Май 2015 г. *Том 185, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Эффект Холла и его аналоги

А.Ф. Барабанов, Ю.М. Каган, Л.А. Максимов,
А.В. Михеенков, Т.В. Хабарова

Обращается внимание на сходство родственных кинетических явлений, нечётных по магнитному полю в различных средах, в которых существует электрический ток или поток тепла в направлении, перпендикулярном: 1) *магнитному полю,* 2) *напряжённости электрического поля или градиенту температуры. Это эффект Холла, эффект Риги–Ледюка в немагнитных металлах, аномальный эффект Холла в магнетиках, нечётный эффект Бинакера–Зенфтлебена в молекулярных газах, фононный эффект Холла в диэлектриках. Геометрическое тождество перечисленных явлений находится в контрасте с разнообразием механизмов их образования, динамических и диссипативных. Но во всех случаях поперечный к магнитному полю поток возникает благодаря спин-орбитальному взаимодействию носителей с магнитными моментами.*

Ключевые слова: эффект Холла, аномальный эффект Холла, спиновый эффект Холла, фононный эффект Холла, эффект Риги–Ледюка, эффект Бинакера–Зенфтлебена

PACS numbers: **34.10.+x**, 72.15.Gd, 72.15.Jf, 72.20.My, 72.20.Pa DOI: 10.3367/UFNr.0185.201505b.0479

Содержание

А.Ф. Барабанов. Институт физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина РАН,
Калужское шоссе 14, 142190 Троицк, Москва, Российская Федерация
E-mail: abarab@bk.ru
Ю.М. Каган, Т.В. Хабарова. Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
E-mail: Habarova_TV@nrcki.ru
Л.А. Максимов. Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: lam05@mail.ru
А.В. Михеенков. Институт физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина РАН,
Калужское шоссе 14, 142190 Троицк, Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: mikheen@bk.ru

Статья поступила 1 марта 2015 г.

1. Введение

Эффект Холла — явление возникновения поперечной разности потенциалов (называемой также холловским напряжением) при помещении проводника с постоянным током в магнитное поле — был открыт Эдвином Холлом в 1879 г. в тонких пластинках золота [1]. Интересно, что в то время публикация работы даже в статусном журнале не означала невозможности её появления в других изданиях. Пионерская работа Холла "О новом действии магнита на электрические токи" ("On a New Action of the Magnet on Electric Currents") [1] была перепечатана в [2–4]. Статья [1], дальнейшие работы Эдвина Холла [5–14] и отклики на них [15–17] открывают библиографию эффекта Холла.

В металлах эффект возникает благодаря дрейфу электронов в скрещённых электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях. В магнетиках к эффекту приводит спин-орбитальное взаимодействие электронов проводимости и магнитных моментов. В диэлектриках магнитное поле изменяет поляризацию фононов и частоту их столкновений с магнитной подсистемой. В газах прецессия вращательных моментов в магнитном поле приводит к изменению вероятности столкновений несферических молекул. В настоящем обзоре мы рассматриваем случай слабых магнитных полей и квантовый эффект Холла не обсуждаем.

Согласно теории необратимых процессов Онзагера–Казимира, при малом отклонении от равновесия обобщённые потоки пропорциональны обобщённым силам [18]:

$$J_i = \sigma_{ik} X_k \,, \tag{1}$$

где σ_{ik} — тензор электропроводности, или, что эквивалентно,

$$X_i = \rho_{ik} J_k \,, \tag{2}$$

где $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$ — обобщённый тензор сопротивления.

В соответствии с принципом Онзагера

$$\rho_{ik}(\mathbf{B}) = \rho_{ki}(-\mathbf{B}) \,. \tag{3}$$

Заметим сразу, что все рассматриваемые ниже явления по отдельности обсуждались, в частности, в работах [19–23]. Основная цель настоящего обзора состоит в установлении общих закономерностей, прослеживающихся во всей группе обсуждаемых эффектов. Все кинетические эффекты, нечётные по магнитному полю, создают потоки в поперечном направлении:

$$\mathbf{J} \sim \mathbf{B} \times \mathbf{x} \,.$$

Но механизмы образования поперечных потоков, что интересно, для разных веществ различны. В немагнитных металлах — это классический дрейф электронов в скрещённых полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В магнетиках к аномальному эффекту Холла [19–21, 24] приводят два механизма.

Во-первых, это *динамический* механизм (левая часть кинетического уравнения), согласно которому к искривлению траектории электронов проводимости приводит спин-орбитальное (СО) взаимодействие электронов и магнитных моментов. Во-вторых, есть другой — *диссипативный* — механизм (правая часть кинетического уравнения), в котором главную роль играет не плавное искривление траектории в поле Вейсса, а столкновение электронов с магнитными атомами.

В диэлектриках аналогично также есть два механизма образования поперечного потока тепла:

1) изменение в магнитном поле поляризации фононов;

2) зависимость вероятности столкновений фононов с магнитными примесями от поля.

Наконец, в молекулярных газах, где роль фононов играют несферические молекулы, тоже имеется два механизма возникновения поперечного потока тепла: прецессия вращательных моментов в магнитном поле (*динамический* механизм) и изменение вероятности столкновений (*диссипативный* механизм).

В обзоре показана связь константы Холла с кривизной поверхности Ферми и дан элементарный вывод аномального эффекта Холла для различных систем в случае, когда он возникает благодаря СО-взаимодействию.

Обзор организован следующим образом. Раздел 2 посвящён эффекту Холла в металлах, там же обсуждаются особенности эффекта Холла в допированных магнетиках с сильным взаимодействием между носителями заряда и магнитным фоном. В разделе 3 рассматривается аномальный эффект Холла в магнетиках (а также кратко упоминается спиновый эффект Холла), в разделе 4 — эффект Риги–Ледюка (поперечная теплопроводность в металлах), в разделе 5 — эффект Бинакера–Зенфтлебена (аналог эффекта Холла в молекулярных газах), в разделе 6 — фононный эффект Холла в диэлектриках.

2. Эффект Холла в металлах

В применении к металлам формула (2) принимает вид закона Ома

$$E_i = \rho_{ik} J_k \,, \qquad \rho_{ik} = \rho \delta_{ik} + R e_{ikl} B_l \,, \tag{4}$$

где E_i — напряжённость электрического поля, J_i — вектор плотности электрического тока, ρ — удельное сопротивление, R — константа Холла, δ_{ik} — символ Кронекера, e_{ikl} — абсолютно антисимметричный единичный тензор. Как обычно, принимаем $J_i \parallel x$, $B_i \parallel z$. Зависимость тензора ρ_{ik} от магнитного поля можно найти из решения стационарного кинетического уравнения Больцмана

$$V_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \left(eE_i + \frac{e}{c} \, [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]_i \right) \frac{\partial f}{\partial p_i} + \mathrm{St} \, f = 0 \tag{5}$$

(здесь $\mathbf{V}$ — скорость, St — оператор столкновений), рассматривая неравновесную поправку к функции распределения $f^{(1)} = f - f^{(0)}$. В линейном приближении по полю E уравнение (5) принимает вид

$$eE_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_i} + \frac{e}{c} \, [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]_i \, \frac{\partial f^{(1)}}{\partial p_i} + \mathrm{St} \, f^{(1)} = 0 \,. \tag{6}$$

Первый член для распределения Ферми равен

$$-eE_i V_i \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| , \qquad \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| = \frac{1}{T} \, f^{(0)} (1 - f^{(0)}) \,.$$

Если ввести обозначения χ_i, $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Lambda}$:

$$\begin{aligned} & f^{(1)} = eE_i \chi_i \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| , \qquad \mathrm{St} \, f^{(1)} = \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| eE_i \hat{\Omega} \chi_i \,, \\ & \hat{\Lambda} = \frac{e}{c} \, [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]_l \, \frac{\partial}{\partial p_l} \,, \end{aligned} \tag{7}$$

и сократить на $eE_i |\partial f^{(0)} / \partial \varepsilon|$, то уравнение (6) приобретёт компактный вид:

$$V_i = (\hat{\Lambda} + \hat{\Omega}) \chi_i \,. \tag{8}$$

Самосопряжённый оператор столкновений $\hat{\Omega}$ ($\Omega_{ik} = \Omega_{ki}$, $\det \hat{\Omega} > 0$) в приближении времени релаксации заменяется величиной $1/\tau$. Плотность электрического тока выражается как

$$J_i = \sum_{p\sigma} eV_i f = e^2 E_k \sum_{p\sigma} V_i \chi_k \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| = e^2 \langle V_i \chi_k \rangle E_k \,,$$

где введено усреднение около поверхности Ферми,

$$\langle \ldots \rangle = \sum_{p\sigma} \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right| (\ldots) \,.$$

(Для сферической поверхности Ферми $\langle 1 \rangle = p_{\mathrm{F}}^3 / (2\pi^2 \varepsilon_{\mathrm{F}})$, $N = p_{\mathrm{F}}^3 / (3\pi^2)$, $\langle 1 \rangle = 3N / (2\varepsilon_{\mathrm{F}})$, где p_{F} и ε_{F} — соответственно импульс и энергия Ферми.)

