

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Стохастическая неустойчивость и турбулентный перенос. Характерные масштабы, инкременты, коэффициенты диффузии

О.Г. Бакунин

*Рассмотрены стохастическая неустойчивость и связанные с ней модели турбулентной диффузии. Главное внимание уделено вопросу получения оценок и скейлингов, характеризующих корреляционные эффекты и инкременты. Рассмотрены различные модели: квазилинейная аппроксимация Казанцева, стохастичность в системе конвективных ячеек, скейлинги Кадомцева–Погуце, перколоационные модели, баланс Рочестера–Розенблота и др. Основной задачей являлось показать важность определения функциональной зависимости инкрементов стохастической неустойчивости и коэффициентов переноса от амплитуды турбулентных пульсаций и других ключевых параметров (характерных частот пульсаций, дрейфовых скоростей, потока энергии по спектру и др.), описывающих рассматриваемые системы.*

**Ключевые слова:** стохастическая неустойчивость, турбулентный перенос, коэффициенты диффузии, динамический хаос, стохастическое магнитное поле, плазма

PACS numbers: 05.40.–а, 47.27.–i, 47.53.+n

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503b.0271

### Содержание

1. Введение (271).
2. Эффекты перемешивания и характеристические числа Кубо и Пекле (273).
3. Стохастическая неустойчивость и относительная диффузия (276).
4. Квазилинейные оценки и инкремент Казанцева (277).
5. Критика квазилинейного подхода (278).
6. Лагранжева турбулентность и течения Арнольда–Бельтрами–Чилдерса (280).
7. Стохастические слои в плоских течениях (282).
8. Эффективный перенос в конвективных ячейках (284).
9. Функция Мельникова и стохастический слой (285).
10. Расщепление седловых точек и аддективный перенос (287).
11. Стохастический слой в перколоационном пределе (290).
12. Стохастическое магнитное поле и квазилинейная оценка инкремента (292).
13. Слабая турбулентность и скейлинг Кадомцева–Погуце (293).
14. Аппроксимация Рочестера–Розенблота (295).
15. Крупномасштабные структуры и перколоационная аналогия (296).
16. Квазизотропное стохастическое магнитное поле (298).
17. Стохастическая неустойчивость и обратный каскад (300).
18. Многомасштабные аппроксимации (302).
19. Заключение (303).
- Список литературы (304).

О.Г. Бакунин. Национальный исследовательский центр  
"Курчатовский институт",  
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация  
E-mail: oleg\_bakunin@yahoo.com

Статья поступила 17 июня 2014 г.,  
после доработки 17 декабря 2014 г.

### 1. Введение

Стохастическая неустойчивость является важнейшим физическим механизмом, тесно связанным с такими явлениями, как динамический хаос, затухание корреляций, перемешивание и др. [1–6]. Так, уже Больцман, пытаясь найти механистическое обоснование необратимости, использовал наглядные образы, связанные с расплыванием "капли" фазовой жидкости, при этом возрастание "огрублённого" фазового объёма должно было служить наглядной демонстрацией увеличения энтропии системы в процессе её эволюции к равновесию [7]. К сожалению, эти идеи Больцмана в течение длительного времени находились "в тени", а основное внимание физиков было обращено на вычислительные возможности, открывшиеся в связи с предложенным Гиббсом методом анализа равновесных систем [8].

Существенный прогресс в изучении фундаментальных вопросов динамики неравновесных систем был достигнут только после опубликования работы Боголюбова [9]. Однако необходимо отметить, что этой работе предшествовали работы Леонтовича [10], Хопфа [11], Хинчина [12, 13] и Крылова [14]. Именно в работах Крылова [1, 14] впервые было дано наглядное истолкование явления стохастической неустойчивости. Первая работа Боголюбова, посвящённая вопросам статистической физики, также была опубликована в соавторстве с Крыловым [15]. Заметим, что связанный со стохастической неустойчивостью эффект перемешивания был хорошо известен. Так, в лекциях Бореля, прочитанных в начале 1920-х годов [16], приведена наглядная схема эволюции элемента фазовой капли, моделирующей движение ансамбля свободных частиц в области, ограни-

ченной жёсткими стенками. В соответствии с представлениями Больцмана этот простой пример демонстрировал значительные искажения фазового элемента. Тем не менее связать явление перемешивания с эффектами неустойчивости фазовых траекторий не удавалось ещё в течение полутора десятилетий.

Работы Крылова и Боголюбова вызвали широкую дискуссию по принципиальным вопросам необратимости [17–20]. Здесь важно отметить статью Давыдова [17], работы [21, 22] которого в области физической кинетики завоевали признание ещё в конце 1930-х – начале 1940-х годов. Особую остроту этим обсуждениям придавала необходимость построения принципиально новых кинетических моделей горячей плазмы [23–26]. В рамках кинетического подхода процессы перемешивания и соответствующие корреляционные эффекты тогда учитывались косвенно, посредством использования диффузионного члена в пространстве скоростей [21] или качественного рассмотрения эффектов захвата частиц плазменными волнами [27, 28].

В теории турбулентности сложилась другая ситуация. Здесь корреляционный метод стал одним из главных инструментов и процессы перемешивания изучались в связи с атмосферными и океаническими исследованиями [29, 30]. Для целей настоящего обзора важно отметить, что фактически одновременно с публикацией работ Крылова начало развиваться исследование стохастической неустойчивости при рассмотрении процессов аномальной диффузии в турбулентных течениях [31–34]. Так, в работе Бэтчелора [31], опубликованной в 1952 г., мы видим ясное понимание важности процессов экспоненциального растяжения жидких элементов в турбулентном течении. Интересно отметить, что в отечественной научной литературе имя Бэтчелора часто связывают с его работами в области колмогоровских спектров турбулентности и, конечно, с его книгой [35]. Однако осознание Бэтчелором важности явления стохастической неустойчивости как ключевого физического механизма при описании эволюции лагранжевых траекторий частиц в турбулентном потоке внесло, безусловно, очень весомый вклад в теорию турбулентности.

Строгое математическое рассмотрение эффекты стохастической неустойчивости и перемешивания получили в работах Колмогорова [36, 37], который, используя теоретико-вероятностные идеи и методы теории информации, определил понятие энтропии, опираясь на характерные свойства траекторий динамических систем. Созданный Колмогоровым формализм для систем, сохраняющих меру (гамильтоновых систем), был развит в работах Синая [38–40] и позднее в статьях Д.В. Аносова, В.А. Рохлина, Л.А. Бунимовича, Р.Л. Добрушиной и др. Результаты этих работ сыграли важную роль в обосновании фундаментальных принципов неравновесной статистической механики и становлении стохастической динамики как связующего звена между детерминистическими и статистическими теориями [41–55].

Важный для целей настоящего обзора математически строгий результат Синая может быть схематически представлен в виде оценки скорости возрастания энтропии, основанной на эффекте экспоненциальной неустойчивости. Характерной особенностью хаотического движения является высокая чувствительность к малым изменениям начальных условий. Так, в хаотических системах две первоначально близкие фазовые траектории в

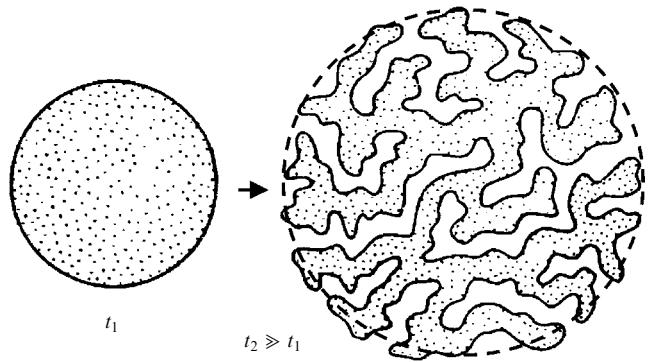


Рис. 1. Эволюция фазовой капли. Штриховой линией показан огрублённый фазовый объём.

среднем отклоняются друг от друга согласно экспоненциальному закону, в то время как в случае регулярных движений они расходятся линейно. Формально мы можем записать соответствующую экспоненциальную зависимость:

$$l(t) = l_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_K}\right). \quad (1)$$

Здесь  $l_0$  — первоначальное расстояние между точками фазового пространства,  $t$  — время. Величина  $h_K = 1/\tau_K$  названа энтропией Колмогорова – Синая [4, 5],

$$h_K = \lim_{l_0 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \ln \frac{l(t)}{l_0} \right). \quad (2)$$

Хорошо известно, что в рамках классической механики эволюция фазовой капли происходит, в соответствии с теоремой Лиувилля, с сохранением объёма капли:  $\Delta\Gamma_0 = \Delta\Gamma(t)$  [2–7]. Тем не менее топологическая структура капли претерпевает существенные изменения (рис. 1). Фактически "изрезанность" гиперповерхности, ограничивающей фазовый объём, постоянно возрастает, приводя к увеличению огрублённого фазового объёма  $\langle \Delta\Gamma(t) \rangle$  вследствие стохастической неустойчивости. Для огрублённого фазового объёма теорема Лиувилля не применима, и именно  $\langle \Delta\Gamma(t) \rangle$  используется в больцмановском определении энтропии. Модель эволюции огрублённого фазового объёма будет также иметь экспоненциальный характер,

$$\langle \Delta\Gamma(t) \rangle = \Delta\Gamma_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_K}\right), \quad (3)$$

а больцмановское выражение для возрастания энтропии примет линейный вид:  $S(t) \propto \ln [\langle \Delta\Gamma(t) \rangle] \propto h_K t$ . Разбегание соседних траекторий (положительность показателей Ляпунова) приводит к значительному искажению элементов фазового пространства, что и обуславливает перемешивание. Стохастическая неустойчивость является необходимым условием для реализации сценария, описывающего эволюцию систем с перемешиванием [4–6, 56, 57].

Важность эффектов перемешивания была осознана ещё во время широких дискуссий по проблемам эргодичности [58–60]. Так, механизм перемешивания как ключевой для возникновения необратимости эффект неоднократно упоминался уже Эренфестом при качественном анализе больцмановского расплывания фазовой капли.

С точки зрения описания эффектов необратимости выполнение условия перемешивания является более сильным, чем условие эргодичности, и обеспечивает равенство временных и фазовых средних. Сегодня существует обширная литература, посвящённая общим вопросам статистического описания динамических систем [2, 4–6, 56–58, 61, 62], поэтому здесь мы только кратко коснёмся этих вопросов. Мы покажем, что, несмотря на кажущийся частный характер задач описания турбулентной диффузии, результаты в этой области необходимы для объяснения фундаментальных вопросов теории переноса [63–65].

Идеи о влиянии стохастической неустойчивости на процессы переноса развивались в контексте разных физических задач. Так, Чириков [66] в 1959 г. предложил оригинальный метод анализа стохастизации в гамильтоновых системах, содержащих сепаратрисы. Этот подход был нетривиальным образом применён к описанию эффектов перемешивания в пространстве скоростей при исследовании слабой турбулентности плазмы [67, 68]. В этом случае уже рассматривался пакет волн и их взаимодействие с частицами. Пусковым механизмом для возникновения стохастического слоя здесь выступает затухание Ландау, которое создаёт необходимый эффект "модуляции". Заметим, что потребовалось почти 20 лет для того, чтобы перейти от задач квазилинейной диффузии [67] к моделям переноса в условиях структурной турбулентности [69]. Действительно, только в 1979 г. было предложено использовать расщепление сепаратрис в системе конвективных ячеек как механизм, способный формировать мезомасштабные (переколационные) вихревые структуры в двумерной турбулентности. Более того, тщательный анализ переноса в системе регулярных вихревых ячеек был проведён лишь в 1986 г. в работе [70], а упомянутые выше переколационные модели стали активно применяться только начиная с 1990-х годов [71–74].

На сегодняшний день экспоненциальное разбегание линий тока (фазовых траекторий) стало одним из важнейших элементов стохастической динамики [3–5], а учёт инкрементов стохастической неустойчивости позволил объяснить разнообразие режимов переноса заряженных частиц в стохастическом магнитном поле [69, 75]. Активно изучаются также явления аномального переноса в двумерных течениях, содержащих сепаратрисы [76–84].

С другой стороны, исследования относительной диффузии примесей в условиях океанической и атмосферной квазидвумерной турбулентности убедительно доказывают справедливость идей Бэтчелора о важности учёта иерархии пространственных и временных масштабов для описания различных стадий турбулентного переноса [34, 85–91]. В рамках ставшей классической боголюбовской иерархии временных масштабов характерное время релаксации в пространстве скоростей много меньше времени релаксации системы в конфигурационном пространстве. Это легко объяснимо, если принять во внимание, что в результате столкновений частиц макроскопические переменные в силу законов сохранения не изменяются и столкновения только перераспределяют эти величины между частицами. Рассматривая задачи турбулентной диффузии, необходимо также различать характерные времена, связанные со стохастической неустойчивостью, процессами пересоединения силовых линий или

линий тока и диффузионной декорреляцией частиц, находящихся в области турбулентности [92–95].

В настоящем обзоре мы уделим основное внимание методам, непосредственно связанным с вычислением коэффициентов турбулентного переноса как в гидродинамических, так и плазменных течениях. Это позволит сосредоточиться на вопросах получения скейлингов, которые широко используются при анализе и реальных турбулентных течений, и численных экспериментах [96–99]. Особенно важно в связи с этим выявить характер зависимости коэффициентов переноса от амплитуды турбулентных пульсаций. Так, в гидродинамических задачах — это зависимость от пульсаций скорости, а в проблемах, связанных с описанием переноса в стохастических электромагнитных полях, — это влияние возмущений магнитного или электрического поля. Именно эти вопросы сегодня недостаточно полно отражены в обзорной литературе, посвящённой исследованию динамической стохастичности.

## 2. Эффекты перемешивания и характеристические числа Кубо и Пекле

На физическом уровне строгости стохастическая неустойчивость впервые была исследована Н. С. Крыловым в диссертации "Процессы размешивания в фазовом пространстве" [14], защищённой в Ленинграде в июле 1941 г. Выражение для инкремента неустойчивости было получено Крыловым при рассмотрении газа упругих шаров [1, 14, 56, 100, 101]. Мы очень кратко рассмотрим соответствующие оценки, что позволит нам выявить общие для физической кинетики и турбулентности особенности процесса "перемешивания".

Допустим, что тепловая скорость молекулы  $V_T$  получила некоторое возмущение  $V'$ , так что её траектория стала проходить по штриховой линии (рис. 2), отклоняющейся на малый угол  $\phi_0 = V'/V_T$  от прежней, невозмущённой, траектории. Легко увидеть, что при следующем ударе этот угол возрастёт в  $l_c/r_*$  раз, а после  $N$ -го удара достигнет величины порядка

$$\varphi(N) \propto \varphi_0 \left( \frac{l_c}{r_*} \right)^N. \quad (4)$$

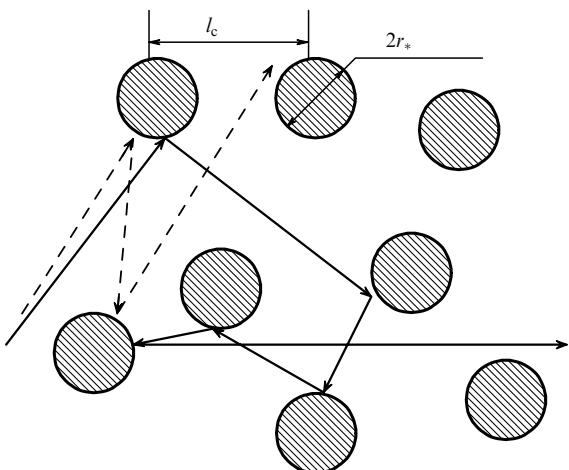


Рис. 2. Экспоненциальная неустойчивость в системе рассеивающих дисков:  $r_*$  — характерный радиус диска,  $l_c$  — среднее расстояние между рассеивающими центрами.

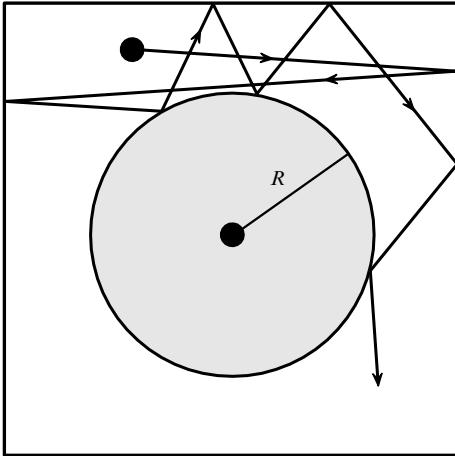


Рис. 3. Бильярд Синая. Траектория частицы, отражающейся от стенок диска.  $R$  — радиус рассеивающего диска.

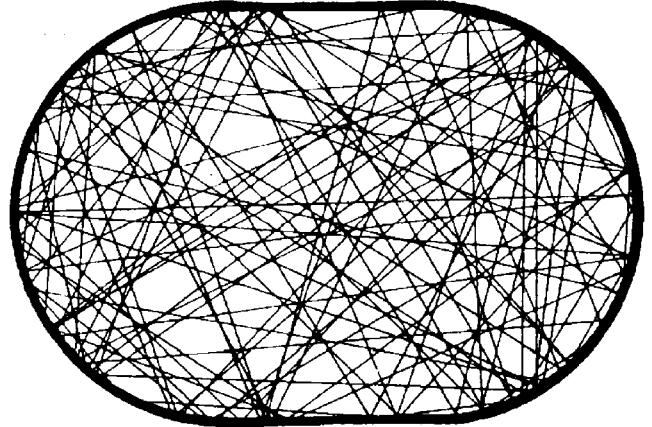


Рис. 4. Бильярд Бунимовича. Ансамбль траекторий, рассеиваемых системой частиц.

Здесь  $l_c$  — средний пробег между соударениями частиц,  $l_c \propto 1/(nr_*^2)$ ,  $n$  — концентрация частиц,  $r_*$  — радиус рассеивающих центров. Поскольку выполняется очевидное соотношение  $V_T t \approx N l_c$ , мы получим экспоненциальное возрастание угла рассеяния:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp\left(N \ln \frac{l_c}{r_*}\right) = \varphi_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_s}\right), \quad (5)$$

где инкремент неустойчивости  $\gamma_s$  и соответствующее характерное время  $\tau_s$  даются выражением

$$\gamma_s = \frac{1}{\tau_s} = \frac{V_T}{l_c} \ln \frac{l_c}{r_*}, \quad (6)$$

причём  $\gamma_s$  одновременно является энтропией Колмогорова–Синая [4, 5]. Здесь  $1/\tau_0 = V_T/l_c$  — характерный обратный масштаб времени. Из этих оценок видно, что даже при очень малом начальном возмущении,  $\varphi_0 \ll 1$ , величина  $\varphi$  быстро достигает значения порядка единицы. Таким образом, движение молекулы в газе оказывается крайне чувствительным к начальным возмущениям.

Модель, предложенная Крыловым, явилась только первым шагом в аналитическом исследовании процессов рассеяния на основе представлений о стохастической неустойчивости. Следующим значительным шагом стало исследование Синаем бильярдных систем [41, 42]. В частности, простейший плоский бильярд Синая представляет собой квадрат с внутренней круглой стенкой (рис. 3). Доказательство свойства перемешивания и существования энтропии Колмогорова–Синая читатель может найти в многочисленной математической литературе [41–55]. Для иллюстрации мы приведём только схематические изображения модельных бильярдов другого типа (рис. 4, 5). Особую роль в бильярдных системах играет определение длин свободного пробега и соответствующих функций распределения. Поскольку эти задачи в основном характерны для моделей физической кинетики, а не для вопросов, связанных с турбулентным переносом, мы отсылаем читателей к обширной литературе, посвящённой моделям физической кинетики [43–55].

Многочисленные исследования доказали универсальность формулы (6) для  $\tau_s$ , в которой  $K_m = l_c/r_*$  является параметром рассмотренного выше мультиплексивного

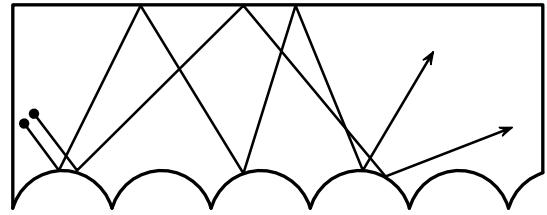


Рис. 5. Бильярд "гусеница". Экспоненциальное разбегание рассеиваемых частиц.

отображения (mapping parameter) [102]. Действительно, в рамках простейшей дискретной модели мы можем рассмотреть эволюцию фазового элемента  $\delta x_0$  в виде

$$\delta x_N(t) \approx K_m^N \delta x_0 \approx \delta x_0 \exp(N(t) \ln K_m). \quad (7)$$

Здесь  $N$  — число итераций,  $\delta x_0$  — первоначальный масштаб фазового элемента,  $\delta x_N$  — размер рассматриваемого элемента после  $N$  итераций. Соответственно, для инкремента стохастической неустойчивости получим

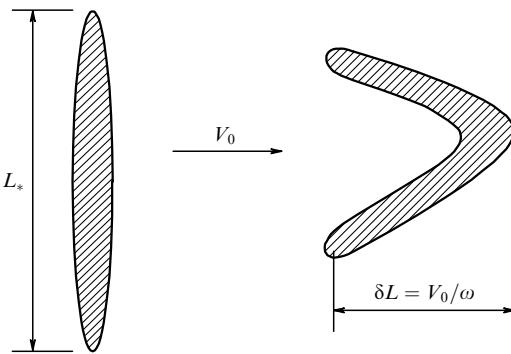
$$\gamma_s = \frac{N(t)}{t} \ln K_m = \frac{1}{\tau_0} \ln K_m. \quad (8)$$

Несложно дать гидродинамическую интерпретацию подобного отображения, а также параметра  $K_m$ , опираясь на деформацию жидкого элемента хаотическим полем потока с масштабом  $V_0$ . Пусть  $L_*$  — характерный размер жидкого элемента, а  $\omega$  — характерная частота изменения поля скоростей. Эти параметры позволят нам рассмотреть деформацию жидкого элемента за характерное время  $\tau_0$  (рис. 6):

$$L_1 \approx L_* \frac{\delta L}{\lambda} \approx L_* \frac{V_0}{\omega \lambda}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — характерный пространственный масштаб поля скоростей. Тогда эволюция  $L(t)$  на временах, больших  $\tau_s$ , описывается формулой

$$L(t) \approx L_* \left( \frac{V_0}{\omega \lambda} \right)^{t/\tau_0} = L_* \exp\left(\frac{t}{\tau_0} \ln K_m\right) \approx L_* \exp\left(\frac{t}{\tau_s}\right). \quad (10)$$



**Рис. 6.** Деформация жидкого элемента в случайном течении с характерным масштабом скорости  $V_0$ .  $L_*$  — начальный характерный пространственный масштаб,  $\delta L$  — масштаб поперечной деформации,  $\omega$  — характерная частота.

В нашем случае роль параметра преобразования  $K_m$  играет число Кубо Ку, характеризующее интенсивность турбулентности,

$$\text{Ku}(V_0) = \frac{V_0}{\omega\lambda}. \quad (11)$$

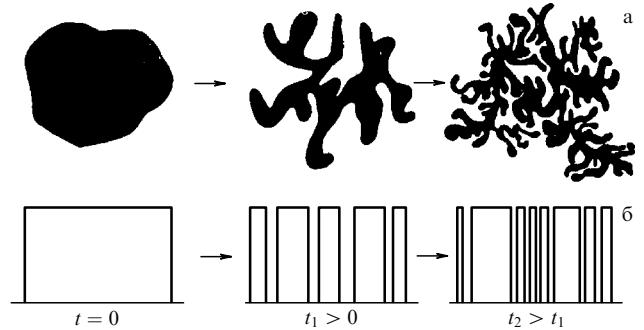
С точки зрения описания переноса пассивной примеси вихревым течением, параметр  $\text{Ku}(V_0)$  позволяет сравнить длину пробега частицы с масштабом вихрей. Характерное время стохастической неустойчивости в случае хаоса линий тока даётся выражением

$$\tau_s \approx \frac{1}{\gamma_s} \approx \frac{\tau_0}{\ln \text{Ku}} \approx \frac{\tau_0}{\ln [V_0/(\omega\lambda)]}. \quad (12)$$

С точки зрения описания турбулентного переноса возможность рассматривать инкремент стохастической неустойчивости в терминах числа Кубо оказывается чрезвычайно важной. Фактически задача исследователя сводится к определению функциональной зависимости характерного времени  $\tau_0$  от параметров модели. В данной простейшей модели мы предполагаем, что все вихревые образования рассматриваемого турбулентного потока имеют размеры, кратные  $\lambda$ . В таком одномасштабном приближении естественной оценкой является величина  $\tau_0 \propto \lambda/V_0$ .

Необходимо рассмотреть и влияние на развитие стохастической неустойчивости эффектов, связанных с молекулярной диффузией. В простейшей постановке задача сводится к описанию эволюции элемента жидкости под действием хаотического поля скорости, которое определяется характерным пространственным масштабом  $L_0$  и масштабом скорости  $V_0$ . В рамках используемой здесь одномасштабной модели градиент скорости и инкремент стохастической неустойчивости даются выражением  $V_0/L_0$ . Под действием хаотической адвекции пятно, состоящее из частиц скаляра, будет вытягиваться и деформироваться, как показано на рис. 7. В случае стационарного несжимаемого течения вытягивание пятна и уменьшение ширины его "щупалец" будут происходить экспоненциально. Эволюцию малого характерного масштаба "щупалец" можно оценить с помощью формулы

$$A(t) = L_0 \exp(-\gamma_s t). \quad (13)$$



**Рис. 7.** (а) Изменение формы объёма, занятого примесью, в результате турбулентной диффузии. (б) Схематический вид распределения концентрации примеси вдоль прямой, пересекающей этот объём.

При наличии молекулярной (затравочной) диффузии градиенты плотности скаляра с течением времени исчезают. Характерное диффузационное время  $\tau_d$  определяется выражением

$$\gamma_d = \tau_d^{-1} \approx \frac{D_0}{A_{\text{mix}}^2}. \quad (14)$$

Здесь  $D_0$  — коэффициент затравочной (молекулярной) диффузии. Несложно оценить минимальный пространственный масштаб "щупалец"  $A_{\text{mix}}$ , развивающихся в процессе перемешивания, на основе баланса характерных времён. Так, приравнивая диффузионный инкремент инкременту стохастической неустойчивости,  $\gamma_s \approx \tau_d^{-1}$ , приходим к следующему выражению:

$$\frac{D_0}{A_{\text{mix}}^2(t_{\text{mix}})} \approx \frac{V_0}{L_0}. \quad (15)$$

Теперь несложно получить скейлинг для диссипативного масштаба в терминах числа Пекле  $\text{Pe} = V_0\lambda/D_0$ , являющегося аналогом числа Рейнольдса для проблем турбулентной диффузии:

$$A_{\text{mix}}(\text{Pe}) \propto \sqrt{\frac{L_0 D_0}{V_0}} = \frac{L_0}{\sqrt{\text{Pe}}}. \quad (16)$$

Здесь предполагалось, что число Пекле велико,  $\text{Pe} \gg 1$  (развитая турбулентность). Характерное время перемешивания в одномасштабном случайном течении теперь выражается как

$$\frac{L_0}{\sqrt{\text{Pe}}} = L_0 \exp(-\gamma_s t_{\text{mix}}). \quad (17)$$

В результате несложных вычислений получим скейлинг

$$t_{\text{mix}}(\text{Pe}) \propto \frac{\ln \text{Pe}}{\gamma_s(V_0)} = \frac{L_0}{V_0} \ln \text{Pe}. \quad (18)$$

Мы видим, что зависимость от коэффициента молекулярной диффузии достаточно слаба, но при сильной турбулентности,  $\text{Pe} > 100$ , характерные времена задачи могут различаться более чем на порядок,  $t_{\text{mix}} \gg \tau_s = 1/\gamma_s$ . В этой простейшей модели не учитывались эффекты, связанные с колмогоровским каскадом, перестройкой топологии течения и др. Тем не менее даже такая простая оценка оказывается эффективной, например,

при рассмотрении важных сегодня технологических задач, связанных с перемешиванием реагентов в микроканалах [103, 104].

