \infty$, уравнение (2.57) сводится к уравнению неразрывности для возмущений.

В свою очередь, исключение $\dot{\rho}_1$ даст при $a = 0$ формулу

$$\frac{K_2}{K_1} \dot{v}^\varphi + \frac{1}{r} \frac{U^\varphi}{U^\tau} \partial_\varphi v^\varphi + \left(\frac{\partial_r U^\varphi}{U^\tau} + \frac{K_1'}{K_1} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \right) v^r + \\ + \frac{1}{\rho U^\tau} (\partial_\xi T_v^{\varphi\xi} - r W \partial_\xi T_v^{r\varphi}) = 0. \quad (2.58)$$

В ньютоновском пределе (2.58) сводится к азимутальной компоненте уравнения Навье–Стокса для возмущений.

Наконец, (2.51) с $a = 0$ будет выглядеть как

$$\frac{K_2}{K_1} U^\tau \dot{v}^r + \frac{U^\varphi}{r} \partial_\varphi v^r - 2 \frac{K_1'}{K_1 U^\varphi} v^\varphi + \frac{1}{\rho} \partial_\xi T_v^{\xi\xi} = W r \frac{\partial_\xi p}{\rho}. \quad (2.59)$$

В ньютоновском пределе (2.59) сводится к радиальной компоненте уравнения Навье–Стокса для возмущений.

Важно объяснить, почему мы удержали члены $\propto \dot{v}^r$ и $\dot{v}^\varphi$ в уравнениях (2.58) и (2.59), несмотря на то что они должны быть следующего порядка малости по δ . Как упоминалось в разделе 2.1, в ньютоновском пределе эпициклическая частота становится равной частоте кругового движения, что приводит к резонансному росту амплитуды возмущения скорости газовых элементов диска под воздействием радиальной проекции вертикального градиента давления, $(\nabla p)_r$, сдерживаемому лишь воздействием вязкости. Математически это выражается в том, что в пределе невязкого кеплеровского диска уравнение (2.58) даёт в главном порядке по параметру u (т.е. с опусканием члена $\propto \dot{v}^\varphi$) такое соотношение между v^r и v^φ , при котором сумма второго и третьего слагаемых в (2.59) становится равной нулю. Но в силу того, что в правой части (2.59) стоит член $\propto \delta\beta$, это означает, что $\dot{v}^r$ (а значит и $\dot{v}^\varphi$) приобретает первый порядок по δ в обсуждаемом случае. Либо вязкость, либо релятивистские поправки снимают обсуждаемый кеплеровский резонанс, и амплитуды $\dot{v}^r$ и $\dot{v}^\varphi$ вновь уменьшаются до третьего порядка по δ .

Теперь из уравнения (2.55) нам необходимо получить так называемое твистовое уравнение, играющее главную роль в теории изгибных дисков. Для этого нам понадобится определить в явном виде величину $\partial_\xi p/\rho$, которую мы выпишем в следующем разделе. Хотя нам достаточно знать её в шварцшильдовском приближении, учтём и линейные поправки по a . Это пригодится чуть позже, чтобы получить дополнительное выражение для частоты Лензе–Тирринга в терминах релятивистских коэффициентов, используемых в изгибном базисе.

Уравнение вертикального гидростатического равновесия. Запишем ξ -проекцию (2.36) в базисе B_0 в главном порядке по δ аналогично тому, как это было сделано в разделе 1,

⁸ $a = 0$ также и в выражении для $T_v^{\varphi\xi}$.

но в базисе (1.49)–(1.52) (см. уравнение (1.74)). Учитывая, что в главном порядке по δ 4-скорость потока есть $\{U^\tau, 0, U^\varphi, 0\}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial_\xi p}{\rho} = \frac{\xi}{r} (U^\varphi)^2 \left[\frac{K'_2}{K_2} - \left(\frac{U^\tau}{U^\varphi} \right)^2 + ar \frac{K_3 K_4}{K_2} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \right], \quad (2.60)$$

где U^τ и U^φ удовлетворяют условию нормировки (2.40) и уравнению геодезических (2.44). Используя это, приходим к следующей окончательной форме условия гидростатического равновесия:

$$\frac{\partial_\xi p}{\rho} = -\frac{\xi}{r} \frac{(U^\varphi)^2}{r} \left(1 - 2ar \frac{K_3}{K_2} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \right), \quad (2.61)$$

где для U^τ и U^φ при параметре a берутся их шварцшильдовские профили.

Можно проверить, что с заменой $\xi \rightarrow z/K_2$ уравнение (2.61) эквивалентно уравнению (1.74) в линейном по a приближении. При этом надо лишь учесть, что $r_S = K_2 r$, где r_S — шварцшильдовская радиальная координата, эквивалентная координате r , фигурирующей в (1.74).

Твистовое уравнение. Наша цель — переписать (2.55) в дивергентном виде. Без учёта гравитомагнитного члена уравнение (2.55), в котором мы также полагаем $a = 0$, должно поддерживать закон сохранения проекции углового момента изгибного диска на экваториальную плоскость чёрной дыры (сохранение компоненты углового момента диска вдоль оси вращения чёрной дыры в нашей задаче, линейной по β , следует из уравнений для бэкграунда, так как поправки к нему за счёт малого наклона пропорциональны $1 - \cos \beta = \beta^2$), что является отражением сферической симметрии шварцшильдовской метрики.

Оказывается, что для этого необходимо исключить из (2.55) величины v^φ и ρ_1 , стоящие в левой части уравнения. Поэтому будем использовать уравнения (2.57)–(2.59), причём для этих целей можно положить $\dot{v}^r = \dot{v}^\varphi = 0$, так как нам нигде не придётся иметь дело именно с резонансными комбинациями v^r и v^φ , принимающими нулевые значения в главном порядке по u в кеплеровском невязком пределе (см. комментарий к уравнениям (2.58) и (2.59)).

Во-первых, перепишем в правой части (2.57) член, содержащий $\partial_\varphi W$, через v^r и v^φ , используя (2.59), а также (2.61) при $a = 0$. После этого в получившемся для ρ_1 выражении заменим v^φ , использовав для этого (2.58). При этом от производной по φ можно избавляться, учитывая тот факт, что мы имеем гармоническую зависимость от φ (см. (2.28)). Иными словами, $\partial_{\varphi\varphi} = -1$. Подставляя полученные для ρ_1 и v^φ выражения в (2.55), выполняя после этого интегрирование уравнения по ξ , используя везде, где это целесообразно, интегрирование по частям, поскольку соответствующие поверхностные члены становятся равными нулю при $\rho \rightarrow 0$, придём к следующему компактному уравнению:

$$\begin{aligned} \Sigma U^\tau U^\varphi \left\{ \partial_\varphi U - a \frac{K_1 K_3}{K_2^2} Z \right\} + \partial_\varphi W \frac{K_1}{K_2} \{ \Sigma U^\varphi U^r + \bar{T}_v^{r\varphi} \} = \\ = -\frac{1}{2r^2 K_2^4} \int d\xi \{ \partial_r (\xi r K_1 K_2^3 U^\varphi \rho \partial_\varphi v^r + r^2 K_1 K_2^3 T^{r\xi}) \}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где, как обычно, $\Sigma = \int \rho d\xi$ — поверхностная плотность диска, а черта над величиной $T^{r\varphi}$ означает, что она проинтегрирована по ξ . В приложении работы [5] показано, что из (2.62) может быть легко получен закон сохранения углового момента изгибного диска.

Итак, уравнения (2.58), (2.59) и (2.62) представляют из себя замкнутую систему, описывающую динамику изгибных дисковых конфигураций при условии, что задана модель соответствующего бэкграунда. Неизвестными в ней являются возмущения скоростей, v^r и v^φ , и величина Z , характеризующая геометрию диска. Важно подчеркнуть, что при выводе данных уравнений мы, по существу, использовали только три главных предположения: $a \ll 1$, $\delta \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Это значит, что уравнения описывают динамику изгиба любого геометрически тонкого аккреционного потока (диска), с любой параметризацией вязкости, любым радиальным и вертикальным строением, причём как стационарного, так и нестационарного. В последнем случае мы имеем в виду именно нестационарность бэкграунда, т.е. уравнения определяют не только динамику изгибных возмущений, распространяющихся в стационарном плоском диске, но и динамику изгибных колец/торов, когда эволюция геометрической формы происходит параллельно с их растеканием в радиальном направлении за счёт турбулентной вязкости, в результате чего эволюционирует также и сам бэкграунд.