В результате тензор электропроводности принимает вид

$$\sigma_{ik} = e^2 \langle \chi_k V_i \rangle \,. \tag{9}$$

Запишем (9) в форме, в которой динамический член заменён правой частью (8), что явно показывает симметрию этого тензора:

$$\sigma_{ik} = e^2 \langle \chi_k (\hat{\Omega} + \hat{\Lambda}) \chi_i \rangle = \sigma_{ik}^{(+)} + \sigma_{ik}^{(-)} \,. \tag{10}$$

Первый член в правой части (10) $\sigma_{ik}^{(+)} = e^2 \langle \chi_k \hat{\Omega} \chi_i \rangle$ является симметричным тензором, который не содержит нечётных по магнитному полю компонент.

Для вычисления части тензора σ_{ik}, линейной по магнитному полю, $\sigma_{ik}^{(-)} = e^2 \langle \chi_k \hat{\Lambda} \chi_i \rangle$,

$$\sigma_{ik}^{(-)} = \frac{e^3}{c} \left\langle \chi_k [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]_l \, \frac{\partial \chi_i}{\partial p_l} \right\rangle , \tag{11}$$

достаточно нулевого по полю значения вектора $\boldsymbol{\chi}$ (который здесь имеет смысл длины свободного пробега):

$$\chi_i^{(0)} = L_i = \Omega_{ik}^{-1} V_k \,. \tag{12}$$

Холловская проводимость в слабом поле $\mathbf{B} \parallel z$ задаётся антисимметричной полуразностью:

$$\sigma_{xy}^{(-)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{xy}^{(-)} - \sigma_{yx}^{(-)} \right) = \frac{e^3 B}{2c} \left(\left\langle L_y V_y \, \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left\langle L_y V_x \, \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \right\rangle + \left\langle L_x V_x \, \frac{\partial L_y}{\partial p_y} \right\rangle - \left\langle L_x V_y \, \frac{\partial L_y}{\partial p_x} \right\rangle \right) .$$

В τ-приближении $L_i = \tau V_i$ получаем

$$\sigma_{xy}^{(-)} = \frac{e^3 \tau^2 B}{2c} \left(\left\langle V_x^2 \, \frac{\partial V_y}{\partial p_y} \right\rangle + \left\langle V_y^2 \, \frac{\partial V_x}{\partial p_x} \right\rangle - 2 \left\langle V_x V_y \, \frac{\partial V_x}{\partial p_y} \right\rangle \right) . \tag{13}$$

Сечение поверхности Ферми плоскостью, перпендикулярной оси z, в точке $\mathbf{p}$ имеет кривизну (см., например, [25])

$$K_z(\mathbf{p}) = \frac{2\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_{xy} - \varepsilon_x^2 \varepsilon_{yy} - \varepsilon_y^2 \varepsilon_{xx}}{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)^{3/2}} \,, \tag{14}$$

$$V_i = \varepsilon_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \,, \qquad \varepsilon_{ik} = \frac{\partial V_k}{\partial p_i} \,, \qquad \left\langle V_\parallel^3 K_z(\mathbf{p}) \right\rangle = \frac{N}{m^2} \,,$$

$$K_z(\mathbf{p}) = \frac{2 V_x V_y \varepsilon_{xy} - V_x^2 \varepsilon_{yy} - V_y^2 \varepsilon_{xx}}{V_\parallel^3} \,,$$

так что поперечную проводимость (выражение (13)) можно представить как взвешенное среднее от кривизны (14) [26]:

$$\sigma_{xy}^{(-)} = - \frac{\tau^2 e^3 B}{2c} \, \langle V_\parallel^3 K_z \rangle \,, \qquad V_\parallel^2 = V_x^2 + V_y^2 \,. \tag{15}$$

Отсюда находим константу Холла:

$$\rho_{yx} = RB = \frac{\sigma_{xy}^{(-)}}{\sigma_{xx}^{(+)} \sigma_{yy}^{(+)}} \,. \tag{16}$$

Отметим, что для кубического кристалла можно написать вместо (15) более симметричную формулу:

$$\sigma_{xy}^{(-)} = - \frac{\tau^2 e^3 B}{6c} \, \langle V^3 k_3 \rangle \,, \tag{17}$$

где k_3 — сумма главных кривизн трёхмерной поверхности,

$$k_3 = (\varepsilon_\gamma^2)^{-3/2} (\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta\beta}) \,. \tag{18}$$

Насколько известно авторам, связь (15), (16) константы Холла с кривизной поверхности Ферми ранее нигде (кроме малодоступной работы [26]) не приводилась.

Отметим также, что в двумерном случае существует альтернативное геометрическое представление холловской проводимости $\sigma_{xy}^{(-)}$ [27], которое задаётся величиной площади $A = \int d\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, заметаемой вектором $\mathbf{L} = \mathbf{V}\tau$ при движении вдоль поверхности Ферми.

В изотропном металле со спектром $\varepsilon = p^2/(2m)$ из (16) получаем обычное выражение:

$$R = \frac{1}{Nec} \,. \tag{19}$$

Если рассмотреть металл с двумерной узкой зоной с нестингом:

$$\varepsilon = -t\gamma \,, \qquad \gamma = \cos(p_x a) + \cos(p_y a) \,,$$

то кривизна и, как следствие, константа Холла будут отрицательны в нижней половине зоны и положительны в верхней, причём вблизи половинного заполнения $N_{0,5}$

$$R \sim (N - N_{0,5}) \,. \tag{20}$$

В случае, когда сечение кристалла, перпендикулярное магнитному полю, имеет симметрию прямоугольника и спектр электронов описывается формулой

$$\varepsilon = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \,,$$

компонента тензора электропроводности $\sigma_{yx}^{(-)}$ выражается как

$$\sigma_{yx}^{(-)} \sim \left\langle L_x \left[\mathbf{V} \, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]_z L_y \right\rangle \sim \left(\frac{1}{m_1} \right)^2 \frac{1}{m_2} (2m_1)^{3/2} \sqrt{2m_2} \,. \tag{21}$$

Таким образом, формула (19), которую обычно используют для того, чтобы выяснить знак носителей электрического тока и их плотность, справедлива только в простейшем, "студенческом", случае свободных электронов со спектром $\varepsilon = p^2/(2m)$.

Для вычисления эффекта Холла в реальных металлах следует:

1) принять во внимание особенности поверхности Ферми;

2) учесть зависимость скорости и кривизны поверхности Ферми от направления;

3) наконец, следует отказаться от τ-приближения и вычислять тензор электропроводности с учётом анизотропии столкновений в многомоментном приближении (см., например, [26, 28]).

Последнее из соображений краткости мы приводить не будем. Но главное — зависимость эффекта Холла от кривизны поверхности Ферми — демонстрирует формула (15).

Тем более неадекватным становится τ-приближение в системах с сильными электронными корреляциями, в том числе в допированных антиферромагнетиках (к которым относятся, в частности, высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП)).