Заметим, что в геофизической гидродинамике эффекты перемешивания лагранжевых траекторий и связанные с этими явлениями процессы турбулентного переноса начали исследовать ещё в 1940-х годах. Такие эффекты были обнаружены Эртелем [29], Эккартом [30] и Веландером [105], но ясное понимание природы этих явлений отсутствовало. В настоящем обзоре мы подробно рассмотрим методы получения скейлингов для характерных времён и коэффициентов турбулентной диффузии в задачах, где главный декорреляционный механизм связан со стохастической неустойчивостью.

### 3. Стохастическая неустойчивость и относительная диффузия

Упомянутая во введении статья Бэтчелора [31] посвящена влиянию однородной изотропной турбулентности на растяжение материальных линий и поверхностей. Так, представленный в [31] результат для растяжения жидкого элемента  $\delta L(t_0)$  турбулентным полем,

$$\delta L(t) \approx \delta L(t_0) \exp\left(\frac{t - t_0}{\tau_s}\right), \quad (19)$$

позволил скорректировать уже устоявшиеся представления о турбулентной диффузии. Здесь  $\tau_s$  — характерное время развития неустойчивости. Однако тезис об экспоненциальном разбегании двух первоначально близких частиц скаляра (пассивная примесь) в турбулентном потоке был чётко сформулирован только в обзоре [106], где подведены первые итоги исследований турбулентного переноса, связанные с применением колмогоровской модели однородной изотропной турбулентности. Одной из главных проблем здесь является детальное описание относительной диффузии [34, 85, 87]. Фактически речь идёт о качественно новом типе диффузии, открытой в 1926 г. Ричардсоном [107]. Вместо задачи о диффузии от неподвижного источника была сформулирована проблема расплывания облака частиц (рис. 8). Анализ экспериментальных результатов привёл к выражению для коэффициента относительной диффузии для двух помеченных частиц в поле атмосферной турбулентности

$$D_R \propto \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \langle l_R^2(t) \rangle \approx C_R \langle l_R^2(t) \rangle^{2/3}. \quad (20)$$

Здесь  $l_R$  — расстояние между двумя частицами, расположенными в точках  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ ,  $l_R(t) = x_2(t) - x_1(t)$ , а

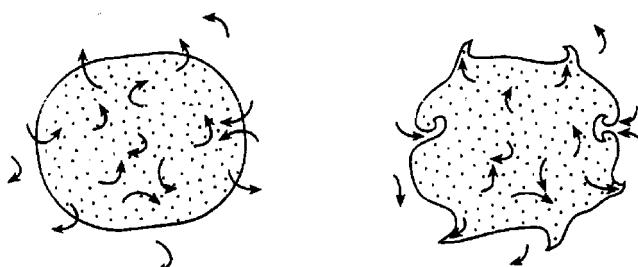


Рис. 8. Эволюция облака скаляра в поле турбулентности. Стрелками указаны пульсации скорости, перемешивающие скаляр (примеси).

константа  $C_R$ , найденная Ричардсоном, оценивается как  $C_R \approx 0,2 \text{ см}^{2/3} \text{ с}^{-1}$  [34]. Зависимость (20) указывает на ускоренный характер относительного движения частицы. Выражение (20) можно упрощённо записать в виде супердиффузионного скейлинга:  $\langle l_R^2(t) \rangle \propto t^3$ . Этот результат не является тривиальным, поскольку он сильно отличается не только от диффузионного,

$$\langle x^2(t) \rangle = R^2(t) \propto t, \quad (21)$$

но и даже от баллистического скейлинга  $R \propto t$ . Возникший в связи с этим дефицит понимания физических механизмов турбулентного переноса требовал существенной модификации представлений о корреляционных эффектах. На первый взгляд, разрушение корреляций может привести всего лишь к удвоению коэффициента турбулентной диффузии  $D_T$ :

$$\langle l_R^2(t) \rangle \approx \langle x_1^2(t) \rangle + \langle x_2^2(t) \rangle \approx 2\langle x_1^2(t) \rangle \approx 2(2D_T)t. \quad (22)$$

Предложенный Ричардсоном скейлинг хорошо соглашается с данными эксперимента в очень широком диапазоне параметров ( $10^2 - 10^6 \text{ см}$ ) [34]. Заметим, что масштаб коэффициента относительной диффузии значительно больше молекулярного коэффициента. Так, в атмосфере  $D_R \approx 10^4 - 10^5 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , в то время как коэффициент молекулярной диффузии составляет  $D_0 \approx 1 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Фактически выражение (22) отражает нелокальный характер эффектов переноса в условиях атмосферной турбулентности, где расстояние между диффундирующими частицами значительно изменяется под влиянием вихрей, сравнимых по размеру с расстоянием, разделяющим эти частицы.

Ричардсон отчётливо осознавал, что рассматриваемый им процесс относительной диффузии двух частиц в турбулентном потоке принципиально отличается от классической диффузии частиц. Более того, Ричардсон придавал особое значение этому новому явлению, рассматривая открытый им закон не как эмпирическую зависимость, в которой показатель степени известен лишь приближённо, а как фундаментальный закон. Именно поэтому возникающий в его скейлинге  $D_R \propto \langle l_R^2 \rangle^{2/3}$  дробный показатель степени не был заменён приближённой оценкой [107]. Дальнейшее развитие теории подтвердило мощь интуиции Ричардсона, поскольку этот скейлинг находит объяснение в рамках теории однородной изотропной турбулентности [34, 35, 85, 108, 109]. Колмогоров и Обухов в статьях [108, 109] показали, что если скорость диссипации энергии  $\varepsilon_K$  является единственной размерностной характеристикой поля однородной турбулентности в широком диапазоне масштабов  $l$ , то возникает возможность построить феноменологическую модель турбулентности, рассматривая каскадный процесс передачи энергии от больших вихрей меньшим. В рамках такого подхода можно записать скейлинг для коэффициента диффузии, основываясь на размерностном характере величины  $\varepsilon_K = [L^2/T^3]$  и используя локальный пространственный масштаб вихря  $l = l(k)$ :  $k \approx 1/l(k) = [1/L]$ . Теперь после несложных вычислений можно найти размерностную оценку коэффициента относительной диффузии Ричардсона:

$$D_R(l) = \left[ \frac{L^2}{T} \right] \approx \varepsilon_K^{1/3} \frac{k^{2/3}}{k^2} \approx \varepsilon_K^{1/3} \frac{1}{k^{4/3}} \approx \varepsilon_K^{1/3} l^{4/3}. \quad (23)$$

Благодаря сравнительной простоте экспериментов данные по относительной диффузии позволяют получать многочисленные оценки. Так, Обухов использовал величину  $\varepsilon_K \approx 5 \text{ см}^2 \text{ с}^{-3}$  для атмосферной турбулентности, приняв, согласно Бренту [110], что только 2 % солнечной энергии трансформируется в кинетическую энергию воздушных масс. Это позволило Обухову получить оценку коэффициента в формуле Ричардсона [111, 112]. Кроме того, объяснение закона относительной диффузии Ричардсона тесно связано с энергетическим спектром турбулентности  $E(k)$ , поскольку оно основывается на феноменологии турбулентного каскада. Действительно, размерностные оценки позволяют непосредственно связать относительное смещение двух частиц в турбулентном потоке с выражением для спектра,

$$D_R(l) \propto V(l)l \propto l\sqrt{E(k)k} \Big|_{k \propto 1/l}, \quad (24)$$

что в случае классического колмогоровского спектра  $E(k) \propto k^{-5/3}$  сразу приводит к скейлингу Ричардсона  $D_R \propto l^{4/3}$  и формуле, связывающей масштаб скорости с размером "несущего" вихря,  $V(l) \propto (\varepsilon_K l)^{1/3}$ .

Для целей настоящего обзора важно, что в области вязких масштабов (малые значения  $l$ ) можно воспользоваться линейной зависимостью, которая возникает как асимптотика колмогоровского скейлинга  $V(l) \propto l^{1/3}|_{l \rightarrow 0} \propto l$ . Модифицированный закон для относительной диффузии приобретает вид  $D_R(l) \propto V(l)l \propto \text{const } l^2$ , предсказанный Бэтчелором, поскольку теперь мы имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle l^2(t) \rangle = \text{const} \langle l^2(t) \rangle, \quad (25)$$

экспоненциальное решение которого описывает относительную диффузию в области масштабов, где существенны эффекты вязкости:

$$l^2(t) = l_0^2 \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right). \quad (26)$$

Здесь  $l_0$  — начальное расстояние между частицами скаляра в диссипативном интервале масштабов.

В рамках феноменологического подхода Колмогорова в области малых пространственных масштабов основные параметры потока должны зависеть только от вязкости  $v_f = [L^2/T]$  и потока энергии по спектру  $\varepsilon_K = [L^2/T^3]$ . Из этих величин можно составить единственные комбинации с размерностью длины и времени. Тогда пространственный масштаб, ограничивающий экспоненциальное "разбегание" частиц, соответствует колмогоровскому вязкостному (диссипативному) масштабу:

$$l_v = \left(\frac{v_f^3}{\varepsilon_K}\right)^{1/4} \gg l_0. \quad (27)$$

Характерный временной масштаб, связанный с процессами диссипации, даётся выражением  $\tau_v = (v_f/\varepsilon_K)^{1/2}$ . В области масштабов  $l \gg l_v$  экспоненциальный режим сменяется законом Ричардсона. Однако между ними (в промежуточном интервале масштабов) существует ещё и переходный квазибаллистический режим [34]

$$D_R(t) \propto (l_* \varepsilon_K)^{2/3} t. \quad (28)$$

Экспоненциальный характер разбегания частиц в турбулентном потоке проявляется не только при рассмотрении усреднённых характеристик течения. Так, наблюдения за эволюцией пятен частиц скаляра в вихревых течениях позволяют говорить о стохастической неустойчивости как о фундаментальном механизме перемешивания, который в свою очередь играет важную роль в вопросах обоснования статистической механики. В разделах 4–15 мы сосредоточимся на вопросах, связанных с получением конкретных скейлингов для инкремента стохастической неустойчивости и её влиянием на процессы турбулентного переноса.

#### 4. Квазилинейные оценки и инкремент Казанцева

В формулах, полученных Бэтчелором для описания экспоненциального растяжения жидкого элемента, в явном виде присутствует соответствующий инкремент неустойчивости  $\gamma_s$ . Естественно, задача определения  $\gamma_s$  и выявление его зависимости от физических параметров, характеризующих турбулентное течение, является важной. В связи с этим следует упомянуть работу [113], в которой получена формула, позволяющая оценить инкремент неустойчивости  $\gamma_s$ , используя характеристику средней завихрённости потока:

$$\gamma_s^2 \approx \langle (\text{rot } \mathbf{V})^2 \rangle. \quad (29)$$

В монографии Монина и Яглома [34, Т. 2] результат (29) подробно обсуждается. Осознавая "неопределённость" этого определения для развитых турбулентных течений, авторы [34] предлагают чисто размерностную оценку инкремента, используя ключевые параметры колмогоровской модели: поток энергии по спектру  $\varepsilon_K$  и вязкость  $v_f$ :

$$\gamma_s \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_K}{v_f}} = \left[ \sqrt{\frac{M^2}{C^3} \frac{C}{M^2}} \right]. \quad (30)$$

Кроме того, строго доказано [114, 115], что в асимптотическом пределе выполняется условие

$$\gamma_s^2(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (31)$$

Заметим, что одновременно с книгой Монина и Яглома появилась важная статья Казанцева [116], посвящённая усилению магнитного поля в проводящей турбулентной среде. Отметим, что предложенный в [116] подход неоднократно обсуждался Зельдовичем в контексте проблемы турбулентного динамо [117–119]. Однако для нас важно, что в статье [116] содержался в неявном виде вывод выражения для инкремента экспоненциального разбегания на основе представления о специфической коррелированности (дельта-корреляции) скоростей в модельном турбулентном течении [34, 85]. Мы кратко рассмотрим вывод этой формулы, поскольку с современной точки зрения в ней впервые был получен корректный скейлинг для инкремента стохастической неустойчивости в развитом турбулентном течении в отсутствие крупномасштабных когерентных структур.

Следуя идеям Ричардсона и Тейлора, Казанцев рассматривал относительное расстояние  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  между

двумя частицами в турбулентном потоке, используя простейшую оценку коэффициента турбулентной диффузии [120]:

$$D_T = \int_0^\infty \langle V(t) V(0) \rangle dt \propto V_0^2 \tau, \quad (32)$$

где  $V(t)$  — скорость лагранжевой частицы,  $V_0$  — амплитуда турбулентных пульсаций,  $\tau$  — характерное корреляционное время. Тогда, записывая формальное выражение для эволюции  $\rho^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2 - 2 \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = \\ &= \frac{4}{3} V_0^2 \tau - 2 \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Хорошо известно, что для гауссовых распределений среднеквадратичное от  $\langle \exp A \rangle$  даётся формулой

$$\langle \exp A \rangle = \exp \frac{A^2}{2}. \quad (34)$$

Если  $\mathbf{r}$  является гауссовой случайной величиной, то тогда, рассматривая выражение для эволюции среднего квадрата относительного расстояния между частицами  $\rho$ , получим

$$\frac{d}{dt} \langle \rho^2 \rangle = \frac{8}{3} \tau \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k^2 \langle \rho^2 \rangle}{2} \right) \right] E(k) dk, \quad (35)$$

где мы используем определение спектра турбулентной энергии в стационарном виде

$$\frac{V^2}{2} = \int E(k) dk \quad (36)$$

и условие представления поля скорости в виде  $\tilde{U}(k, t) = U(k) \delta(t)$ . Рассматривая начальную стадию эволюции "разбегания" первоначально близких частиц, в пределе  $\rho^2 k^2 \ll 1$  получим

$$\frac{d}{dt} \langle \rho^2 \rangle = \frac{4}{3} \langle \rho^2 \rangle \int E(k) k^2 dk. \quad (37)$$

Фактически это уравнение экспоненциального разбегания

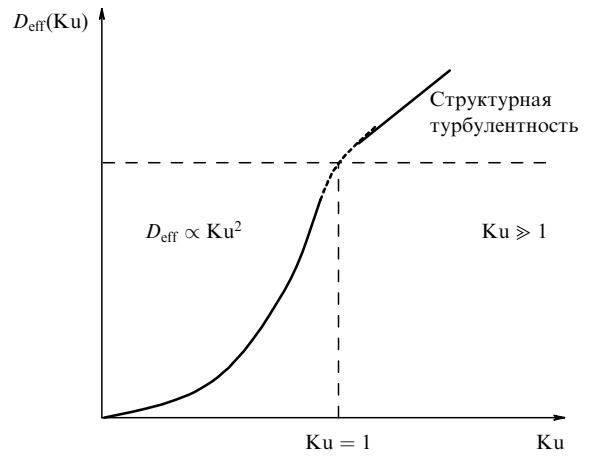
$$\frac{d}{dt} \langle \rho^2 \rangle = \gamma_s \langle \rho^2 \rangle, \quad (38)$$

где инкремент стохастической неустойчивости даётся квазилинейным (квадратичным по скорости) скейлингом

$$\gamma_s \approx V_0^2 k^2 \tau \approx \frac{V_0^2}{\lambda^2} \tau \propto \frac{1}{\tau} Ku^2. \quad (39)$$

Здесь учтено, что характерный размер вихрей оценивается как  $\lambda \propto 1/k$ .

С точки зрения коэффициентов переноса, инкремент стохастической неустойчивости может рассматриваться как одна из возможных аппроксимаций эффективного корреляционного времени. Современные эксперименты указывают на существенное отличие характера зависимости турбулентной диффузии от квазилинейных при-



**Рис. 9.** Зависимость эффективного коэффициента диффузии от числа Кубо.  $D_{\text{eff}}$  — эффективный коэффициент турбулентной диффузии,  $Ku$  — число Кубо, характеризующее интенсивность турбулентных пульсаций.

ближений в условиях сильной турбулентности [121–128],

$$Ku = \frac{V_0}{\lambda \omega} \geq 1, \quad Pe = \frac{V_0 \lambda}{D_0} \geq 1. \quad (40)$$

Скейлинговые оценки демонстрируют сходство характера зависимости коэффициента диффузии и соответствующего корреляционного времени от амплитуды турбулентных пульсаций скорости. В сильнотурбулентных режимах эта зависимость является гораздо более плавной (рис. 9). В связи с этим есть веские основания считать, что зависимость инкремента стохастической неустойчивости также будет отличаться от квазилинейной зависимости, полученной Казанцевым. Мы подробно рассмотрим этот вопрос в разделах 7–11, посвящённых анализу переноса частиц скаляра и переносу электронов в стохастическом магнитном поле.

## 5. Критика квазилинейного подхода

Современные исследования коэффициентов переноса в сильнотурбулентных гидродинамических течениях жидкости и анализ аномальных режимов диффузии сильно-замагниченной плазмы ясно указывают на необходимость учёта влияния когерентных вихревых структур [122–128]. Важным критерием здесь является введённое в разделе 2 число Кубо. Так, в случае  $Ku \geq 1$  мы имеем дело с более сложными декорреляционными эффектами, чем в классическом подходе Тейлора [120], где турбулентные пульсации скорости представлены уравнением движения в лагранжевой форме

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{dt}, \quad (41)$$

а коэффициент диффузии непосредственно связан с лагранжевой автокорреляционной функцией скорости:

$$D_T = \int_0^\infty \langle V(0) V(\tau) \rangle d\tau. \quad (42)$$

Этот подход позволил эффективно решать задачи слабой турбулентности (квазилинейная теория), в которых оценка коэффициента турбулентной диффузии прини-

мала форму скейлинга и были введены масштаб флуктуаций скорости  $V_0$  и характерное корреляционное время  $\tau$ :  $D \propto V_0^2 \tau$ . В таком подходе флуктуации скорости предполагаются коротко коррелированными. Очевидно, что это является серьёзным недостатком в случае, когда поле течения содержит крупномасштабные вихревые структуры или зональные течения. Однако появилась возможность ввести в рассмотрение амплитуды турбулентных пульсаций.

Молекулярная (затравочная) диффузия оказывает существенное влияние на корреляционные эффекты. Одним из первых конкретную модель включения эффектов молекулярной диффузии в корреляционный анализ предложил Корсин [32], который исходил из того, что определение корреляционной функции, предложенное Тейлором [120], основывается на использовании лагранжевых скоростей  $V(x_0, t)$ , однако их экспериментальное определение представляет серьёзную трудность. Поэтому часто применяется эйлерово представление корреляционной функции, которое учитывает корреляции скорости в точках, расположенных на расстоянии  $\lambda$  друг от друга:

$$C_E(\lambda, t) = \langle u(x_0, T) u(x_0 + \lambda, T + t) \rangle.$$

В таком представлении формула для корреляционной функции оказывается более удобной для проведения экспериментов. Мы также можем выразить лагранжевую корреляционную функцию через эйлерову скорость:

$$C(t) = \langle u(x_0; T) u(x(x_0, T + t); T + t) \rangle.$$

Здесь  $u(x_0, T)$  — эйлерова скорость в точке  $x_0$ ,  $T$  — время. Однако однозначная связь между лагранжевой и эйлеровой корреляционной функциями отсутствует. Действительно, в выражении для эйлеровой корреляционной функции отсутствует лагранжева связь точек  $x_0$  и  $x_0 + \lambda$ . Здесь  $\lambda$  — это всего лишь "некоторое" произвольное смещение.

Корсин предложил нетривиальную аппроксимационную формулу, выразив лагранжеву корреляционную функцию посредством рандомизации эйлеровой корреляционной функции с плотностью вероятности  $\rho(x, t)$ ,

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda, t) C_E(\lambda, t) d\lambda.$$

Причём ещё более важным моментом оказалась идея о диффузионной природе смещения  $\lambda$ , поскольку в качестве  $\rho(\lambda, t)$  Корсином было использовано классическое решение диффузионного уравнения в трёхмерном пространстве (гауссово распределение):

$$\rho(\lambda, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4D_0 t}\right).$$

В последнюю формулу включён коэффициент молекулярной диффузии  $D_0$ . Следовательно, появляется возможность рассматривать как турбулентный перенос, так и молекулярную диффузию. В итоге получаем интегральное выражение

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_E(\lambda, t)}{(4\pi D_0 t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4D_0 t}\right) d\lambda.$$

С этой новой точки зрения величина  $\lambda$  является одновременно пространственным масштабом и диффузионным смещением. Фактически вместо формального усреднения вида

$$\langle V(x(0)) V(x(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle V(0) V(y) \delta(y - x(t)) \rangle dy$$

была использована факторизация ("гипотеза независимости"):

$$\langle V(0) V(y) \delta(y - x(t)) \rangle = \langle V(0) V(x) \rangle \langle \delta(y - x(t)) \rangle.$$

Более того, для описания корреляции траекторий Корсин использовал распределение Гаусса:

$$\langle \delta(y - x(t)) \rangle \approx \rho(y, t).$$

В плазменных задачах, где рассматривается диффузия в пространстве скоростей, мы приходим к выражению, аналогичному формуле Тейлора, но в терминах флуктуаций электрического поля  $\delta E$  [121–124]:

$$D_V \propto \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 (\delta E)^2 \tau, \quad (43)$$

где  $e$  и  $m_e$  — заряд и масса электрона соответственно. Специфика плазменных проблем, сформулированных в начале 1960-х годов, была связана с описанием взаимодействия частиц и волн на основе представления о затухании Ландау как о механизме, обеспечивающем стохастичность. В дальнейшем использование приближения коротких корреляций столкнулось с трудностями при описании сильнотурбулентных состояний плазмы [129, 130].

Фактически уже в конце 1960-х годов стало ясно, что квазилинейные оценки не отражают реального характера переноса в условиях сильной плазменной или гидродинамической турбулентности [122–128]. Среди многочисленных причин этого несоответствия было названо и отсутствие учёта эффектов, связанных с экспоненциальным разбеганием. Так, Ван Кампен в короткой статье [131] подверг критике формулу Тейлора для коэффициента турбулентной диффузии и поставил под сомнение результаты теории линейного отклика Кубо [61, 68].

Действительно классическая теория Кубо–Грина даёт строгое соотношение, связывающее коэффициенты переноса и корреляционные функции, в интегральном виде

$$D = \int_0^{\infty} C(\tau) d\tau. \quad (44)$$

Такой подход удаётся непосредственно связать с ланжевеновским представлением флуктуаций и интерпретировать классические результаты Эйнштейна в терминах флуктуационно-диссипативных соотношений. Простейший пример такого соотношения представляет собой формула  $k_B T / (m \beta_t) = D$ , связывающая ланжевенов коэффициент "трения"  $\beta_t$  с температурой системы и коэффициентом диффузии.

Рассмотрение проблем переноса на основе теории линейного отклика позволяет использовать хорошо развитый и достаточно общий формализм неравновесной термодинамики. Так, при наличии малых временных и пространственных возмущений поля  $\alpha(\mathbf{r}, t)$  эволюция

системы будет описываться системой уравнений Онсагера [68]:

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (45)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = L_J \chi(\mathbf{r}, t), \quad (46)$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\nabla \alpha(\mathbf{r}, t). \quad (47)$$

Здесь  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  — поток,  $\chi(\mathbf{r}, t)$  — термодинамическая "сила",  $L_J$  — соответствующий коэффициент переноса, который представлен традиционным для термодинамики корреляционным выражением Кубо–Грина

$$L_J = \text{const} \int_0^\infty \langle J(0) J(\tau) \rangle d\tau. \quad (48)$$

Как мы видели, в случае турбулентной диффузии частиц скаляра соответствующее выражение записывается в терминах автокорреляционной функции скорости.

Тем не менее важно помнить, что теория линейного отклика, сформулированная в рамках статистической механики, не предполагает значительных отклонений от состояния равновесия. Это приводит к появлению серьёзных проблем при описании турбулентности. Аспект, связанный со стохастической неустойчивостью, был ясно сформулирован Ван Кампеном [31]. Так, при рассмотрении эволюции возмущений динамической системы  $\delta x_i(t)$  в теории Кубо–Грина используется разложение в ряд Тейлора, позволяющее связать возмущённые и невозмущённые величины:

$$\delta x_i(t) = \sum_j \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} \delta x_j(0) + O(\delta \mathbf{r}^2(0)), \quad (49)$$

где  $\delta \mathbf{r} = \{\delta x_i\}$ . Однако в турбулентных течениях фактор  $\partial x_i(t)/\partial x_j(0)$  вследствие стохастической неустойчивости первоначально экспоненциально возрастает со временем [114, 115]. В случае турбулентного переноса частиц это наглядно демонстрируют даже простые одновихревые модели. Так, Новиков [132] рассмотрел "закручивание" пятна примеси вихрем и продемонстрировал важность эффектов экспоненциального растяжения при описании эволюции скаляра (рис. 10).

Из этих замечаний следует, что область применения выражений, основанных на линейных оценках, должна быть очень ограниченной. Тем не менее приложения линейной теории отклика и соответствующих формул Кубо–Грина для коэффициентов переноса являются вполне успешными в широком диапазоне параметров [68]. Главная причина этой успешности заключается в рассмотрении явления переноса на основе представления о самоусреднении, поскольку измеряемые нами величины являются результатами усреднения по ансамблю траекторий. С этой точки зрения стохастическая неустойчивость представляет собой важный декорреляционный механизм, обеспечивающий необходимое для самоусреднения "перемешивание". Действительно, наблюдение за одной частицей не может дать информации о поведении ансамбля.

Критика Ван Кампеном теории линейного отклика сыграла важную роль, поскольку стимулировала рассмотрение эффектов стохастической неустойчивости на основе подходов, существенно отличающихся от квазилинейного. Эти идеи были эффективно реализованы при

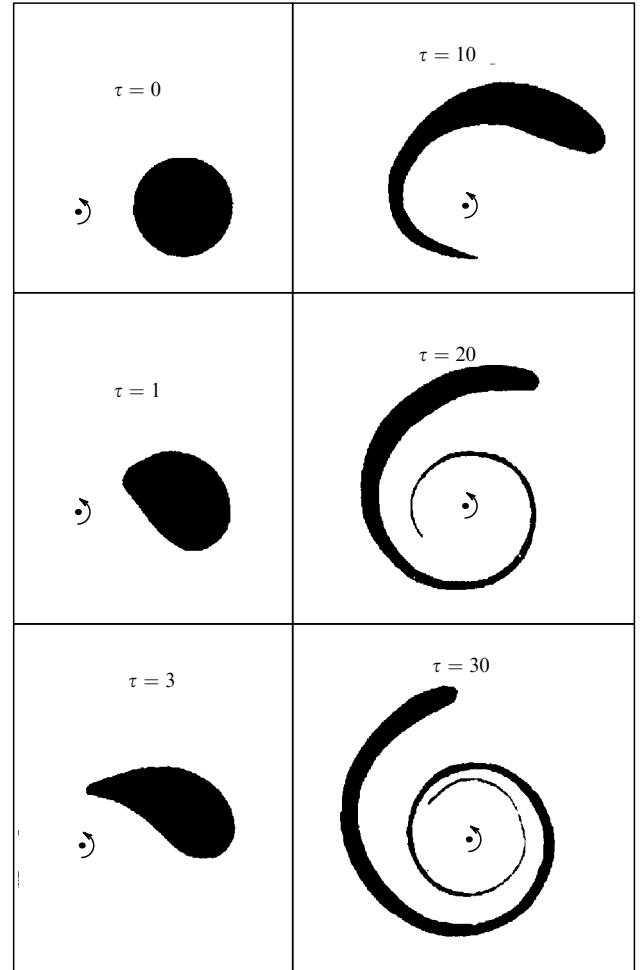


Рис. 10. Закручивание примеси вихрем. Стрелкой указано направление вращения вихря.