Ещё раз о характерных частотах задачи. В разделе 2.1.1 мы уже получили релятивистские выражения для характерных частот, встречающихся в нашей задаче. Речь шла о круговой и эпициклической частотах свободного экваториального движения, а также о частоте вертикальных осцилляций и частоте прецессии наклонённых орбит. Здесь мы намерены ещё раз получить для них выражения, но через величины, использовавшиеся выше при построении теории изгибных дисков, т.е. в базисе B_0 . Эти выражения понадобятся нам для более компактной записи изгибных уравнений.

Круговая частота свободного экваториального движения по часам бесконечно удалённого наблюдателя, уже данная нами в выражении (1.16), может быть получена просто делением $d\varphi/ds$ на dt/ds , приведённых в (2.47). Получаем

$$\Omega = \frac{K_1}{K K_2} \frac{U^\varphi}{r U^\tau}. \quad (2.63)$$

Используя (2.45) и (2.40), а также не забывая, что $r_S = r K_2$, можно убедиться, что (2.63) совпадает с (1.16) в линейном по a приближении.

Рассмотрим теперь малые вертикальные отклонения от кругового экваториального движения. В разделе 2.1.1 обсуждалось, что частота вертикальных осцилляций, измеряемая по часам наблюдателя на бесконечности, Ω_v , есть локально измеренная частота, Ω_1 , делённая на координатную t -компоненту 4-скорости кругового движения, U_g^t . Частота Ω_1 непосредственно стоит в уравнении гидростатического равновесия (см. уравнение (1.74) либо эквивалентное ему (2.61) с учётом замены $\xi \rightarrow z/K_2$). Используя соотношения (2.47), выражаем $U_g^t \equiv dt/ds$ через U^τ :

$$U_g^t = K K_1^{-1} U^\tau,$$

откуда

$$\Omega_1 = \Omega_v \frac{KU^\tau}{K_1} = \frac{U^\varphi}{rK_2} \frac{\Omega_v}{\Omega}, \quad (2.64)$$

где конечное выражение получено с использованием (2.63).

Но тогда, сравнивая (2.64) с (2.61), видим, что

$$\Omega_v = \Omega \left(1 - ar \frac{K_3}{K_2} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \right), \quad (2.65)$$

где при параметре a для U^τ и U^φ берутся их шварцшильдовские профили.

Тогда, используя (2.12), видим, что частота Лензе – Тирринга равна

$$\Omega_{LT} = a \frac{K_1 K_3}{K_2^2}. \quad (2.66)$$

Выражение для эпициклической частоты нам будет достаточно знать только для шварцшильдовского случая, $a = 0$. Чтобы получить такое выражение, проще всего воспользоваться самими изгибными уравнениями, точнее, той их частью, которая описывает динамику в плоскости колец диска, т.е. (2.58) и (2.59). Положив в них равными нулю "вязкие" члены, радиальную проекцию вертикального градиента давления в правой части (2.59), а также вычеркнув зависимость v^r и v^φ от φ , получим уравнения для эйлеровых возмущений, описывающие свободное движение газовых элементов, слабо отличающееся от кругового. Очевидно, что эти уравнения аналогичны уравнениям (2.5), (2.6), которые были записаны в базисе (1.49) – (1.52). Из них получаем следующее уравнение для v^r :

$$\ddot{v}^r + 2 \frac{K_1 K'_1}{K_2^2 (U^\tau)^2} \left(\frac{\partial_r U^\varphi}{U^\varphi} + \frac{K'_1}{K_1} \frac{(U^\tau)^2}{(U^\varphi)^2} \right) v^r = 0, \quad (2.67)$$

где выражение перед v^r равно κ^2 . Можно переписать его в более компактном виде:

$$\kappa^2 = 2 \frac{K'_1 (K_1 U^\tau)'}{K_2^2 U^\tau (U^\varphi)^2}, \quad (2.68)$$

и убедиться, что оно совпадает с (2.9) с учётом того, что в последнем, в наших новых обозначениях, фигурирует шварцшильдовская радиальная координата $r_S = rK_2$.

Наконец, введём для удобства ещё одну величину с размерностью частоты, которая фигурирует в нашей задаче. В шварцшильдовском случае, $a = 0$,

$$\tilde{\Omega} = \frac{K'_1}{K_2} \frac{1}{U^\tau U^\varphi} = \frac{r_S - 3}{r_S^2 (r_S - 2)^{1/2}} \quad (2.69)$$

и стремится к кеплеровскому значению в ньютоновском пределе.

Используя (2.63), (2.68) и (2.69), можно прийти к более компактной записи уравнений (2.58) и (2.59). А частота Лензе – Тирринга (2.66), как видно, фигурирует в гравитомагнитном члене в (2.62). Мы, однако, проделаем это в следующем разделе, при переходе к более конкретной модели бэкграунда.

2.3.3. Изгибные уравнения в частном случае стационарного a -диска, изотермического по вертикали. Посмотрим теперь, какой вид примут изгибные уравнения в более

частном случае, когда бэкграундом является стационарный аккреционный диск с α -параметризацией вязкости, т.е., по сути, то решение, которое было получено в разделе 1. Это не означает, однако, что будут рассматриваться только стационарные изгибные решения. Иными словами, уравнения, которые мы получим, будут описывать также и произвольную нестационарную динамику соответствующего искривлённого диска. К примеру, с их помощью можно рассчитывать эволюцию формы (бесконечного) изначально плоского диска, выведенного в начальный момент времени из экваториальной плоскости вращающейся чёрной дыры. Что будет происходить на начальном этапе такой эволюции, было качественно описано в разделе 2.1. Кроме того, обсуждаемые уравнения описывают волновую (в случае диска с достаточно малым $\alpha < \delta$, также см. [33]) или диффузионную (в случае диска с достаточно большим $\alpha > \delta$, также см. [34]) динамику какого-либо изгибного возмущения, наложенного в диске, лежащем в экваториальной плоскости чёрной дыры.

Явный вид необходимых профилей бэкграунда. В изгибных уравнениях фигурирует величина $\bar{T}_v^{r\varphi}$ (а также $\bar{\eta}$), относящаяся к модели соответствующего плоского диска. Получить её в явном виде мы могли бы, проинтегрировав τ - и φ -проекции уравнения (2.36). Однако проще воспользоваться результатами раздела 1, где мы уже получали указанную величину, обозначив её как T_v (см. выражение (1.90)). Нам необходимо только учесть, что теперь мы работаем в ином базисе, нежели использовавшийся при расчёте плоского диска, а значит, необходимо знать закон перехода от T_v к $\bar{T}_v^{r\varphi}$. Во-первых, используя свойство ортогональности тензора сдвига, а значит, и тензора вязких напряжений, (1.66), видим, что в базисе (1.49) – (1.52) отлична от нуля только одна компонента тензора вязких напряжений, $T_v^{r\varphi'}$, так как с точностью до членов $\propto \delta^2$ у 4-скорости там отлична от нуля только её временная компонента. Штрихом мы здесь обозначаем принадлежность базису (1.49) – (1.52). Далее, различие между (ортонормированными) базисами заключается только в том, что наблюдатели, ассоциированные с базисом (1.49) – (1.52), движутся в азимутальном направлении со скоростью экваториального кругового свободного движения, базис же B_0 соответствует покоящимся наблюдателям. Следовательно, преобразования векторов и тензоров должны быть эквивалентны обычным лоренцевым преобразованиям. Используя [35] (см. там задачу 1 параграфа 6), видим, что $\bar{T}_v^{r\varphi} = U^\tau T_v^{r\varphi'}$, поскольку U^τ равен лоренц-фактору азимутального движения. Наконец, необходимо дополнительно учесть, что интегрирование по ξ отличается от интегрирования по z на коэффициент K_2 . В итоге получаем, что

$$\bar{T}_v^{r\varphi} = \frac{U^\tau}{K_2} T_v. \quad (2.70)$$

Заметим, что можно перейти от $T_v^{r\varphi'}$ к $T_v^{r\varphi}$, используя связь (1.34), записав её для двух базисов, приравняв друг другу её правые части, а затем домножив одну из сторон получившегося равенства на матрицы, обратные стоящим там базисным матрицам. При этом надо только дополнительно учесть, что в базисе B_0 проведена замена радиальной координаты, (2.14), т.е. что $r_S = rK_2$ в обозначениях этой части работы.