Сильное взаимодействие носителей заряда со спиновым магнитным фоном приводит к тому, что голый носитель (будем, так же как и в случае лантановых и иттриевых ВТСП, считать его дыркой) "одевается" спиновыми возбуждениями и затравочный спектр сильно изменяется. Дырка рассеивается на спиновой подсистеме с возбуждением спиновой волны

$$S_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \sum_{\mathbf{R}} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{qR}) S_{\mathbf{R}}^{\alpha}$$

с направлением поляризации $\alpha = x, y, z$. Рассеяние описывается взаимодействием

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = J \sum_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\,\gamma_1}^{\dagger} S_{\mathbf{q}}^{\alpha} \hat{\sigma}_{\gamma_1\gamma_2}^{\alpha} a_{\mathbf{k}\gamma_2}\,,$$

где J — амплитуда спин-дырочного взаимодействия, $\hat{\sigma}^{\alpha}$ — матрицы Паули. "Одетая" дырка $\tilde{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ представляет собой квазичастицу, которую можно рассматривать как суперпозицию состояний голой дырки и спиновых возбуждений,

$$\tilde{a}_{\mathbf{k}\sigma} = u_0(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} u_1(\mathbf{k},\mathbf{q}) S_{\mathbf{q}}^{\alpha} \sigma_{\sigma\sigma'}^{\alpha} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\,\sigma'} + \\ + \sum_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}'} u_2(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{q}') S_{\mathbf{q}}^{\alpha} S_{\mathbf{q}'}^{\beta} (\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta})_{\sigma\sigma'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{q}',\,\sigma'} + \ldots \quad (22)$$

с некоторыми коэффициентами $u_j(\mathbf{k},\mathbf{q},\ldots)$, определяемыми структурой магнитного фона. В этом случае при решении уравнения Больцмана неизбежно приходится использовать многомоментное приближение. Выбор моментов неоднозначен; в качестве моментов можно взять, например, полиномы от компонент скорости и её производных. В таком подходе коэффициент Холла приобретает температурную зависимость. Детально реализация этой схемы описана в [29–32].

3. Аномальный эффект Холла в ферромагнетиках

Теперь рассмотрим поперечную электропроводность в ферромагнетиках. Это так называемый аномальный эффект Холла (АЭХ), впервые обнаруженный И.К. Кикоиным [33, 34]. АЭХ на несколько порядков сильнее классического эффекта Холла. Кроме силы Лоренца в ферромагнетиках существует сильное СО-взаимодействие: $H^{(SL)} \sim \mathbf{SL}$ (см., например, [35]).

Следует иметь в виду, что для электронов проводимости орбитальный момент $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ не сводится к орбитальному моменту атомов. Простейший механизм АЭХ обусловлен взаимодействием электронов проводимости с когерентной подсистемой спонтанных магнитных моментов, и он проявляется как эффективное (молекулярное) магнитное поле Вейсса, которое пропорционально спонтанной намагниченности тела, $\mathbf{B}^M = \gamma\mathbf{M}$, и много больше $\mathbf{B}$. При этом для описания движения электрона в уравнении (8) член с силой Лоренца заменяется выражением с полем Вейсса:

$$\hat{\Lambda}^M = \frac{e}{c}\,[\mathbf{V} \times \gamma\mathbf{M}]_a \frac{\partial}{\partial p_a}\,, \quad (23)$$

и поперечная компонента электросопротивления принимает вид

$$\rho_{yx}^M = \frac{\gamma M}{Nec}\,. \quad (24)$$

Это *динамический* механизм — результат влияния средней намагниченности на траекторию электрона проводимости.

Интереснее механизм АЭХ, который связан с СО-анизотропией рассеяния электронов на магнитных моментах $\mathbf{M}$ ферромагнитной решётки. Этот механизм — *диссипативный*; теоретически он рассматривался в работах [19–21, 24] (см. также обзор [36]). Диссипативный механизм АЭХ возникает благодаря спин-орбитальному рассеянию электронов проводимости на флуктуациях магнитных моментов электронов внутренних оболочек. Величину эффекта можно оценить, если рассмотреть рассеяние в заборновском приближении, квадратичном по потенциальному взаимодействию с примесями $H^{(\mathrm{imp})}$ и линейном по $H^{(SL)}$.

Вычислим диссипативную часть холловского тока, пренебрегая в (8) динамическим механизмом (23), но учитывая в интеграле столкновений, кроме потенциального рассеяния на примесях $\hat{\Omega}^{(0)}$, линейный по $\mathbf{M}$ вклад от СО-рассеяния $\hat{\Omega}^{(SL)}$:

$$V_i = (\hat{\Omega}^{(0)} + \hat{\Omega}^{(SL)})\chi_i\,. \quad (25)$$

Тензор электропроводности (9) представляем в виде

$$\sigma_{ik} = e^2 \langle V_i \chi_k \rangle = e^2 \big\langle \chi_k (\hat{\Omega}^{(0)} + \hat{\Omega}^{(SL)}) \chi_i \big\rangle = \sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(SL)}\,. \quad (26)$$

Здесь $\sigma_{ik}^{(0)} = (e^2/\tau)\langle \chi_k \chi_i \rangle$ — симметричный тензор, чётный по $\mathbf{M}$. Тензор

$$\sigma_{ik}^{(SL)} = e^2 \langle \chi_k \hat{\Omega}^{(SL)} \chi_i \rangle \quad (27)$$

ведёт себя при поворотах системы координат как произведение двух полярных векторов ($\boldsymbol{\chi}$) и является линейным по $\mathbf{M}$. Поэтому, пренебрегая анизотропией среды, можно утверждать, что вектор $\mathbf{M}$ — дуальный вектор для тензора $\langle \chi_k \hat{\Omega}^{(SL)} \chi_i \rangle$ и антисимметричная часть тензора электропроводности может быть представлена в виде (см. [18])

$$\sigma_{ik}^{(SL)} = \beta e_{ikl} M_l\,, \qquad \sigma_{yx}^{(SL)} = -\beta M\,. \quad (28)$$

При температурах ниже температуры Кюри вектор $\mathbf{M}$ представляет собой спонтанный магнитный момент, а в парамагнитной области температур $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$.

Для того чтобы определить, какой из рассмотренных выше механизмов важнее, следует вычислить значения коэффициентов γ в (24) и β в (28), выбрав конкретную модель СО-взаимодействия. Однако это выходит за рамки настоящего обзора (см. [19–21, 24]).

Здесь необходимо упомянуть о так называемом *спиновом эффекте Холла*, который теоретически был предсказан ещё в 1971 г. Дьяконовым и Перелем [37, 38]. Сам термин "спиновый эффект Холла" предложен Хорхе Хиршем [39] в 1999 г. Как и в случае АЭХ, для спинового эффекта Холла не требуется внешнего магнитного поля. Различают также два типа этого эффекта: *внешний* и *внутренний*. Внешний эффект возникает в результате анизотропии рассеяния электронов на кулоновских центрах, вызванной спин-орбитальным взаимодействием. При протекании тока электроны со спином вверх относительно плоскости рассеиваются преимущественно направо, а электроны со спином вниз — налево, как при аномальном эффекте Холла. На боковых краях возникает избыток электронов со спином вверх и со спином вниз, аналогичный избыточному заряду в обычном эффекте Холла. Для внутреннего спинового эффекта отклонение носителей тока с противоположными направлениями спина происходит из-за спин-орбитального взаимодействия.

В последнее время существование спинового эффекта Холла было экспериментально продемонстрировано не только в полупроводниках [40–42], но и в металлах [43–45].

4. Эффект Риги–Ледюка

Далее рассмотрим поперечную теплопроводность в металлах — аномальный эффект Риги–Ледюка. Эффект был одновременно обнаружен итальянским физиком Аугусто Риги и французским физиком Сильвестром Ледюком. Пионерскими принято считать опубликованные в 1887 г. работы Риги "Sulla Conducibilitá Calorica del Bismuto posto in un Campo Magnetico" ("О теплопроводности висмута в магнитном поле") [46] и Ледюка "Sur la conductibilité calorifique du bismuth dans un champ magnétique et la déviation des lignes isothermes" ("О теплопроводности висмута в магнитном поле и отклонении изотерм") [47], хотя Риги и Ледюк фактически вели исследование эффекта и публиковали статьи начиная с 1883–1884 годов [48–54] (здесь даны ссылки только на первичные публикации, репринты не указаны).

Как и работы Эдвина Холла, оригинальные статьи Риги и Ледюка довольно многочисленны, и мы не будем приводить здесь полной библиографии. Исчерпывающую библиографию ранних работ по гальваномагнитным и термомагнитным явлениям можно найти в книге [55].