анализе различных моделей турбулентного переноса, в которых стохастические слои, крупномасштабные вихревые структуры или процессы пересоединения играют важную роль.

## 6. Лагранжева турбулентность и течения Арнольда – Бельтрами – Чилдерса

Интуитивное представление о турбулентности основано на рассмотрении турбулентного течения как пространственного или временного хаоса. Однако если эйлерово поле скорости является регулярным и имеет простую аналитическую форму, то это вовсе не означает отсутствия стохастичности лагранжевых траекторий жидких частиц, а следовательно, и лагранжевые скорости могут быть стохастическими. Удивительно, но этот факт был осознан только в середине 1960-х годов Арнольдом [133, 134], который, занимаясь вопросами теории динамических систем, обратил внимание на выражющееся в элементарных функциях трёхмерное стационарное поле скоростей:

$$V_x = A \sin z + C \cos y, \quad (50)$$

$$V_y = B \sin x + A \cos z, \quad (51)$$

$$V_z = C \sin y + B \cos x. \quad (52)$$

Численное моделирование, проведенное Эноном [135], показало, что лагранжевые траектории жидких частиц в поле ABC-течения (названного в честь Арнольда, Бельтрами и Чилдерса), безусловно, можно рассматривать как стохастические [76, 78, 80, 85]. Заметим, что для несжимаемых течений, подобных ABC-модели, для которых  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , динамика системы оказывается консервативной (гамильтоновой), а формально ABC-течения удовлетворяют условию Бельтрами  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \alpha_V \mathbf{V}$ , где  $\alpha_V$  — постоянная, равная для ABC-течений единице.

Действительно, ABC-систему трёх уравнений можно записать в виде, близком к гамильтонову:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{K} \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}, \quad (53)$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{K} \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}, \quad (54)$$

где потенциалы  $K(x, y)$  и  $H(x, y, z)$  представлены следующими выражениями:

$$K(x, y) = C \sin y + B \cos x, \quad (55)$$

$$H(x, y, z) = K(x, y) + A(y \sin z - x \cos z). \quad (56)$$

Тогда, вводя новую независимую переменную  $p$ , с помощью нелинейного преобразования

$$y = y(p, x), \quad (57)$$

$$p = \int_0^y K(x, y') dy' = By \cos x + C(1 - \cos y)$$

получаем гамильтоновы уравнения канонического вида для ABC-течения:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H(p, x, z)}{\partial p}, \quad (58)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H(p, x, z)}{\partial x}, \quad (59)$$

где гамильтонова функция выражается как

$$H(p, x, z) = C \sin y + B \cos x + A(y \sin z - x \cos z). \quad (60)$$

Исследование экспоненциальной неустойчивости, начатое Эноном [135] по предложению Арнольда, продемонстрировало экспоненциальное расхождение близких траекторий, в том числе при одинаковых значениях коэффициентов  $A = B = C$ :

$$l(z) \propto l_0 \exp(\gamma_z z). \quad (61)$$

Здесь  $l_0$  — начальное расстояние,  $\gamma_z$  — инкремент экспоненциальной неустойчивости.

На первый взгляд кажется удивительным возникновение хаоса лагранжевых траекторий (хаотической адvection) в течении, эйлеровы уравнения которого приводят к регулярному распределению скоростей. Заметим, что в теории динамических систем хорошо известно, что в системе трёх обыкновенных дифференциальных уравнений, подобных приведённым выше уравнениям Лагранжа, случаи неинтегрируемости не являются исключением и приводят к хаотической динамике [2–6]. Хаотичность возникает даже в случае достаточно

простых функциональных зависимостей правых частей этих уравнений [136]. Соответственно, и в трёхмерном пространстве лагранжевые траектории, хотя они и не зависят от времени, могут демонстрировать хаотические потоки.

Арнольд [133] был первым, кто ясно указал на особенность потоков типа Бельтрами, в которых векторы завихрённости и векторы скорости всегда параллельны, заключающуюся в том, что векторное произведение скорости и завихрённости, являющееся в идеальном (невязком) потоке градиентом интеграла Бернулли, всюду будет равно нулю:

$$\mathbf{L} = \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0. \quad (62)$$

Условие (62) приводит к отсутствию ограничений на лагранжевые траектории, которым в этом случае "позволено" двигаться не только по двумерным поверхностям (инвариантным торам). Свободное блуждание частиц по некоторой области течения является в данном случае проявлением неинтегрируемости исследуемых уравнений адvectionи.

Действительно, в соответствии с теорией Колмогорова – Арнольда – Мозера (КАМ) мы имеем дело с неинтегрируемой системой [2–4]. Однако её можно свести к интегрируемой двумерной, например, приняв  $A = 0$ . Этот случай характеризуется наличием интеграла энергии

$$H_0 = B \cos x + C \sin y = \text{const}, \quad (63)$$

следовательно, мы имеем ансамбль цилиндрических поверхностей, соответствующий множеству различных значений постоянной  $H_0$ . Малые возмущения этой системы поверхностей, соответствующие малым значениям параметра задачи  $A$ , приведут только к малым деформациям большей части трубок. В окрестности сепаратрисных поверхностей появятся области стохастичности (разрушение регулярных поверхностей) и, как следствие, хаос линий тока. При  $A \approx 1$  хаос линий тока распространится на значительные области пространства.

Важно отметить, что у Арнольда и Энона были предшественники, результаты работ которых долгое время не привлекали должного внимания. Во введении мы упоминали Карла Эккарта и Пьера Веландера. Эккарт в 1948 г. указывал [30] на эквивалентность адvectionи и перемешивания в проблемах геофизической гидродинамики. Веландер [105] в эксперименте показал, что, размешивая двумерную жидкость посредством ламинарного течения с линиями тока в виде системы вложенных овалов, можно получить пятна красителя (пассивный скаляр), представляющие собой сложные фигуры (рис. 11). Веландер искал объяснение с помощью концепций эргодичности, проводя аналогии с огрублённым фазовым объёмом. Более того, спустя около полутора десятилетий после опубликования работ Арнольда [133] и Энона [135] появилось исследование Берри с соавторами [137], посвящённое морфологии материальных криевых в периодическом несжимаемом течении. Авторы [137] выделили два типа неподвижных точек для случая двумерных отображений, сохраняющих площадь. Эллиптическим точкам соответствовали "изгибы", а гиперболическим — растяжение и сжатие в форме "зигзагов" (рис. 12, 13).



Рис. 11. Эволюция скаляра в эксперименте Веландера как пример хаотической адвекции.

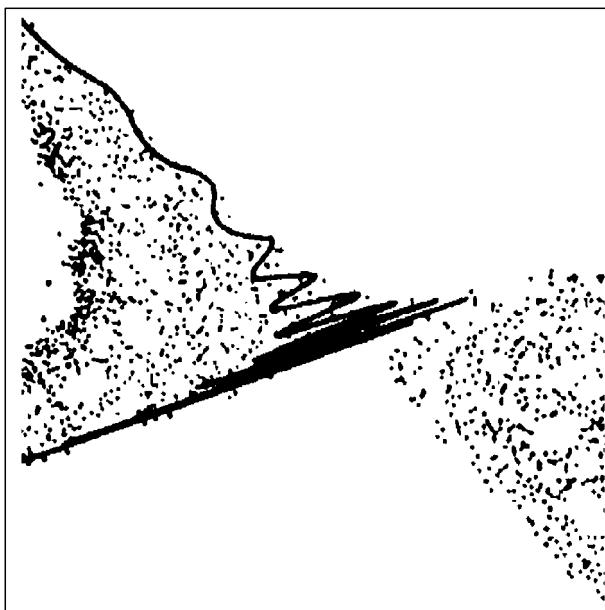


Рис. 12. Осцилляции возмущённой сепаратрисы при приближении к гиперболической точке.

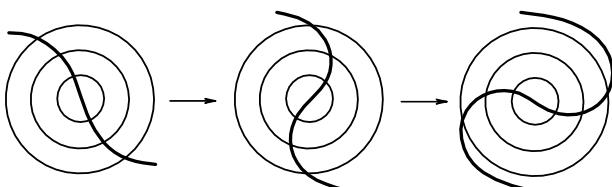


Рис. 13. Образование "завитков" Берри в окрестности центра.

Мы видим, что эффекты хаотичности, связанные с адвекцией, были хорошо известны, но сам термин появился только в 1980-х годах, когда связи между идеями о возникновении хаоса в гамильтоновых системах, вопросами интегрируемости и численными результатами, демонстрирующими хаотическое поведение лагранжевых траекторий, были наконец установлены. Сейчас имеется обширная журнальная литература и несколько монографий, посвящённых данной теме [63, 77–81, 102, 138].

## 7. Стохастические слои в плоских течениях

Несмотря на очевидность глубокой связи между проблемами динамического хаоса в гамильтоновой динамике, где идеи Колмогорова, Арнольда и Мозера [2, 134, 139–141] нашли широкое распространение, и проблемами стохастизации в гидродинамических течениях, многие результаты теории хаотической адвекции получены совсем недавно [76–81]. Наиболее подробно исследованы двумерные течения. В этом случае уравнения движения лагранжевой частицы имеют гамильтонов вид, роль гамильтониана играет функция тока, а фазовое пространство совпадает с конфигурационным. Фактически здесь появляется возможность визуализировать фазовое пространство.

В случае стационарных плоских несжимаемых течений стохастичность отсутствует и лагранжевые траектории совпадают с линиями тока, заданными функцией тока  $\Psi$ ,

$$V_x = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad (64)$$

$$V_y = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}. \quad (65)$$

Отсутствие стохастизации в двумерном несжимаемом стационарном течении непосредственно связано с отсутствием экспоненциального растяжения жидких частиц. Этот факт впервые был отмечен ещё Зельдовичем в работе [142], анализирующей динамо-эффекты [143–145]. Действительно, численные эксперименты показывают, что для большинства начальных условий расстояние между первоначально близкими частицами в стационарном двумерном течении несжимаемой жидкости в ограниченной области возрастает только линейно.

Простейший интегрируемый случай возникает в АВС-течениях при  $A = 0$  (ВС-текущие):

$$V_x = \dot{x} = C \cos y, \quad (66)$$

$$V_y = \dot{y} = B \sin x, \quad (67)$$

что позволяет изучать периодические вихревые структуры (ячейки) посредством элементарной функции тока (рис. 14)

$$\Psi(x, y) = C \sin y + B \cos x. \quad (68)$$

Это течение имеет множество особых линий тока (сепаратрис), проходящих через седловые точки. Численное моделирование слабовозмущённого ВС-текущего на основе гамильтониана

$$H(x, y, z) = \Psi(x, y) + \varepsilon(y \sin z - x \cos z) \quad (69)$$

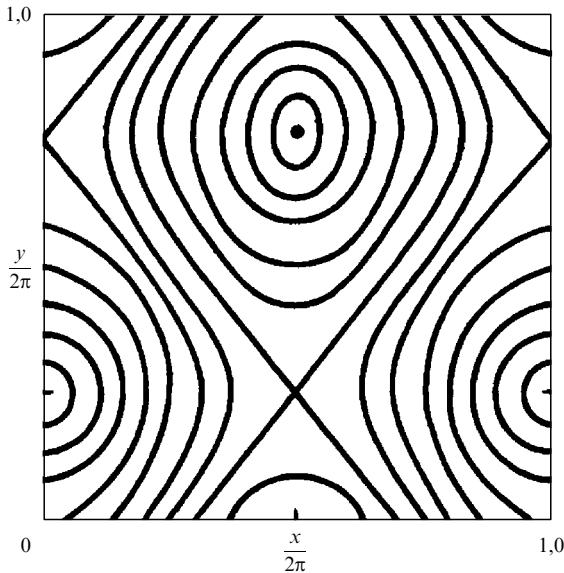


Рис. 14. Интегрируемый случай АВС-течения при  $A = 0$ . Линии тока на плоскости  $(x, y)$ .

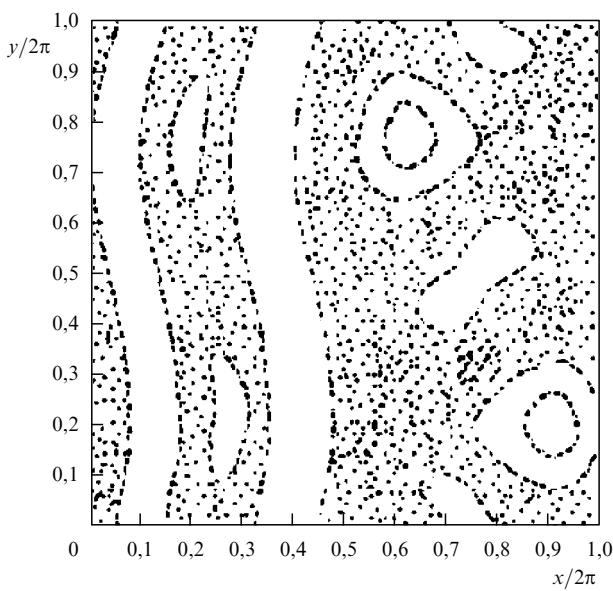


Рис. 15. Возникновение хаоса в АВС-течении в окрестности сепаратрис.

указывает на возникновение стохастической неустойчивости. Если параметр, характеризующий амплитуду возмущений,  $\varepsilon \ll 1$ , то в соответствии с теорией КАМ в окрестности сепаратрис возникают узкие стохастические слои. Хаос охватывает значительные доли пространства, когда  $\varepsilon \equiv A \approx 1$  (рис. 15).

Аналогичная ситуация возникает, когда функция тока двумерного течения, содержащего сепаратрисы, становится зависящей от времени,  $\Psi(x, y, t)$ . Такие двумерные модели течений получили название систем с  $3/2$  степенями свободы [4, 6, 62, 76, 102]. Здесь, как и во многих других проблемах, связанных со статистическим описанием явлений, размерность задачи играет важную роль. Очевидно, что в окрестности сепаратрис возникают области стохастичности (рис. 16). Интересными примерами могут служить также нестационарные обобщения

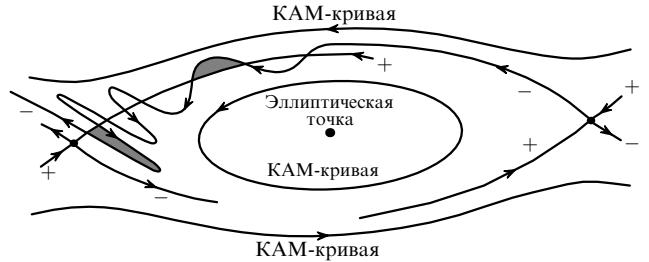


Рис. 16. Возникновение стохастического слоя в окрестности сепаратрис.

ВС-течений (вихревые ячейки), позволяющие исследовать перестройку топологии линий тока.

В задачах о стохастичности линий тока в плоских течениях могут быть использованы качественные оценки, основанные на идеях Чирикова и Заславского о нелинейном резонансе [146]. В первом приближении можно рассматривать стохастические слои вокруг сепаратрис сложных течений, опираясь на оценки ширины стохастического слоя  $\Delta$  нелинейного резонанса, возмущенного периодической силой с характерной частотой  $\omega_0$ . В [147] приведены оценки  $\Delta$  как для высокочастотных возмущений,

$$\Delta \propto \lambda \exp \left( -\frac{\omega_0}{\omega_B} \right), \quad (70)$$

так и для интересных в теории турбулентного переноса (большие числа Кубо,  $Ku > 1$ ) низкочастотных мод:

$$\Delta(\varepsilon_\omega) \propto \varepsilon_\omega \lambda \left( \frac{\omega_0}{\omega_B} \right) \propto \varepsilon_\omega. \quad (71)$$

Здесь  $\omega_B$  — характерная частота основной моды,  $\varepsilon_\omega$  — амплитуда возмущений. Из этих оценок видно, что именно в низкочастотных модах эффект оказывается значительным.

Если мы рассматриваем одномасштабные вихревые течения, в которых вихрь имеет характерный размер  $\lambda$ , а  $V_0$  — характерная амплитуда скорости, то  $\omega_B \propto V_0/\lambda$ . Тогда оценка ширины стохастического слоя в течениях с вихревыми ячейками выражается как

$$\Delta \propto \varepsilon_\omega \frac{\omega_0 \lambda^2}{V_0} \propto \varepsilon_\omega \frac{\lambda}{Ku} \ll \lambda, \quad (72)$$

где для низкочастотных возмущений  $Ku \geq 1$ , поскольку в низкочастотном пределе  $\omega_B \gg \omega_0$ .

Представляет интерес и оценка диффузии стохастических линий тока

$$D_\psi(Ku) \propto \frac{\Delta^2}{\tau(Ku)} \propto \frac{\varepsilon_\omega^2 \lambda^2}{Ku^2 \tau}, \quad (73)$$

где  $\tau = \tau(Ku)$ . Задача оценки эффективного корреляционного времени  $\tau$  нетривиальна, поскольку такая оценка должна основываться на конкретном декорреляционном механизме, учитывающем особенности топологии течения и характер развивающихся в нём неустойчивостей. Тем не менее качественно можно считать процессы декорреляции в стохастическом слое и в целом течении примерно одинаковыми, приняв, что

$$\tau_\psi \propto \frac{\Delta^2}{D_\psi} \propto \frac{\lambda^2}{D_T}, \quad (74)$$

где  $D_T \propto V^2/\omega_0$  — традиционный квазилинейный коэффициент диффузии. Тогда после подстановки получим

$$D_\psi \propto \frac{\Delta^2}{\tau_\psi} \propto \frac{\Delta^2}{\lambda^2} D_T \propto \frac{\varepsilon_\omega^2}{Ku^2} \frac{V_0^2}{\omega_0} \propto \varepsilon_\omega^2 \lambda^2 \omega_0. \quad (75)$$

Заметим, что оценка  $\tau_\psi$  является одновременно и качественной оценкой инкремента стохастической неустойчивости в "ячеистых" течениях,

$$\gamma_s(V_0) \propto \frac{1}{\tau_\psi} \propto \omega_0 Ku^2 \propto V_0^2, \quad (76)$$

которая совпадает по порядку величины с квазилинейной оценкой Казанцева (39), рассмотренной в разделе 4 в связи с колмогоровской феноменологией постоянства потока энергии по спектру в условиях развитой изотропной турбулентности.

## 8. Эффективный перенос в конвективных ячейках

Эффекты стохастической неустойчивости, ярко проявляющиеся в окрестности сепаратрис, разделяющих вихревые ячейки, срабатывают как декорреляционный механизм, обеспечивающий обмен частицами между вихрями в условиях нестационарности течения. С другой стороны, в системе стационарных конвективных ячеек декорреляционную роль играет молекулярная (столкновительная) диффузия. В обоих случаях эффективный перенос возрастает благодаря существованию конвективных каналов, ширина  $\Delta$  которых является ключевым параметром задачи. Фактически это одна из простейших моделей аномального переноса в условиях структурной (вихревой) турбулентности.

Используя несложные оценки баланса частиц в стохастическом слое, можно показать, что ширина канала непосредственно связана с амплитудой скорости конвективных потоков. Регулярные вихревые ячейки целесообразно описывать с помощью функции тока, предложенной Тейлором (рис. 17),

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right), \quad (77)$$

поскольку при такой форме записи вихри располагаются вдоль координатных осей, что оказывается более удобным при задании граничных условий. Здесь  $\Psi_0 = \lambda V_0$ .

Предполагается, что в пределе больших чисел Пекле,  $Pe = \lambda V_0 / D_0 \gg 1$ , частицы скаляра совершают движение вдоль линий тока, образующих конвективные каналы, и покидают их вследствие наличия в системе затравочной диффузии  $D_0$  (молекулярной диффузии  $D_m$ , обусловленной столкновениями, или стохастической диффузии  $D_\psi$ ).

Под пассивным скаляром подразумеваются находящиеся в потоке частицы примеси, не оказывающие влияния на течение. Так, если температура каждой частицы жидкости сохраняется (температура "вморожена" в среду), то в качестве скаляра выступает температура. Аналогичная ситуация возникает в задачах переноса магнитного поля, когда магнитное поле вследствие его "вмороженности" переносится плазмой.

В простейшем случае, когда течение жидкости является несжимаемым,  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , мы можем в классиче-

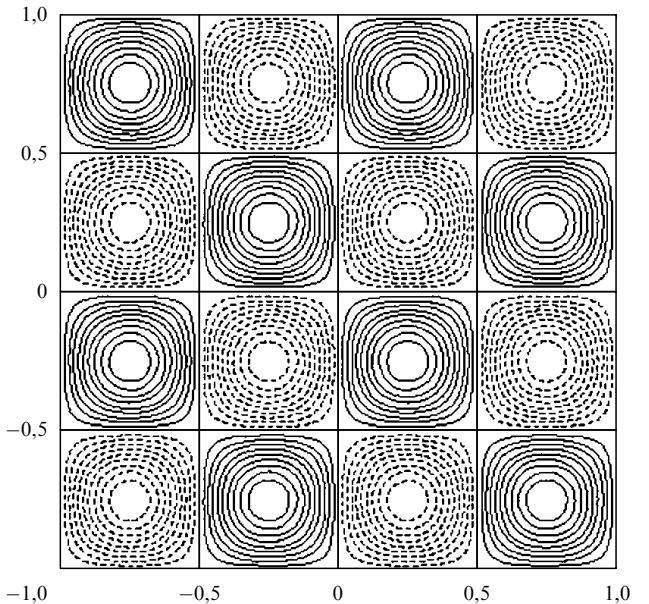


Рис. 17. Система регулярных конвективных (вихревых) ячеек.

ском уравнении диффузии заменить частную производную  $\partial n / \partial t$  от плотности скаляра  $n$  лагранжевой производной. Тогда уравнение переноса скаляра примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla n = D_0 \nabla^2 n. \quad (78)$$

В отсутствие диффузии (коэффициент диффузии  $D_0 = 0$ ) мы получаем условие вмороженности  $n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}_0, t)$ , где  $\mathbf{r}_0$  — координата частицы в начальный момент времени  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t = 0)$ . Чисто лагранжево поведение скаляра может привести к сколь угодно большим градиентам плотности, но при наличии диффузии (или теплопроводности, если рассматривать задачу переноса в терминах температуры) неоднородности плотности должны сглаживаться. Тогда возникает возможность описать перенос частиц с помощью эффективного коэффициента диффузии.

В нашем случае из конвективного слоя шириной  $\Delta$  частицы уходят диффузионным образом,  $D_0(\delta n / \Delta^2)$ , в то время как конвекция вдоль пограничного слоя даёт  $V_0(\delta n / \lambda)$ . Сравнивая эти оценки (по существу, это оценки характерных времён в задаче о диффузионном пограничном слое), получим для ширины стохастического слоя

$$\Delta(V_0) = \sqrt{\frac{D_0 \lambda}{V_0}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{Pe}} \propto \frac{1}{\sqrt{V_0}}. \quad (79)$$

В условиях больших амплитуд (сильной турбулентности, число Рэлея  $Ra \propto Pe \gg 1$ ) стохастический слой оказывается очень узким.

Оценка эффективного переноса частиц скаляра в системе конвективных ячеек (рис. 18) должна учитывать долю пространства, занятую стохастическим слоем,  $\lambda \Delta / \lambda^2 \approx \Delta / \lambda$ , поскольку мы предполагаем, что именно конвективный вклад является решающим,

$$D_{\text{eff}} \approx \lambda V_0 P_\infty \approx \lambda V_0 \frac{\Delta}{\lambda} \approx V_0 \Delta(V_0). \quad (80)$$

Здесь  $P_\infty$  — доля пространства, отвечающая за конвекцию. Окончательно приходим к следующей оценке

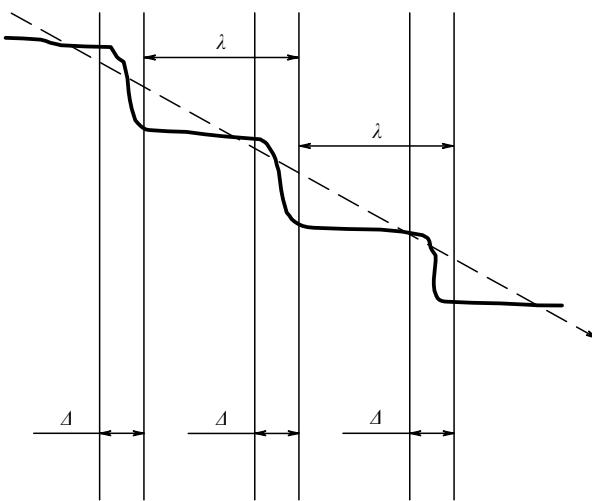


Рис. 18. Профиль концентрации примеси в системе конвективных ячеек.  $\Delta$  — ширина стохастического (диффузионного) слоя,  $\lambda$  — характерный пространственный размер ячейки. Штриховая линия указывает направление убывания концентрации.

коэффициента турбулентной диффузии [70]:

$$D_{\text{eff}} = \text{const} \sqrt{D_0 V_0 \lambda} \propto V_0^{1/2}. \quad (81)$$

Полученный из простых балансовых соображений скейлинг позволил дать теоретическую интерпретацию привлекшим большой интерес численным экспериментам по переносу в системе дрейфовых конвективных ячеек, наблюдавшихся в турбулентной замагниченной плазме токамаков [148]. В этих экспериментах рассматривалась диффузия частиц в поле нескольких электростатических волн. С формальной точки зрения результат должен был бы описываться классической квазилинейной теорией, однако были обнаружены существенные отличия поведения как коэффициента диффузии частиц, так и колмогоровской энтропии от квазилинейного поведения. Основной причиной этих отличий послужило то, что с возрастанием амплитуды скорости конвективные каналы становятся уже и темп роста эффективного переноса замедляется по сравнению как с квазилинейной,  $D_{\text{eff}} \propto V_0^2$ , так и с линейной (бомовской),  $D_{\text{eff}} \propto V_0$ , оценками.

С другой стороны, используя в качестве затравочной диффузии результат раздела 7 для стохастических слоёв

$$D_0 \propto D_\psi \propto \varepsilon_\omega^2 \lambda^2 \omega_0, \quad (82)$$

несложно получить из скейлинга для конвективных ячеек оценку эффективного коэффициента диффузии

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon_\omega) \propto \sqrt{D_0} \propto \varepsilon_\omega \sqrt{\omega_0}. \quad (83)$$

Такой тип зависимости эффективного коэффициента диффузии от амплитуды возмущения получил как теоретическое, так и экспериментальное подтверждение. Соломон и Голуб рассмотрели функцию тока, моделирующую режимы периодической неустойчивости в системе конвективных ячеек [149],

$$\Psi(x, y, t) = V_0 \lambda \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + \varepsilon_\omega \lambda \sin \omega t) \right] \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right), \quad (84)$$

где  $\lambda$  — характерный пространственный масштаб,  $\omega$  — характерная частота возмущений,  $\varepsilon_\omega \propto \sqrt{\text{Ra} - \text{Ra}_*}$  — масштаб возмущений, связанный с отклонением числа Рэлея

$$\text{Ra} = \frac{\alpha_p g \Delta T L_0^3}{k_B v_f} \quad (85)$$

от критического значения  $\text{Ra}_*$ , при котором возникают периодические осцилляции ячеек. Здесь  $\alpha_p$  — температурный коэффициент,  $g$  — гравитационная постоянная,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Важным экспериментальным результатом стало значительное увеличение переноса по сравнению с таковым в стационарном случае. Поток частиц, возникающий в этих режимах, был пропорциональным амплитуде возмущения:  $\varepsilon_\omega \propto \propto (\text{Ra} - \text{Ra}_*)^{1/2}$ .