Далее, для достаточного здесь случая $a = 0$ нетрудно получить вид T_r в элементарных функциях. Действительно, интеграл в (1.90) берётся при помощи замены $y \equiv \sqrt{r_s}$:

$$\int \frac{E}{r_s^{1/2} C} dr_s = \int \frac{y^2 - 6}{y^2 - 3} dy = y + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{y + \sqrt{3}}{y - \sqrt{3}}.$$

Тогда для $\bar{T}^{r\varphi}$ с учётом (2.70) окончательно получаем

$$\bar{T}^{r\varphi} = \frac{\dot{M}}{2\pi} U^\tau r^{-3/2} \frac{L(r)}{K_2^{5/2} K_1^2}, \quad (2.71)$$

где

$$L = 1 - \frac{\sqrt{6}}{y} - \frac{\sqrt{3}}{2y} \ln \frac{(y - \sqrt{3})(3 + 2\sqrt{2})}{y + \sqrt{3}}. \quad (2.72)$$

Как и должно быть, $L = 0$ при $r_s = 6$. Обратим внимание, что $L = Y(a = 0)$, где величина Y была задана выражением (1.101).

С другой стороны, имея выражение (1.72) для $\sigma^{r\varphi}$, для случая $a = 0$ получаем его в нашем базисе B_0 и в наших величинах:

$$\sigma^{r\varphi} = \frac{3}{4} \frac{D}{r_s^{3/2} C} U^\tau = \frac{3}{4} K_1^2 U_g^\varphi U_g^\tau U^\tau = \frac{3}{4} \frac{K_1}{r K_2} U^\varphi (U^\tau)^2,$$

где мы, как всегда, использовали соотношения (2.47).

Тогда

$$\bar{T}^{r\varphi} = \frac{3}{2} \bar{\eta} \frac{K_1}{r K_2} (U^\tau)^2 U^\varphi. \quad (2.73)$$

Как и в разделе 1.3.6, приравнявая друг другу выражения (2.71) и (2.73), получаем, что

$$\bar{\eta} = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(\frac{r^{-1/2}}{U^\tau U^\varphi} \frac{L}{K_1^3 K_2^{3/2}} \right). \quad (2.74)$$

В ньютоновском пределе, вдалеке от внутреннего края диска, (2.74) даёт известный результат: $\bar{\eta} = \dot{M}/(3\pi)$.

Будем считать, что кинематическая вязкость пропорциональна произведению характерной полутолщины диска и скорости звука в диске:

$$v \sim \alpha c_s h_p, \quad (2.75)$$

где h_p — собственная характерная полутолщина диска, которая в нашей системе координат есть $h_{\text{прогр}} = K_2 h$, а α — параметр Шакуры, который считается константой. Поскольку из (2.61) следует, что $c_s \sim \sqrt{P/\rho} \sim U^\varphi h/r$, мы в итоге определяем α с помощью равенства

$$v = \frac{\alpha K_2 U^\varphi h^2}{r}. \quad (2.76)$$

Используя выражения (2.74) и (2.76), получаем соотношение

$$\Sigma h^2 = \frac{\dot{M}}{3\pi\alpha} \left(\frac{r^{1/2}}{U^\tau (U^\varphi)^2} \frac{L}{K_1^3 K_2^{5/2}} \right). \quad (2.77)$$

Чтобы получить также выражение для U^r , входящее в адвективный член в (2.62), запишем в базисе B_0 закон сохранения энергии покоя для стационарного диска. Опять же, воспользуемся результатом (1.86). Принимая во внимание переход к изотропной радиальной координате, связь между координатными и физическими ради-

альными скоростями, задаваемыми (1.47) и (2.47), и разницу в определениях Σ , получаем

$$-\frac{\dot{M}}{2\pi} = \Sigma K_1 K_2^2 r U^r. \quad (2.78)$$

Тогда выражение для U^r следует совместно из (2.78) и (2.77):

$$U^r = -\frac{3\alpha}{2} \frac{\delta^2}{L} K_1^2 U^\tau (U^\varphi)^2 \sqrt{K_2} r. \quad (2.79)$$

Наконец, нам необходимо знать профиль $\delta(r)$. Заметим, что эта величина инвариантна относительно перехода между базисами (1.49)–(1.52) и B_0 , так как переход от h_p к h и от r_s к r масштабируется одним и тем же коэффициентом K_2 .

В случае, когда в диске доминирует газовое давление, а главный вклад в непрозрачность даёт томсоновское рассеяние, из (1.103) при $a = 0$ получаем

$$\delta(r) = \delta_* K_1^{1/2} K_2^{1/20} (U^\tau)^{-9/10} L^{1/5} r^{1/20}. \quad (2.80)$$

Чтобы перейти к более простой форме изгибных уравнений, нам осталось задать вертикальный профиль плотности энергии покоя. Мы здесь воспользуемся простейшим его видом, соответствующим изотермическому диску:

$$\rho = \rho_c \exp\left(-\frac{\xi^2}{2h^2}\right), \quad (2.81)$$

где $\rho_c(r)$ — экваториальное значение плотности.

Переход к комплексным амплитудам. В случае изотермического диска возмущения скоростей, величины v^r и v^φ , взятые в виде

$$v^\varphi = \xi(A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi), \quad v^r = \xi(B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi), \quad (2.82)$$

удовлетворяют уравнениям (2.58) и (2.59) при условии, что v не меняется с изменением высоты, и амплитуды A_1 , A_2 , B_1 и B_2 есть функции r и τ . Действительно, в этом случае все "тепловые" члены $\propto \xi$, и зависимость от ξ с анзацем (2.82) в рассматриваемых уравнениях тождественно удовлетворяется.

Введём комплексные амплитуды

$$\mathbf{A} = A_2 + iA_1, \quad \mathbf{B} = B_2 + iB_1,$$

$$\mathbf{W} = \Psi_1 + i\Psi_2 = \beta \exp(i\varphi). \quad (2.83)$$

Составляя две комбинации: (2.58) + $i\partial_\varphi(2.58)$ и (2.59) + $i\partial_\varphi(2.59)$, видим, что все члены в этих комбинациях $\propto \exp(-i\varphi)$. В частности, члены, содержащие W и $\partial_\varphi W$, переходят в члены, включающие в себя $-i\mathbf{W}' \exp(-i\varphi)$ и $\mathbf{W}' \exp(-i\varphi)$ соответственно.

В итоге получаем следующие комплексные уравнения:

$$\dot{\mathbf{A}} - (i - \alpha) \Omega \mathbf{A} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \mathbf{B} = -\frac{3}{2} i\alpha K_1 (U^\tau)^2 U^\varphi \Omega \mathbf{W}', \quad (2.84)$$

$$\dot{\mathbf{B}} - (i - \alpha) \Omega \mathbf{B} - 2\tilde{\Omega} \mathbf{A} = -(i + \alpha) U^\varphi \Omega \mathbf{W}', \quad (2.85)$$

где мы учли выражение (2.76), а также полученные в разделе 2.3.2 выражения для частот (2.63), (2.68) и (2.69).