В задаче о поперечной теплопроводности в металлах роль обобщённой силы играет логарифм градиента температуры, а обобщённого потока — поток тепла. В линеаризованном уравнении Больцмана (6) следует провести замену первого члена:

$$(\mathbf{V}\nabla)f^{(0)} = (\varepsilon-\mu)(\mathbf{V}\nabla\ln T)\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\varepsilon}\right|,$$

и уравнение Больцмана тогда примет вид

$$(\varepsilon-\mu)(\mathbf{V}\nabla\ln T)\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\varepsilon}\right| + \frac{e}{c}\,[\mathbf{V}\times\mathbf{B}]_i\,\frac{\partial f^{(1)}}{\partial p_i} + \mathrm{St}\,f^{(1)} = 0\,. \tag{29}$$

Введение обозначений

$$\tilde{V}_i = (\varepsilon-\mu)V_i\,, \qquad f^{(1)} = (\nabla\ln T)_i\chi_i\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\varepsilon}\right|,$$

сводит эту задачу к задаче, рассмотренной в разделе 2, но вместо плотности электрического тока требуется найти плотность потока тепла, переносимого электронами (см. [56]),

$$q_i = \sum_{p\sigma}(\varepsilon-\mu)V_i f = \langle\tilde{V}_i\chi_k\rangle(\nabla\ln T)_k\,. \tag{30}$$

Уравнение (8) заменяется уравнением

$$\tilde{V}_i = \hat{\Lambda}\chi_i + \hat{\Omega}\chi_i\,, \tag{31}$$

а (11) — выражением для коэффициента теплопроводности $\varkappa$:

$$\varkappa_{ik}^{(-)} = -\frac{1}{T}\,\langle\chi_k^{(0)}\hat{\Lambda}\chi_i^{(0)}\rangle\,, \tag{32}$$

где функция $\chi_i^{(0)}$ — решение уравнения Больцмана без магнитного поля,

$$\tilde{V}_i = \hat{\Omega}\chi_i^{(0)}\,.$$

Вычисления аналогичны проведённым в разделе 2, и мы их приводить не будем. В разделе 5 мы рассмотрим нечётный эффект Бинакера–Зенфтлебена.

5. Эффект Бинакера–Зенфтлебена

Рассмотрим аналог эффекта Холла в молекулярных газах — эффект Бинакера–Зенфтлебена [57–61]. В металлах магнитное поле (сила Лоренца) действует непосредственно на орбитальное движение частиц (электронов). В газах магнитное поле воздействует на движение молекул опосредованно — через подсистему вращательных моментов молекул. Поле приводит к прецессии вращательных моментов молекул, и только во вторую очередь, благодаря прецессии вращательных моментов, меняется частота столкновений несферических молекул и возникает зависимость релаксации движения молекул от магнитного поля.

Тензор теплопроводности будем искать, решая задачу теплопроводности для газа с вращательными степенями свободы в магнитном поле,

$$(\mathbf{V}\nabla)f^{(0)} + \gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{B}]\,\frac{\partial f}{\partial\mathbf{M}} + \mathrm{St}\,f = 0\,. \tag{33}$$

В отличие от магнитной силы Лоренца в уравнении Больцмана для металлов (6), действующей на импульс электрона, в уравнении (33) присутствует момент силы прецессии вращательного момента молекулы $\gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{B}]$. При этом локально-равновесным распределением является функция Максвелла–Больцмана при постоянном давлении

$$f^{(0)} = \mathrm{const}\,\frac{p}{T^{c_p}}\exp\left[-\frac{1}{T}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{M^2}{2I}\right)\right], \tag{34}$$

а роль напряжённости электрического поля играет градиент температуры. Распределение ищем в виде $f = f^{(0)}(1+(\nabla\ln T)\boldsymbol{\chi})$. "Полевой" член в (33) записываем как

$$(\mathbf{V}\nabla)f^{(0)} = f^{(0)}(\boldsymbol{\nabla}\ln T)\mathbf{Q}\,, \quad \mathbf{Q} = \frac{\mathbf{V}}{T}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{M^2}{2I}-\frac{7}{2}\,T\right). \tag{35}$$

Интеграл столкновений в линейном приближении по ∇T представляем в виде

$$\mathrm{St}\,f = (\boldsymbol{\nabla}\ln T)f^{(0)}(\hat{\Omega}\boldsymbol{\chi})\,, \qquad \Omega_{ik} = \Omega_{ki}\,.$$

Для краткости обозначим оператор прецессии как $\hat{\Lambda} = \gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{B}]\,\partial/\partial\mathbf{M}$, и тогда (33) принимает вид

$$f^{(0)}(\nabla\ln T)_i Q_i + f^{(0)}(\nabla\ln T)_i\hat{\Lambda}\chi_i = -f^{(0)}\nabla_i\ln T(\hat{\Omega}\chi)_i\,,$$
$$\Omega_{ik} = \Omega_{ki}\,.$$

Сокращая на $f^{(0)}(\nabla \ln T)$, получаем (ср. (8))

$$Q_i = -(\hat{\Omega} + \hat{\Lambda})\chi_i \,. \tag{36}$$

Поток тепла в системе координат, где газ как целое покоится,

$$q_i = \int \mathrm{d}\Gamma\, V_i \left(\frac{mV^2}{2} + \frac{M^2}{2I} - \frac{7}{2}\,T\right) f =$$
$$= \int \mathrm{d}\Gamma\, TQ_i \big(1 + (\nabla \ln T)_k \chi_k\big) f^{(0)} = -\varkappa_{ik} (\nabla \ln T)_k \,,$$
$$\langle \ldots \rangle = \int \mathrm{d}\Gamma\, Tf^{(0)} \,, \qquad \mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{M^n}\, \mathrm{d}^3 M \,\mathrm{d}^3 p \,, \qquad \langle 1 \rangle = TN \,.$$

В элементе интегрирования по вращательным моментам индекс $n = 1$ для двухатомных молекул и $n = 0$ для многоатомных.

Для того чтобы найти зависимость от магнитного поля тензора

$$\varkappa_{ik} = -T \langle Q_i \chi_k \rangle \tag{37}$$

методом моментов, следует учесть в векторе-функции χ_k зависимость от вращательного момента, для чего необходимо использовать несколько моментов, что достаточно утомительно. Ответ проще найти, выполнив простое преобразование (37) в более симметричную форму (как в (10)). Для этого заменим в (37) левую часть уравнения (36) правой:

$$\varkappa_{ik} = -\langle \chi_k Q_i \rangle = \big\langle \chi_k (\hat{\Omega} + \hat{\Lambda}) \chi_i \big\rangle \,. \tag{38}$$

Тензор $\varkappa_{ik}^{(0)} = \langle \chi_k \hat{\Omega} \chi_i \rangle$ является явно симметричным и не даёт вклада в линейную по полю $\mathbf{B}$ часть потока тепла. К нечётному эффекту может привести только

$$\varkappa_{ik}^{(1)} = \langle \chi_k \hat{\Lambda} \chi_i \rangle \,. \tag{39}$$

Здесь можно использовать решение (36) нулевого приближения по магнитному полю ($\boldsymbol{\chi}^{(0)} = \mathbf{F}$)

$$\hat{\Omega}\, \mathbf{F} = -\mathbf{Q} \,. \tag{40}$$

Тензор $\varkappa_{ik}^{(1)}$ отличен от нуля, только если $\hat{\Lambda}\mathbf{F} \neq 0$, для чего необходимо, чтобы вектор $\mathbf{F}$ зависел от $\mathbf{M}$.

Величина $\mathbf{Q}$ является полярным вектором (см. (35)), не зависящим от направления $\mathbf{M}$. Однако решение (40) $\mathbf{F}$ будет зависеть от направления $\mathbf{M}$, если оператор столкновений $\hat{\Omega}$ содержит несферические столкновения. Это означает, что, кроме вклада от τ-приближения $\mathbf{F}^{(0)} = -\tau \mathbf{Q}$, решение (40) имеет часть $\mathbf{F}^{(m)}$, которая представляет собой полярный вектор, нечётный по $\mathbf{V}$ и чётный по $\mathbf{M}$. Простейший полярный вектор, зависящий от $\mathbf{M}$, имеет вид

$$\mathbf{m} = \xi (\mathbf{VM}) \mathbf{M} \,. \tag{41}$$

В литературе этот вектор называют вектором Кагана.

Следует ожидать, что деформация распределения такого вида достаточно близка к точному решению уравнения (40). Дело в том, что оператор $\hat{\Omega}$ содержит интегрирование по направлениям $\mathbf{V}$ и $\mathbf{M}$. Происходит сглаживание, обнуление всех высоких гармоник. Нет причин, чтобы обсуждаемая зависимость имела более сложную структуру, чем (41) (см. [56]).