## 9. Функция Мельникова и стохастический слой

Нетривиальный характер переноса в модели Соломона — Голуба (см. раздел 8) удается объяснить, рассматривая появление стохастических слоёв в окрестности сепаратрис, разделяющих вихревые ячейки, в рамках теории возмущений функции тока (гамильтониана), описывающей стационарное ячеистое течение  $\Psi_0(x, y)$ :

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, y) + \varepsilon_\omega \Psi_1(x, y, t). \quad (86)$$

С появлением осциллирующих возмущений регулярные границы ячеек (сепаратрисы) подвергаются деформациям (рис. 19), связанным с появлением гетероклинических траекторий [76–80]. В 1963 г. Мельников [138, 150] предложил метод исследования подобных осциллирующих возмущений, и фактически одновременно такой подход был использован для анализа структуры разрушенных магнитных поверхностей в плазменных ловушках для систем управляемого термоядерного синтеза Морозовым и Соловьевым [151], которые рассмотрели осциллирующие "лепестки" силовых линий магнитного поля. В случае скаляра "лепестки" линий тока приводят к стохастизации переноса лагранжевых частиц (lobe transport), что вызывает усиление потоков по сравнению с таковыми при диффузии молекулярного типа.

Исследования, связанные с нетривиальным поведением фазовых траекторий возмущённых гамильтоновых систем, были начаты ещё Пуанкаре [2–5] и позднее

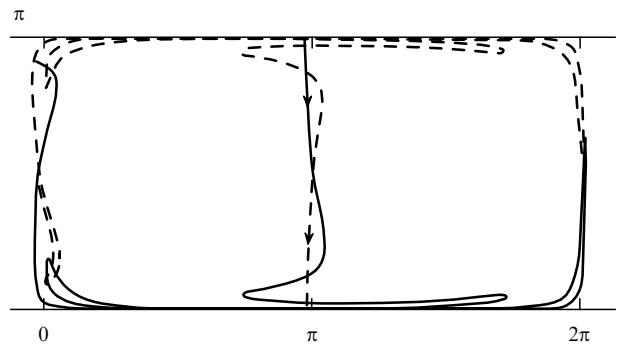


Рис. 19. Расщепление сепаратрис в системе конвективных (вихревых) ячеек.

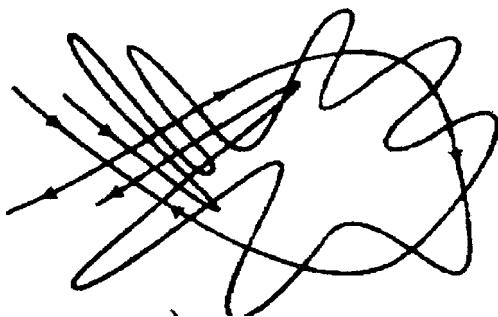


Рис. 20. Фазовый портрет системы с одной гиперболической точкой.

продолжены Биркгофом и Андроновым. Подробно эти вопросы, связанные с понятиями устойчивых и неустойчивых многообразий, описаны в обширной учебной литературе [77–81, 102, 147, 152]. Для целей настоящего обзора мы схематически изложим основные идеи этого подхода на примере сепаратрисной петли, имеющей одну гиперболическую точку (рис. 20). Такая ситуация возникает, например, при движении частицы в "кубическом" потенциале вида

$$U(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3, \quad (87)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы, выбираемые из физических соображений.

Вблизи сепаратрисы период колебания частицы стремится к бесконечности. Поэтому малые возмущения частоты могут вызывать значительное изменение фазы колебаний. Возникающая здесь локальная неустойчивость траекторий приводит к расщеплению возмущённой сепаратрисы, что впервые было обнаружено Пуанкаре.

Действительно, через гиперболическую точку рассматриваемой сепаратрисы проходит четыре "усы", а сама сепаратриса разделяет финитные и инфинитные траектории частиц в данном кубическом потенциале. Рассмотрим два "усы",  $S_+$ ,  $S_-$ . Возмущения могут привести к тому, что между  $S_+$  и  $S_-$  возникает небольшой зазор, и вследствие периодичности возмущения усы начинают независимо осциллировать (рис. 21). Осцилляции возрастают по амплитуде, и одновременно уменьшаются их шаг — при рассмотрении  $S_+$  в направлении  $S_-$ . В случае  $S_-$  осцилляции возрастают по амплитуде и одновременно уменьшаются их шаг по мере удаления от гиперболической точки в направлении  $S_+$ . Такая специфика поведения обусловлена усилением неустойчивости по мере удаления от гиперболической точки (увеличение деформации фазовых элементов) и с замедлением движения при приближении к концу петли. Рассматриваемые усы трансверсально пересекаются, приводя к возникновению стохастического слоя в окрестности невозмущённой сепаратрисы.

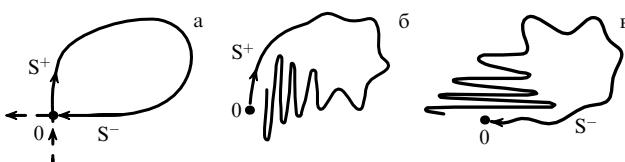


Рис. 21. Две ветви расщеплённой сепаратрисы в системе с одной гиперболической точкой.

Как мы видели в разделах 2–8, разрушение сепаратрисы оказывает существенное влияние на процессы переноса, позволяя частицам преодолевать барьеры, разделявшие области финитного (связанного с захватом частиц вихрем) и инфинитного движений в невозмущённой системе линий тока.

Мельников [138, 150] предложил аналитический метод, позволяющий вычислить величины смещения усов по нормали от невозмущённой сепаратрисы. Причём знакопеременность введённой величины при движении по петле сепаратрисы будет свидетельствовать о наличии трансверсальных пересечений устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в возмущённой гамильтоновой системе. Амплитуду осциллирующей функции Мельникова можно интерпретировать как ширину стохастического слоя.

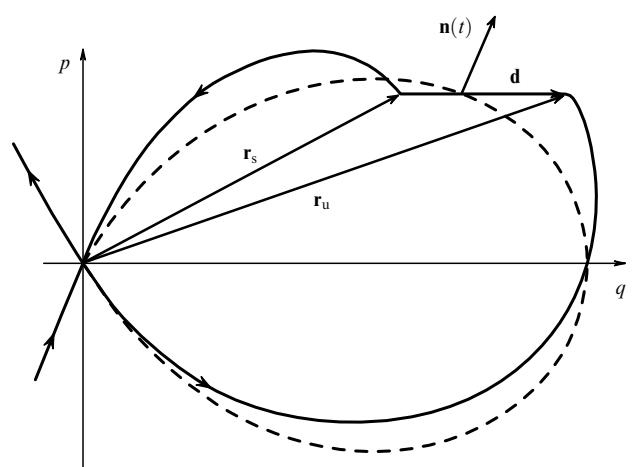
Основная идея состоит в том, что на невозмущённой сепаратрисе вектор, соответствующий скорости движения точки вдоль фазовой траектории  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ , является касательным к сепаратрисе. С другой стороны, несложно построить ортогональный ему вектор  $(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ . Тогда скалярное произведение этого ортогонального невозмущённой сепаратрисе вектора на вектор, описывающий возмущённое движение изображающей точки на фазовой плоскости  $(x_1(t), y_1(t))$ , можно рассматривать как величину смещения возмущения по нормали от невозмущённой сепаратрисы:

$$\dot{d}_m(t) = \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}. \quad (88)$$

Эта величина будет иметь две компоненты, соответствующие устойчивому,  $\dot{d}_s(t)$ , и неустойчивому,  $\dot{d}_u(t)$ , многообразиям (рис. 22). При этом нужно учесть, что устойчивое многообразие при  $t \rightarrow \infty$  и неустойчивое многообразие при  $t \rightarrow -\infty$  должны стремиться к одной и той же неподвижной точке (в гомоклиническом случае имеем одну гиперболическую точку):

$$x_{u1}(-\infty) = x_{s1}(\infty), \quad (89)$$

$$y_{u1}(-\infty) = y_{s1}(\infty). \quad (90)$$

Рис. 22. Схематическое изображение вектора, определяющего расстояние Мельникова.  $n(t)$  — нормаль к сепаратрисе,  $d$  — вектор Мельникова,  $r_s$  и  $r_u$  — радиусы-векторы входящей и выходящей ветви возмущённой сепаратрисы соответственно.

Это означает, что при вычислениях необходимо принимать во внимание условие равенства смещений возмущённых ветвей сепаратрисы

$$d_s(\infty) = d_u(-\infty). \quad (91)$$

Переходя к интегрированию и вычитая друг из друга смещения, соответствующие устойчивым и неустойчивым ветвям, приходим к интегральному выражению Мельникова, описывающему расщепление сепаратрисы (расстояние между возмущёнными ветвями сепаратрисы)

$$\delta\Psi_0(t_0) = \varepsilon_\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( \frac{\partial\Psi_1(x,y)}{\partial x} \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1(x,y)}{\partial y} \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} \right). \quad (92)$$

Здесь мы используем асимптотическое представление для траекторий частиц в случае, когда гамильтониан системы представлен в виде возмущения интегрируемой задачи, решение которой в виде  $x(t), y(t)$  предполагается известным,

$$x(t, t_0) \approx x(t_0) + \varepsilon_\omega x_1(t), \quad (93)$$

$$y(t, t_0) \approx y(t_0) + \varepsilon_\omega y_1(t), \quad (94)$$

где  $(x(t_0), y(t_0))$  — начальные положения частицы.

Метод Мельникова применим и в случае нескольких седловых (гиперболических) точек (рис. 23). Выбрав функцию тока (гамильтониан) в форме, моделирующей систему регулярных вихревых ячеек,

$$\Psi_0 = V_0 \lambda \sin x \sin y \quad (95)$$

и возмущающую функцию в специальном, удобном для последующих вычислений, виде

$$\Psi_1 = -\varepsilon_\omega \omega \left[ xy \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (96)$$

можно вычислить функцию Мельникова, взяв сепаратрисную ветвь, соединяющую точки  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$ . Тогда,

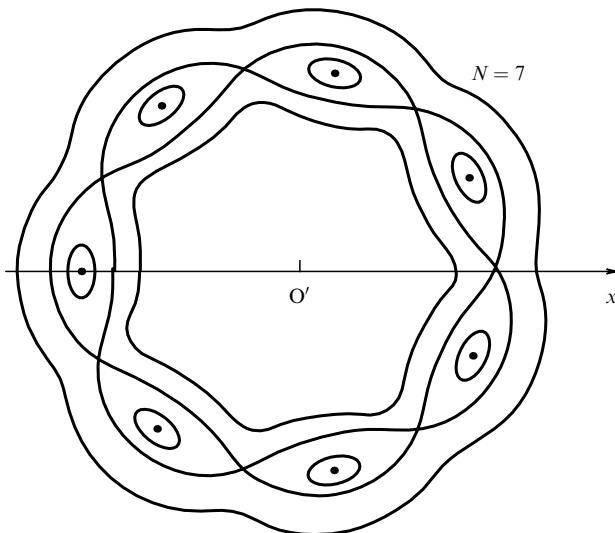


Рис. 23. Схематическое изображение сепаратрис в присутствии нескольких гиперболических точек в модели Морозова–Соловьёва для тороидального магнитного поля.

следуя изложенной выше методике, получим [153]

$$\delta\Psi(t_0) = \varepsilon_\omega \omega \lambda^2 \pi \operatorname{sech} \left( \frac{\lambda}{V_0} \frac{\omega \pi}{2} \right) \sin \left( \omega t_0 + \frac{\pi}{4} \right). \quad (97)$$

Здесь периодическое возмущение с характерной частотой  $\omega$  также вызывает расщепление сепаратрисы и ширина стохастического слоя даётся выражением

$$\delta\Psi \approx \varepsilon_\omega \lambda^2 \omega \pi \operatorname{sech} \left( \frac{\lambda}{V_0} \frac{\omega \pi}{2} \right), \quad (98)$$

что приводит к характерной зависимости эффективной диффузии от амплитуды осциллирующих возмущений. Теперь несложно получить оценку эффектов переноса, учитывающую разрушение сепаратрис, ограничивающих вихревые структуры, и соответствующую данным эксперимента Соломона – Голуба:

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon_\omega) \propto \delta\Psi \propto \varepsilon_\omega. \quad (99)$$

Заметим, что использование простейшей формы метода возмущений ограничивает область применения метода Мельникова только малыми окрестностями сепаратрисы. В области развитого хаоса используется метод ренормгруппы, развитый Заславским и Чириковым [4–6, 61, 62], а детальное исследование трансверсальной структуры пересечений стимулировало развитие методов символической динамики [61, 62].

Лагранжева турбулентность является сейчас вполне самостоятельной областью исследований, поэтому мы ограничились лишь общими замечаниями. Естественно, особый интерес вызывают модели течений, в которых вид функции  $\Psi$  выбирается из условия согласования с динамическими законами движения жидкости. Так, в геофизической гидродинамике одной из первых моделей, в которой динамический хаос был тщательно исследован, стало вихревое течение Кида [154]. Классическая гидродинамика имеет в своём багаже огромное число модельных функций тока, способных служить удовлетворительными моделями морских и океанических течений, в которых динамика переноса скаляра обусловлена одновременным существованием как крупномасштабных вихревых структур, так и струйных (меандрических) течений. Не последнюю роль играет также возможность включить в рассмотрение эффекты вращения и различные формы границ, моделирующие берега морского бассейна [79–83, 152, 155].

## 10. Расщепление седловых точек и аддективный перенос

Рассмотренное в разделе 6 появление стохастических слоёв позволяет поставить вопрос о существовании в двумерных течениях "транспортных каналов", значительно влияющих на процессы переноса. Наглядный пример соответствующей функции тока можно построить, рассматривая стационарные возмущения регулярной системы конвективных ячеек. Так, в случае наложения периодического ширового течения с функцией тока  $\varepsilon_\psi \sin y$  результирующее поле течения

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(\sin x + \sin y) + \varepsilon_\psi \sin y \quad (100)$$

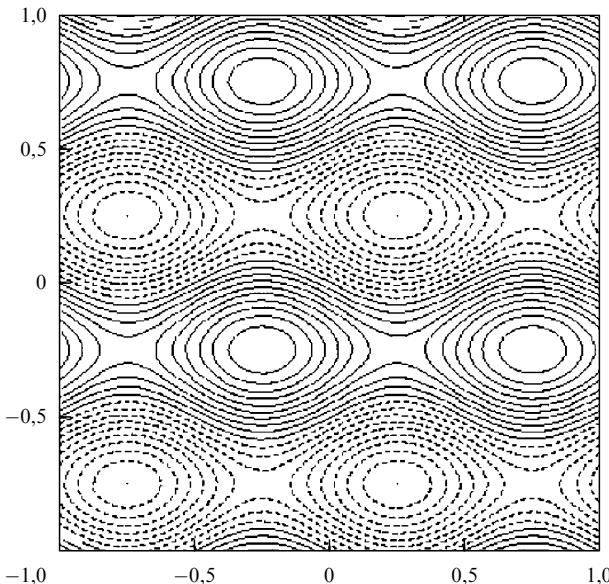


Рис. 24. Появление открытых линий тока в системе конвективных (вихревых) ячеек.

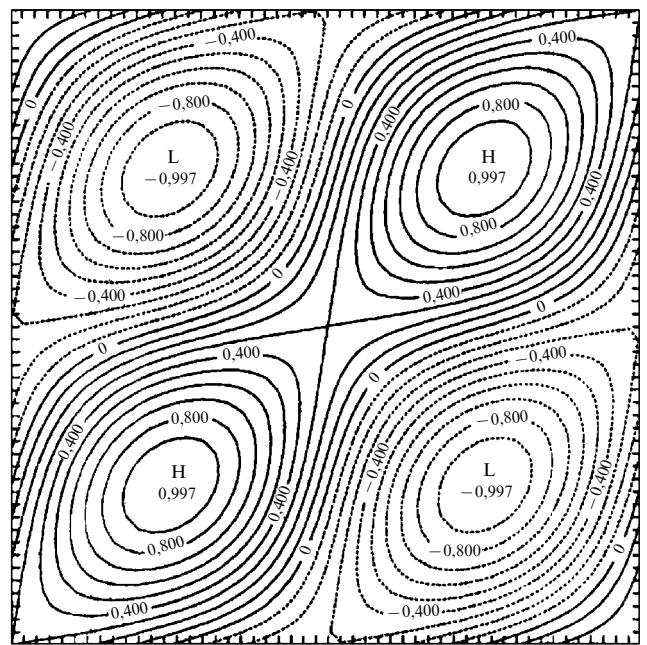


Рис. 25. Система "кошачьих глаз" в системе конвективных (вихревых) ячеек.

будет содержать "открытые" линии тока (рис. 24). Здесь  $\varepsilon_\Psi$  — амплитуда ширового возмущения. Существование пронизывающих всю систему линий тока, очевидно, приведёт к доминированию конвективного переноса над диффузионным. Такие ситуации возникают в физике высокотемпературной замагниченной плазмы, физике океанических течений и др.

Система конвективных потоков, возникающая вследствие наложения малого однопараметрического периодического возмущения

$$\Delta\Psi(x, y) = \varepsilon_\Psi \cos x \cos y \quad (101)$$

на систему регулярных конвективных ячеек (симметричные ячейки Тейлора – Робертса), подробно изучалась посредством численного моделирования функции тока

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 \sin x \sin y + \varepsilon_\Psi \cos x \cos(ky). \quad (102)$$

Здесь  $\varepsilon_\Psi$  — амплитуда возмущения. В случае  $\varepsilon_\Psi > 0$  линии тока  $\Psi = \text{const}$  формируют периодическую систему вихрей "кошачий глаз" (cat's-eyes system), разделённых открытыми конвективными каналами (рис. 25). Здесь адvection является доминирующим механизмом переноса, а ширина конвективных каналов при  $\text{Pe} \gg 1$  оценивается как [63]

$$\Delta(V_0) \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}}} \propto \frac{1}{\sqrt{V_0}}. \quad (103)$$

Естественно, регулярные структуры являются скорее исключением, чем правилом. Реалистичное и одновременно нетривиальное вихревое течение возникает, если в системе регулярных конвективных ячеек под действием внешних возмущений сепаратрисы в окрестности седловых точек будут расщепляться случайным образом (рис. 26). Такое двумерное стационарное течение с нулевой средней скоростью задаётся изотропной, в среднем осциллирующей, квазислучайной в расположении седловых точек по высоте функцией тока  $\Psi(x, y)$ . В данной

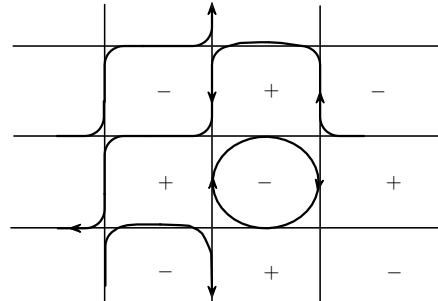
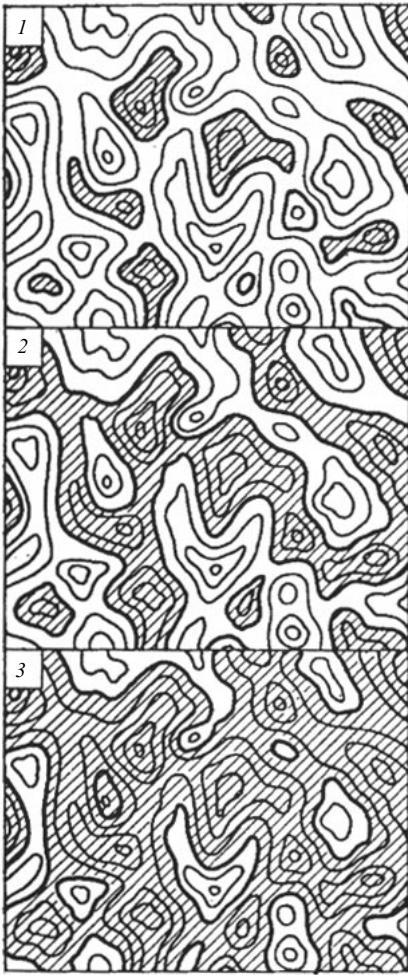


Рис. 26. Случайное расщепление сепаратрис в системе конвективных (вихревых) ячеек, моделирующее стационарное хаотическое поле скорости в двумерном случае.

постановке рассматриваемая задача сводится к переколационному описанию топологического фазового перехода (модель континуальной переколяции) (рис. 27) в системе линий уровня [69–71]. Строго доказано, что для любой функции  $\Psi(x, y)$  "общего положения" существует и является единственной нулевой замкнутая линия тока (переколяционная линия тока) бесконечной длины [156, 157].

Задачи статистической топографии рассматривались в контексте исследований двумерных турбулентных течений как с точки зрения корреляционного анализа [158, 159], так и с целью получения эффективных коэффициентов диффузии [69, 71, 74] и описания процессов пересоединения в магнитной гидродинамике [160]. Как модель для анализа турбулентного переноса этот подход впервые был предложен Кадомцевым и Погуце [69], а в работе [161] было подробно исследовано одномасштабное переколяционное стационарное течение, в котором

$$\Psi_0 \approx \lambda V_0, \quad \lambda \approx \left| \frac{\Psi}{\nabla \Psi} \right|. \quad (104)$$



**Рис. 27.** Перколяция в двумерном потенциале. Переход происходит от "бескрайней" суши с отдельными озёрами к "бескрайнему" морю с отдельными островами.

Формальное выражение для коэффициента диффузии в перколяционном пределе может быть представлено в виде, обобщающем аналогичную формулу для конвективных ячеек:

$$D_{\text{eff}} = \int_0^\infty \frac{d\Psi_1}{\Psi_1} P_\infty(\Psi_1) \frac{a^2(\Psi_1)}{\tau(\Psi_1)}, \quad (105)$$

где возмущение гамильтониана даётся оценкой  $\Psi_1 \approx \varepsilon_* \lambda V_0$ . Здесь время корреляции  $\tau$  оценивается баллистически,

$$\tau \approx \tau_B \approx \frac{L(\varepsilon)}{V_0}, \quad (106)$$

$P_\infty = L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon) / a^2(\varepsilon)$  — доля объёма, занятого перколяционными линиями тока,  $\Delta$  — ширина перколяционного слоя,  $a$  — корреляционный масштаб (длина перемешивания). Вычисления приводят к скейлингу [161]

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx \frac{a^2}{\tau} P_\infty \approx \frac{a^2}{\tau} \frac{L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)}{a^2} \approx V_0 \Delta(\varepsilon), \quad (107)$$

подтверждающему тезис о важности рассмотрения стохастического слоя при анализе переноса в условиях

структурной турбулентности. Фактически задача нахождения коэффициента турбулентной диффузии в рассматриваемом приближении свелась к вычислению ширины стохастического (перколяционного) слоя и малого перколяционного параметра  $\varepsilon$ , характеризующего близость системы к перколяционному переходу.

Вычисления коэффициентов переноса удаётся провести полностью, если использовать для корреляционного масштаба  $a$  и длины фрактальной линии тока  $L$  как функции  $\varepsilon$  полученные в теории континуальной перколяции скейлинги [156, 157],

$$a(\varepsilon) = \lambda \varepsilon^{-v}, \quad L(\varepsilon) = \lambda \left( \frac{a}{\lambda} \right)^{D_h}, \quad (108)$$

где  $v = 4/3$  и  $D_h = 1 + 1/v$  — строго вычисленные с помощью методов конформной теории поля перколяционные индексы для двумерных систем.

Сама по себе принятая здесь одномасштабная аппроксимация сложного двумерного вихревого течения "разрушенной" решёткой вихрей, безусловно, сильно упрощает картину, однако строгие результаты для перколяционных линий тока (percolation hull) получены только в этом приближении. С другой стороны, если рассмотреть полную иерархию масштабов, то она окажется вполне представительной даже в этом упрощённом случае:

$$L \approx \frac{a}{\varepsilon} \gg a \gg \lambda \gg \Delta \approx \lambda \varepsilon. \quad (109)$$

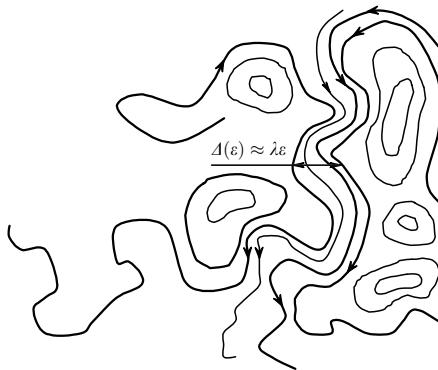
Действительно, мы должны включить в рассмотрение, помимо корреляционного масштаба и "периметра скоплупы", ширину стохастического слоя, возникающего вокруг перколяционной линии тока, поскольку отдельная (изолированная от слоя) линия тока не может внести вклада в эффективный перенос. Как отмечалось ранее, ширина стохастического слоя пропорциональна амплитуде возмущений,  $\Delta \propto \varepsilon_* \lambda$ , которая в нашем случае может рассматриваться как перколяционный параметр  $\varepsilon \approx \varepsilon_*$ , характеризующий отклонение системы от "идеального" перколяционного перехода. Это обеспечивает конечность длины перколяционных линий тока в модельных течениях. С другой стороны, такое определение может интерпретироваться как задание внутренней метрики модели перколяционного стохастического слоя [161, 162]. В этом смысле мы имеем дело с ситуацией, существенно отличающейся от рассмотренной в подходе Скала – Шкловского – де Жена [157], где подобная внутренняя метрика задавалась на основе макромасштаба (длины макросвязи проводящего кластера)  $L \approx \lambda/\varepsilon$ .

Кроме того, можно выделить характерный масштаб  $l_s$ , отвечающий отдельной линии тока, поскольку площадь, соответствующая стохастическому слою  $\Delta$ , заметно больше размеров "элементарной вихревой ячейки",

$$L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon) \approx \frac{a(\varepsilon) \lambda \varepsilon}{\varepsilon} \approx a \lambda \gg \lambda^2. \quad (110)$$

Это естественно, поскольку в стохастическом слое находится далеко не одна линия тока (рис. 28). Подходящей оценкой, характеризующей размер областей, в которых нарушается адиабатический инвариант (экспоненциально малый слой вблизи сепаратрис)  $l_s$ , является [163]

$$L(\varepsilon) l_s(\varepsilon) \approx \lambda^2. \quad (111)$$



**Рис. 28.** Внутренняя структура стохастического слоя, содержащая "пучок" линий тока,  $\Delta$  — ширина стохастического слоя,  $\lambda$  — характерный пространственный масштаб,  $\varepsilon$  — малый переколяционный параметр.