Точно так же, используя (2.82) и (2.83) и составляя комбинацию (2.62) + $i\partial_\varphi(2.62)$, получаем уравнение для комплексных амплитуд. В правой части этого уравнения, под производной по r , необходимо выполнить интегрирование по ξ . Для изотермического диска с распределением плотности в форме (2.81) выполняется равенство $\int \rho \xi^2 d\xi = \Sigma h^2$. Таким образом, под производной по r имеем члены, пропорциональные Σh^2 либо $\bar{\eta}$. Вместо указанных комбинаций подставляем туда выражения (2.77) и (2.74) и выносим за пределы производной по r общие постоянные множители. Кроме того, вместо U' и $\bar{T}^{r\varphi}$ подставляем в левую часть обсуждаемого уравнения выражения (2.79) и (2.71) и затем делим всё уравнение на Σ . Получившееся уравнение содержит $\dot{M}$ и Σ только в комбинации $\dot{M}/\Sigma$, которую мы выражаем через δ^2 и другие известные нам величины при помощи (2.77). Используя также выражение для частоты Лензе – Тирринга (2.66), в итоге получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} - i\Omega_{LT}\mathbf{W} + \frac{3}{2}\alpha\delta^2 \frac{K_1^2}{K_2} U^\varphi \left(U^\tau - K_1(rK_2)^{1/2} \frac{U^\varphi}{L} \right) \mathbf{W}' = \\ = \frac{\delta^2 K_1^3 U^\varphi}{2r^{1/2} K_2^{3/2} L} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{3/2} K_2^{1/2} \frac{L}{K_1^2 U^\tau U^\varphi} [(i+\alpha)\mathbf{B} + \alpha U^\varphi \mathbf{W}'] \right\}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Уравнения (2.84)–(2.86) формируют замкнутую систему, из которой определению подлежат величины $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{W}$, являющиеся функциями r и τ . В пределе слабых гравитационных эффектов они сводятся к уравнениям (30), (31) и (33) работы [36].

2.4. Стационарный изгибный диск

2.4.1. Основное уравнение и граничное условие. Рассмотрим теперь стационарные решения уравнений (2.84)–(2.86). Таким образом, основной целью этого раздела станет расчёт формы стационарного изгибного диска.

Положим $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{W}} = 0$. Исключая из (2.84), (2.85) $\mathbf{A}$, записываем соотношение

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\kappa^2}{(i-\alpha)^2 \Omega^2} \right] (i-\alpha) \Omega \mathbf{B} = \\ = \left[(i+\alpha) U^\varphi \Omega - \frac{3i\alpha}{i-\alpha} K_1 (U^\tau)^2 U^\varphi \tilde{\Omega} \right] \mathbf{W}', \end{aligned} \quad (2.87)$$

из которого выражаем $\mathbf{B}$ через $\mathbf{W}'$ и подставляем в (2.86).

Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{r_S^{1/2} L} \frac{d}{dr_S} \left(\frac{r_S^{3/2} L}{K_1 U^\tau} f^*(\alpha, r_S) \frac{d\mathbf{W}}{dr_S} \right) - \\ - 3\alpha U^\tau (1-L^{-1}) \frac{d\mathbf{W}}{dr_S} + \frac{4i\alpha}{\delta^2 K_1^3 r_S^3 U^\varphi} \mathbf{W} = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

где индексом * отмечено комплексное сопряжение, а

$$f(\alpha, r_S) = (1 + \alpha^2 - 3i\alpha K_1^2) \frac{r_S(i-\alpha)}{\alpha r_S(\alpha + 2i) - 6} + \alpha. \quad (2.89)$$

Заметим, что уравнение (2.88) мы записали, перейдя к шварцшильдовской радиальной координате r_S . Далее

мы собираемся рассмотреть только случай $a > 0$, т.е. диск, вращающийся в ту же сторону, что и чёрная дыра. Можно видеть, что задача содержит два свободных параметра. Во-первых, это комбинация $\tilde{\delta} \equiv \delta_*/\sqrt{|a|}$. Очевидно, $\tilde{\delta}$ может изменяться в пределах от 0 до ∞ и характеризует относительную роль гидродинамических сил и гравитомангнитной силы, воздействующих на кольца диска. Кроме того, в (2.88) фигурирует параметр вязкости диска, $0 < \alpha < 1$. Уравнение (2.88) в пределе строго ньютоновской динамики с ненулевой вязкостью воспроизводит соответствующее уравнение (2.10) из работы [37], а дополнительно с учётом постньютоновских поправок — и уравнение (33) из работы [25], что было проверено в [5] (см. там параграф 4.1).

Коэффициенты уравнения (2.88) имеют особую точку на внутреннем краю диска, при $r_S = \bar{r}_S \equiv 6$, где L обращается в нуль. Требование регулярности решения в $\bar{r}_S$ должно дать нам условие для функции $\mathbf{W}$. Используя это условие как начальное, мы сможем проинтегрировать (2.88) от $\bar{r}_S$ до бесконечности и получить форму стационарного изгибного диска. Запишем разложение уравнения (2.88) в ряд по степеням малого $x_0 = r_S - \bar{r}_S \ll 1$. На практике для этого достаточно все величины, которые принимают отличные от нуля значения в $\bar{r}_S$, положить равными точно этим значениям, а функцию L подставить в главном приближении по x_0 . Из (2.72) следует соотношение

$$L \approx \frac{x_0^2}{72}, \quad (2.90)$$

из которого видно, что другую величину, входящую в (2.88) и принимающую нулевое значение на внутреннем краю диска, δ , мы можем записать как

$$\delta = \delta_{ms} x_0^{2\epsilon},$$

где ϵ — показатель степени L в выражении (2.80). Соответственно, δ_{ms} также даётся выражением (2.80), которое взято в $\bar{r}_S$ и в котором вместо L теперь подставлен коэффициент 72^{-1} из (2.90).

После этого нетрудно получить следующее уравнение, справедливое при $x_0 \ll 1$:

$$\frac{d}{dx_0} \left(x_0^2 \frac{d\mathbf{W}}{dx_0} \right) + C_1 x_0^{2-4\epsilon} \mathbf{W} + C_2 \frac{d\mathbf{W}}{dx_0} = 0, \quad (2.91)$$

где

$$C_1 = -\frac{2i}{f(\alpha, r_S)} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \frac{\Omega_{LT}}{K_1^3 r_S \delta_{ms}^2}$$

и

$$C_2 = -\frac{216\alpha}{f(\alpha, r_S)} \frac{(U^\tau)^2}{r_S}$$

берутся в $\bar{r}_S$. Мы видим, что при любой конечной вязкости последний член в (2.91) достаточно близко к границе всегда становится доминирующим, поэтому сразу можно сказать, что граничным условием будет

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dx_0} \right|_{\bar{r}_S} = 0. \quad (2.92)$$

С другой стороны, при $\alpha = 0$ из (2.91) получаем более простое уравнение, которое разрешается через функцию

Бесселя:

$$\mathbf{W} = Cx_0^{-1/2} J_{1/(2-4\epsilon)}(z), \quad (2.93)$$

где

$$z = \sqrt{C_1} \frac{x_0^{1-2\epsilon}}{1-2\epsilon}. \quad (2.94)$$

При $x_0 \rightarrow 0$ (2.93) стремится к некоторой ненулевой константе, но с нулевой производной по x_0 . Следовательно, в этом случае мы снова возвращаемся к условию (2.92).

Поскольку мы имеем дело с линейной задачей, достаточно взять в $\bar{r}_S$ произвольное ненулевое значение $\mathbf{W}$, положить первую производную $\mathbf{W}$ в $\bar{r}_S$ равной нулю и с этими начальными условиями проинтегрировать (2.88) до бесконечности. Модуль и фаза переменной $\mathbf{W}$ дадут нам профили $\beta(r_S)$ и $\gamma(r_S)$ для стационарного изгибного диска. Далее будем по умолчанию нормировать профиль β на единичное значение на бесконечности.