Параметр ξ можно вычислить, учтя в операторе столкновений $\hat{\Omega}$ вероятность столкновений в заборновском приближении, как это сделано в разделе 6 при обсуждении фононного эффекта Холла. Чтобы избежать повторений, здесь такой вывод опущен.

В этой модели тензор (39) имеет вид

$$\varkappa_{ik}^{(1)} = \left\langle F_k^{(m)} \gamma e_{abz} M_b B_z \,\frac{\partial}{\partial M_a}\, F_i^{(m)} \right\rangle =$$
$$= \xi^2 \gamma e_{abz} B_z \left\langle \frac{M_k M_b}{M^4} (\mathbf{MV}) \big((\mathbf{MV}) \delta_{ai} + V_a M_i \big) \right\rangle . \tag{42}$$

Усредняя по направлениям скорости, получим

$$\varkappa_{ik}^{(1)} = -\xi^2 \gamma e_{abz} B_z \left\langle \frac{M_k M_b}{3M^4}\, V^2 (M^2 \delta_{ai} + M_a M_i) \right\rangle =$$
$$= -\xi^2 \gamma e_{abz} B_z \left\langle V^2\, \frac{M_k M_b}{3M^2}\, \delta_{ai} + \frac{V^2}{3M^4}\, M_k M_b M_a M_i \right\rangle .$$

Умножение e_{abz} на произведение четырёх M сразу даёт нуль. Первый член легко усреднить по направлениям вращательного момента и тем самым обнаружить искомый эффект:

$$\varkappa_{ik}^{(1)} = \frac{1}{9}\, \xi^2 \gamma e_{ikz} B_z \langle V^2 \rangle = \frac{1}{9}\, \frac{TN}{m}\, \xi^2 \gamma e_{ikz} B_z \,.$$

В явном виде имеем

$$\mathbf{q} = \frac{1}{9}\, \frac{TN}{m}\, \xi^2 \gamma [\nabla T \times \mathbf{B}] \,.$$

В кислороде молекула имеет спин $S = 1$ и три проекции: $S_z = 0, \pm 1$, на полный момент J, который близок к вращательному моменту. Компоненты с $S_z = \pm 1$ имеют гиромагнитные отношения разных знаков и не дают нечётного эффекта. Линейный по полю эффект даёт компонента $S_z = 0$.

В газе диамагнитных молекул в случае $S = 0$ магнитный момент молекулы создаётся вращением ядер и $\gamma \simeq e\hbar/(2Mc)$. Он очень мал, но теплопроводность измеряется с большой точностью и поперечный тепловой поток в магнитном поле даже в газе диамагнитных молекул наблюдаем.

Следует также отметить, что эффект возникновения теплового потока, перпендикулярного градиенту температуры и магнитному полю в молекулярных газах, рассмотренный в разделе 4, можно обобщить для случая твёрдых тел, в которых молекулы, осциллирующие около узлов решётки, могут одновременно свободно вращаться при температурах, превышающих температуру замораживания вращательных степеней свободы. При этом, конечно, тепло переносится не молекулами, привязанными к узлам решётки, а фононами. В работе [62] показано, что в молекулярных кристаллах, где в широкой области температур существует квазисвободное вращение молекул, также должен наблюдаться поток тепла, перпендикулярный приложенному градиенту температуры и магнитному полю.

6. Фононный эффект Холла

Наконец, рассмотрим эффект, открытый в конце XX в. Речь идёт о поперечном потоке тепла в диэлектриках, обусловленном потоком фононов на фоне спиновой подсистемы.

Это явление, аналогичное эффекту Холла, недавно было обнаружено [63–65] в диэлектрическом соединении $Tb_3Ga_5O_{12}$. Авторы [63–65] наблюдали компоненту теплового потока $q_\perp \sim \nabla T \times \mathbf{B}$, перпендикулярную градиенту температуры и полю, и назвали это явление фононным эффектом Холла (ФЭХ). Поскольку в диэлектриках нет свободных носителей заряда, физическая природа явления далека от механизма эффекта Холла в металлах. Нет и вращательных степеней свободы, которые могли бы привести к процессу, подобному эффекту Бинакера в газах (см. раздел 5) [57–60]. Авторы работы [63] полагали, что ФЭХ обусловлен СО-взаимодействием фононов и подмагниченных спинов парамагнитных ионов. В этом смысле ФЭХ близок к АЭХ в ферромагнетиках.

В работах [33, 34, 66–68] АЭХ связывается с однородной частью СО-взаимодействия, приводящей к перенормировке групповой скорости электронов (фаза Берри). В работе [69] эта идея использована для описания ФЭХ. Однако перенормировка групповой скорости ионов не может привести к ФЭХ, поскольку ионы, в отличие от квазисвободных электронов, осциллируют около узлов решётки и среднее от СО-перенормировки скорости ионов равно нулю. В линейном по СО-взаимодействию приближении скорость фононов не перенормируется (см. ниже) и влияние СО-взаимодействия на тензор теплопроводности может проявиться через эллиптическую перенормировку поляризаций фононов [22, 70, 71] (магнитоакустический эффект). Этот механизм далёк от механизмов, обсуждённых выше, и мы рассмотрим его в последнюю очередь. Ближе к предыдущему механизм ФЭХ, в котором этот процесс рассматривается, по аналогии с АЭХ, как кинетическое явление с анизотропным СО-рассеянием (см. раздел 3).

Рассмотрим модель, в которой фононы при рассеянии сохраняют номер моды. Тогда теплопроводность диэлектрика можно представить как сумму теплопроводностей для каждой фононной моды по отдельности.

Как мы уже подчёркивали, магнитное поле не оказывает непосредственно влияния на движение фонона и уравнение Больцмана имеет вид

$$\omega(\mathbf{V}\nabla \ln T)\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right| + \mathrm{St}\, f^{(1)} = 0\,, \tag{43}$$

где $f^{(0)}$ — распределение Бозе–Эйнштейна,

$$\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right| = \frac{1}{T} f^{(0)}(1+f^{(0)})\,.$$

Так же как ранее, вводим обозначения:

$$\begin{gathered} f^{(1)} = \omega(\boldsymbol{\chi}\nabla \ln T)\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right|, \\ \mathrm{St}\, f^{(1)} = \left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right|\omega(\nabla \ln T\hat{\Omega}\boldsymbol{\chi})\,, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \omega\mathbf{V}\,, \end{gathered} \tag{44}$$

и приходим к уравнению вида (25):

$$\tilde{V}_i = (\hat{\Omega}^{(0)} + \hat{\Omega}^{(SL)})\chi_i\,, \tag{45}$$

где $\hat{\Omega}^{(0)}$ — интеграл столкновений от рассеяния фононов на примесях без участия магнитных моментов (рассеяние на фононах при низких температурах пренебрежимо мало́), $\hat{\Omega}^{(SL)}$ — вклад от спин-фононного рассеяния. Можно показать, что $\hat{\Omega}^{(0)}$ возникает уже в борновском приближении, а для вычисления $\hat{\Omega}^{(SL)}$ требуется заборновское приближение, линейное по СО-взаимодействию.

Снова получаем поперечную часть тензора теплопроводности, как и в ферромагнетиках (27), (28),

$$\varkappa_{ik}^{(\mathrm{SO})} = -\frac{1}{T}\langle \chi_k \hat{\Omega}^{(SL)} \chi_i\rangle \sim \xi e_{ikl} M_l\,. \tag{46}$$

Теперь рассмотрим ФЭХ как результат влияния магнитного поля на поляризацию фононов (магнитоакустический эффект). Найдём перенормировку акустических фононов, обусловленную СО-взаимодействием. При этом следует учесть, что на масштабе длины волны акустических фононов происходит самоусреднение намагниченности ($\mathbf{M}_m \to \langle \mathbf{M}_m\rangle = \mathbf{M}$).