Несложные преобразования дают

$$l_s \approx \frac{\lambda^2}{L(\varepsilon)} \approx \lambda\varepsilon^{v+1} \ll \Delta \approx \lambda\varepsilon. \quad (112)$$

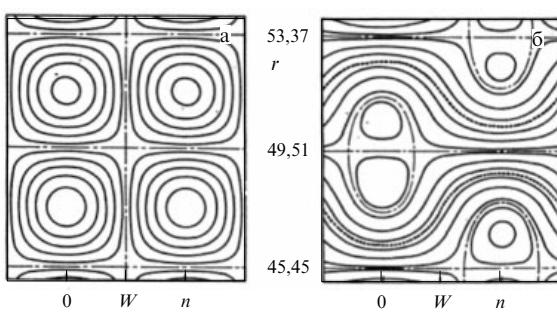
В итоге полная иерархия пространственных масштабов для переколяционных моделей случайных двумерных течений,

$$\lambda\varepsilon^v \approx l_s \ll \Delta \approx \lambda\varepsilon \ll a \approx \frac{\lambda}{\varepsilon^v} \ll L \approx \frac{a}{\varepsilon} \approx \frac{\lambda}{\varepsilon^{v+1}}, \quad (113)$$

имеет достаточно "развитый" вид, что позволяет анализировать нетривиальные корреляционные и транспортные эффекты в двумерных моделях структурной турбулентности.

## 11. Стохастический слой в переколяционном пределе

В работе Грузинова, Исиченко и Калды [163] рассматривалась переколяционная модель переноса в двумерных случайных течениях. В низкочастотном случае,  $\omega \ll V_0/\lambda$ , реальный корреляционный масштаб  $a$ , определяющий эффективный перенос, оказывается много меньше величины  $V_0/\omega$ , формально описывающей пробег частиц вдоль линий тока. Здесь основной декорреляционный механизм связан с перестройкой топологии (например, уменьшением длины линий тока вследствие их перезамыканий) (рис. 29). Заметим, что получение скейлингов,



**Рис. 29.** Пересоединение линий тока в системе конвективных ячеек. (а) Система регулярных конвективных ячеек. (б) Течение, образовавшееся в результате перезамыкания сепаратрис под воздействием малого возмущения.

описывающих процессы пересоединения вихрей, является трудной задачей, поскольку строгой физико-математической картины турбулентности не создано и приходится ограничиваться скейлинговыми оценками [164].

Используя представления о переколяционной иерархии пространственных масштабов, можно рассмотреть характер аномального переноса в условиях, когда переколяционные линии тока играют определяющую роль. Так, число линий тока в стохастическом слое можно оценить как отношение двух характерных масштабов:

$$N_s(\varepsilon) \propto \frac{\Delta}{l_s} \propto \frac{a}{\lambda} \propto P_\infty(\varepsilon) \gg 1. \quad (114)$$

Помимо характерного масштаба турбулентных пульсаций скорости  $V_0$ , в [163] была предложена оценка  $V_s = \lambda\omega \ll V_0$  скорости "встречного" движения сепаратрис в стохастическом слое. Характерное время перезамыкания двух ближайших сепаратрис можно оценить как

$$\tau_s \approx \frac{l_s(\varepsilon)}{V_s} \approx \frac{l_s}{\lambda\omega} \approx \frac{\lambda}{L(\varepsilon)\omega} \ll \frac{1}{\omega}. \quad (115)$$

Фактически это оценка инкремента стохастической неустойчивости  $\gamma_s \approx 1/\tau_s$ , заметно отличающаяся от простейшей, но всё ещё широко распространённой аппроксимации Бэтчелора  $\gamma_s \approx V_0/\lambda$ .

Кроме того, можно оценить время полного "перемешивания" в стохастическом слое (корреляционное время):

$$\tau(\varepsilon) \propto \frac{\Delta(\varepsilon)}{V_s} \propto \varepsilon \frac{1}{\omega}, \quad (116)$$

которое позволяет качественно описать процессы пересоединения линий тока в низкочастотном пределе [71, 72]. Напомним, что отдельная линия тока не вносит вклада в эффективный перенос. Фактически мы имеем дело с нестационарным процессом пересоединения, приводящим к появлению пучка переколяционных линий тока (стохастического слоя). Полезного результата можно было бы ожидать, если бы удалось вычислить конкретное "универсальное" значение малого переколяционного параметра  $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\omega, V_0, \lambda)$ . Авторы [163] предположили, что характерное время перемешивания в стохастическом слое имеет тот же порядок величины, что и время баллистического движения частиц скаляра вдоль переколяционной линии тока,

$$\frac{\varepsilon_*}{\omega} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}, \quad (117)$$

где  $L(\varepsilon) = \lambda(a/\lambda)^{D_h}$ . Тогда вычисления дадут малый переколяционный параметр  $\varepsilon_*$  как функцию параметров течения  $\omega, V_0, \lambda$ :

$$\varepsilon_* = \left( \frac{\lambda\omega}{V_0} \right)^{1/(2+v)} = \left( \frac{1}{Ku} \right)^{3/10}, \quad v = 4/3. \quad (118)$$

Здесь  $\varepsilon_* \ll 1$  при  $Ku \gg 1$ . Выражение для коэффициента диффузии в переколяционном пределе записывается в виде

$$D_{\text{eff}}(\Psi_1) = \int_0^\infty \frac{d\Psi'_1}{\Psi'_1} P_\infty(\Psi'_1) \frac{a^2(\Psi'_1)}{\tau(\Psi'_1)}, \quad (119)$$

где  $\Psi_1 \approx \varepsilon_* \lambda V_0$ . Несложные вычисления приводят к выражению для эффективного переноса, характеризуемого  $D_{\text{eff}}$  [163]:

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon_*) \approx \lambda^2 \omega \left( \frac{V_0}{\lambda \omega} \right)^{7/10} \approx \lambda^2 \omega \text{Ku}^{7/10} \propto V_0^{7/10} \omega^{3/10}. \quad (120)$$

Характер переколяционной зависимости (120) принципиально отличается от квазилинейной оценки  $D_{\text{eff}}(\omega) \propto V_0^2/\omega$  и согласуется с простыми оценками, сделанными нами ранее на основе результатов Чирикова и Заславского для системы конвективных ячеек,  $D_{\text{eff}} \propto \sqrt{V_0 \omega}$ . В обоих случаях мы имеем возрастание эффективного переноса с увеличением частоты в низкочастотных режимах, а зависимость от амплитуды турбулентных пульсаций оказывается более медленной, чем линейная. Многочисленные эксперименты подтверждают переколяционный скейлинг для режимов с  $\text{Ku} \gg 1$  [165–171].

Если принять, что характерная частота  $\omega$ , описывающая периодическое воздействие на систему, не очень высока (низкочастотный предел), то можно предположить, что характерное время развития стохастической неустойчивости будет порядка величины, сравнимой с временем движения частицы вдоль переколяционной линии тока. Это позволяет рассмотреть баланс характерных времён  $\tau_s \approx \tau_B$  как основу для вычисления малого переколяционного параметра:

$$\frac{\lambda}{L(\varepsilon_*) \omega} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}. \quad (121)$$

В результате вычислений получим скейлинг

$$\varepsilon_* \approx \left( \frac{\lambda \omega}{V_0} \right)^{1/[2(v+1)]} \approx \left( \frac{1}{\text{Ku}} \right)^{3/14}, \quad v = 4/3. \quad (122)$$

Выражение для инкремента стохастической неустойчивости  $\gamma_s$  в переколяционном пределе принимает вид

$$\gamma_s \approx \frac{V_s}{l_s(\varepsilon_*)} \approx \omega \frac{L(\varepsilon_*)}{\lambda} \approx \omega \sqrt{\text{Ku}}. \quad (123)$$

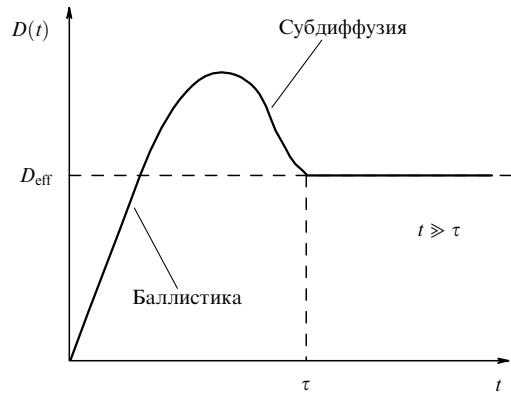
Выражение (123) заметно отличается от квазилинейного результата, полученного Кадомцевым и Погуце,  $\gamma_s \approx \approx \omega \text{Ku}^2$  [69], и хорошо согласуется с результатами численных экспериментов [167, 170].

Эффекты стохастической неустойчивости ярко проявляются на стадии, предшествующей полному "перемешиванию". С этой точки зрения удобно рассмотреть "эволюционирующий" (running) коэффициент диффузии

$$D_*(t) \propto \frac{R^2(t)}{t}. \quad (124)$$

Здесь  $R^2(t)$  — среднеквадратичное смещение частицы скаляра,  $t$  — время. Из общих соображений ясно, что для времён, меньших корреляционных,  $t \ll \tau$ , движение частиц будет баллистическим,  $R^2 \propto V_0^2 t^2$  и  $D_* \propto V_0^2 t$  (рис. 30).

Затем наступает стадия, связанная с декорреляционными процессами в формирующемся под действием неустойчивости стохастическом слое. Здесь одновременно с увеличением длины переколяционной линии



**Рис. 30.** Эволюция коэффициента диффузии частицы в переколяционной модели.  $D(t)$  — "эволюционирующий" коэффициент диффузии,  $D_{\text{eff}}$  — эффективный коэффициент диффузии, установившийся в системе в результате эволюции,  $t$  — время.

тока (или с увеличением пути, проходимого частицей скаляра вдоль линии тока),  $L(t) \propto V_0 t$ , происходит возрастание корреляционного масштаба:

$$a_l(t) \approx \left( \frac{L(t)}{\lambda} \right)^{1/D_h} \approx \left( \frac{V_0 t}{\lambda} \right)^{1/D_h}. \quad (125)$$

Заметим, что возрастание корреляционного масштаба может быть интерпретировано в рамках подхода Корсина, рассматривающего эволюцию лагранжевых корреляций с использованием модели роста корреляционного облака [32, 172, 173]. Этому начальному этапу роста фрактального кластера будет соответствовать субдиффузионный режим переноса, поскольку частицы "исследуют" фрактальную линию тока. Для оценки среднеквадратичного смещения воспользуемся выражением

$$R^2(t) \propto a^2(t) P_\infty(t) \propto a(t) \lambda, \quad (126)$$

что приведёт к скейлингу для коэффициента переноса

$$D_*(t) \propto \frac{R^2(t)}{t} \propto \frac{1}{t^{3/2}} \quad (127)$$

и к формуле для среднеквадратичного смещения

$$R(t) \approx \lambda \left( \frac{L(t)}{\lambda} \right)^{1/(2D_h)} \approx \lambda \left( \frac{V_0 t}{\lambda} \right)^{1/(2D_h)} \propto t^{2/7}, \quad (128)$$

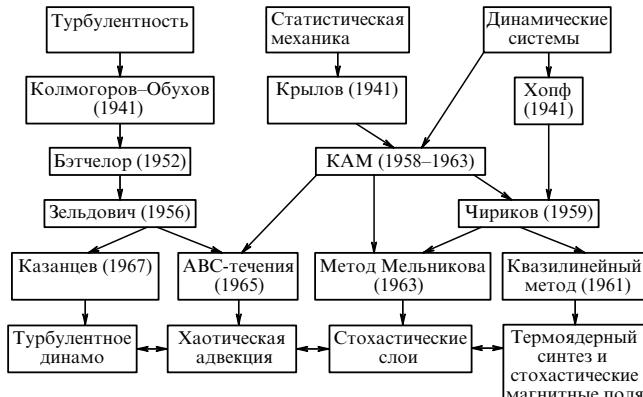
полученными Исиченко при рассмотрении стохастичности силовых линий магнитного поля [174, 175].

Последний этап,  $t \geq \tau$ , будет иметь традиционный диффузионный характер, при этом корреляционное время (время перемешивания) можно получить, используя линейную оценку [176]

$$\Delta(t) \propto V_s t \propto \lambda \omega t \quad (129)$$

и баланс эволюционирующих корреляционных масштабов

$$\lambda \left( \frac{V_0 \tau}{\lambda} \right)^{1/D_h} = \lambda \left( \frac{\lambda}{\Delta(\tau)} \right)^v. \quad (130)$$



**Рис. 31.** Схематическое изображение основных направлений развития теории стохастической неустойчивости.

Заметим, что линейная оценка для эволюции ширины стохастического слоя является связующим звеном между феноменологической аппроксимацией корреляционного времени в виде  $\tau \propto \varepsilon T_0$  и скейлингом Заславского – Филоненко для ширины стохастического слоя в низкочастотных режимах

$$\Delta \propto \frac{\omega}{\omega_0} \varepsilon \lambda \propto \omega \lambda \varepsilon T_0.$$

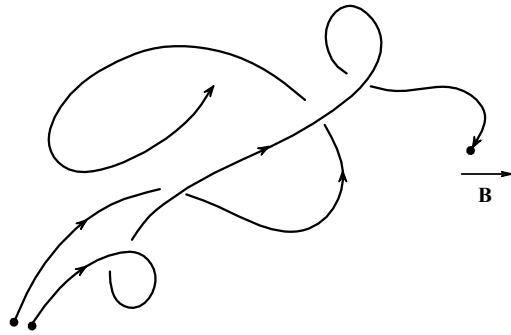
Поэтому, как и в случае стационарных случайных течений, основным замыкающим условием переколяционной модели является  $\Delta \propto \varepsilon \lambda$ . Оценка коэффициента турбулентной диффузии даётся выражением  $D_{\text{eff}} \approx \lambda V_0 (\lambda \omega / V_0)^{3/10}$  [163], полученным ранее для случая нестационарной переколяционной модели. Приведённые в этом разделе результаты будут нами использоваться в разделе 15 при анализе работ, посвящённых рассмотрению переноса частиц в стохастическом магнитном поле tokamaka (рис. 31).

Использованное в этом разделе число Кубо удобно интерпретировать в терминах адиабатического инварианта, если ввести параметр адиабатичности, равный отношению характерного времени движения частицы в случайному потоке к времени изменения функции тока. Так, при описании адвекции в трёхмерных течениях мы не имеем универсального метода, однако, опираясь на представления о диффузии адиабатического инварианта (адиабатический хаос) [177–180], удаётся рассмотреть отдельные виды течений [181].

## 12. Стохастическое магнитное поле и квазилинейная оценка инкремента

Проблема разбегания первоначально близких силовых линий (рис. 32) имеет важное практическое значение в задачах физики плазмы и астрофизике [182–184]. В этом разделе мы рассмотрим одну из простейших оценок стохастической неустойчивости силовых линий магнитного поля в рамках квазилинейного приближения и подтвердим "универсальность" результата Казанцева для случая слабой турбулентности магнитных силовых линий.

В задаче о стохастическом магнитном поле мы должны переопределить понятия инкремента и энтропии Колмогорова – Синая с учётом новой специфики.



**Рис. 32.** Разбегание первоначально близких силовых линий случайного магнитного поля.

Так, в среднем две первоначально близкие силовые линии отклоняются друг от друга согласно закону

$$\Delta(z) = l_0 \exp\left(\frac{z}{\lambda_K}\right). \quad (131)$$

Здесь  $l_0$  — первоначальное расстояние между силовыми линиями,  $z$  — расстояние, пройденное вдоль силовой линии. Величина  $h_K = 1/\lambda_K$  названа колмогоровской энтропией,

$$h_K = \lim_{l_0 \rightarrow 0, z \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{z} \ln \frac{\Delta(z)}{l_0} \right). \quad (132)$$

В лагранжевом приближении уравнения движения силовой линии аналогичны уравнениям, описывающим линии тока. Это позволяет использовать полученные ранее результаты анализа слаботурбулентных течений при описании турбулентности магнитных силовых линий. Кадомцев и Погуце успешно реализовали этот подход для сильноанизотропного случая, когда малое случайное поле  $\mathbf{B}'(B_x, B_y, 0)$  наложено на большое постоянное поле  $\mathbf{B}(0, 0, B_0)$ , направленное по оси  $z$ ,

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}'(x, y, z), \quad (133)$$

где  $\text{div } \mathbf{B}'(x, y, z) = 0$ . Лагранжевы уравнения движения силовой линии в этом приближении даются векторным уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_\perp), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}'}{B_0}. \quad (134)$$

Для оценок будем использовать величину  $b_0$  как характерный относительный масштаб возмущений. В задачах о диффузии магнитных силовых линий в высокотемпературной плазме порядок возмущений оценивается как  $b_0 \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  [185, 186].

Тогда классическое тейлоровское выражение [69, 187] для коэффициента поперечной диффузии силовых линий магнитного поля принимает квазилинейный вид:

$$D_m = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle \mathbf{b}(z, 0) \mathbf{b}(0, 0) \rangle \propto b_0^2 \lambda_z. \quad (135)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение,  $\lambda_z$  — продольный корреляционный масштаб стохастического магнитного поля,

$$\lambda_z = \frac{1}{b_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle \mathbf{b}(z, 0) \mathbf{b}(0, 0) \rangle. \quad (136)$$

В случае анизотропии необходимо тщательно анализировать как продольные, так и поперечные корреляционные эффекты. Здесь мы пренебрегли поперечным смещением  $\lambda_{\perp}$  в тейлоровском выражении для коэффициента диффузии,  $\mathbf{b}(z, \lambda_{\perp}) \approx \mathbf{b}(z, 0)$ , что будет справедливо только в случае, когда диффузионное смещение в поперечном направлении много меньше поперечного корреляционного масштаба:  $b_0 \lambda_z \ll \lambda_{\perp}$ . Кадомцев и Погуце [69] предложили критерий применимости такого подхода в терминах безразмерного параметра магнитного числа Куло, характеризующего отношение продольных и поперечных корреляционных эффектов:

$$Ku_m = \frac{b_0 \lambda_z}{\lambda_{\perp}}. \quad (137)$$

Квазилинейное приближение справедливо при условии  $Ku_m < 1$ .

Теперь несложно получить выражение, описывающее начальный этап разбегания силовых линий стохастического магнитного поля,

$$\frac{\partial}{\partial z} (r_2 - r_1) = b(z, r_2) - b(z, r_1) \approx \frac{\partial b}{\partial r} (r_2 - r_1), \quad (138)$$

в пределе малой величины относительного смещения  $r_2 - r_1$  [69]. Оценку относительного смещения можно получить в экспоненциальном виде:

$$r_2(z) - r_1(z) = \Delta r \approx \Delta r \Big|_{z=0} \exp \left( \int_0^z \frac{\partial b}{\partial r} dz \right). \quad (139)$$

Скейлинг для инкремента стохастической неустойчивости подразумевает усреднение этого выражения для  $\Delta r(z)$ . Предположив гауссов характер возмущения магнитного поля, можно, опираясь на классическую формулу

$$\langle \exp A \rangle = \exp \left( \frac{1}{2} \langle A^2 \rangle \right), \quad (140)$$

оценить инкремент стохастической неустойчивости, и тогда становится чётко виден квадратичный характер зависимости инкремента от амплитуды возмущений магнитного поля,

$$\gamma_z \approx \frac{b_0^2 \lambda_z}{\lambda_{\perp}^2} \approx \frac{1}{\lambda_z} Ku_m^2. \quad (141)$$

Результат (141) можно представить и в несколько другой, но тоже содержательной, форме:  $\gamma_z \approx D_m / \lambda_{\perp}^2$ , где учтено, что квазилинейный предел предполагает выполнение соотношения  $D_m \approx b_0^2 \lambda_z$ . Естественно, пределы применимости выражения для инкремента стохастической неустойчивости совпадают с пределами применимости квазилинейного приближения  $Ku_m \approx b_0 \lambda_z / \lambda_{\perp} < 1$ . Отметим, что для квазизотропного стохастического магнитного поля аналогичные вычисления проведены Птускиным [188].

Действительно, важную роль в оценках инкремента стохастической неустойчивости играют особенности топологии стохастического магнитного поля. Так, в проблеме магнитного удержания высокотемпературной плазмы важно учитывать шировые эффекты [185, 186]:

$$\mathbf{B} = B_0 (\mathbf{e}_z + q(x) \mathbf{e}_y) + \delta \mathbf{B}(x, y, z), \quad (142)$$

где  $q$  — шир магнитного поля.

Несмотря на существенное усложнение картины поведения силовых линий, удается переопределить величину  $\gamma_z$  для этого случая, вводя дополнительный характерный пространственный масштаб  $L_s = (dq/dx)^{-1} \approx \approx \text{const}$  в случае постоянного ширины. Модифицированные уравнения для силовых линий примут вид

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp}(x, y)}{dz} = \mathbf{b}(r_{\perp}, z) + q(x) \mathbf{e}_y. \quad (143)$$

В случае малых смещений  $\delta x$  и  $\delta y$  аналогом квазилинейного уравнения будет система уравнений [94]:

$$\frac{d}{dz} \delta x = \frac{\partial b_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial b_x}{\partial y} \delta y, \quad (144)$$

$$\frac{d}{dz} \delta y = \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{1}{L_s} \right) \delta x + \frac{\partial b_y}{\partial y} \delta y. \quad (145)$$

Качественный подход здесь не срабатывает. Уравнение эволюции величины  $\Delta \mathbf{r} = (\langle \delta x^2 \rangle, \langle \delta y^2 \rangle, \langle \delta x \delta y \rangle)$  выражается в матричном виде:

$$\frac{d\Delta \mathbf{r}}{dz} = \hat{W} \Delta \mathbf{r}, \quad (146)$$

где собственные числа матрицы  $\hat{W}$  позволяют определить инкремент стохастической неустойчивости в случае постоянного ширины:

$$\gamma_z = \frac{1}{(\lambda_z L_s^2)^{1/3}}, \quad L_s < \lambda_z. \quad (147)$$

К сожалению, этот результат, полученный Кромесом [94], не позволяет установить прямую связь между  $\gamma_z$  и числом Куло  $Ku_m \approx b_0 \lambda_z / \lambda_{\perp}$ , характеризующим влияние поперечных корреляционных эффектов.

### 13. Слабая турбулентность и скейлинг Кадомцева – Погуце

Если предположить, что главным декорреляционным механизмом является стохастическая неустойчивость, то естественно для оценки эффектов переноса использовать выражение для инкремента. Предположим, что декорреляция связана не со столкновениями частиц, движущихся в стохастическом магнитном поле, а со стохастической неустойчивостью, проявляющейся в экспоненциальном разбегании близких силовых линий. Роль затравочной диффузии в такой постановке играет случайное блуждание замагниченных частиц вдоль и поперёк силовых линий магнитного поля.

Простейшие оценки можно получить, рассмотрев соотношения для коэффициента диффузии частиц  $D_{\perp}$ , выраженного через коэффициент магнитной диффузии  $D_m$ :

$$D_{\perp} \propto \frac{A_{\text{cor}}^2}{\tau} \propto D_m \frac{L_{\text{cor}}}{\tau}. \quad (148)$$

Здесь  $L_{\text{cor}}$  — продольная корреляционная длина,  $\tau$  — корреляционное время. В этом подходе предполагается, что коэффициент магнитной диффузии  $D_m$  и столкновительные коэффициенты продольной,  $\chi_{\parallel}$ , и поперечной,  $\chi_{\perp}$ , диффузии известны. Рассмотрение обычно проводят в терминах коэффициентов теплопроводности, чтобы не усложнять задачу вопросами, связанными с амбиполярностью плазмы.

В случае диффузионного характера продольных движений частиц вдоль магнитного поля удобно ввести характерный пространственный масштаб  $\lambda_z$ , соответствующий продольной корреляционной длине. Существует взаимосвязь величин  $L_{\text{cor}}$  и  $\tau$ , которая основана на выражении для коэффициента продольной диффузии  $\chi_{\parallel} \approx L_{\text{cor}}^2/(2\tau)$ . Тогда после подстановки  $\tau = \tau(\chi_{\parallel})$  в (148) получаем оценку поперечного коэффициента диффузии частиц

$$D_{\perp} \propto D_m(b_0) \frac{\chi_{\parallel}}{L_{\text{cor}}}. \quad (149)$$

Выражение для коэффициента поперечной диффузии на масштабах  $z > \lambda_z$  в терминах корреляционного времени  $\tau$  приобретает следующий вид:

$$D_{\perp}(\tau) \propto D_m(b_0) \sqrt{\frac{\chi_{\parallel}}{\tau}}. \quad (150)$$

Мы использовали простейшую модель случайных блужданий силовых линий, для того чтобы на основе простых оценок получить выражение для анализа эффектов переноса частиц.

Кадомцев и Погуце предложили для корреляционного времени  $\tau$  новый скейлинг, в котором за основу взят инкремент стохастической неустойчивости силовых линий  $\gamma_z$ . Предположив диффузионный характер продольных движений частиц и опираясь на размерностные соображения, удобно представить характерное корреляционное время в виде [69]

$$\tau \approx \frac{1}{\gamma_z^2 \chi_{\parallel}} \approx \frac{\lambda_{\perp}^4}{b_0^4 \lambda_z \chi_{\parallel}} \approx \frac{\lambda_z^2}{\chi_{\parallel}} K u_m^{-4}. \quad (151)$$

После подстановки (151) в формулу (150) для коэффициента поперечной диффузии частиц получим

$$D_{\perp}(K u_m) \propto D_m \chi_{\parallel} \gamma_z(K u_m) \approx D_m \chi_{\parallel} \frac{K u_m^2}{\lambda_z}. \quad (152)$$

Здесь коэффициент диффузии силовых линий  $D_m$  также зависит от магнитного числа Кубо. Поскольку для инкремента стохастической неустойчивости использовалось квазилинейное приближение, такое же квазилинейное приближение должно быть использовано и для коэффициента диффузии силовых линий,  $D_m \propto b_0^2 \lambda_z$ . В итоге получаем скейлинг для эффективного поперечного коэффициента диффузии частиц в стохастическом магнитном поле с нетривиальной зависимостью от амплитуды турбулентных пульсаций поля:

$$D_{\perp}(b_0) \propto \chi_{\parallel} b_0^2 K u_m^2 \approx \chi_{\parallel} b_0^4 \left( \frac{\lambda_z}{\lambda_{\perp}} \right)^2. \quad (153)$$

Условие применимости для этого режима переноса получается на основе принципа выбора быстрой моды,  $\tau_{\text{eff}} < \tau_{\perp}$  [189]. Здесь мы предполагаем, что альтернативным механизмом декорреляции является поперечная столкновительная диффузия частиц (с характерным временем декорреляции  $\tau_{\perp}$ ), приводящая к смене несущей силовой линии поля. Тогда с учётом последнего неравенства получаем условие существования режимов, в которых главным декорреляционным механизмом

является стохастическая неустойчивость,

$$\frac{\lambda_{\perp}^2}{D_{\perp}(\chi_{\parallel})} < \frac{\lambda_{\perp}^2}{\chi_{\perp}}, \quad (154)$$

или в терминах коэффициентов переноса

$$D_{\perp} \propto \chi_{\parallel} b_0^4 \left( \frac{\lambda_z}{\lambda_{\perp}} \right)^2 > \chi_{\perp}. \quad (155)$$

Важно отметить, что для задачи удержания высокотемпературной плазмы в установках типа токамак коэффициент продольной диффузии частиц много больше поперечного коэффициента диффузии,  $\chi_{\parallel} \gg \chi_{\perp}$ . Это условие несложно представить в плазмо-физических терминах:

$$\chi_{\parallel} \approx V_T^2 \tau_{\text{ei}}, \quad (156)$$

$$\chi_{\perp} \approx \frac{r_e^2}{\tau_{\text{ei}}} \approx \frac{1}{\tau_{\text{ei}}} \left( \frac{V_T}{\Omega_e^h} \right)^2. \quad (157)$$

Здесь  $V_T$  — тепловая скорость электронов,  $v_{\text{ei}} \approx 1/\tau_{\text{ei}}$  — электронно-ионная частота столкновений,  $r_e$  — ларморовский радиус электронов,  $\Omega_e^h \gg v_{\text{ei}}$  — гирочастота электронов. Тогда получаем условие доминирования продольной диффузии, выраженное через характерные времена задачи,

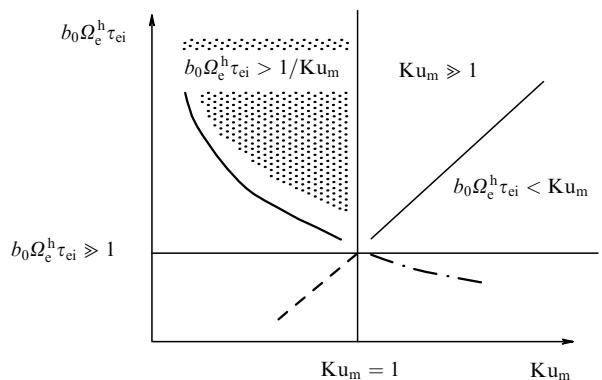
$$\frac{\chi_{\parallel}}{\chi_{\perp}} \approx (\Omega_e^h \tau_{\text{ei}})^2 \gg 1. \quad (158)$$

После несложных вычислений находим область применимости исследуемого режима в плазмо-физических терминах (рис. 33)

$$b_0 \Omega_e^h \tau_{\text{ei}} > \frac{1}{K u_m} \approx \frac{\lambda_{\perp}}{b_0 \lambda_z}, \quad (159)$$

где  $K u_m \ll 1$ , поскольку выше мы использовали квазилинейную модель для  $D_m$  и  $\gamma_z$ . Заметим, что условие (159) может быть интерпретировано в терминах характерных пространственных масштабов,

$$l_{\text{cor}}(\chi_{\parallel}) \propto \sqrt{2 \chi_{\parallel} \tau_{\text{eff}}(K u_m)} \approx \frac{\lambda_z}{K u_m} \gg \lambda_z. \quad (160)$$



**Рис. 33.** Диаграмма, показывающая область применимости режима Кадомцева–Погуце.  $b_0$  — безразмерная амплитуда флукутаций магнитного поля,  $K u_m$  — магнитное число Кубо,  $\Omega_e^h$  — гирочастота вращения электронов,  $\tau_{\text{ei}}$  — характерное время электронно-ионных столкновений. Заштрихована область применимости режима Кадомцева–Погуце.