2.4.2. Диск предельно малой вязкости. Рассмотрим отдельно аналитически случай диска с очень малой вязкостью. Мы видим, что есть возможность рассмотреть аккреционный диск формально с $\alpha \rightarrow 0$ при условии, что одновременно $\dot{M} \rightarrow 0$. В таком диске $U^r \rightarrow 0$, однако он по-прежнему будет иметь реальные профили Σ и h .

Кроме того, чтобы получить аналитическое решение, рассмотрим случай $\tilde{\delta} \ll 1$, иными словами, будем считать, что мы имеем дело с тонким диском в окрестности достаточно быстро вращающейся чёрной дыры.

Положив $\alpha = 0$ в (2.88), получим уравнение:

$$\frac{d}{dr_S} \left(b \frac{d}{dr_S} \mathbf{W} \right) + \lambda \mathbf{W} = 0, \quad (2.95)$$

где

$$b = \frac{r_S^{5/2} L}{K_1 U^\tau}, \quad \lambda = \frac{24aL}{\delta^2 K_1^4 U^\varphi r_S^{5/2}}. \quad (2.96)$$

Коэффициенты в (2.95) являются действительными величинами, поэтому есть и действительные решения. Это означает, что в отсутствие вязкости в стационарном изгибном диске величина $\gamma = \text{const}$ и может быть выбором системы координат положена равной нулю. Таким образом, в этом разделе переменная $\mathbf{W}$ идентична углу β .

Форма диска вблизи его внутреннего края. Выше мы уже выписали решение вблизи внутреннего края диска для невязкого случая (см. выражение (2.93)). Константа C_1 в этом случае имеет явный вид

$$C_1 = \frac{24aU^\tau}{r_S^5 K_1^3 U^\varphi \delta_{\text{ms}}^2} \quad (2.97)$$

и берётся при $r_S = \bar{r}_S$.

Используя известную аппроксимацию функции Бесселя для малого аргумента, получим соотношение между константой C в (2.93) и значением переменной $\mathbf{W}$ в $\bar{r}_S$, $\mathbf{W}(\bar{r}_S) \equiv \mathbf{W}_0$:

$$C = \Gamma \left(\frac{3-4\epsilon}{2(1-2\epsilon)} \right) \left(\frac{\sqrt{C_1}}{2(1-2\epsilon)} \right)^{-1/2(1-2\epsilon)} \mathbf{W}_0, \quad (2.98)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Кроме того, для дальнейшего нам будет необходима асимптотика (2.93) при $z \gg 1$. Понятно, что z может быть велико с сохранением условия $x \ll 1$, поскольку $\sqrt{C_1} \sim \tilde{\delta}^{-1} \gg 1$. Итак, при $z \gg 1$ получаем

$$\mathbf{W} \approx C \sqrt{\frac{2}{\pi x z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \frac{1-\epsilon}{1-2\epsilon} \right). \quad (2.99)$$

Форма диска на далёких радиусах. Посмотрим, какой вид принимает уравнение (2.88) при $r_S \gg 1$ и $\alpha \rightarrow 0$. Здесь важно обратить внимание, что мы не имеем права все величины, входящие в (2.88), просто принять равными их ньютоновским значениям и одновременно положить равным нулю коэффициент вязкости. Это видно уже из того, что тогда $f(\alpha, R) \rightarrow 1/(2\alpha) \rightarrow \infty$. Физически это является отражением того факта, что, как мы упоминали выше, в отсутствие вязкости в строго ньютоновском гравитационном потенциале имеет место кеплеровский резонанс, т.е. совпадение круговой и эпициклической частот, а значит, неограниченный рост возмущений в изгибном диске из-за воздействия радиальной проекции вертикального градиента давления. Поэтому в данном случае невозможно существование стационарного изгиба. Учтя следующий член разложения $f(\alpha, r_S)$ по малому r_S^{-1} , получим

$$f(\alpha, r_S) \approx \frac{1}{2\alpha(1 + 3i/(\alpha r_S))}, \quad (2.100)$$

и при $\alpha \rightarrow 0$ теперь $f(\alpha, r_S)$ остаётся конечной при любом конечном r_S . Тем не менее она вносит главный вклад за счёт релятивистских эффектов, и все остальные величины в (2.88) теперь могут быть положены равными их ньютоновским значениям, т.е. $U^\tau = 1$, $U^\varphi = r_S^{-1/2}$, $L = 1$, $K_1 = 1$. Кроме того, мы пренебрежём слабой зависимостью δ от r_S вдалеке от чёрной дыры и положим $\delta = \delta_*$.

После этого, введя новую независимую переменную, $x_1 \equiv r_S^{-1/2} \ll 1$, получим уравнение

$$x_1 \frac{d^2}{dx_1^2} \mathbf{W} - 2 \frac{d}{dx_1} \mathbf{W} + 96\tilde{\delta}^{-2} x_1^4 \mathbf{W} = 0. \quad (2.101)$$

Решение (2.101) снова может быть выражено через функции Бесселя:

$$\mathbf{W} = x_1^{3/2} (A_1 J_{-3/5}(z_1) + A_2 J_{3/5}(z_1)), \quad (2.102)$$

где

$$z_1 = \frac{8}{5} \sqrt{6} \tilde{\delta}^{-1} x_1^{5/2}, \quad (2.103)$$

а A_1, A_2 — константы.

Когда r_S настолько велико, что $z_1 \ll 1$, первое и второе слагаемые в (2.102), умноженные на $x_1^{3/2}$, стремятся к ненулевой константе и к нулю соответственно. Это позволяет нам выразить константу A_1 через значение $\mathbf{W}$ на бесконечности, $\mathbf{W}_\infty$:

$$\mathbf{W}_\infty = \left(\frac{5}{4\sqrt{6}} \right)^{3/5} \frac{\tilde{\delta}^{3/5}}{\Gamma(2/5)} A_1. \quad (2.104)$$

В противоположном случае, при $z_1 \gg 1$, т.е. ближе к чёрной дыре, получаем другую асимптотику:

$$\mathbf{W} \approx \sqrt{\frac{5\tilde{\delta}}{2\pi\sqrt{24}}} r_s^{-1/8} \left[A_1 \cos\left(z_1 + \frac{\pi}{20}\right) + A_2 \sin\left(z_1 - \frac{\pi}{20}\right) \right]. \quad (2.105)$$

ВКБ-решение для формы диска. На всём протяжении диска асимптотические решения (2.99) и (2.105) могут быть сшиты ВКБ-решением уравнения (2.95). Действительно, в силу того что мы рассматриваем случай $\tilde{\delta} \ll 1$, отношение λ и b , входящих в (2.95), $\tilde{\lambda} = \lambda/b$, велико при всех значениях r_s , при которых z и z_1 велики.

ВКБ-решение примет следующий вид:

$$\mathbf{W} \approx \frac{C_3}{(\lambda b)^{1/4}} \cos\left(\int_{r_s}^{r_s} \sqrt{\tilde{\lambda}} dr_s + \phi_{\text{WKBJ}}\right), \quad (2.106)$$

где константы C_3 и ϕ_{WKBJ} должны быть подобраны так, что (2.106) гладко сшивается с выражением (2.99) в соответствующей области. Можно проверить, что это даёт

$$\phi_{\text{WKBJ}} = -\frac{\pi}{2} \frac{1-\epsilon}{1-2\epsilon} \quad (2.107)$$

и

$$C_3 = 6^{1/4} \sqrt{\frac{1-2\epsilon}{\pi K_1 U^\tau}} C, \quad (2.108)$$

где принято, что K_1 и U^τ берутся в $r_s = \bar{r}_s = 6$, а $L \approx x^2/72$ вблизи $\bar{r}_s$.