Гамильтониан спин-фононного взаимодействия имеет вид

$$H_{\mathrm{SO}} = -\sum_n \big([\mathbf{u}_n \times \mathbf{p}_n], \mathbf{S}\big)\,, \quad \mathbf{S} \sim \mathbf{M}\,. \tag{47}$$

Добавим (47) к гамильтониану осцилляций кристалла в гармоническом приближении ($u_{ij}^a = u_i^a - u_j^a$, $V_{i=j}^{ab} = 0$, $V_{i\neq j}^{ab} \geqslant 0$):

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{4}\sum_{ij} V_{ij}^{ab} u_{ij}^a u_{ij}^b - \sum_i \big([\mathbf{u}_i \times \mathbf{p}_i], \mathbf{S}\big)\,.$$

В гармоническом приближении классические и квантовые уравнения движения имеют одинаковый вид:

$$v_i^a = \dot{u}_i^a = -\mathrm{i}[u_i^a, H] = \frac{p_i^a}{m} + [\mathbf{u}_i \times \mathbf{S}]^a\,, \tag{48}$$

$$\dot{p}_i^a = -\mathrm{i}[p_i^a, H] = -\sum_j V_{ij}^{ab} u_{ij}^b + [\mathbf{p}_i \times \mathbf{S}]^a\,. \tag{49}$$

Получаем уравнение осцилляций решётки

$$\ddot{u}_i^a = -\frac{1}{m}\sum_j V_{ij}^{ab} u_{ij}^b + 2[\dot{\mathbf{u}}_i \times \mathbf{S}]^a\,. \tag{50}$$

Здесь и далее СО-взаимодействие будем учитывать в линейном приближении.

Решения уравнения (50) описывают три ветви акустических колебаний с СО-поправками, спектры и поляризации которых определяются дисперсионным уравнением

$$\omega_{\mathbf{k}s}^2 e_{\mathbf{k}s}^a = \tilde{D}_{\mathbf{k}}^{ab} e_{\mathbf{k}s}^b\,, \tag{51}$$

где

$$\tilde{D}_{\mathbf{k}}^{ab} = D_{\mathbf{k}}^{ab} + \mathrm{i}D_1^{ab}\,, \quad D_1^{ab} = 2\omega_{\mathbf{k}s} e_{abz} S_z\,, \tag{52}$$

$$D_{\mathbf{k}}^{ab} = \sum_{\mathbf{R}} V_{\mathbf{R}}^{ab}\big[1 - \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R})\big]\,, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}\,. \tag{53}$$

Тензор $\tilde{D}_{\mathbf{k}}^{ab}$ обладает свойствами симметрии Онзагера–Казимира: $\tilde{D}_{\mathbf{k}}^{ab}(S) = (\tilde{D}_{\mathbf{k}}^{ba}(-S))^*$.

Вначале рассмотрим нулевое по СО-взаимодействию приближение. В приближении длинных волн [72]

$$D_{\mathbf{k}}^{ab} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R}} D_{\mathbf{R}}^{ab}(\mathbf{k}\mathbf{R})^2 = \lambda^{acdb} k_c k_d\,. \tag{54}$$

Пусть кристалл имеет достаточно высокую симметрию (кубическую, тетрагональную или ромбическую). Тогда недиагональные элементы динамической матрицы удовлетворяют соотношению пропорциональности $D_{\mathbf{k}}^{ab} \sim k_a k_b$ и, следовательно, меняют знак при изменении знака k_a или k_b, т.е. при отражении от соответствующей плоскости в обратном пространстве. Выделим из дисперсионного уравнения (51) (без СО-взаимодействия) недиагональные члены:

$$(\omega_{\mathbf{k}s}^2 - D_{\mathbf{k}}^{aa}) e_{\mathbf{k}s}^a = \sum_{b \neq a} D_{\mathbf{k}}^{ab} e_{\mathbf{k}s}^b \,. \tag{55}$$

Тензор $D_{\mathbf{k}}^{ab}$ действителен, и собственные векторы уравнения (55) всегда можно считать действительными, что отвечает линейной поляризации.

Спектр фононов вычислялся многократно, но на поляризацию обращалось сравнительно мало внимания [73]. Когда недиагональные элементы $D_{\mathbf{k}}^{ab}$ меняют знак, одновременно, как следует из (55), изменяется относительный знак компонент вектора поляризации. Это свойство можно выразить соотношением

$$e_{\mathbf{k}s}^a = \tilde{e}_s^{\,a}(\mathbf{k}) \operatorname{sign} k_a \,. \tag{56}$$

Подстановка формы (56) в дисперсионное уравнение (55) даёт

$$(\omega_{\mathbf{k}s}^2 - D_{\mathbf{k}}^{aa})\, \tilde{e}_s^{\,a}(\mathbf{k}) = \sum_{b \neq a} |D_{\mathbf{k}}^{ab}| \tilde{e}_s^{\,b}(\mathbf{k}) \,. \tag{57}$$

В правой части (57) стоят модули $|D_{\mathbf{k}}^{ab}|$, следовательно, частота $\omega_{\mathbf{k}s}$ и единичный вектор $\tilde{e}_s^{\,a}(\mathbf{k})$ инвариантны относительно отражения.

Заметим, что вектор поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ — это элемент вектора смещения, т.е. полярный вектор, как и волновой вектор фонона $\mathbf{k}$. Поэтому (56) можно заменить соотношением $\mathbf{e}_k \sim \mathbf{k}$. Общепринятое [74] условие $\mathbf{e}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ представляется искусственным.

При наличии недиагональных элементов $D_{\mathbf{k}}^{ab}$ спектр фононов нулевого приближения почти всегда является невырожденным. Вне областей вырождения вклад СО-взаимодействия в перенормировку спектра и поляризаций можно рассматривать в линейном по СО-взаимодействию приближении. Поскольку вклад СО-взаимодействия в дисперсионное уравнение (51) выражается мнимым тензором $\mathrm{i}\delta D^{ab}$, перенормировка вектора поляризации должна быть мнимой и комплексность перенормированного вектора поляризации $\mathbf{e}_s^a + \mathrm{i}\delta\mathbf{e}_s^a$ указывает на "эллиптическую" природу перенормированной волны. В конечном счёте именно это обстоятельство приводит к ФЭХ.

Найдём поправки к спектру $\delta\omega_s$ и вектору поляризации $\delta\mathbf{e}_s^a$:

$$(\omega_s^2 + 2\omega_s\delta\omega_s)(e_s^a + \mathrm{i}\delta e_s^a) = D^{ab}(e_s^b + \mathrm{i}\delta e_s^b) + \mathrm{i}(\delta D^{ab}) e_s^b \,. \tag{58}$$

Действительная часть уравнения (58) даёт $\delta\omega_s = 0$, т.е. спектр фононов и групповая скорость $c_{\mathbf{k}s} = \partial\omega_{\mathbf{k}s}/\partial\mathbf{k}$ не перенормируются. Мнимая часть (58) определяет перенормировку вектора поляризации:

$$(\omega_s^2 \delta^{ab} - D^{ab})\delta e_s^b = (\delta D^{ab}) e_s^b \,.$$

Отсюда

$$\delta\mathbf{e}_s = \frac{2\omega_s[\mathbf{e}_{s+1} \times \mathbf{e}_s]\mathbf{S}}{\omega_s^2 - \omega_{s+1}^2}\, \mathbf{e}_{s+1} + \frac{2\omega_s[\mathbf{e}_{s+2} \times \mathbf{e}_s]\mathbf{S}}{\omega_s^2 - \omega_{s+2}^2}\, \mathbf{e}_{s+2} \,. \tag{59}$$

Существенно, что в формировании перенормировки $\delta\mathbf{e}_s$ участвуют все акустические моды.

В представлении вторичного квантования гамильтониан фононов

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^+ a_{\mathbf{k}s} \,,$$

вектор смещения и его производная по времени,

$$\begin{aligned} u_i^a &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}s} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}_i)\big(u_{\mathbf{k}s}^a a_{\mathbf{k}s} + u_{-\mathbf{k}s}^{a*} a_{-\mathbf{k}s}^+\big)\,, \\ u_{\mathbf{k}s}^a &= e_{\mathbf{k}s}^a \sqrt{\frac{1}{2M\omega_{\mathbf{k}s}}}\,, \\ v_i^a &= \frac{\partial u_i^a}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}s} (-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}s}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}_i)\big(u_{\mathbf{k}s}^a a_{\mathbf{k}s} - u_{-\mathbf{k}s}^{a*} a_{-\mathbf{k}s}^+\big)\,, \end{aligned} \tag{60}$$

выражаются через операторы поглощения $a_{\mathbf{k}s}$ и рождения $a_{-\mathbf{k}s}^+$ нормальных колебаний фононов.

Обратим внимание, что при включении СО-взаимодействия разложение по нормальным колебаниям именно для скорости атома (а не для импульса, как полагают авторы [69]) сохраняет свой вид.