Предложенный Кадомцевым и Погуце подход, который основывается на "прямолинейном" использовании инкремента стохастической неустойчивости, не учитывает многих особенностей переноса в стохастическом магнитном поле. Тем не менее полученный скейлинг важен для объяснения процессов, происходящих в замагниченной плазме, и он играет важную роль в анализе корреляционных эффектов [121, 124, 125].

#### 14. Аппроксимация Рочестера – Розенблута

Рассмотренный в разделе 13 подход Кадомцева и Погуце был дополнен ими в той же работе [69] анализом декорреляционной роли столкновений частиц, движущихся в заплётённом магнитном поле. Декорреляции, связанные со столкновениями и стохастической неустойчивостью, рассматривались авторами независимо, и каждый из выделенных механизмов позволил получить соответствующий скейлинг [69]. Существует возможность комплексного рассмотрения этих эффектов на основе представлений о характере поведения силовой трубы случайного магнитного поля.

Необходимо отметить, что в теории турбулентного переноса хорошо известна модель Бэтчелора [34, 86], в которой для анализа эволюции пятна примеси в поле колмогоровской турбулентности вводилось предположение о важности учёта "конкуренции" между процессом экспоненциальной неустойчивости и молекулярной диффузией. Рочестер и Розенблют [190] применили этот подход к исследованию переноса частиц в стохастическом магнитном поле, рассмотрев эволюцию силовой трубы стохастического магнитного поля, поведение поперечного сечения которой "копирует" уже изученное поведение "малого элемента фазовой жидкости" масштабом  $l_0$  (рис. 34). В силу условия несжимаемости магнитного поля  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  при наличии стохастической неустойчивости, наряду с экспоненциальным возрастанием расстояния между силовыми линиями  $l(z) = l_0 \exp(z/\lambda_K)$ , ширина элемента будет экспоненциально убывать, для того чтобы первоначальная площадь рассматриваемого элемента фазовой жидкости оставалась неизменной,

$$\delta(z(t)) = l_0 \exp\left(-\frac{z(t)}{\lambda_K}\right). \quad (161)$$

Здесь  $\delta$  — эволюционирующая ширина силовой трубы,  $z$  — расстояние, пройденное вдоль силовой линии. В бесстолкновительном случае  $z(t) \approx V_T t$ . В случае диффузионных блужданий частиц естественно использовать

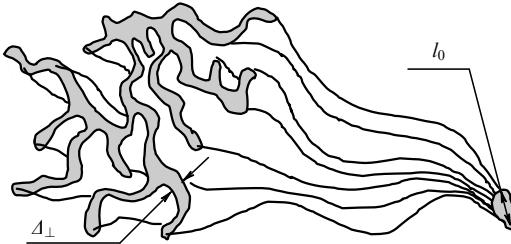


Рис. 34. Сечение силовой трубы заплётённого магнитного поля.  $\Delta_{\perp}$  — ширина стохастического слоя в сечении силовой трубы,  $l_0$  — начальный поперечный размер сечения силовой трубы.

оценку  $z^2(t) \approx 2\chi_{\parallel}t$ , где  $\chi_{\parallel}$  — продольный коэффициент диффузии частиц.

Однако необходимо принять во внимание влияние поперечных диффузионных процессов, которые увеличивают  $\delta$ . Рочестер и Розенблют рассмотрели столкновительный случай, приняв, что  $\delta^2(z) \approx 4\chi_{\perp}t$ , где  $\chi_{\perp}$  — поперечный коэффициент диффузии частиц. Тогда после подстановки последнего соотношения в (161) получаем условие для определения корреляционного времени  $\tau$

$$\sqrt{2\chi_{\parallel}\tau} \approx -\lambda_K \ln \frac{\delta(\tau)}{l_0}, \quad (162)$$

описывающее состояние равновесия, установившееся в результате конкуренции между процессами экспоненциального убывания характерной ширины силовой трубы и её диффузионного возрастания. Решение трансцендентного уравнения (162) получим, беря в качестве первого приближения оценку  $\tau \approx \lambda_K^2/(2\chi_{\parallel})$ . В итоге находим

$$\tau \approx \frac{\lambda_K^2}{8\chi_{\parallel}} \ln^2 \left[ 4 \left( \frac{l_0}{\lambda_K} \right)^2 \frac{\chi_{\parallel}}{\chi_{\perp}} \right] \approx \frac{\tau_K}{4} \ln^2 \left[ 4 \left( \frac{l_0}{\lambda_K} \right)^2 \frac{\chi_{\parallel}}{\chi_{\perp}} \right]. \quad (163)$$

Мы предполагаем, что  $\chi_{\parallel}/\chi_{\perp} \approx (\Omega_e^h \tau_{ci})^2 \gg 1$ , следовательно, частица совершает несколько продольных диффузионных движений и только затем покидает силовую линию из-за наличия поперечной диффузии (декоррелирует) (рис. 35).

Для  $z > \lambda_z$  мы имеем выражение для коэффициента диффузии частиц  $D_{\perp}(\tau) \propto D_m(\chi_{\parallel}/\tau)^{1/2}$ , следовательно, окончательная формула примет вид

$$D_{RR}(\tau) \propto 4\chi_{\parallel} \frac{D_m(b_0)}{\lambda_K} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_K} \right)^2 \frac{\chi_{\parallel}}{\chi_{\perp}} \right]. \quad (164)$$

Здесь мы учли оценки параметров модели, соответствующие задачам магнитного удержания высокотемпературной плазмы,  $l_0 \approx \lambda_{\perp}$  и  $b_0 \ll 1$ . Значения параметров  $D_m, \chi_{\parallel}, \chi_{\perp}, \lambda_{\perp}, \lambda_K$  предполагаются известными, и должно выполняться условие  $(\lambda_{\perp}/\lambda_K)^2(\chi_{\parallel}/\chi_{\perp}) > 1$ , которое удобно выразить в терминах характерных времён модели (доминирование быстрой моды):

$$\tau_{\perp} \approx \frac{\lambda_{\perp}^2}{\chi_{\perp}} > \frac{\lambda_K^2}{\chi_{\parallel}} \approx \tau_K. \quad (165)$$

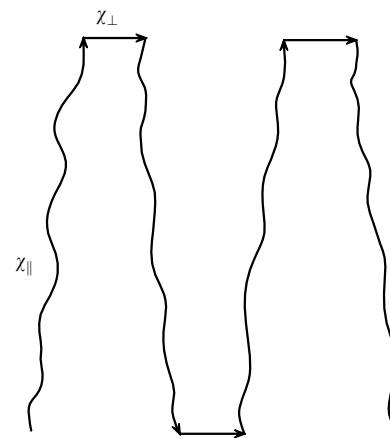


Рис. 35. Схематическое изображение пути заряженной частицы в модели Рочестера – Розенблута.  $\chi_{\parallel}, \chi_{\perp}$  — продольная и поперечная теплопроводности соответственно.

Кроме того, мы можем принять во внимание магнитное число Кубо, которое явно входит в приведённое выше условие, если использовать плазмо-физические параметры:  $b_0 \Omega_e^h \tau_{ei} > K u_m$ .

Корреляционное время и корреляционная длина однозначно связаны. В рассматриваемом случае диффузионных продольных движений справедливо условие  $\tau \approx l_{cor}^2 / (2\chi_{||})$ . Тогда можно получить трансцендентное уравнение для корреляционной длины  $l_{cor}$ , если использовать полученную выше оценку

$$\delta \approx \sqrt{4\chi_{\perp}\tau} \approx l_{cor} \sqrt{2 \frac{\chi_{\perp}}{\chi_{||}}} \ll l_{cor} \quad (166)$$

и представить исходный баланс для характерной ширины силовой трубы в новых терминах:

$$l_{cor} \sqrt{\frac{\chi_{\perp}}{\chi_{||}}} = \lambda_{\perp} \exp\left(-\frac{l_{cor}}{\lambda_K}\right). \quad (167)$$

Применяя уже использованный выше метод итераций, получаем выражение для продольной корреляционной длины

$$l_{cor} \approx \lambda_K \ln\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_K} \sqrt{\frac{\chi_{||}}{\chi_{\perp}}}\right). \quad (168)$$

Практический интерес с точки зрения переноса частиц представляют, помимо стационарных возмущений магнитного поля (braided magnetic field), его временные флуктуации (magnetic flatter). Простейшей оценкой влияния периодических возмущений с частотой  $\omega$  на эффекты стохастической неустойчивости является линейная аппроксимация для описания эволюции декорреляционного размера

$$\frac{d\delta(z(t), \omega)}{dz} \approx b_0 \omega t. \quad (169)$$

Теперь, используя тейлоровский (квазилинейный) скейлинг для соответствующего коэффициента диффузии [173, 174]

$$D_{\omega}(\omega) \approx (b_0 \omega t)^2 \lambda_z, \quad (170)$$

несложно получить для масштабов, больших  $\lambda_z$ , соотношение, связывающее поперечные и продольные эффекты:

$$\delta^2(z, \omega) \approx D_{\omega} z(t) \approx D_m (\omega t)^2 z(t). \quad (171)$$

Напомним, что мы имеем дело со слабой турбулентностью, при которой коэффициент квазилинейной магнитной диффузии даётся оценкой  $D_m \approx b_0^2 \lambda_z$ . Переходя к корреляционным временам, учтём, как и ранее, что продольные движения частиц носят диффузионный характер,  $z^2(\tau) \approx 2\chi_{||}\tau$ , тогда

$$\delta^2(\tau, \omega) \approx \omega^2 D_m \tau^{5/2} \sqrt{2\chi_{||}}. \quad (172)$$

Теперь мы можем воспользоваться балансовым уравнением Рочестера – Розенблюта для определения характерного корреляционного времени  $\tau$

$$\delta(\tau) = \lambda_{\perp} \exp\left(-\frac{z(t)}{\lambda_K}\right). \quad (173)$$

В результате приближённого решения трансцендентного уравнения (173) для корреляционного времени имеем

$$\tau \approx \frac{\lambda_K^2}{2\chi_{||}} \ln^2\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\sqrt{D_m \lambda_K}} \frac{\chi_{||}}{\omega \lambda_K^2}\right) \approx \varepsilon_*^2 \tau_{||} \ln^2\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\sqrt{D_m \lambda_K}} \frac{\chi_{||}}{\omega \lambda_K^2}\right), \quad (174)$$

где  $\tau_{||} \approx \lambda_z^2 / (2\chi_{||})$ . Соответствующий коэффициент диффузии частиц в поле магнитных флюктуаций на масштабах  $z > \lambda_z$  принимает вид [175]

$$D_{\perp} \approx \chi_{||} \frac{D_m}{\lambda_K} \ln^{-1}\left(\frac{\lambda_{\perp}}{\sqrt{D_m \lambda_K}} \frac{\chi_{||}}{\omega \lambda_K^2}\right). \quad (175)$$

Очевидно, что такая слабая зависимость эффективного переноса от частоты модуляции может быть справедлива только в небольшом диапазоне параметров. Критерием применимости оценки (175) является очевидное условие доминирования эффектов стохастической неустойчивости

$$\omega < \frac{1}{\tau_K} \approx \frac{\chi_{||}}{\lambda_K^2}. \quad (176)$$

Фактически это низкочастотное приближение, которое представляет наибольший интерес. Важно также отметить, что рассмотренные выше модели справедливы только в случае слабой турбулентности,  $b_0 \ll 1$ . Противоположный случай сильной турбулентности,  $K u_m > 1$ , требующий учёта эффектов "длинных корреляций", будет далее рассмотрен на основе переколяционной модели (рис. 36).

## 15. Крупномасштабные структуры и переколяционная аналогия

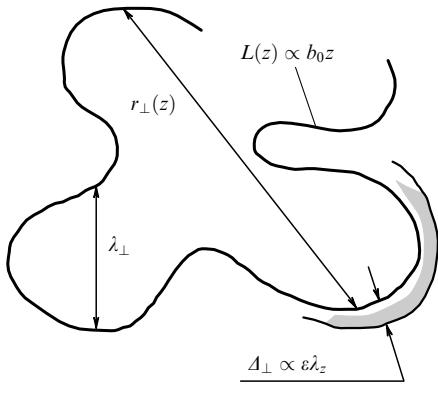
Напомним, что в сильноанизотропном случае,  $\chi_{||} \gg \chi_{\perp}$ , необходимо тщательно анализировать продольные и поперечные корреляционные эффекты. Поэтому пренебрежение поперечным смещением  $\lambda_{\perp}$  в тейлоровском (квазилинейном) выражении для амплитуды магнитных возмущений  $\mathbf{b}(z, \lambda_{\perp}) \approx \mathbf{b}(z, 0)$  является серьёзным недостатком — это выражение будет справедливым только в случае, когда диффузионное смещение в поперечном направлении много меньше поперечного корреляционного масштаба:  $b_0 \lambda_z \ll \lambda_{\perp}$ . Однако для задач сильной турбулентности наибольший интерес представляет случай, в котором поперечные корреляционные эффекты играют значительную роль:  $b_0 \lambda_z \geq \lambda_{\perp}$ .

Кадомцев и Погуце [69] предложили использовать новый подход и сформулировали критерий его применимости в терминах безразмерного параметра — магнитного числа Кубо  $K u_m$ , характеризующего отношение продольных и поперечных корреляционных эффектов:  $K u_m = b_0 \lambda_z / \lambda_{\perp} > 1$ . Авторы [69] связали такой режим с переколяционным характером поведения силовых линий, позволяющим исследовать эффекты "длинных корреляций". Фактически здесь предполагается, что реально возникающая поперечная декорреляция  $b_0 \lambda_z$  оказывается больше, чем формально введённый поперечный масштаб  $\lambda_{\perp}$ .

Проследим стадию формирования переколяционных структур (рис. 37) на основе баллистической аппроксимации для периметра переколяционного кластера (скор-



**Рис. 36.** Схематическое изображение взаимосвязей различных подходов к теоретическому описанию переноса заряженных частиц в стохастическом магнитном поле.



**Рис. 37.** Переколляционная структура в сечении трубки стохастического магнитного поля.  $\Delta_{\perp}$  — ширина стохастического слоя,  $\lambda_z$  — характерный продольный пространственный масштаб,  $\lambda_{\perp}$  — характерный поперечный пространственный масштаб,  $\varepsilon$  — малый переколляционный параметр,  $b_0$  — безразмерная амплитуда флюктуаций магнитного поля,  $L(z)$  — периметр переколляционной структуры в сечении силовой трубы на расстоянии  $z$ ,  $r_{\perp}$  — характерный корреляционный размер.

лупы)  $L(t)$ , когда выполняется условие

$$L(z) \approx b_0 z(t) \gg \lambda_{\perp}. \quad (177)$$

Мы используем полученные ранее выражения для основных переколляционных пространственных масштабов, опираясь на рассмотренную в разделе 12 аналогию между гидродинамическим и магнитным числами Кубо [174, 175],

$$\Delta_{\perp}(\varepsilon_*) \approx \varepsilon_* \lambda_{\perp}, \quad a(\varepsilon_*) \approx \lambda_{\perp} \left( \frac{1}{\varepsilon_*} \right)^v, \quad (178)$$

$$L \approx \frac{a}{\varepsilon_*}, \quad \varepsilon_*(Ku_m) \approx \left( \frac{1}{Ku_m} \right)^{1/(v+2)},$$

где  $v = 4/3$ ,  $D_h = 1 + 1/v = 7/4$ .

Принципиальным отличием от гидродинамической модели является необходимость введения иерархии продольных масштабов, соответствующей этой иерархии поперечных масштабов. Удобно ввести масштаб  $\lambda_B$  из

условия  $b_0 \lambda_B = \lambda_{\perp}$ . Причём в терминах числа Кубо получим

$$\lambda_B(Ku_m) \approx \frac{\lambda_z}{Ku_m} < \lambda_z. \quad (179)$$

На масштабах, меньших  $\lambda_B$ , частицы не "чувствуют" фрактальной структуры магнитных силовых линий. Кроме того, нам важен продольный масштаб (mixing length)  $\lambda_m$ , соответствующий переходу в режим полного перемешивания  $a(\lambda_m) = a(\varepsilon_*)$ . Вычисления дают

$$\lambda_m \approx \varepsilon_* \lambda_z \approx \lambda_z \left( \frac{1}{Ku_m} \right)^{1/(v+2)}. \quad (180)$$

В целях оптимизации системы продольных характерных размеров Исиченко предложил принять простейшую оценку колмогоровской длины:  $\lambda_K \approx \lambda_m \approx \varepsilon_* \lambda_z$  [174, 175]. В итоге имеем иерархию продольных масштабов для переколляционной модели

$$\lambda_B \ll \lambda_K \approx \lambda_m \approx \varepsilon_* \lambda_z \approx \lambda_z \left( \frac{1}{Ku_m} \right)^{1/(v+2)} \ll \lambda_z. \quad (181)$$

Теперь мы можем модифицировать классический подход Рочестера–Розенблюта, сохранив его основную идею о конкуренции стохастической неустойчивости и диффузионной декорреляции,

$$\delta(\tau) \approx l_0 \exp \left( -\frac{z(\tau)}{\lambda_K} \right). \quad (182)$$

С учётом сделанных предположений этот перенормированный баланс приобретает вид трансцендентного уравнения для определения корреляционного времени  $\tau$

$$z(\tau) \approx -\varepsilon_* \lambda_z \ln \frac{\sqrt{4 \chi_{\perp} \tau}}{\varepsilon_* \lambda_{\perp}}. \quad (183)$$

Здесь принято, что первоначальный масштаб эволюционирующей силовой трубы магнитного поля  $l_0$  эквивалентен ширине переколляционного слоя:  $l_0 \approx \Delta_{\perp}(\varepsilon_*) \approx \varepsilon_* \lambda_{\perp}$ . В случае диффузионного характера продольных движений замагниченных частиц  $z^2(\tau) \approx 2 \chi_{\parallel} \tau$  на масштабах

$z > \lambda_z$  получаем решение уравнения (183)

$$\tau \approx \frac{\lambda_K^2}{\chi_{\parallel}} \ln^2 \left[ \left( \frac{b_0}{Ku_m} \right)^2 \frac{\chi_{\parallel}}{\chi_{\perp}} \right]. \quad (184)$$

Перенормированный коэффициент поперечной диффузии частиц в стохастическом магнитном поле в переколяционном пределе для  $Ku_m > 1$ ,  $b_0 \ll 1$ ,  $\chi_{\parallel}/\chi_{\perp} \gg 1$  приобретает линейный по амплитуде возмущений вид [174]:

$$D_{\perp}(\tau) \approx \frac{b_0^2 \chi_{\parallel}}{Ku_m} \ln^{-1} \left( \frac{b_0^2 \chi_{\parallel}}{Ku_m^2 \chi_{\perp}} \right) \propto b_0, \quad (185)$$

где учтена оценка коэффициента магнитной диффузии в пределе больших чисел Кубо  $D_m(b_0) \approx b_0 A_{\perp}$ .

Исиченко [174] рассмотрел также стадию формирования переколяционных структур, выразив ширину стохастического слоя через периметр переколяционного кластера,

$$A_{\perp}(t) \propto \lambda_{\perp} \left( \frac{\lambda_{\perp}}{a(t)} \right)^{1/v} \propto \lambda_{\perp} \left( \frac{\lambda_{\perp}}{L(t)} \right)^{1/(vD_h)}. \quad (186)$$

Проекция пути, пройденного магнитной силовой линией, на поперечное сечение плазменного шнура даётся линейным выражением  $L(z(t)) \approx b_0 z(t)$ , и, традиционно предполагая, что продольные движения частиц носят диффузионный характер,  $z^2(t) \approx 2\chi_{\parallel} t$ , получим закон эволюции ширины стохастического слоя

$$A_{\perp}(t) \propto \frac{1}{(b_0 \sqrt{t})^{3/7}}. \quad (187)$$

С другой стороны, в соответствии с представлениями Бэтчелора и Рочестера – Розенблота [187] декорреляция наступит в результате перехода частиц с одной силовой линии на другую, когда характерный масштаб ширины стохастического слоя  $A_{\perp}(\tau)$  сравняется с характерным поперечным диффузионным масштабом  $\sqrt{4\chi_{\perp}\tau}$ . Новое уравнение для корреляционного времени имеет вид

$$\lambda_{\perp} \left( \frac{\lambda_{\perp}}{b_0 z(\tau)} \right)^{3/7} \approx \sqrt{4\chi_{\perp}\tau}. \quad (188)$$

Определив характерное корреляционное время  $\tau \approx (\lambda_{\perp}^2/\chi_{\perp})(\chi_{\perp}/(b_0^2 \chi_{\parallel}))^{3/10}$ , получаем возможность вычислить коэффициент поперечной диффузии на этой эволюционной стадии формирования переколяционной структуры,

$$D \propto \frac{r_{\perp}^2(\tau)}{\tau} \approx \frac{a^2(\tau)P_{\infty}(\tau)}{\tau} \approx \frac{\lambda_{\perp}^2}{\tau} \left( \frac{L(z)}{\lambda_{\perp}} \right)^{1/D_h}. \quad (189)$$

Как и ранее,  $P_{\infty} \approx \lambda_{\perp}/a$  — эффективная доля пространства, ответственная за переколяционный перенос,  $L(z) \approx b_0 z \approx b_0 \sqrt{2\chi_{\parallel}\tau}$ . После подстановки последнего соотношения в (189) получаем выражение для эффективного поперечного коэффициента диффузии

$$D_{\perp}(\tau) \approx \lambda_{\perp}^2 \left( \frac{b_0 \sqrt{\chi_{\parallel}}}{\lambda_{\perp}} \right) \tau^{-(v+2)/[2(v+1)]} \approx b_0 \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}}, \quad (190)$$

справедливое при выполнении условий

$$1 > \frac{\chi_{\perp}}{b_0^2 \chi_{\parallel}} > \frac{1}{Ku_m^2}. \quad (191)$$

Важно отметить, что переколяционные индексы выпали из окончательного выражения и результат вычислений совпадает с классической аппроксимацией Кадомцева и Погуце для режимов сильной турбулентности,  $Ku_m \gg 1$  [69]. Тем не менее использование подобной идеологии позволило получить принципиально новые скейлинги для коэффициентов переноса при рассмотрении магнитного флаттера в переколяционном пределе [176].

## 16. Квазизотропное стохастическое магнитное поле

Задачи о переносе частиц в стохастическом магнитном поле, в которых имеется ярко выраженная анизотропия, характерны для проблем удержания высокотемпературной плазмы и создания ловушек для управляемого термоядерного синтеза. Квазизотропные стохастические магнитные поля играют также важную роль в астрофизических задачах. Так, при описании процессов теплопроводности в стохастическом поле в скоплениях галактик возникают серьёзные проблемы [191, 192], поскольку наблюдаемый перенос значительно превышает теоретические оценки, полученные в рамках подхода Рочестера – Розенблота, даже при учёте условия  $\chi_{\parallel} \approx \chi_{\perp}$ .

Важная модификация скейлинга Рочестера – Розенблота [190] была предложена в работе Чандрана и Коули [192], где характерный пространственный размер неоднородности заплётённого магнитного поля  $l_B$  является одновременно параметром, описывающим захват электронов магнитными ловушками, образованными значительной неоднородностью магнитного поля в продольном направлении.

Выражение для продольной корреляционной длины для квазизотропных стохастических магнитных полей удобно представить в виде, учитывающем декорреляционный масштаб, непосредственно связанный с ларморским радиусом электронов

$$\rho_e = \lambda_{\perp} \exp \left( -\frac{L_{\text{cor}}}{\lambda_K} \right). \quad (192)$$

Авторы [192] предполагают, что поперечная декорреляция в движении электронов наступает на расстояниях порядка  $l_B$  (рис. 38) и одновременно этот же масштаб характеризует размеры магнитных ловушек, которые электроны покидают в результате приобретения ими дополнительной энергии в столкновениях (рис. 39). Рассматриваемая ситуация характеризуется следующей

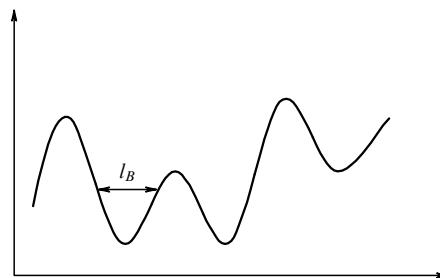


Рис. 38. Напряжённость магнитного поля вдоль траектории частицы.  $l_B$  — характерный пространственный размер неоднородности поля.

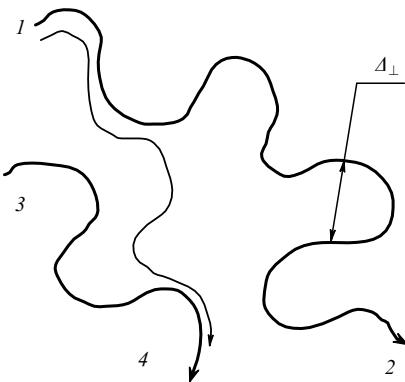


Рис. 39. Силовые линии магнитного поля 1–2, 3–4 и траектория частицы 1–4.  $\Delta_{\perp}$  — характерный пространственный масштаб "заплётённости" поля.