Далее, в пределе $r_s \rightarrow \infty$ мы можем положить величины λ и b перед косинусом в (2.106) равными их ньютоновским значениям. Кроме того, интеграл в (2.106) может быть представлен как

$$I(r_s) \equiv \int_{\bar{r}_s}^{r_s} \sqrt{\tilde{\lambda}} dr_s = I - \int_{r_s}^{\infty} \sqrt{\tilde{\lambda}} dr_s,$$

где $I = \int_{\bar{r}_s}^{\infty} \sqrt{\tilde{\lambda}} dr_s$. Учитывая, что ньютоновское значение $\tilde{\lambda} = 24\tilde{\delta}^{-2} R^{-9/4}$, имеем, что

$$\int_{r_s}^{\infty} \sqrt{\tilde{\lambda}} dr_s \approx \frac{8\sqrt{6}}{5} \tilde{\delta}^{-1} r_s^{-5/4},$$

и поэтому

$$\mathbf{W} \approx C_3 \frac{\tilde{\delta}^{1/2}}{24^{1/4}} \cos\left(\frac{8\sqrt{6}}{5} \tilde{\delta}^{-1} r_s^{-5/4} - I - \phi_{\text{WKBJ}}\right). \quad (2.109)$$

Решение (2.109) должно быть гладко сшито с выражением (2.105) в соответствующей области, что даст нам значения констант A_1 и A_2 .

Можно убедиться, что они выглядят следующим образом:

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}} C_3 \cos\left(I + \phi_{\text{WKBJ}} - \frac{\pi}{20}\right) \cos^{-1} \frac{\pi}{10}, \quad (2.110)$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}} C_3 \sin\left(I + \phi_{\text{WKBJ}} + \frac{\pi}{20}\right) \cos^{-1} \frac{\pi}{10}.$$

Итак, выражения (2.93), (2.106) и (2.102) совместно с коэффициентами (2.108), (2.110) и фазой (2.107) задают

форму невязкого стационарного релятивистского изгибного диска во всём диапазоне расстояний от $r_s = \bar{r}_s$ до $r_s = \infty$.

Резонансные решения в диске малой вязкости. Обратим внимание, что выражения (2.98), (2.108), (2.110) и (2.104) позволяют связать величины $\mathbf{W}_0$ и $\mathbf{W}_\infty$:

$$\mathbf{W}_\infty = C_{\text{tot}}(\tilde{\delta}) \mathbf{W}_0, \quad (2.111)$$

где явный вид $C_{\text{tot}}(\tilde{\delta})$ следует из указанных формул. В частности, как следует из (2.104) и (2.110), $C_{\text{tot}}(\tilde{\delta}) \propto \cos(I + \phi_{\text{WKBJ}} - \pi/20)$.

Отсюда делаем интересный вывод, что для некоего дискретного набора значений $\tilde{\delta}$, при которых $\cos(I + \phi_{\text{WKBJ}} - \pi/20) = 0$, величина $\mathbf{W}_\infty = 0$, но при этом $\mathbf{W}_0 \neq 0$.

Из выражений (2.96) можно получить, что интеграл I может быть переписан в виде $I = \tilde{\delta}^{-1} \tilde{I}$, где $\tilde{I}$ не зависит от $\tilde{\delta}$. Последнее позволяет нам записать явное выражение для указанных особых значений $\tilde{\delta}$:

$$\tilde{\delta}_k = \frac{\tilde{I}}{\pi/2(11/10 + (1-\epsilon)/(1-2\epsilon) + 2k)}, \quad (2.112)$$

где k — целое число.

Значения $\tilde{\delta}_k$ соответствуют такому балансу между внешней гравитомагнитной силой и внутренним градиентом давления в диске, который приводит к искривлению диска даже в том случае, если вещество, поступающее в него с бесконечности, изначально движется в экваториальной плоскости чёрной дыры. Обратим внимание, что решение в виде плоского диска, лежащего целиком в экваториальной плоскости чёрной дыры, конечно же, тоже существует при указанных $\tilde{\delta}_k$. Подобная неоднозначность решения снимается любой ненулевой вязкостью в диске, при которой, если $\mathbf{W}_\infty = 0$, то всегда $\mathbf{W}_0 = 0$. При малых $\alpha \ll 1$ диск будет "чувствовать" указанные "резонансные" решения и значительно выходить из экваториальной плоскости чёрной дыры своими внутренними областями даже тогда, когда на больших расстояниях он почти лежит в ней. На рисунке 1 приведена кривая, соответствующая аналитическому решению (2.111), а также несколько кривых для вязкого изгибного диска, полученных численным интегрированием исходного уравнения (2.88). Тем не менее мы видим, что уже при $\alpha = 10^{-3}$ обсуждаемые резонансы практически полностью подавлены.

2.4.3. Режимы поведения диска на плоскости параметров α и $\tilde{\delta}$. В заключение приведём полное исследование режимов поведения стационарного искривлённого релятивистского диска вблизи вращающейся чёрной дыры. Удобнее всего отобразить результаты численного интегрирования уравнения (2.88) на плоскости свободных параметров задачи, $\tilde{\delta}$ и α . Первый параметр мы варьируем в диапазоне $10^{-3} < \tilde{\delta} < 10$, второй, как и должно быть, в диапазоне $0 < \alpha < 1$. Как следует из рис. 2, при малых значениях $\tilde{\delta}$, т.е. когда действие гравитомагнитной силы преобладает над действием внутренних сил в искривлённом диске, он либо укладывается в экваториальную плоскость чёрной дыры, т.е. $\beta_0/\beta_\infty \rightarrow 0$, либо, наоборот, наклон его колец резко увеличивается при переходе во внутренние области диска, причём имеют

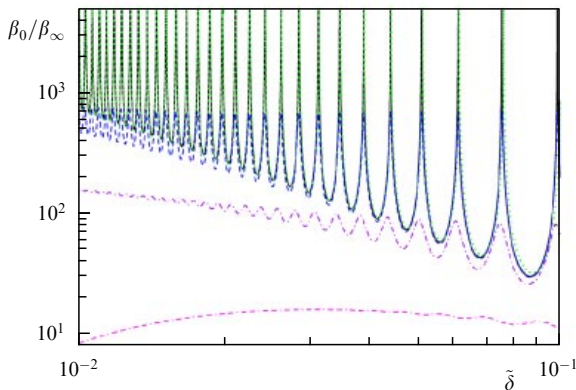


Рис. 1. Зависимость отношения угла наклона на внутреннем краю диска к углу наклона на бесконечности, β_0/β_∞ , от параметра $\tilde{\delta}$. Сплошная кривая — численное решение уравнения (2.88) с $\alpha = 0$, пунктирная кривая представляет аналитическую зависимость $C_{\text{tot}}^{-1}(\tilde{\delta})$, где C_{tot} даётся выражением (2.111). Штриховая, штрихпунктирная и штрих-штрихпунктирная кривые получены численным интегрированием уравнения (2.88) с $\alpha = 10^{-4}$, 10^{-3} и 10^{-2} соответственно.

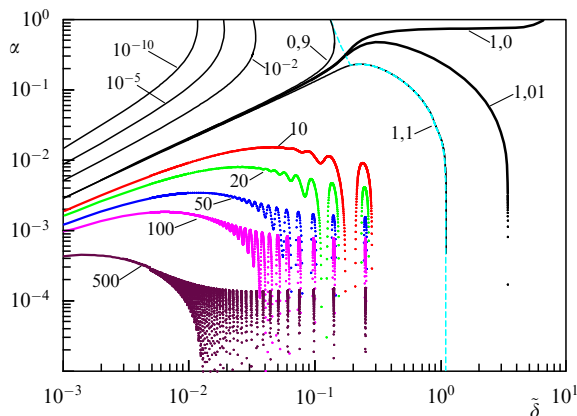


Рис. 2. Уровни постоянного отношения β_0/β_∞ на плоскости параметров $(\tilde{\delta}, \alpha)$. Числа указывают значения β_0/β_∞ для каждой кривой. Штриховая линия в правой части рисунка отделяет область, где изменение β с r_s составляет более 10% от β_∞ (слева от указанной кривой), от области, где искривление диска незначительно и β отклоняется менее чем на 10% от β_∞ (справа от указанной кривой).