Зависимость от СО-взаимодействия явно входит только в перенормировку векторов поляризаций. Поскольку спектр фононов $\omega_{\mathbf{k}s}$ и групповая скорость $c_{\mathbf{k}s} = \partial\omega_{\mathbf{k}s}/\partial\mathbf{k}$ не перенормируются, для описания ФЭХ обычное выражение для потока энергии фононов $q = \sum_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s} f_{\mathbf{k}s}$ требуется изменить с учётом СО-взаимодействия. Для этого, следуя Харди [75], необходимо соотношение для потока вывести заново исходя из квантового выражения плотности энергии колебания кристалла. Средняя плотность потока энергии фононов в координатном представлении в этом случае выражается как

$$q_{\mathrm{H}}^{\gamma} = \frac{1}{2V} \sum_{i \neq j} x_{ij}^{\gamma} D_{ij}^{ab}\big(u_i^a v_j^b\big)\,, \tag{61}$$

где $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ — соответственно координаты i-го и j-го узлов.

Подчеркнём, что в (61) величина v_i^b является не импульсом иона, делённым на массу, а скоростью этого иона $v_i^b = \partial h_i/\partial p_i^b = p_i^b/m + (\mathbf{u}_i \times \mathbf{S})^b$. При наличии СО-взаимодействия это не одно и то же.

Переход в (61) к импульсному представлению сводится к замене $x_{ij}^{\gamma} \to \mathrm{i}\partial/\partial k^{\gamma}$. Оператор плотности потока энергии принимает вид

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{H}}^{\gamma} = -\frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}ss'} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s'}}{\omega_{\mathbf{k}s}}}\, \nabla_{\mathbf{k}}^{\gamma} D_{\mathbf{k}}^{ab} (e_{\mathbf{k}s}^a a_{\mathbf{k}s} + e_{-\mathbf{k}s}^{a*} a_{-\mathbf{k}s}^+) \times \\ \times (e_{-\mathbf{k}s'}^b a_{-\mathbf{k}s'} - e_{\mathbf{k}s'}^{b*} a_{\mathbf{k}s'}^+)\,. \end{aligned}$$

После усреднения этого оператора по состояниям, диагональным по числам фононов, можно отбросить аномальные средние $\langle a_{\mathbf{k}s} a_{-\mathbf{k}s'}\rangle$ и $\langle a_{-\mathbf{k}s'}^+ a_{\mathbf{k}s}^+\rangle$. Изменяя обозначения под знаком суммы, приходим к формуле

$$\langle q_{\mathrm{H}}^{\gamma}\rangle = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}ss'} \left[\left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s}}{\omega_{\mathbf{k}s'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s'}}{\omega_{\mathbf{k}s}}}\right)(\nabla_{\mathbf{k}}^{\gamma} D_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}) e_{\mathbf{k}s}^{\alpha*} e_{\mathbf{k}s'}^{\beta}\right] \langle a_{\mathbf{k}s}^+ a_{\mathbf{k}s'}\rangle \,. \tag{62}$$

В нулевом приближении по СО-взаимодействию формула (62) принимает обычный вид потока энергии фононов.

В (62) члены, линейные по δe, с учётом $\delta e^{\alpha *}_{\mathbf{k}s} = -\delta e^{\alpha}_{\mathbf{k}s}$, $e^{\alpha *}_{\mathbf{k}s} = e^{\alpha}_{\mathbf{k}s}$ описываются формулой

$$\langle q^{\gamma}_{\mathrm{SO}} \rangle = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}ss'} \nabla^{\gamma}_{\mathbf{k}} D^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s}}{\omega_{\mathbf{k}s'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s'}}{\omega_{\mathbf{k}s}}} \right) \times$$
$$\times \left[-(\delta e^{\alpha}_{\mathbf{k}s}) e^{\beta}_{\mathbf{k}s'} + e^{\alpha}_{\mathbf{k}s} (\delta e^{\beta}_{\mathbf{k}s'}) \right] \langle a^{+}_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s'} \rangle \,.$$

В этом интеграле все множители, кроме δe, имеют нулевой порядок по намагниченности $\mathbf{S}$.

Последний множитель — недиагональный по модам элемент одночастичной матрицы плотности $\langle a^{+}_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s'} \rangle \sim \sim \nabla T$. Чтобы его найти, следует написать уравнение, подобное уравнению эволюции для функции Грина, но без неоднородного члена. После соответствующих вычислений мы с неизбежностью приходим к результату, который мы получали в разделах 3 – 5: СО-часть плотности потока тепла выражается в виде

$$\langle q^{\gamma}_{\mathrm{SO}} \rangle = \xi [\mathbf{S} \times \nabla T]^{\gamma} \,.$$

7. Заключение

Поиск эффектов, аналогичных открытому 136 лет назад хрестоматийному эффекту Холла, всё ещё продолжается.

Так, в [76, 77] рассматривается теория магнонного (а в принципе и спинонного) эффекта Холла. В [78] представлена экспериментальная реализация магнонного эффекта Холла (точнее, отделение магнонного вклада от фононного) в $\mathrm{Lu_2V_2O_7}$. Вместо магнитной силы Лоренца (или в дополнение к ней) здесь выступает спиновая киральность, определяемая для трёх узлов, i, j, k, как $\mathbf{S}_i (\mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_k)$. Из-за набега фазы при обходе контура i, j, k ненулевая киральность эквивалентна магнитному полю, что и приводит к холловскому отклонению. Причиной ненулевой киральности может быть фрустрация (геометрическая, как в треугольной решётке, решётке Кагоме и подобных им, или вызванная конкуренцией ближайшего и следующих за ближайшим взаимодействий) или взаимодействие Дзялошинского – Мории. Подобное же направление имеют работы [79 – 86], в которых, однако, не используется термин "магнонный эффект Холла", а говорится об эффекте Холла, вызванном киральностью, или о топологическом эффекте Холла. Мы не будем останавливаться на более детальном обзоре упомянутой области.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ 13-02-00469 (Ю.М.К., Л.А.М. и Т.В.Х.) и 13-02-00909 (А.Ф.Б. и А.В.М.).