иерархией масштабов:

$$\rho_e \ll l_B \approx \lambda_K \leq \lambda_{coll} \ll L_{cor}. \quad (193)$$

Формально в условиях, когда  $l_B \leq \lambda_{coll}$ , где  $\lambda_{coll}$  — столкновительная длина пробега, выражение для эффективного коэффициента магнитной диффузии может быть представлено в однопараметрическом виде:

$$D_m \approx \frac{l_B^2}{l_B} \approx l_B. \quad (194)$$

Соответствующая формула для продольной корреляционной длины:

$$L_{cor} \approx l_B \ln \frac{l_B}{\rho_e}. \quad (195)$$

Скейлинг для эффективного коэффициента диффузии электронов в квазизотропном стохастическом магнитном поле принимает вид

$$D_{eff} \approx D_m \frac{L_{cor}}{\tau} \approx D_m \frac{\chi_{||}}{L_{cor}} \approx l_B \frac{\chi_{||}}{L_{cor}} \approx \frac{\chi_{||}}{\ln(l_B/\rho_e)}. \quad (196)$$

Рассматриваемая Чандраном и Коули физическая проблема подразумевает использование выражения для коэффициента электронной теплопроводности Сптицера–Хэрма  $\chi_{Sp}$  [193] в качестве  $\chi_{||}$ . Тогда, учитывая одномерный характер движения электронов вдоль силовых линий, получим

$$\chi_{||} \approx \frac{\Delta_{\perp}^2}{2\tau} \approx \frac{\chi_{Sp}}{3}. \quad (197)$$

С другой стороны, оценка величины  $\rho_e$  в условиях, соответствующих скоплениям галактик [191, 192],  $L_{cor} \approx 30l_B$ , поэтому предложенный в работе [192] подход даёт оценку

$$D_{eff} \approx \chi_{eff} \approx 10^{-2}\chi_{Sp}. \quad (198)$$

Оценка (198) не является вполне адекватной с точки зрения объяснения наблюдаемых тепловых потерь. К сожалению, основной причиной этого является неупрощённость модели Сптицера–Хэрма [194]. Поэтому подход, использованный Чандраном и Коули, нуждается в модификации.

Дело в том, что одномасштабная квазизотропная модель [192] подразумевала изотропный характер сильной магнитогидродинамической (МГД) турбулентности, простейшую модель которой рассмотрели Ирошников [195] и Крейчнан [196], получившие энергетический спектр вида

$$E(k) \propto \frac{1}{k^{3/2}}. \quad (199)$$

Однако полуэмпирическая анизотропная модель турбулентности Голдрейха и Шрайдера [191, 197–199], предложенная в 1995 г., позволяет учесть вклад различных масштабов турбулентности в формирование величины  $l_B$ .

Авторы [200] использовали модель Голдрейха и Шрайдера, которая основана на балансе характерных времён в альвеновской МГД-турбулентности,

$$\frac{1}{\tau_A} \approx k_{||} V_A \approx k_{\perp} V_{\perp}(k_{\perp}) \approx \frac{1}{\tau_{\perp}}, \quad (200)$$

где  $1/\tau_A$  — альвеновская частота,  $V_A$  — альвеновская скорость,  $k_{||}$  — продольное волновое число,  $k_{\perp}$  — поперечное волновое число,  $V_{\perp}(k_{\perp})$  — масштаб поперечной скорости, связанной с пространственным масштабом  $k_{\perp}$ ,  $\tau_{\perp}$  — размерностная оценка времени нелинейного взаимодействия, характеризующего турбулентный каскад в направлении, поперечном магнитному полю. Естественно, выражение (200) является всего лишь аппроксимацией, однако её эффективность была неоднократно подтверждена численным моделированием, которое продемонстрировало справедливость феноменологического скейлинга [201–204]

$$l_{||} \approx \frac{1}{k_{||}} \approx \frac{V_A l_{\perp}}{V_{\perp}} \approx \frac{V_A l_{\perp}}{(\varepsilon_K l_{\perp})^{1/3}} \approx \frac{V_A}{\varepsilon_K^{1/3}} l_{\perp}^{2/3}, \quad (201)$$

$$\varepsilon_K \approx \frac{V_{\perp}^3}{l_{\perp}} = \text{const}. \quad (202)$$

Здесь  $\varepsilon_K$  — поток энергии по спектру. Соответствующий энергетический спектр имеет колмогоровский вид:

$$E(k_{\perp}) \propto \frac{1}{k_{\perp}^{5/3}}. \quad (203)$$

Связь продольного и поперечного масштабов вида  $l_{||} \approx l_{\perp}^{\alpha}$  при  $\alpha = 2/3$  соответствует сильной МГД-турбулентности, а при  $\alpha = 4/3$  — промежуточному режиму, что позволяет предположить, что корреляционные масштабы, характеризующие перенос в стохастическом магнитном поле, связаны соотношением

$$\frac{L_{cor}}{l_B} \approx \left( \frac{\Delta}{l_B} \right)^{\alpha}. \quad (204)$$

Такая оценка, значительно отличающаяся от выражения Чандрана и Коули  $L_{cor} \approx 30l_B$ , приводит для поперечных смещений  $\Delta \approx l_B$  к величине продольной корреляционной длины

$$L_{cor} \approx \Delta \approx l_B \ll 30l_B. \quad (205)$$

Новое выражение для электронной теплопроводности, имеющее вид  $\chi_{eff} \approx \chi_{Sp}/3$ , лучше согласуется с данными астрофизических наблюдений.

Заметим, что несколько позднее Голдрейх и Шрайдер предложили модель для случая слабой МГД-турбулентности, которая позволила получить энергетический спектр вида [201–206]

$$E(k_{\perp}) \propto \frac{1}{k_{\perp}^2}. \quad (206)$$

Однако в данном случае вполне применимы и строгие методы теории слабой турбулентности, которые были успешно использованы в работах [207–210] и обсуждены в обзора [205, 206, 211]. Нашей задачей являлось лишь показать, как феноменологический подход позволяет быстро получить качественные оценки эффектов, поэтому мы предлагаем интересующемуся читателю обратиться к указанным работам.

## 17. Стохастическая неустойчивость и обратный каскад

В разделе 16 мы кратко рассмотрели, как идея турбулентного каскада применяется для анализа иерархии масштабов в задачах описания астрофизической МГД-турбулентности. Использовать колмогоровскую феноменологию для рассмотрения эффектов стохастической неустойчивости предложил ещё Бэтчелор [212] в связи с исследованием переноса скаляра (пассивной примеси). Бэтчелором был предложен баланс характерных времён (характерные диффузионное и диссипативное времена) для определения границы области проникновения каскада скаляра  $l_{\text{Bat}}$

$$\tau_d \approx \frac{l_{\text{Bat}}^2}{D_0} = (v_f \epsilon_K)^{1/2} \approx \tau_v. \quad (207)$$

Тем не менее в рамках такого подхода не удалось получить развёрнутой оценки инкремента стохастической неустойчивости, отражающей функциональную зависимость от колмогоровского потока энергии по спектру.

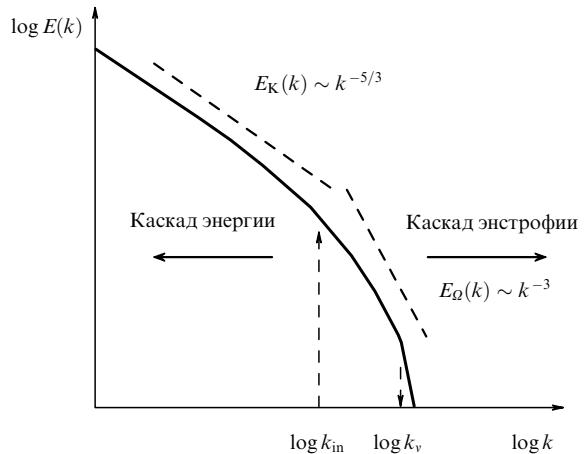
С точки зрения изучения эволюции стохастического слоя особый интерес представляют двумерные турбулентные течения, в которых возникает обратный каскад энергии, обеспечивающий формирование крупномасштабных вихревых структур [213, 214]. При анализе спектров двумерной турбулентности необходимо учесть, что здесь сохраняется не только кинетическая энергия элемента жидкости

$$E = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{V}|^2 \rangle, \quad (208)$$

но и вихрь скорости  $\omega_V = \text{rot } \mathbf{V}$  (а также его квадрат), половина которого,  $\omega_V/2$ , называется энтрофией:

$$\Omega_V = \frac{1}{2} \langle \omega_V^2 \rangle. \quad (209)$$

Появление второй сохраняющейся величины меняет и характер каскадных процессов в турбулентности. Процессы переноса определяются теперь скоростью диссипации энергии  $\epsilon_K$  и скоростью диссипации энтрофии  $\epsilon_{\omega}$  [34]. Если энергия и энтрофия вносятся в поток на некотором промежуточном масштабе  $k_I$ , далёком от диссипативного масштаба, то они обе должны вовлекаться в каскадный процесс. Связь спектральных плотностей энергии и энтрофии запрещает одновременный



**Рис. 40.** Схематическое изображение энергетического спектра двумерной турбулентности в логарифмических координатах. В области волновых чисел, превышающих волновое число накачки,  $k > k_I$ , имеет место прямой каскад энтрофии. В области волновых чисел, меньших волнового числа накачки,  $k < k_I$ , имеет место обратный каскад энергии. В области волновых чисел, превышающихвязкостный масштаб,  $k > k_v$ , имеет место диссипация энергии.  $E(k)$  — энергетический спектр,  $k$  — волновое число,  $E_K(k)$  — энергетический спектр Колмогорова,  $E_O(k)$  — энергетический спектр Крейнчана – Захарова. Стрелки указывают направление каскадов.  $k_{\text{in}}$  — волновое число на масштабе инжекции энергии,  $k_v$  — волновое число, соответствующее диссипативным масштабам.

перенос обеих величин к малым масштабам. Поэтому при свободной эволюции потока средние спектральные потоки энергии и энтрофии должны быть направлены к противоположным концам спектра: к малым масштабам направлен поток энтрофии, а к большим — поток энергии (рис. 40).

Таким образом, мы имеем два инерционных интервала. Для малых масштабов (меньших масштабов инжекции энергии,  $k < k_I$ ) определяющей величиной является скорость диссипации энтрофии. Её размерность  $\epsilon_{\omega} = [c^{-3}]$ , единственная возможная размерностная комбинация даёт спектральное распределение [213]

$$E(k) = C_{\omega} \epsilon_{\omega}^{2/3} k^{-3}. \quad (210)$$

Каскад энтрофии — это прямой каскад, т.е. энтрофия в нём переносится от больших масштабов к меньшим. На больших масштабах (при малых волновых числах,  $k < k_I$ ) каскадный процесс определяется скоростью диссипации энергии  $\epsilon_K$  и соответствующей формулой Колмогорова

$$E(k) = C_K \epsilon_K^{2/3} k^{-5/3} \quad (211)$$

с тем существенным отличием, что энергия передаётся от меньших масштабов к большим — обратный каскад. В двумерных и квазидвумерных движениях такой механизм способствует формированию крупномасштабных вихревых структур, так как обратный каскад энергии по спектру, ограниченный сверху характерным масштабом течения, приводит к накоплению значительной части кинетической энергии в области больших масштабов. Фактически эти вихри, охватывая значительные области пространства, формируют нелокальный механизм турбулентной диффузии.

В этой ситуации можно применить перколяционный метод [71, 72, 215], в котором используется модифицированный баланс Бэтчелора для характерных времён,  $\tau_B \approx \tau_s$ . Характерное время, ответственное за эффекты стохастической неустойчивости,  $\tau_s$  должно быть связано с характерным масштабом стохастического слоя  $l_s$  и колмогоровским потоком энергии по спектру,  $\tau_s = \tau_s(l_s, \varepsilon_K)$ . С другой стороны, вместо диффузионного времени  $\tau_d$  используется характерное время баллистического движения частицы вдоль перколяционной линии тока  $\tau_B$ , которое в данной постановке "отвечает за перемешивание" скаляра в стохастическом слое,  $\tau_B \approx L/V_0$ . Здесь, как и ранее,  $\lambda$  — характерный размер вихрей в области накачки,  $L(\varepsilon) \approx a(\varepsilon)/\varepsilon \approx \lambda/\varepsilon^{v+1}$  — длина перколяционной эквипотенциали. Используя введённые ранее перколяционные оценки для ширины стохастического слоя  $\Delta \approx \varepsilon\lambda$  и пространственного масштаба  $l_s \approx \lambda^2/L$ , находим [215]

$$\tau_s(\varepsilon_K, l_s) \approx \left( \frac{l_s^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \approx \left[ \left( \frac{\lambda^2}{L(\varepsilon_*)} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_K} \right]^{1/3}. \quad (212)$$

Для определения малого перколяционного параметра  $\varepsilon$  используем предложенный выше баланс характерных времён, учитывающий зависимость ключевых величин от перколяционного малого параметра  $\tau_s(\varepsilon) \approx \tau_B(\varepsilon)$ ,

$$\left[ \left( \frac{\lambda^2}{L(\varepsilon_*)} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_K} \right]^{1/3} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}. \quad (213)$$

Инкремент стохастической неустойчивости имеет вид

$$\gamma_s \approx \frac{1}{\tau_s} \approx \frac{V_0}{L(\varepsilon_*)} \approx \left( \frac{V_0}{\lambda} \right)^{2/5} \left( \frac{\varepsilon_K}{\lambda^2} \right)^{1/5} \propto V_0^{2/5} \varepsilon_K^{1/5}, \quad (214)$$

где малый перколяционный параметр даётся скейлингом

$$\varepsilon_*^{v+1} \approx \left( \frac{\lambda}{V_0} \right)^{3/5} \left( \frac{\varepsilon_K}{\lambda^2} \right)^{1/5}. \quad (215)$$

Зависимость инкремента от амплитуды турбулентных пульсаций  $V_0$  в перколяционном пределе оказалась традиционно медленной,  $\gamma_s \propto V_0^{2/5}$ . Здесь поток энергии по спектру  $\varepsilon_K$  является ключевым параметром, позволяющим оценить инкремент стохастической неустойчивости, опираясь на величину, характеризующую масштаб накачки.

Аналогичный метод получения инкремента стохастической неустойчивости в двумерных турбулентных течениях с обратным каскадом может быть применён для описания стохастической неустойчивости в двумерных турбулентных МГД-течениях, поскольку в них реализуется обратный каскад вектора-потенциала [216].

Анализ системы двумерных МГД-уравнений показывает, что здесь, так же как и в гидродинамическом случае, имеются сохраняющиеся величины. Так, мы имеем сохранение полной энергии

$$E = \frac{1}{2} \int (V^2 + b^2) d^2x = \frac{1}{2} \sum_k k^2 (|\Phi_k|^2 + |\Psi_k|^2), \quad (216)$$

спиральности

$$H^{\text{cross}} = \int \mathbf{V} \cdot \mathbf{b} d^2x = \sum_k k^2 \Phi_k \Psi_{-k} \quad (217)$$

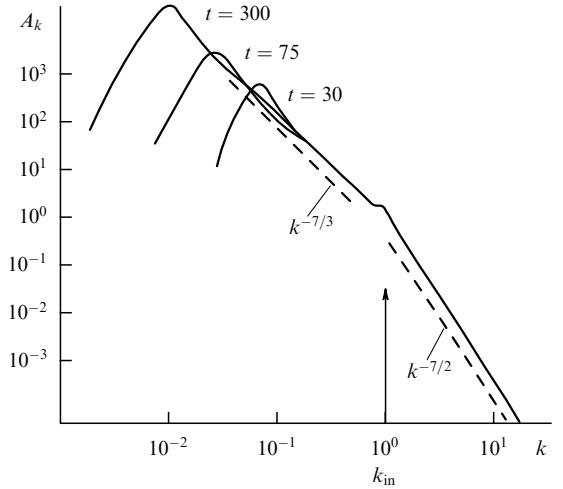


Рис. 41. Обратный каскад вектора-потенциала,  $A_k$  — спектр вектора-потенциала,  $k$  — волновое число,  $k_{in}$  — волновое число, соответствующее пространственному масштабу инжекции. Стрелка указывает на излом графика спектра вектора-потенциала, связанный с наличием двух каскадов.

и среднеквадратичного магнитного потенциала

$$A = \int \Psi^2 d^2x = \sum_k |\Psi_k|^2. \quad (218)$$

Здесь принято  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_z \times \nabla \Psi$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_z \times \nabla \Phi$ . Важно отметить, что энергия и спиральность переносятся каскадным образом в область малых масштабов, в то время как вектор-потенциал переносится обратным каскадом в область больших масштабов [217]. Поэтому в области масштабов, превышающих масштаб накачки, формируются крупномасштабные вихревые образования.

Спектр вектора-потенциала даётся выражением (рис. 41)

$$A(k) \propto \varepsilon_A^{2/3} k^{-7/3}, \quad (219)$$

где сохраняется величина

$$\frac{\Psi^2}{\tau} = \text{const} \quad (220)$$

потока вектора-потенциала по спектру.

Опираясь на размерностные соображения, мы можем выразить характерное время, связанное с деформацией длинных эквипотенциалей, в виде, включающем в себя комбинацию характерного пространственного масштаба  $l_s$  и потока вектора-потенциала по спектру  $\varepsilon_A$ :

$$\tau_s(\varepsilon_A) \approx \left( \frac{l_s^4}{\varepsilon_A} \right)^{1/3}, \quad l_s(\varepsilon) \approx \frac{\lambda^2}{L(\varepsilon)}. \quad (221)$$

Здесь  $\lambda$  — характерный размер вихрей в области накачки,  $L$  — длина перколяционной эквипотенциали. Используя представление о характере эволюции облака скаляра в вихревом поле МГД-турбулентности, запишем баланс характерных времён в виде  $\tau_s(\varepsilon_A) = \tau_B(V_0)$ . После подстановок получим уравнение

$$\left( \frac{l_s^4(\varepsilon_*)}{\varepsilon_A} \right)^{1/3} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}. \quad (222)$$

Фактически, мы предполагаем, что частицы скаляра успевают совершить баллистический обход "осёдланной" ими эквипотенциали за характерное время, связанное со стохастической неустойчивостью линий тока. Решая уравнение (222) относительно малого переколационного параметра  $\varepsilon_*$ , получим

$$\varepsilon_*^{v+1} \approx \left( \frac{\varepsilon_A}{\lambda V_0^3} \right)^{1/7}. \quad (223)$$

Здесь, как и ранее, используем точное значение корреляционного показателя для двумерного случая  $v = 4/3$ .

Новый скейлинг для инкремента стохастической неустойчивости в двумерных турбулентных МГД-течениях с обратным каскадом вектора-потенциала по спектру выражается как

$$\gamma_s \approx \frac{V_0}{\lambda} \left( \frac{\varepsilon_A}{\lambda V_0^3} \right)^{1/7} \propto V_0^{4/7} \varepsilon_A^{1/7}. \quad (224)$$

Формула (224) позволяет определить характер зависимости инкремента стохастической неустойчивости от амплитуды турбулентных пульсаций скорости  $V_0$  и потока вектора-потенциала по спектру  $\varepsilon_A$ .

## 18. Многомасштабные аппроксимации

Одномасштабные модели стохастической неустойчивости не позволяют детально описать турбулентный перенос. Сегодня рассмотрение стохастической неустойчивости в многомасштабном пределе всё ещё остаётся нерешённой задачей. Однако существуют различные аппроксимации, позволяющие получить оценки и скейлинги для некоторых эффектов переноса, связанных с экспоненциальным разбеганием линий тока или силовых линий магнитного поля.

Одна из простейших моделей основана на модификации модельного дифференциального уравнения Бэтчелора, описывающего экспоненциальный режим. Так, уравнение, описывающее экспоненциальную "сепарацию" первоначально близко расположенных силовых линий квазизотропного случайного магнитного поля, имеет вид

$$\frac{d\Delta^2}{dl} \propto \frac{\Delta^2}{l_B}. \quad (225)$$

Однако для  $\Delta^2 > l_B^2$  экспоненциальный режим должен перейти в диффузионный:

$$\frac{d\Delta^2}{dl} \approx D_m \approx \frac{l_\perp^2}{l_B}. \quad (226)$$

С этой точки зрения естественно описывать промежуточные ситуации посредством модификации фактора, стоящего перед  $1/l_B$ , с учётом возрастающей роли больших масштабов в промежуточных режимах. Тогда в терминах волновых чисел  $k \propto 2\pi/l$  удобно представить модельное уравнение в виде, учитывающем вклад различных масштабов иерархии,

$$\frac{d\langle \Delta^2 \rangle}{dl} \approx \langle \Delta^2 \rangle \int_{1/l_B}^{1/\Delta} k d \ln k + \int_{1/\Delta}^{1/l_{\min}} k d \ln k, \quad (227)$$

где  $k_{\min} \propto 2\pi/l_{\min}$  — волновое число, связанное с минимальным пространственным масштабом поля турбулентности.

Такой подход неоднократно использовался для анализа иерархии масштабов, соответствующей модели сильной альвеновской турбулентности,  $L_{\text{cor}}/l_B \approx (\Delta/l_B)^\alpha$  [197, 200, 218], в которой выполняется условие

$$l_{\min} < l_\perp < l_B \leq L_{\text{cor}}. \quad (228)$$

Тогда в терминах волновых чисел  $k_\perp \propto 1/l_\perp$  и  $k_\parallel \propto 1/l_\parallel$  удобно представить модельное уравнение в виде, учитывающем вклад различных масштабов иерархии в формирование масштаба  $L_K \approx l_B$ :

$$\frac{d\langle \Delta^2 \rangle}{dl} \approx \langle \Delta^2 \rangle \int_{1/l_B}^{1/\Delta} k_\parallel(k_\perp) d \ln k_\perp + \int_{1/\Delta}^{1/l_{\min}} \frac{k_\parallel(k_\perp)}{k_\perp^2} d \ln k_\perp, \quad (229)$$

где  $k_\parallel \propto k_\perp^{1/\alpha}$ , и, следовательно, описывающем переход к режимам с  $\Delta^\alpha \approx l_\perp^\alpha \approx l_\parallel$ . Важно отметить, что, несмотря на использование многомасштабного подхода, связывающего продольные и поперечные движения в сильной альвеновской турбулентности, характерный пространственный масштаб заплётенного магнитного поля  $l_B$  оказался универсальным параметром модели:  $l_B \approx L_{\text{cor}} \approx L_K \approx \Delta$ .

Другой, но близкий по характеру, метод основан на построении аппроксимационного уравнения для коэффициента относительной диффузии Ричардсона. Так, экспоненциальному режиму разбегания частиц

$$l^2(t) = L_0^2 \exp(\gamma_s t) \quad (230)$$

соответствует дифференциальное уравнение

$$D_R = \frac{d}{dt} l^2(t) = \gamma_s l^2(t). \quad (231)$$

Здесь  $\gamma_s$  — инкремент стохастической неустойчивости,  $L_0$  — характерный пространственный масштаб. С другой стороны, на больших временах мы имеем дело с режимом Ричардсона, который описывается дифференциальным уравнением

$$D_R = \frac{d}{dt} l^2(t) \propto 2D_T. \quad (232)$$

Существует возможность построить аппроксимационное дифференциальное уравнение, которое позволит получить оба характерных режима:

$$\frac{d}{dt} l^2(t) \propto 2D_{\text{eff}}(t). \quad (233)$$

Подходящей аппроксимацией может стать уравнение, учитывающее как молекулярные эффекты, так и турбулентную диффузию:

$$\frac{d}{dt} l^2(t) \propto 2D_0 + 2D_T \left( \frac{l}{\Delta_{\text{mix}}} \right)^2. \quad (234)$$

Здесь  $D_0$  — коэффициент молекулярной диффузии,  $D_T$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $\Delta_{\text{mix}}$  — характерный пространственный масштаб перемешивания. Из уравнения (234) несложно получить оценку характерного времени эволюции пятна скаляра:

$$dt = \frac{2l dl}{2D_0 + 2D_T(l/\Delta_{\text{mix}})^2}. \quad (235)$$

Вычисления дают следующее выражение для времени перемешивания:

$$\tau_{\text{mix}}(\text{Pe}) \approx \frac{A_{\text{mix}}^2}{D_T} \ln \frac{\text{Pe}}{1 + \text{Pe} L_0 / A_{\text{mix}}} . \quad (236)$$

Фактически мы получили уже известный нам из упрощённого одномасштабного подхода скейлинг

$$\tau_{\text{mix}}(\text{Pe}) \approx \frac{1}{\gamma_s} \ln \text{Pe}, \quad \text{Pe} \gg 1 . \quad (237)$$

Это неудивительно, поскольку при таком аппроксимационном подходе нам не удалось включить в рассмотрение информацию о характере поля турбулентности. Понятно, что развитие методов анализа стохастической неустойчивости в условиях развитой турбулентности в многомасштабном пределе потребует от исследователей значительных усилий.

## 19. Заключение

Представления о стохастической неустойчивости и стохастическом слое стали важным инструментом при получении выражений для коэффициентов, описывающих турбулентный перенос. Однако строгая, математически обоснованная, теория турбулентности пока отсутствует, и это делает неизбежным использование феноменологических аргументов и скейлингов. Мы видим, что проблема описания эффектов стохастической неустойчивости атакуется исследователями с разных сторон. Это получение инкрементов стохастической неустойчивости, выделение конкретных декорреляционных масштабов, описание различных режимов переноса как в гидродинамических течениях, так и в плазме, а также попытки построения многомасштабных аппроксимаций. Основной задачей настоящего обзора было показать важность определения функциональной зависимости инкрементов и коэффициентов переноса от амплитуды турбулентных пульсаций и других ключевых параметров (характерных частот пульсаций, дрейфовых скоростей, потока энергии по спектру и др.), описывающих рассматриваемые системы.

В условиях сильной структурной турбулентности использование формальных экспоненциальных зависимостей для автокорреляционной функции скорости становится невозможным из-за существования эффектов длинных корреляций. Поэтому классический подход Тейлора, опирающийся на эти корреляционные функции, как правило, теряет смысл даже в случае использования степенных аппроксимаций, позволяющих моделировать аномальный перенос. Возникающие трудности приводят к необходимости построения феноменологических моделей, учитывающих топологические особенности когерентных структур.

Особое внимание в обзоре удалено двумерным турбулентным течениям. Существование обратного каскада энергии приводит к тому, что в таких системах в результате эволюции возникают крупномасштабные вихревые структуры, а связанные с последними линии тока могут вносить значительный вклад в эффективный перенос частиц. Принципиальным отличием уравнений, описывающих двумерные несжимаемые течения, является отсутствие члена, ответственного за растяжение вихрей. Этот существенный недостаток рассматривает-

ся многими исследователями как основание для признания двумерных моделей чрезмерно упрощёнными. Тем не менее с помощью двумерной турбулентности описываются такие важные геофизические явления, как тропические циклоны, крупномасштабные движения атмосферы, морские течения и др.

Мы уделили значительное внимание рассмотрению переколяционных моделей. Это обусловлено эффективностью таких моделей при анализе двумерного и квазидвумерного турбулентного переноса. Здесь малая ширина стохастического слоя, в которой разрушается адабатический инвариант, становится критическим параметром, характеризующим близость системы к фазовому (переколяционному) переходу. Так, этот подход позволил получить скейлинги для инкремента стохастической неустойчивости в случайному двумерном течении, а также коэффициенты переноса заряженных частиц в магнитном поле, моделирующем условия в установках для удержания высокотемпературной плазмы. Заметим, что в одной из своих последних работ Зельдович указал на переколяционную постановку задачи как на важное дополнение к идеям Моффата о зацеплениях линий тока [219].