место осцилляции $\beta(r_s)$ с радиальной координатой. Заметим, что при малой вязкости указанные осцилляции становятся сильны настолько, что соответствующий градиент угла наклона, β' , приводит к сверхзвуковым возмущениям компонент скоростей, v^r и v^φ , на высотах порядка толщины диска, $\xi \sim h$. Это, в свою очередь, должно вести к генерации различного рода гидродинамических неустойчивостей и ударных волн, провоцирующих дополнительный нагрев диска (а значит, и увеличение $\tilde{\delta}$), а также рост α . Такие процессы должны приводить к частичному подавлению обсуждаемых осцилляций β .

Укладка диска в экваториальную плоскость чёрной дыры происходит при достаточно большой вязкости, когда с запасом выполняется условие $\alpha > \tilde{\delta}$, и называется эффектом Бардина–Петтерсона [38]. Как видно из рис. 2, этому эффекту подвержены только достаточно вязкие и достаточно тонкие диски. Между тем уже при $\tilde{\delta} \sim \alpha$ отношение β_0/β_∞ становится порядка единицы, что означает отсутствие укладки диска. В то же время

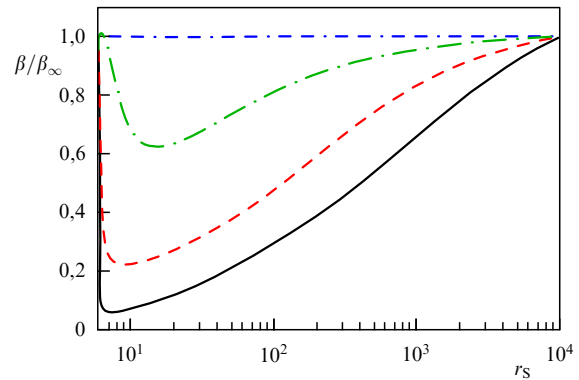


Рис. 3. Зависимости β от r_s вдоль кривой на рис. 2, для которой $\beta_0/\beta_\infty = 1$. $\tilde{\delta}$ принимает значения 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} и 1 для сплошной, штриховой, штрихпунктирной и штрих-штрихпунктирной кривых соответственно.

отсутствуют и осцилляции β . На рисунке 3 показан вид профилей $\beta(r_s)$, когда $\beta_0/\beta_\infty = 1$, для нескольких значений $\tilde{\delta}$. Видно, что при не слишком малом $\tilde{\delta}$ изгибный диск имеет достаточно гладкую форму, что говорит о возможности существования подобных конфигураций в природе. Заметим, что β ведёт себя немонотонно, сначала уменьшаясь, а потом вновь возрастая с уменьшением r_s . Последнее может иметь важные последствия как для строения самого диска, так и для его наблюдательных проявлений. К примеру, горячие внутренние области такого диска должны значительно сильнее прогревать своим излучением его внешние области по сравнению с тем, как это происходит в случае плоского диска. Очевидно, это будет следствием того, что внутренняя область диска теперь развёрнута по отношению к внешней.

В области с $\tilde{\delta}$ порядка единицы и больше действие гравитомагнитной силы становится незначительным и диск искривляется слабо. На рисунке 2 нанесена штриховая кривая, правее которой $\beta(r_s)$ отклоняется менее чем на 10% от β_∞ . Стоит также обратить внимание на то, что при $\tilde{\delta} > 0,1$ эффект Бардина–Петтерсона полностью отсутствует для любых значений α .

3. Заключение

В этой работе с учётом всех технических деталей был продемонстрирован вывод уравнений, контролирующих эволюцию формы релятивистского изгибного диска, а также соответствующих возмущений скорости и плотности, возникающих внутри него. При этом использовались лишь три упрощающих предположения: малость угла раскрытия диска, $\delta \ll 1$, медленность вращения чёрной дыры, $a \ll 1$, и малость угла наклона колец диска по отношению к экваториальной плоскости чёрной дыры, $\beta \ll 1$. Это позволило сформулировать уравнения (2.58), (2.59) и (2.62) для трёх величин, две из которых дают эйлеровы возмущения радиальной и азимутальной скорости, v^r и v^φ , а третья Z описывает геометрическую форму диска. В общем случае подлежит определению зависимость v^r и v^φ от изгибных координат r , ξ и времени τ , а также зависимость Z от r и τ . От азимутальной же координаты все эти величины зависят гармонически в силу соотношений (2.28). В указанные уравнения в качестве коэффициентов входят профили, описывающие

бэкграунд, т.е. аккреционный диск аналогичной радиальной и вертикальной структуры, но лежащий в экваториальной плоскости чёрной дыры. Ещё раз заметим, что не только изгибный диск, но и сам бэкграунд может быть нестационарным, поскольку при получении системы (2.58), (2.59), (2.62) в отношении бэкграунда использовалось только одно предположение о малости — $\delta \ll 1$. Следовательно, изгибные уравнения позволяют исследовать и эволюцию наклонённых/искривлённых газовых торов/колец в окрестности вращающихся чёрных дыр, когда одновременно происходит их растекание в радиальном направлении, иначе говоря, нестационарная аккреция из-за турбулентной вязкости.

В частном случае стационарного, изотермического по вертикали бэкграунда с α -параметризацией вязкости общие изгибные уравнения были сведены к более простым уравнениям (2.84), (2.85) и (2.86) для комплексных амплитуд $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, описывающих возмущения скоростей, и $\mathbf{W}$, дающей геометрию диска, которые зависят от r и τ . При этом было использовано решение для плоского релятивистского диска, подробно изложенное в разделе 1. Для соответствующей стационарной задачи становится возможным получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка для переменной $\mathbf{W}$ (см. уравнение (2.88)). Аналитическое интегрирование этого уравнения для формально невязкого диска с параметром $\tilde{\delta} \ll 1$ позволило для дискретного набора значений $\tilde{\delta}_k$ найти особые резонансные решения, фактически соответствующие неустойчивости ненаклонённого плоского диска, когда тот может принимать искривлённую форму вблизи чёрной дыры даже при том, что на бесконечности лежит в её экваториальной плоскости. Эта неустойчивость, однако, быстро исчезает — уже при $\alpha \sim 10^{-3}$, а для $\alpha > \tilde{\delta}$ и при условии, что $\tilde{\delta} < 0,1$, как показывает численный расчёт, имеет место эффект Бардина – Петтерсона. В то же время уже при $\alpha \sim \tilde{\delta}$ укладка внутренних частей диска в экваториальную плоскость чёрной дыры отсутствует, и при $\tilde{\delta} \geq 0,1$ мы видим гладкие, но немонотонные профили $\beta(r)$ (см. рис. 3), что говорит об их устойчивости относительно возмущений и возможности их существования в реальной ситуации. Последнее подтверждается и первыми численными симуляциями наклонённых тонких релятивистских аккреционных дисков с $\delta \sim \alpha \sim a \sim 0,1$, проведённых недавно в работах [39, 40], где также было выполнено сравнение с полуаналитической моделью, основанной на решении системы (2.58), (2.59), (2.62) для слабо наклонённого тора, баротропного по вертикали.

Наблюдательные подтверждения существования изгибных аккреционных дисков вокруг вращающихся чёрных дыр ещё только начинают появляться. Пожалуй, одним из наиболее прямых свидетельств их существования явилось наблюдение распределения мазерных источников на субпарсекowych масштабах в диске вокруг сверхмассивной чёрной дыры в активном ядре галактики NGC 4258 [41, 42]. Последующее моделирование в работах [43, 44] показало, что искривление диска в этом объекте может быть вызвано эффектом Бардина – Петтерсона. В недавней работе [45] были привлечены наблюдения джетов в ядре NGC 4258, что позволило независимо оценить параметр Керра $a \approx 0,7$ и в аналогичной модели диска получить радиус его укладки в экваториальную плоскость чёрной дыры, согласующийся с наблюдениями формы диска. Дополнительные, но более косвенные аргументы в пользу того, что во многих

активных галактических ядрах мы видим изгибные диски, получены, например, в работах [46, 47], где в рамках разных моделей аккреционных дисков рассчитывались видимые профили рентгеновской линии железа K_α . Был сделан вывод, что во многих случаях наблюдаемую форму линии естественнее объяснить искривлением диска, нежели оставлять диск плоским, меняя, скажем, радиальное распределение интенсивности излучения с его поверхности. В работе [48] аналогичное моделирование было проведено для бальмеровских линий водорода, которые должны возникать из-за прогрева внешних частей изгибного диска жёстким излучением его внутренних частей, развёрнутых в сторону друг друга гораздо сильнее, чем в плоском диске. Существование изгибных дисков подозревают и в двойных звёздных системах, содержащих чёрные дыры. К примеру, это сделано для двух микроквазаров, GRO J1655–40 и V4641 Sgr, в которых был обнаружен наклон джетов по отношению к орбитальной плоскости системы [49, 50].

