Март 2015 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 185, № 3*

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Связь закона сохранения энергии и уравнений движения

(Ответ на комментарий Э.А. Аринштейна [*УФН* **185** 333 (2015)] к статье "Вывод уравнений аналитической механики и теории поля из закона сохранения энергии" [*УФН* **184** 641 (2014)])

Н.А. Винокуров

Выведены уравнения движения, удовлетворяющие закону сохранения энергии, заданной как функция обобщённых координат и скоростей. Эти уравнения представляют собой уравнения Лагранжа с дополнительными членами, описывающими обобщённые гироскопические силы. Отмечена связь закона сохранения энергии с принципом Даламбера.

Ключевые слова: сохранение энергии, уравнения Лагранжа

PACS numbers: **45.20.–d**, 45.20.Jj, 45.20.dh, **45.50.–j** DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503g.0335

В письме Э.А. Аринштейна [1] высказаны интересные соображения о связи закона сохранения энергии и уравнений движения.

Первая формула в [2] (с небольшим добавлением)

$$0 = \mathrm{d}E(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = Q_i \, \mathrm{d}q^i \tag{1}$$

представляет собой принцип Даламбера (см, например, [2]), причём полные силы Q_i включают в себя силы инерции. Закон сохранения энергии

$$0 = \mathrm{d}E(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{\partial E}{\partial q^i} \, \mathrm{d}q^i + \frac{\partial E}{\partial v^i} \, \mathrm{d}v^i \tag{2}$$

приводится к виду (1), если энергию E можно представить как

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{v})}{\partial v^i} \, v^i - L(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \, . \tag{3}$$

Действительно, подставив (3) в (2), получим

$$0 = \mathrm{d}E = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \, \partial q^k} \, v^i \, \mathrm{d}q^k + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \, \partial v^k} \, v^i \, \mathrm{d}v^k - \frac{\partial L}{\partial q^k} \, \mathrm{d}q^k = \\ = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial v^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \mathrm{d}q^k \, . \tag{4}$$

Таким образом, если, решив уравнение в частных производных (3), можно найти функцию Лагранжа L, то принцип Даламбера (1) выводится из закона сохранения энергии. Из принципа Даламбера в форме (4) сразу следуют обобщённые уравнения Лагранжа (формула (11a) в моей статье [3])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L_1}{\partial v^i} - \frac{\partial L_1}{\partial q^i} = G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j \, , \tag{5}$$

где $G_{ij} = -G_{ji}$ — антисимметричный тензор, описывающий обобщённые гироскопические силы.

Если форма гироскопических сил G_{ij} точна, то она может быть представлена в виде $\partial a_i(\mathbf{q})/\partial q^j - \partial a_j(\mathbf{q})/\partial q^i$ и обобщённые уравнения Лагранжа (5) сводятся к обычным уравнениям (т.е. без правой части) с функцией Лагранжа $L + a_j v^j$. В общем случае обобщённые гироскопические силы не могут быть описаны стандартными уравнениями Лагранжа. Следовательно, закон сохранения энергии допускает "нелагранжевы" (не описываемые соответствующими членами в функции Лагранжа) взаимодействия.

В статье [3] обобщённые уравнения Лагранжа (5) приведены без вывода только для того, чтобы показать, что стандартные уравнения Лагранжа не являются наиболее общим видом уравнений движения, сохраняющих энергию. По-видимому, закономерные вопросы и замечания Э.А. Аринштейна отчасти связаны с этой "недосказанностью". В своё оправдание могу сказать, что последняя обусловлена правилами публикации статей в *УФН*: этот журнал не публикует оригинальные результаты. К сожалению, моя статья, посвящённая обобщённым уравнениям Лагранжа, была отклонена без рецензирования несколькими ведущими физическими журналами, включая *ЖЭТФ*.

Я полностью согласен с Э.А. Аринштейном, что конкретные задачи можно решать, используя только уравнения движения, и закон сохранения энергии допу-

Н.А. Винокуров. Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, просп. Академика Лаврентьева 11, 630090, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: vinokurov@inp.nsk.su;
Korea Atomic Energy Research Institute,
1045 Daedeok-Daero, Yuseong-gu, Daejeon 305-353, Republic of Korea

Статья поступила 23 октября 2014 г.

скает наличие гироскопических сил, которые необходимо рассматривать отдельно. С другой стороны, во многих областях современной теоретической физики предлагается модифицировать уравнения движения. Тогда надо понимать ограничения, накладываемые на возможные модификации. Одним из важнейших ограничений является закон сохранения энергии. Например, можно рассмотреть не описываемые лагранжианом "гироскопические" поля, которые, однако, дают вклад в правую часть обобщённых уравнений Лагранжа.

Список литературы

1. Аринштейн Э А *УФН* **185** 333 (2015); Arinstein E A *Phys. Usp.* **58** (3) (2015) https://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0185.201503f.0333
2. Sommerfeld A *Vorlesungen über theoretische Physik* Bd. 1 *Mechanik* (Wiesbaden: Dieterich, 1944); *Lectures on Theoretical Physics* Vol. 1 *Mechanics* 4th ed. (New York: Academic Press, 1964); Зоммерфельд А *Механика* (Ижевск: РХД, 2001)
3. Винокуров Н А *УФН* **184** 641 (2014); Vinokurov N A *Phys. Usp.* **57** 593 (2014)

Relation between energy conservation and equations of motion

(A reply to the comment by E.A. Arinshtein (*Usp. Fiz. Nauk* **185** 333 (2015) [*Phys. Usp.* **58** (3) (2015)]) on "Analytical mechanics and field theory: derivation of equations from energy conservation" (*Usp. Fiz. Nauk* **184** 641 (2014) [*Phys. Usp.* **57** 593 (2014)]))

N.A. Vinokurov
Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
prosp. Akademika Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: *vinokurov@inp.nsk.su*;
Korea Atomic Energy Research Institute, 1045 Daedeok-Daero, Yuseong-gu, Daejeon 305-353, Republic of Korea

Equations of motion that conserve a given function (called energy) of generalized coordinates and velocities are derived. These equations differ from Lagrange's ones by presence of additional terms describing generalized gyroscopic forces. The relation between energy conservation and d'Alembert's principle is noted.

Keywords: energy conservation, Lagrange's equations

PACS numbers: **45.20.–d**, 45.20.Jj, 45.20.dh, **45.50.–j** DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503g.0335

Bibliography — 3 references *Received 23 October 2014*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (3) 335–336 (2015) *Physics–Uspekhi* **58** (3) (2015)