Список литературы

1. Hall E H *Am. J. Math.* **2** 287 (1879)
2. Hall E H *Am. J. Sci. 3* **19** 200 (1880)
3. Hall E H *Fortschr. Phys.* **1** 920 (1880)
4. Hall E H *Phil. Mag. 5* **9** 225 (1880)
5. Hall E H *Am. J. Sci.* **20** 161 (1880)
6. Hall E H *Phil. Mag. 5* **12** 157 (1881)
7. Hall E H *Nature* **25** 46 (1881)
8. Hall E H *Am. J. Sci.* **25** 215 (1883)
9. Hall E H *Phil. Mag. 5* **19** 419 (1885)
10. Hall E H *Science* **5** 249 (1885)
11. Hall E H *Am. J. Sci.* **36** 237 (1889)
12. Hall E H *Proc. Am. Acad. Arts Sci.* **50** 67 (1914)
13. Hall E H *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **3** 163 (1917)
14. Hall E H *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **9** 41 (1923)
15. Rowland H A *Am. J. Math.* **2** 354 (1879)
16. Hopkinson J *Phil. Mag. 5* **10** 430 (1880)
17. Rowland H *Phil. Mag. 5* **11** 254 (1881)
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005); Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
19. Luttinger J M *Phys. Rev.* **112** 739 (1958)
20. Каган Ю М, Максимов Л А *ЖЭТФ* **51** 1893 (1966); Kagan Yu M, Maksimov L A *Sov. Phys. JETP* **24** 1272 (1967)
21. Гуревич Л Э, Яссиевич И Н *ЖЭТФ* **47** 1367 (1964); Gurevich L E, Yassievich I N *Sov. Phys. JETP* **20** 922 (1965)
22. Kagan Yu, Maksimov L A *Phys. Rev. Lett.* **100** 145902 (2008)
23. Максимов Л А, Хабарова Т В *Докл. РАН* **442** 749 (2012); Maksimov L A, Khabarova T V *Dokl. Phys.* **57** 51 (2012)
24. Гуревич Л Э, Яссиевич И Н *ФТТ* **4** 2854 (1962); Gurevich L E, Yassievich I N *Sov. Phys. Solid State* **4** 2091 (1963)
25. Бронштейн И Н, Семендяев К А *Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов* (М.: ГИТТЛ, 1953); Bronshtein I N, Semendyayev K A A *Guide Book to Mathematics for Technologists and Engineers* (Oxford: Pergamon Press, 1964)
26. Барабанов А Ф, Михеенков А В, Максимов Л А *Сверхпроводимость. Физика, химия, техника* **4** 3 (1991); Barabanov A F, Maksimov L A, Mikheyenkov A V *Superconductivity Phys., Chem., Technol.* **4** 2 (1991)
27. Ong N P *Phys. Rev. B* **43** 193 (1991)
28. Барабанов А Ф, Максимов Л А *ФММ* **29** 471 (1970)
29. Белемук А М, Барабанов А Ф, Максимов Л А *ЖЭТФ* **129** 493 (2006); Belemuk A M, Barabanov A F, Maksimov L A *JETP* **102** 431 (2006)
30. Белемук А М, Барабанов А Ф, Максимов Л А *Письма в ЖЭТФ* **86** 374 (2007); Belemuk A M, Barabanov A F, Maksimov L A *JETP Lett.* **86** 321 (2007)
31. Barabanov A F, Mikheyenkov A V, Belemuk A M *Phys. Lett. A* **365** 469 (2007)
32. Barabanov A F, Maksimov L A, Belemuk A M *J. Supercond. Nov. Magn.* **26** 2817 (2013)
33. Kikoin I K *Phys. Z. Sowjetunion* **9** 1 (1936)
34. Кикоин И К *ЖЭТФ* **10** 1242 (1940)
35. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2002); Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
36. Nagaosa N et al. *Rev. Mod. Phys.* **82** 1539 (2010)
37. Дьяконов М И, Перель В И *Письма в ЖЭТФ* **13** 657 (1971); D'yakonov M I, Perel' V I *JETP Lett.* **13** 467 (1971)
38. Dyakonov M I, Perel V I *Phys. Lett. A* **35** 459 (1971)
39. Hirsch J E *Phys. Rev. Lett.* **83** 1834 (1999)
40. Kato Y K et al. *Science* **306** 1910 (2004)
41. Wunderlich J et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 047204 (2005)
42. Zhao H et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 246601 (2006)
43. Saitoh E et al. *Appl. Phys. Lett.* **88** 182509 (2006)
44. Valenzuela S O, Tinkham M *Nature* **442** 176 (2006)
45. Kimura T et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 156601 (2007)
46. Righi A *Mem. Acc. Lincei* **4** 433 (1887)
47. Leduc S A *J. Phys. 2e serie* **6** 378 (1887)
48. Righi A *Trans. Acc. Lincei 3* **7** 262 (1883)
49. Righi A *Mem. Acc. Sci. Bologna 4* **5** 115 (1883)
50. Righi A *Trans. Acc. Lincei. 3* **8** 331 (1884)
51. Righi A *Mem. Acc. Lincei. 3* **19** 545 (1884)
52. Leduc S A *Compt. Rend.* **98** 673 (1884)
53. Leduc S A *Lum. Électr.* **13** 510 (1884)
54. Leduc S A *Compt. Rend.* **102** 358 (1886)
55. Campbell L L *Galvanomagnetic and Thermomagnetic Effects; the Hall and Allied Phenomena* (London: Longmans, Green and Co., 1923)
56. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2002); Pitaevskii L P, Lifshitz E M *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
57. Senftleben H *Phys. Z.* **31** 822 (1930)

58. Senftleben H *Phys. Z.* **31** 961 (1930)
59. Beenakker J et al. *Phys. Lett.* **2** 5 (1962)
60. Hermans L J F et al. *Phys. Lett. A* **25** 81 (1967)
61. Горелик Л Л, Николаевский В Г, Синицын В В *Письма в ЖЭТФ* **4** 456 (1966); Gorelik L L, Nikolaevskii V G, Sinitsyn V V *JETP Lett.* **4** 307 (1966)
62. Максимов Л А, Хабарова Т В *ФТТ* **50** 1763 (2008); Maksimov L A, Khabarova T V *Phys. Solid State* **50** 1836 (2008)
63. Strohm C, Rikken G L J A, Wyder P *Phys. Rev. Lett.* **95** 155901 (2005)
64. Инюшкин А В, Талденков А Н *Письма в ЖЭТФ* **86** 436 (2007); Inyushkin A V, Taldenkov A N *JETP Lett.* **86** 379 (2007)
65. Инюшкин А В, Талденков А Н *ЖЭТФ* **138** 862 (2010); Inyushkin A V, Taldenkov A N *JETP* **111** 760 (2010)
66. Jungwirth T, Niu Q, MacDonald A H *Phys. Rev. Lett.* **88** 207208 (2002)
67. Fang Z et al. *Science* **302** 92 (2003)
68. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **93** 206602 (2004)
69. Sheng L, Sheng D N, Ting C S *Phys. Rev. Lett.* **96** 155901 (2006)
70. Максимов Л А, Хабарова Т В *Докл. РАН* **423** 465 (2008); Maksimov L A, Khabarova T V *Dokl. Phys.* **53** 611 (2008)
71. Максимов Л А, Хабарова Т В *ФТТ* **51** 665 (2009); Maksimov L A, Khabarova T V *Phys. Solid State* **51** 702 (2009)
72. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Физматлит, 2003); Landau L D, Lifshitz E M *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1986)]
73. Максимов Л А, Хабарова Т В *УФН* **180** 503 (2010); Maksimov L A, Khabarova T V *Phys. Usp.* **53** 481 (2010)
74. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика* Ч. 2 (М.: Физматлит, 2004); Pitaevskii L P, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 2 (Oxford: Pergamon Press, 1980)
75. Hardy R J *Phys. Rev.* **132** 168 (1963)
76. Fujimoto S *Phys. Rev. Lett.* **103** 047203 (2009)
77. Katsura H, Nagaosa N, Lee P A *Phys. Rev. Lett.* **104** 066403 (2010)
78. Onose Y et al. *Science* **329** 297 (2010)
79. Taguchi Y et al. *Science* **291** 2573 (2001)
80. Taguchi Y et al. *J. Phys. Condens. Matter* **16** S599 (2004)
81. Machida Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 057203 (2007)
82. Martin I, Batista C D *Phys. Rev. Lett.* **101** 156402 (2008)
83. Neubauer A et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 186602 (2009)
84. Akagi Y, Motome Y *J. Phys. Soc. Jpn.* **79** 083711 (2010)
85. Kanazawa N et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 156603 (2011)
86. Ueland B G et al. *Nature Commun.* **3** 1067 (2012)

The Hall effect and its analogs

A.F. Barabanov
L.F. Vereshchagin Institute for High Pressure Physics, Russian Academy of Sciences,
Kaluzhskoe shosse 14, 142190 Troitsk, Moscow, Russian Federation. E-mail: *abarab@bk.ru*
Yu.M. Kagan, T.V. Khabarova
National Research Centre "Kurchatov Institute", pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation
E-mail: *Habarova_TV@nrcki.ru*
L.A. Maksimov
National Research Centre "Kurchatov Institute", pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation;
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation. E-mail: lam05@mail.ru
A.V. Mikheyenkov
L.F. Vereshchagin Institute for High Pressure Physics, Russian Academy of Sciences,
Kaluzhskoe shosse 14, 142190 Troitsk, Moscow, Russian Federation;
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation. E-mail: *mikheen@bk.ru*

We draw attention to the similarity between mutually related kinetic material phenomena that are odd in magnetic field and produce an electric current or heat flow perpendicular 1) to the magnetic field, 2) to the electric field, or to the temperature gradient. These phenomena include the Hall effect, the Righi–Leduc effect in nonmagnetic metals, the anomalous Hall effect in magnets, the odd Senftleben–Beenakker effect in molecular gases and the phonon Hall effect in dielectrics. While these phenomena have much in common in terms of geometry, their formation mechanisms — dynamic and dissipative — are different. However, in all the cases the flow perpendicular to the magnetic field arises from the spin-orbit interaction of carriers with magnetic moments.

Keywords: Hall effect, anomalous Hall effect, spin Hall effect, phonon Hall effect, Righi – Leduc effect, Senftleben – Beenakker effect

PACS numbers: **34.10.+x**, 72.15.Gd, 72.15.Jf, 72.20.My, 72.20.Pa DOI: 10.3367/UFNr.0185.201505b.0479

Bibliography — 86 references *Received 1 March 2015*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (5) 479 – 488 (2015) *Physics – Uspekhi* **58** (5) (2015)