

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Связь закона сохранения энергии и динамики

(Комментарий к статье Н.А. Винокурова

"Вывод уравнений аналитической механики и теории поля
из закона сохранения энергии" [УФН 184 641 (2014)])

Э.А. Аринштейн

Рассмотрены различные возможности использования связи уравнений динамики и закона сохранения энергии. Показано, что метод, используемый в статье Н.А. Винокурова [УФН, 184 641 (2014)], требует дополнительного исследования гироскопических сил.

Ключевые слова: энергия, лагранжиан, гироскопические силы

PACS numbers: 02.30.Em, 02.30.Hq, **45.20. – d**, **45.50. – j**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503f.0333

В разделе "Методические заметки" журнала *УФН* была опубликована статья Н.А. Винокурова [1], посвящённая обсуждению связи закона сохранения энергии и динамики. Мнение автора о пользе обсуждения вопросов обоснования математического аппарата физики безусловно справедливо, но следует также рассмотреть вопрос о полноте того или иного подхода.

Постулат о выполнении закона сохранения энергии основан на многовековом опыте, и его справедливость не вызывает сомнений.

Целесообразно рассмотреть этот закон применительно к системе, подверженной действию внешних сил, работа которых изменяет энергию:

$$dE(q, v) = Q dq \equiv Q_i dq_i.$$

При этом принимается, что энергия зависит от обобщённых координат $q \equiv \{q_i\}$ и обобщённых скоростей $v \equiv \{v_i = dq_i/dt\}$ и не зависит от времени, предыстории системы и от старших производных координат по времени. Каждая скорость (обобщённая) может быть рассчитана по собственному времени t_i этой степени свободы либо по единому времени t системы отсчёта. По повторяющимся индексам проводится суммирование там, где это возможно, индекс не выписывается (например, в скалярном произведении).

Для произвольной функции $L(q, v)$ координат и скоростей имеем

$$dL(q, v) = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial v} dv,$$

но

$$\frac{\partial L}{\partial v} dv = d\left(v \frac{\partial L}{\partial v}\right) - dq \frac{d(\partial L / \partial v)}{dt}.$$

Поэтому

$$d\left(v \frac{\partial L}{\partial v} - L\right) = \left(\frac{d(\partial L / \partial v)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) dq.$$

Так как изменение энергии содержит дифференциалы координат и не содержит дифференциалы скоростей, закон сохранения энергии сводится к двум условиям:

а) существует функция Лагранжа L , связанная с энергией E соотношением

$$v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = E(q, v); \quad (1)$$

б) справедлива система уравнений, определяющих эволюцию системы,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2)$$

Совокупность этих условий можно рассматривать с разных позиций.

1. Если считать, что явное выражение для энергии $E(q, v)$, полученное на основе экспериментальных данных либо из некоторых других соображений, достаточно надёжно, то соотношение (1) является уравнением, определяющим функцию Лагранжа, а уравнения (2) строятся на основе полученного решения этого уравнения. Однако общее решение уравнения (1) содержит решение однородного уравнения

$$v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = 0,$$

Э.А. Аринштейн. Тюменский государственный университет,
ул. Семакова 10, 625003 Тюмень, Российская Федерация,
E-mail: earin@inbox.ru

Статья поступила 24 сентября 2014 г.

которое имеет вид $a_i(q)v_i$ и определяет гироскопические силы

$$F_i = v_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right),$$

не влияющие на значение энергии. Но эти силы входят в уравнения движения, следовательно, влияют на эволюцию системы, однако они не могут быть определены на основе закона сохранения энергии.

2. Если исходить из надёжно установленных законов движения, например законов динамики Ньютона или уравнений Максвелла, представленных в форме уравнений Лагранжа, то энергия определяется однозначно (в нерелятивистской теории — с точностью до выбора начала отсчёта). Линейные по скоростям члены функции Лагранжа определяются по свойствам гироскопических сил, входящих в законы динамики.

Заметим, что соотношение (1) имеет форму преобразования Лежандра, что даёт возможность стандартным образом перейти к уравнениям Гамильтона.

Таким образом, определение динамики на основе закона сохранения энергии требует дополнительного, не связанного с законом сохранения энергии, исследования и введения гироскопических сил, а подход, основанный на использовании законов динамики как исходных, определяет энергию однозначно, определяет также условия сохранения энергии и возможность использования как лагранжевой, так и гамильтоновой форм уравнений движения.

Список литературы

1. Винокуров Н.А. *УФН* **184** 641 (2014); Vinokurov N.A. *Phys. Usp.* **57** 593 (2014)

Relation between energy conservation and dynamics

(Comment on "Analytical mechanics and field theory: derivation of equations from energy conservation"

by N.A. Vinokurov (*Usp. Fiz. Nauk* **184** 641 (2014) [*Phys. Usp.* **57** 593 (2014)]))

E.A. Arinshtein

*Tyumen State University,
ul. Semakova 10, 625003 Tyumen, Russian Federation
E-mail: earin@inbox.ru*

Possible applications of the relation between the equation of dynamics and the energy conservation are considered. It is shown that the method used in the paper by N.A. Vinokurov (*Usp. Fiz. Nauk* **184** 641 (2014) [*Phys. Usp.* **57** 593 (2014)])) should be re-examined to accurately understand the role of gyroscopic forces.

Keywords: energy, Lagrangian, gyroscopic forces

PACS numbers: 02.30.Em, 02.30.Hq, **45.20. – d**, **45.50. – j**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503f.0333

Bibliography — 1 reference

Received 24 September 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (3) 333–334 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (3) (2015)