При рассмотрении задач, в которых определяется инкремент стохастической неустойчивости в переколяционном пределе, мы обнаруживаем важную закономерность, связанную с эффективностью концепции скаляра. Использование скаляра помогает не только визуализировать в эксперименте сложную вихревую структуру турбулентных течений, но и найти замыкающие условия для вычисления конкретных физических величин. Именно анализ эволюции помещённого в турбулентное поле скаляра позволил построить различные уравнения балансов для характерных времён.

Значительное внимание в обзоре уделено исследованию плазмо-физических моделей, описывающих диффузию заряженных частиц в стохастическом магнитном поле и перенос в условиях развитой дрейфовой турбулентности. Так, в замагниченной высокотемпературной плазме поток энергии направлен в сторону больших масштабов и, следовательно, малые возмущения могут оказывать сильное воздействие на большие масштабы. Безусловно, это делает нетривиальным описание турбулентного переноса в плазме, который в большинстве случаев оказывается аномальным.

Действительно, фундаментальный вопрос о характере взаимодействия и эволюции вихрей в турбулентном потоке остаётся открытым, и скейлинг по-прежнему является фактически главным инструментом анализа. Эта ситуация не уникальна. Трудности сохранились и при рассмотрении общих вопросов неравновесной статистической механики, связанных с эффектами стохастической неустойчивости и перемешивания. Так, несмотря на плодотворность идей Больцмана об эволюции фазовой жидкости и фундаментальные работы Боголюбова о многочастичных функциях распределения, мы всё ещё имеем ограниченные возможности для получения строгих уравнений турбулентного переноса из первых принципов.

Автор выражает благодарность за ценные замечания и обсуждения К. В. Брушлинскому, В. П. Визгину, Г. С. Голицыну, Ю. Н. Днестровскому, Н. С. Ерохину, С. В. Коновалову, Е. А. Кузнецовой, Л. К. Кузнецовой, А. Б. Михайловскому, А. М. Попову, В. Д. Пустовитову,

В.К. Периху, А.А. Рухадзе, В.П. Силину, А.В. Тимофееву, А.С. Трубникову, В.Д. Шафранову и Э.И. Юрченко.

## Список литературы

1. Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950); Krylov N S *Works on the Foundations of Statistical Physics* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1979)
2. Arnold V I, Avez A *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique* (Paris: Gauthier-Villars, 1967); *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (New York: Benjamin, 1968)
3. Lichtenberg A J, Lieberman M A *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag, 1983); Лихтенберг А, Либерман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
4. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M *Nonlinear Physics: from the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
5. Заславский Г М и др. УФН **156** 193 (1988); Zaslavskii G M et al. Sov. Phys. Usp. **31** 887 (1988)
6. Reichl L E *The Transition to Chaos. Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (New York: Springer, 2004); Райхл Л Е *Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах* (М.-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2008)
7. Больцман Л *Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики* (М.: Наука, 1984)
8. Гиббс Дж В *Термодинамика. Статистическая механика* (М.: Наука, 1982)
9. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.-Л.: Гостехиздат, 1946); Bogoliubov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)
10. Леонтьевич М А ЖЭТФ **5** 211 (1935)
11. Norp E Math. Ann. **117** 590 (1940)
12. Хинчин А Я УФН **9** 141 (1929)
13. Хинчин А Я *Математические основания статистической механики* (М.-Л.: Гостехиздат, 1943)
14. Крылов Н С, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (1941)
15. Боголюбов Н Н, Крылов Н М *Записки кафедры математической физики Института нелинейной механики АН УССР* **4** 5 (1939); переиздано в кн. Боголюбов Н Н *Собрание научных трудов в 12 томах* Т. 5 *Неравновесная статистическая механика, 1939–1980* (М.: Наука, 2006)
16. Borel É *Mécanique Statistique Classique* (Paris: Gauthier-Villars, 1925) p. 22
17. Давыдов Б И ДАН СССР **50** 131 (1945)
18. Терлецкий Я П ЖЭТФ **17** 837 (1947)
19. Давыдов Б И ДАН СССР **50** 135 (1945)
20. Терлецкий Я П *Динамические и статистические законы физики* (М.: МГУ, 1949)
21. Давыдов Б И ЖЭТФ **7** 1069 (1937)
22. Давыдов Б И, Шмушкевич И М ЖЭТФ **10** 1043 (1940)
23. Власов А А ЖЭТФ **18** 291 (1938)
24. Landau L D ЖЭТФ **16** 574 (1946); Landau L D J. Phys. USSR **10** 25 (1946)
25. Давыдов Б И, в сб. *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. 1 (Отв. ред. М А Леонтьевич) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 77; Davydov B I, in *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Research* (Ed. M A Leontovich) (Oxford: Pergamon Press, 1959)
26. Галицкий В М, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (1954); в кн. *Избранные труды. Исследования по теоретической физике* (М.: Наука, 1983)
27. Власов А А *Теория многих частиц* (М.: ГИТТЛ, 1950); Vlasov A A *Many-Particle Theory and its Application to Plasma* (New York: Gordon and Breach, 1961)
28. Bohm D, Gross E P Phys. Rev. **75** 1864 (1949)
29. Ertel H Meteorol. Z. **59** 277 (1942)
30. Eckart C J. Mar. Res. **7** 265 (1948)
31. Batchelor G K Proc. Cambr. Phil. Soc. **48** 345 (1952)
32. Corrsin S, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Advances in Geophysics, Vol. 6, Eds F N Frenkiel, P A Sheppard) (New York: Academic Press, 1959) p. 161
33. Монин А С УФН **67** 119 (1959); Monin A S Sov. Phys. Usp. **2** 50 (1959)
34. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967); Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics* Vols 1, 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971, 1975)
35. Batchelor G K *Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge: Univ. Press, 1953); Бэтчелор Дж *Теория однородной турбулентности* (М.: ИЛ, 1955)
36. Колмогоров А Н ДАН СССР **119** 861 (1958)
37. Колмогоров А Н ДАН СССР **124** 754 (1959)
38. Синай Я Г ДАН СССР **124** 768 (1959)
39. Синай Я Г ДАН СССР **125** 1200 (1959)
40. Синай Я Г ДАН СССР **153** 1261 (1963); Sinai Ya G Sov. Math. Dokl. **4** 1818 (1963)
41. Sinai Y G *Selecta Vol. 1 Ergodic Theory and Dynamical Systems* (New York: Springer, 2010)
42. Sinai Y G *Selecta Vol. 2 Probability Theory, Statistical Mechanics, Mathematical Physics and Mathematical Fluid Dynamics* (New York: Springer, 2010)
43. Синай Я Г *Теория фазовых переходов: строгие результаты* (М.: Наука, 1980); Sinai Ya G *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results* (Oxford: Pergamon Press, 1982)
44. Корнфельд И П, Синай Я Г, Фомин С В *Эргодическая теория* (М.: Наука, 1980); Cornfeld I P, Fomin S V, Sinai Ya G *Ergodic Theory* (New York: Springer-Verlag, 1982)
45. Корнфельд И П, Синай Я Г, в сб. *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* Т. 2 (М.: ВИНИТИ, 1985) с. 44
46. Khanin K M, Sinai Ya G, in *Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics* (Ed. R Z Sagdeev) (Moscow: Mir Publ., 1986) p. 93
47. Синай Я Г *Современные проблемы эргодической теории* (М.: Физматлит, 1995)
48. Лазуткин В Ф *Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1981)
49. Гальперин Г А, Земляков А Н *Математические биллиарды* (М.: Наука, 1990)
50. Козлов В В, Трещев Д В *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами* (М.: Изд-во МГУ, 1991); Kozlov V V, Treshchev D V *Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts* (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1991)
51. Тихомиров В М (Гл. ред.) *Математическое просвещение* Третья серия, вып. 5 (М.: МЦНМО, 2001)
52. Табачников С *Геометрия и биллиарды* (М.-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2011)
53. Лоскутов А Ю УФН **180** 1305 (2010); Loskutov A Phys. Usp. **53** 1257 (2010)
54. Chernov N, Markarian R *Chaotic Billiards* (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2006); Чернов Н, Маркарян Р *Хаотические биллиарды* (М.-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2012)
55. Драгович В, Раднович М *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные призмы Понселя* (М.-Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2010)
56. Beck C, Schlögl F *Thermodynamics of Chaotic Systems: an Introduction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
57. Dorfman J R *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
58. Планкар А, Эренфест П, Эренфест Т, фон Нейман Дж *Работы по статистической механике* (М.-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2011)
59. Halmos P R *Lectures on Ergodic Theory* (Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1956); Халмош П Р *Лекции по эргодической теории* (М.: ИЛ, 1959)
60. Кац М *Lectures in Applied Mathematics. Proc. of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1957* Vol. 1 *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (London: Interscience Publ., 1959); Кац М *Вероятность и смежные вопросы в физике* (М.: Мир, 1965)
61. Reichl L E *A Modern Course in Statistical Physics* (New York: Wiley, 1998)
62. Zaslavsky G M *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (London: Imperial College Press, 2007); Заславский Г М *Физика хаоса в гамильтоновых средах* (М.-Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2004)
63. Childress S, Gilbert A D *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
64. Moffatt H K Rep. Prog. Phys. **46** 621 (1983)
65. Bakunin O G *Turbulence and Diffusion. Scaling Versus Equations* Monograph on Complexity (New York: Springer, 2008)
66. Чириков Б В *Атомная энергия* **6** 630 (1959); Chirikov B V J. Nucl. Energy C Plasma Phys. **1** 253 (1960)
67. Vedenov A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res.* **2** 82 (1962)
68. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979); Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)

69. Kadomtsev B B, Pogutse O P, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Proc. of the 7th Intern. Conf., IAEA, Innsbruck, Austria, August 23–30, 1978* Vol. 1 (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1978) p. 649
70. Осипенко М В, Погутце О П, Чудин Н В *Физика плазмы* **13** 953 (1987); Osipenko M V, Pogutse O P, Chudin N V *Sov. J. Plasma Phys.* **13** 550 (1987)
71. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
72. Bakunin O G *Rep. Prog. Phys.* **67** 965 (2004)
73. Зелёный Л М и др. *УФН* **183** 365 (2013); Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **56** 347 (2013)
74. Бакунин О Г *УФН* **183** 257 (2013); Bakunin O G *Phys. Usp.* **56** 243 (2013)
75. Galeev A A, Zelenyi L M *Physica D* **2** 90 (1981)
76. Moffatt H K et al. (Eds) *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992)
77. Ottino J M *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989)
78. Ott E *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
79. Aref H (Guest Ed.), El Naschie M S (Ed.) *Chaos Applied to Fluid Mixing* (Oxford: Pergamon, 1995)
80. Priest E R, Hood A W (Eds) *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991); Прист Э, Худ А (Ред.) *Космическая магнитная гидродинамика* (М.: Мир, 1995)
81. Кошель К В, Пранц С В *Хаотическая адvection в океане* (М.–Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2008)
82. Кошель К В, Пранц С В *УФН* **176** 1177 (2006); Koshel K V, Prants S V *Phys. Usp.* **49** 1151 (2006)
83. Кляцкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000); Klyatskin V I, Koshel' K V *Phys. Usp.* **43** 717 (2000)
84. Bakunin O G *Chaotic Flows. Correlation Effects, Transport, and Structures* (Springer Series in Synergetics) (Heidelberg: Springer, 2011)
85. Frisch U *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Фриш У *Турбулентность: Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: Фазис, 1998)
86. Tsinober A *An Informal Introduction to Turbulence* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001)
87. Монин А С, Озмидов Р В *Океанская турбулентность* (Л.: Гидрометеоиздат, 1981); Monin A S, Ozmidov R V *Turbulence in the Ocean* (Dordrecht: Reidel, 1985)
88. Монин А С, Жихарев Г М *УФН* **160** (5) 1 (1990); Monin A S, Zhikharev G M *Sov. Phys. Usp.* **33** 313 (1990)
89. Монин А С *УФН* **150** 61 (1986); Monin A S *Sov. Phys. Usp.* **29** 843 (1986)
90. Монин А С *УФН* **125** 97 (1978); Monin A S *Sov. Phys. Usp.* **21** 429 (1978)
91. Монин А С *УФН* **109** 333 (1973); Monin A S *Sov. Phys. Usp.* **16** 121 (1973)
92. Bouchaud J-P et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2503 (1990)
93. Ben-Avraham D, Havlin S *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
94. Krommes J A *Phys. Rep.* **360** 1 (2002)
95. Bakunin O G *Chaos Solitons Fractals* **23** 1703 (2005)
96. Баренблatt Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: теория и приложения к геофизической гидродинамике* (Л.: Гидрометеоиздат, 1982); Barenblatt G I *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)
97. Barenblatt G I *Scaling* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
98. Кадомцев Б Б *УФН* **151** 3 (1987); Kadomtsev B B *Rep. Prog. Phys.* **50** 115 (1987)
99. Баренблatt Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **184** 265 (2014); Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Phys. Usp.* **57** 250 (2014); Баренблatt Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **184** 1371 (2014), Поправка к статье; Вигдорович И И *УФН* **185** 213 (2015); Vigdorovich I I *Phys. Usp.* **58** (2) (2015), <https://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0185.201502g.0213>; Баренблatt Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **185** 217 (2015); Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Phys. Usp.* **58** (2) (2015), <https://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0185.201502h.0217>
100. Кадомцев Б Б *Динамика и информация* (М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1997)
101. Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994); Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **37** 425 (1994)
102. Tabor M *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: an Introduction* (New York: Wiley, 1989); Табор М *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике* (М.: Эдиториал УРСС, 2001)
103. Squires T M, Quake S R *Rev. Mod. Phys.* **77** 977 (2005)
104. Stroock A D, McGraw G J *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **362** 971 (2004)
105. Welander P *Tellus* **7** 141 (1955)
106. Batchelor G K, Townsend A A, in *Surveys in Mechanics* (Eds G K Batchelor, R M Davies) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956) p. 352
107. Richardson L F *Proc. R. Soc. London A* **110** 709 (1926)
108. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941); Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)
109. Обухов А М *ДАН СССР* **32** 19 (1941); Obukhov A M *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **32** 19 (1941)
110. Brunt D *Physical and Dynamical Meteorology* (Cambridge: The Univ. Press, 1934); Брент Д *Физическая и динамическая метеорология* (Л.–М.: Гидрометеоиздат, 1938)
111. Обухов А М *Изв. АН СССР Сер. геогр. и геофиз.* **5** 453 (1941)
112. Обухов А М *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометеоиздат, 1988)
113. Reid W H *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **51** 350 (1955)
114. Cocke W J *Phys. Fluids* **12** 2488 (1969)
115. Cocke W J *Phys. Fluids* **14** 1624 (1971)
116. Казанцев А П *ЖЭТФ* **53** 1806 (1967); Kazantsev A P *Sov. Phys. JETP* **26** 1031 (1968)
117. Вайштейн С И, Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
118. Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *The Almighty Chance* (World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 20) (Singapore: World Scientific, 1990)
119. Зельдович Я Б и др. *УФН* **152** 3 (1987); Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)
120. Taylor G I *Proc. London Math. Soc.* **2** 20 196 (1921)
121. Галеев А А, Судан А В (Ред.) *Основы физики плазмы* Т. 1, 2 (М.: Энергоатомиздат, 1983, 1984); Galeev A A, Sudan R N (Eds) *Basic Plasma Physics* Vols 1, 2 (Amsterdam: North-Holland, 1983, 1984)
122. Kadomtsev B B *Tokamak Plasma: A Complex Physical System* (Bristol: Institute of Physics Publ., 1992)
123. Horton W, Ichikawa Y-H *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (Singapore: World Scientific, 1996)
124. Balescu R *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Bristol: IOP Publ., 2005)
125. "Progress in the ITER Physics Basis" *Nucl. Fusion* **47** (6) (2007)
126. Зеленый Л М, Веселовский И С (Ред.) *Плазменная гелиоаэрофизика* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
127. Bakunin O G, in *Review of Plasma Physics* Vol. 24 (Ed. V D Shafranov) (Berlin: Springer-Verlag, 2008) p. 53
128. Diamond P H, Itoh S-I, Itoh K *Modern Plasma Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010)
129. Кадомцев Б Б "Турбулентность плазмы", в сб. *Вопросы теории плазмы* Т. 4 (Под ред. М. А Леонтьевича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 188; Kadomtsev B B *Plasma Turbulence* (London: Academic Press, 1965)
130. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1988); Kadomtsev B B, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad./Plenum Publ., 2001) p. 1
131. Van Kampen N G *Phys. Norvegica* **5** 279 (1971)
132. Новиков Е А *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **7** 1087 (1971)
133. Arnold V C.R. Acad. Sci. Paris **260** 5668 (1965)
134. Arnold V I, Khesin B A *Topological Methods in Hydrodynamics* (New York: Springer, 1999); Арнольд В И, Хесин Б А *Топологические методы в гидродинамике* (М.: Изд-во МЦНМО, 2007)
135. Hénon M C.R. Acad. Sci. Paris **262** 312 (1966)
136. Lorenz E N J. Atmos. Sci. **20** 130 (1963)
137. Berry M V et al. *Ann. Physics* **122** 26 (1979)
138. Simiu E *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems: Applications of Melnikov Processes in Engineering, Physics, and Neuroscience* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2002); Симю Э *Хаотические переходы в детерминированных и стохастических системах: применение метода Мельникова в технике, физике и нейрофизиологии* (М.: Физматлит, 2007)
139. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **98** 527 (1954); Kolmogorov A N *Lecture Notes Phys.* **93** 51 (1979)
140. Moser J *Math. Ann.* **126** 325 (1953)
141. Moser J *Commun. Pure Appl. Math.* **11** 81 (1958)
142. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **31** 154 (1956); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **4** 460 (1957)
143. Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983); Зельдович Я Б, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *Магнитные поля в астрофизике* (М.–Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2006)
144. Соколов Д Д, Степанов Р А, Фрик П Г *УФН* **184** 313 (2014); Sokoloff D D, Stepanov R A, Frick P G **57** 292 (2014)
145. Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *УФН* **145** 593 (1985); Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokolov D D *Sov. Phys. Usp.* **28** 307 (1985)

146. Заславский Г М, Чириков Б В УФН **105** 3 (1971); Zaslavskii G M, Chirikov B V *Sov. Phys. Usp.* **14** 549 (1972)
147. Заславский Г М *Стохастичность динамических систем* (М.: Наука, 1984)
148. Kleva R G, Drake J F *Phys. Fluids* **27** 1686 (1984)
149. Solomon T H, Gollub J P *Phys. Rev. A* **38** 6280 (1988)
150. Мельников В К *Тр. Моск. матем. общества* **12** 3 (1963)
151. Морозов А И, Соловьев Л С, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 2 (Под ред. М. А Леонтьевича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 3; Morozov A I, Soloviev L S, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 2 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966) p. 1
152. Samelson R M, Wiggins S *Lagrangian Transport in Geophysical Jets and Waves: the Dynamical Systems Approach* (New York: Springer, 2006); Самельсон Р М, Виггинс С *Лагранжев перенос в геофизических струях и волнах: подход на основе теории динамических систем* (М. –Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2009)
153. Ponty Y et al., in *Solar and Planetary Dynamos. Proc. of a NATO Advanced Study Institute, Isaac Newton Institute, Cambridge, September 1992* (Eds M R E Proctor, P C Matthews, A M Rucklidge) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993) p. 241
154. Kida S, Takaoka M *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** 169 (1994)
155. Flor J-B (Ed.) *Fronts, Waves, and Vortices in Geophysical Flows* (Heidelberg: Springer, 2010)
156. Saleur H, Duplantier B *Phys. Rev. Lett.* **58** 2325 (1987)
157. Stauffer D *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor and Francis, 1985)
158. Кляцкин В И УФН **178** 419 (2008); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **51** 395 (2008)
159. Кляцкин В И УФН **181** 457 (2011); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **54** 441 (2011)
160. Galeev A A, Kuznetsova M M, Zeleny L M *Space Sci. Rev.* **44** 1 (1986)
161. Исиченко М Б и др. ЖЭТФ **96** 913 (1989); Isichenko M B et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 517 (1989)
162. Бакунин О Г УФН **173** 757 (2003); Bakunin O G *Phys. Usp.* **46** 733 (2003)
163. Грузинов А В, Исиченко М Б, Калда Я Л ЖЭТФ **97** 476 (1990); Gruzinov A V, Isichenko M B, Kalda Ya L *Sov. Phys. JETP* **70** 263 (1990)
164. Hussain F, Duraisamy K *Phys. Fluids* **23** 021701 (2011)
165. Bakunin O G J. *Plasma Phys.* **71** 435 (2005)
166. Misguich J H et al. *Physicalia Mag.* **20** 103 (1998)
167. Zimbardo G, Veltri P, Pommois P *Phys. Rev. E* **61** 1940 (2000)
168. Reuss J-D, Misguich J H *Phys. Rev. E* **54** 1857 (1996)
169. Vlad M et al. *J. Plasma Phys.* **59** 707 (1998)
170. Isichenko M B et al. *Phys. Fluids B* **4** 3973 (1992)
171. Ottaviani M *Europhys. Lett.* **20** 111 (1992)
172. Дрейзин Ю А, Дыхне А М ЖЭТФ **63** 242 (1972); Dreizin Yu A, Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **36** 127 (1973)
173. Bakunin O G J. *Plasma Phys.* **72** 647 (2006)
174. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 809 (1991)
175. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 795 (1991)
176. Bakunin O G *Plasma Phys. Control. Fusion* **45** 1909 (2003)
177. Лифшиц И М, Слуцкий А А, Набутовский В М ЖЭТФ **41** 939 (1961); Lifshits I M, Slutskin A A, Nabutovskii V M *Sov. Phys. JETP* **14** 669 (1962)
178. Тимофеев А В ЖЭТФ **75** 1303 (1978); Timofeev A V *Sov. Phys. JETP* **48** 656 (1978)
179. Escande D F, in *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Proc. of the International Workshop, Kiev, USSR, 13–25 April 1987* (Eds V G Bar'yakhtar et al.) (Singapore: World Scientific, 1988) p. 398
180. Нейштадт А И, Чайковский Д К, Черников А А ЖЭТФ **99** 763 (1991); Neishtadt A I, Chaikovskii D K, Chernikov A A *Sov. Phys. JETP* **72** 423 (1991)
181. Vainshtein D L, Vasiliev A A, Neishtadt A I *Chaos* **6** 514 (1996)
182. Jokipii J R, Parker E N *Astrophys. J.* **155** 777 (1969)
183. Ptuskin V S *Astrophys. Space Sci.* **61** 251 (1979)
184. Jokipii J R *Astrophys. J.* **183** 1029 (1973)
185. Wesson J *Tokamaks* (Oxford: Clarendon Press, 1987)
186. Miyamoto K *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (Berlin: Springer, 2005); Мијамото К *Основы физики плазмы и управляемого синтеза* (М.: Физматлит, 2007)
187. Rosenbluth M N et al. *Nucl. Fusion* **6** 297 (1966)
188. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Наука, 1990); Berezinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)
189. Голицын Г С *Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями* (Л.: Гидрометеоиздат, 1980)
190. Rechester A B, Rosenbluth M N *Phys. Rev. Lett.* **40** 38 (1978)
191. Falgarone E, Passot T (Eds) *Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics* (Berlin: Springer, 2003)
192. Chandran B D G, Cowley S C *Phys. Rev. Lett.* **80** 3077 (1998)
193. Dinklage A et al. (Eds) *Plasma Physics. Confinement, Transport and Collective Effects* (Lecture Notes in Physics, Vol. 670) (Berlin: Springer-Verlag, 2005)
194. Бакунин О Г УФН **173** 317 (2003); Bakunin O G *Phys. Usp.* **46** 309 (2003)
195. Ирошников П С *Астрон. журн.* **40** 742 (1963); Iroshnikov P S *Sov. Astron.* **7** 566 (1964)
196. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **8** 1385 (1965)
197. Goldreich P, Sridhar S *Astrophys. J.* **438** 763 (1995)
198. Goldreich P, Sridhar S *Astrophys. J.* **485** 680 (1997)
199. Boldyrev S *Phys. Rev. Lett.* **96** 115002 (2006)
200. Narayan R, Medvedev M V *Astrophys. J.* **562** L129 (2001)
201. Matthaeus W H, Goldstein M L J. *Geophys. Res.* **87** 6011 (1982)
202. Armstrong J W, Rickett B J, Spangler S R *Astrophys. J.* **443** 209 (1995)
203. Maron J, Goldreich P *Astrophys. J.* **544** 1175 (2001)
204. Cho J, Lazarian A, Vishniac E T *Astrophys. J.* **564** 291 (2002)
205. Tobias S M, Cattaneo F, Boldyrev S, in *Ten Chapters in Turbulence* (Eds P A Davidson, Y Kaneda, K R Sreenivasan) (New York: Cambridge Univ. Press, 2013)
206. Schekochihin A A, Cowley S C, in *Magnetohydrodynamics. Historical Evolution and Trends* (Fluid Mechanics and Its Applications, Vol. 80, Eds S S Molokov et al.) (Berlin: Springer-Verlag, 2007) p. 85
207. Galtier S et al. *J. Plasma Phys.* **63** 447 (2000)
208. Galtier S *Nonlin. Proces. Geophys.* **16** 83 (2009)
209. Galtier S, Chandran B D G *Phys. Plasmas* **13** 114505 (2006)
210. Galtier S et al. *Astrophys. J. Lett.* **564** L49 (2002)
211. Nazarenko S *Wave Turbulence* (Lecture Notes in Physics, Vol. 825) (Berlin: Springer-Verlag, 2011)
212. Batchelor G K *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **76** 133 (1950)
213. Kraichnan R H *J. Fluid Mech.* **47** 525 (1971)
214. Batchelor G K *Phys. Fluids* **12** II-233 (1969)
215. Bakunin O G *Physica A* **345** 1 (2005)
216. Biskamp D *Magnetohydrodynamic Turbulence* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
217. Pouquet A *J. Fluid Mech.* **88** 1 (1978)
218. Чернышов А А, Карельский К В, Петросян А С УФН **184** 457 (2014); Chernyshov A A, Karel'skij K V, Petrosyan A S *Phys. Usp.* **57** 421 (2014)
219. Зельдович Я Б *Письма в ЖЭТФ* **38** 51 (1983); Zel'dovich Ya B *JETP Lett.* **38** 57 (1983)

### Stochastic instability and turbulent transport. Characteristic scales, increments, diffusion coefficients

**O.G. Bakunin**

National Research Center "Kurchatov Institute", pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation  
E-mail: oleg\_bakunin@yahoo.com

Stochastic instability and its associated turbulent diffusion models are reviewed with particular attention to obtaining estimates and scaling characterizing correlation effects and increments. Specific models considered include the quasilinear Kazantsev approximation, stochasticity in the system of convective cells, Kadomtsev–Pogutse scaling, percolation models, Rechester–Rosenbluth balance, etc. The primary goal is to highlight the importance of determining the functional dependence of the stochastic instability increments and transport coefficients on turbulent pulsation amplitudes and other key parameters (characteristic pulsation frequencies, drift velocities, spectral energy flow, etc.) describing systems under discussion.

**Keywords:** stochastic instability, turbulent transport, diffusion coefficients, dynamical chaos, stochastic magnetic field, plasma

PACS numbers: **05.40.-a, 47.27.-i, 47.53.+n**

Bibliography — 219 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **185** (3) 271–306 (2015)

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201503b.0271

Received 17 June 2014, revised 17 December 2014

*Physics – Uspekhi* **58** (3) (2015)