Как мы упоминали, уравнения (2.58), (2.59) и (2.62) описывают также и нестационарную динамику наклонённого к экваториальной плоскости чёрной дыры тора. Когда $\delta > \alpha$, действие гравитомагнитной силы должно приводить к твердотельной прецессии тора, поскольку в этом случае распространяющиеся с почти звуковой скоростью изгибные волны будут ликвидировать зависимость γ от r , возникающую за счёт прецессии Лензе – Тирринга. Подобные нестационарные модели привлекаются для объяснения переменности профилей бальмеровских линий, а также прецессии джетов в активных галактических ядрах (см., например, [51]). Во многих работах прецессирующие торы используются для объяснения низкочастотных квазипериодических осцилляций в рентгеновских двойных системах (см., например, [52]). Отдельный интерес представляет моделирование наблюдательных проявлений наклонённого аккреционного диска в окрестности сверхмассивной чёрной дыры в центре Галактики [53].

Представленная здесь теория релятивистских изгибных дисков может с успехом применяться как для построения самосогласованных моделей конкретных наблюдаемых объектов, так и для дальнейших теоретических предсказаний в области динамики аккреционных потоков вокруг вращающихся чёрных дыр.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-12-00146.

Список литературы

1. Novikov I D, Thorne K S "Astrophysics of black holes", in *Black Holes* (Eds C DeWitt, B S DeWitt) (New York: Gordon and Breach, 1973) p. 343
2. Cunningham C T *Astrophys. J.* **202** 788 (1975)
3. Gierlinski M, Maciolek-Niedzwiecki A, Ebisawa K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **325** 1253 (2001)
4. Li L-X et al. *Astrophys. J. Suppl.* **157** 335 (2005)
5. Zhuravlev V V, Ivanov P B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **415** 2122 (2011)
6. Новиков И Д, Фролов В П *Физика черных дыр* (М.: Наука, 1986); Frolov V P, Novikov I D *Black Hole Physics* (Dordrecht: Kluwer, 1998)
7. Chandrasekhar S *The Mathematical Theory of Black Holes* (New York: Oxford Univ. Press, 1992); Чандрасекар С *Математическая теория черных дыр* Ч. 2 (М.: Мир, 1986)
8. Riffert H, Herold H *Astrophys. J.* **450** 508 (1995)

9. Hobson M P, Efstathiou G P, Lasenby A N *General Relativity: an Introduction for Physicists* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)
10. Korn G A, Korn T N *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1968); Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1973)
11. Page D N, Thorne K S *Astrophys. J.* **191** 499 (1974)
12. Chandrasekhar S *The Mathematical Theory of Black Holes* (New York: Oxford Univ. Press, 1992); Чандрасекар С *Математическая теория черных дыр* Ч. 1 (М.: Мир, 1986)
13. Mihalas D, Mihalas B W *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (New York: Oxford Univ. Press, 1999)
14. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973); Мизнер Ч, Торн К, Уиллер Дж *Гравитация* Т. 2 (М.: Мир, 1977)
15. Shakura N I, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **24** 337 (1973)
16. Shakura N I, Sunyaev R A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **175** 613 (1976)
17. Bisnovaty-Kogan G S, Blinnikov S I *Astron. Astrophys.* **59** 111 (1977)
18. Paczynski B, Bisnovaty-Kogan G *Acta Astron.* **31** 283 (1981)
19. Abramowicz M A et al. *Astrophys. J.* **332** 646 (1988)
20. Klernev A S, Bisnovaty-Kogan G S *Astrophysics* **53** 409 (2010)
21. Fujita M, Okuda T *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **50** 639 (1998)
22. Agol E et al. *Astrophys. J.* **558** 543 (2001)
23. Шакура Н И *Астрон. журн.* **49** 921 (1972); Shakura N I *Sov. Astron.* **16** 756 (1973)
24. Торн К, Прайс Р, Макдональд Д *Черные дыры: мембранный подход* (М.: Мир, 1988); Thorne K S, Price R H, MacDonald D A (Eds) *Black Holes: the Membrane Paradigm* (New Haven: Yale Univ. Press, 1986)
25. Ivanov P B, Illarionov A F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **285** 394 (1997)
26. Okazaki A T, Kato S, Fukue J *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **39** 457 (1987)
27. Kato S *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **42** 99 (1990)
28. Ipser J R *Astrophys. J.* **458** 508 (1996)
29. Bardeen J M, Press W H, Teukolsky S A *Astrophys. J.* **178** 347 (1972)
30. Petterson J A *Astrophys. J.* **214** 550 (1977)
31. Petterson J A *Astrophys. J.* **226** 253 (1978)
32. Hatchett S P, Begelman M C, Sarazin C L *Astrophys. J.* **247** 677 (1981)
33. Papaloizou J C B, Lin D N C *Astrophys. J.* **438** 841 (1995)
34. Papaloizou J C B, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **202** 1181 (1983)
35. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 2003); Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000)
36. Demianski M, Ivanov P B *Astron. Astrophys.* **324** 829 (1997)
37. Kumar S, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **213** 435 (1985)
38. Bardeen J M, Petterson J A *Astrophys. J. Lett.* **195** L65 (1975)
39. Morales Teixeira D, Fragile P C, Zhuravlev V V, Ivanov P B *Astrophys. J.* **796** 103 (2014)
40. Zhuravlev V V, Ivanov P B, Fragile P C, Morales Teixeira D *Astrophys. J.* **796** 104 (2014)
41. Neufeld D A, Maloney P R *Astrophys. J. Lett.* **447** L17 (1995)
42. Herrnstein J R, Greenhill L J, Moran J M *Astrophys. J. Lett.* **468** L17 (1996)
43. Martin R G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **387** 830 (2008)
44. Caproni A et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **379** 135 (2007)
45. Wu Q, Yan H, Yi Z *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **436** 1278 (2013)
46. Cadez A et al. *Astron. Astrophys.* **403** 29 (2003)
47. Cadez A, Calvani M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **363** 177 (2005)
48. Wu S-M, Chen L, Yuan F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402** 537 (2010)
49. Martin R G, Tout C A, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **387** 188 (2008)
50. Martin R G, Reis R C, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **391** L15 (2008)
51. Caproni A, Mosquera Cuesta H J, Abraham Z *Astrophys. J.* **616** L99 (2004)
52. Veledina A, Poutanen J, Ingram A *Astrophys. J.* **778** 165 (2013)
53. Dexter J, Fragile P C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **432** 2252 (2013)

Analytical models of relativistic accretion disks

V.V. Zhuravlev

Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute,
Universitetskii prosp. 13, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: zhuravlev@sai.msu.ru

The purpose of this paper is to present not a literature review but rather a description, as detailed and consistent as possible, of two analytical models of disk accretion onto a rotating black hole: a standard relativistic disk and a twisted relativistic disk. Even though one of these models is older than the other, both are of topical current interest for black hole studies. The way the exposition is presented, the reader with only a limited knowledge of general relativity and relativistic hydrodynamics can — with little or no use of additional sources — gain good insight into many technical details not present in the original papers.

Keywords: accretion, accretion discs, black hole physics, hydrodynamics

PACS numbers: 04.20.Cv, 04.70.Bw, 47.10.A–, 47.10.ad, 97.10.Gz

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201506a.0561

Bibliography — 53 references

Received 11 December 2014, revised 19 January 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (6) 561 – 592 (2015)

Physics–Uspekhi **58** (6) (2015)