

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

К проблеме турбулентных течений в трубах при очень больших числах Рейнольдса

(Ответ на комментарий И.И. Вигдоровича [УФН 185 213 (2015)])

к статье "Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса:
уроки новых исследований" [УФН 184 265 (2014)]

Г.И. Баренблатт, А.Дж. Корин, В.М. Простокишин

Чисто инженерная, на первый взгляд, задача о турбулентных течениях в трубах привлекает начиная с 1930-х годов серьёзное внимание математиков и физиков, среди которых были такие выдающиеся учёные, как Т. фон Карман, Л. Прандтль и Л.Д. Ландау. Оказалось, что при внешней простоте постановки (а может быть, и благодаря ей) эта задача позволяет выявить новые свойства явления турбулентности, остающегося сейчас во многом загадкой. В работе [1] дан краткий обзор результатов по этой проблеме, полученных авторами в последние два десятилетия. Некоторые из этих результатов существенно расходятся с общепринятыми представлениями, поэтому неудивительно, что иногда возникают затруднения с их пониманием. Письмо [2] является в этом смысле показательным. Поэтому, как нам кажется, его анализ, предлагаемый в настоящем письме, может представить определённый интерес для читателей УФН.

Ключевые слова: турбулентность, промежуточно-асимптотические законы, асимптотика при больших числах Рейнольдса, турбулентное течение в трубах, законы подобия, универсальный логарифмический закон

PACS numbers: 47.27.-i, 47.27.Ak, 47.27.N-

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201502h.0217

1. Кратко изложим необходимые для дальнейшего сведения. Для статистически осреднённой скорости течения u на расстоянии y от стенки трубы была предложена формула (универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля)

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B, \quad u_+ = \frac{u}{u_*}, \quad y_+ = \frac{yu_*}{\nu}. \quad (1)$$

Г.И. Баренблатт. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 380-41-52

E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com
University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,
Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

А.Дж. Корин. University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,
Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

E-mail: chorin@math.berkeley.edu

В.М. Простокишин. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация;

Lawrence Berkeley National Laboratory,
Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация

E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com

Статья поступила 4 июля 2014 г.,
после доработки 1 сентября 2014 г.

Для удобства читателей мы перешли от обозначений, использованных в нашей статье [1], к обозначениям, использованным в письме [2], так что $u_* = (\tau/\rho)^{1/2}$ — "динамическая скорость", τ — напряжение сдвига на стенке трубы, $Re = Ud/\nu$, U — средняя скорость по сечению трубы, т.е. расход, поделённый на площадь её поперечного сечения; d — диаметр трубы, ρ , ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости. Подчёркнём *промежуточно-асимптотический* характер формулы (1): она предполагается справедливой для промежуточной области расстояний от стенки, вне тонкого "вязкого подслоя", где вклад турбулентных и вязких напряжений сопоставим, и малой окрестности оси трубы. Постоянные κ (константа Кармана) и B предполагаются универсальными, т.е. в принципе одинаковыми для всех опытов во всех лабораториях. Это, в частности, подчёркивалось Л.Д. Ландау, давшим в 1944 г. [3, 4] простой вывод соотношения (1), основанный на гипотезе, явно сформулированной фон Карманом:

"На основе этих хорошо установленных экспериментальных фактов мы делаем предположение, что вне близкой окрестности стенки распределение скорости не зависит от вязкости".

Действительно, анализ размерностей [5, 6] даёт

$$\partial_y u = \frac{u_*}{y} \Phi \left(Re, \frac{yu_*}{\nu} \right),$$

или

$$\partial_{y_+} u_+ = \frac{1}{y_+} \Phi(\text{Re}, y_+).$$

Независимость от вязкости, входящей в оба аргумента функции Φ , означает, что функция Φ — постоянная, она традиционно обозначается как $1/\kappa$, так, что

$$\partial_{y_+} u_+ = \frac{1}{\kappa y_+}. \quad (2)$$

Интегрирование последнего соотношения (подчеркнём, обычное интегрирование, которое изучается в курсе анализа) и даёт универсальный закон Кармана–Прандтля (1).

2. Обратимся к письму [2]. На стр. 3 читаем:

"В [1] справедливо отмечено, что при определении эмпирических констант κ и B по результатам измерений профилей скорости возникают проблемы. Эти проблемы могут быть вызваны разными причинами. Во-первых, они, конечно, связаны с погрешностями измерений, а также с различной интерпретацией полученных данных и методикой их обработки. Так, в упомянутой в [1] работе [3] [у нас [7]. — Авт.] предлагаются значения $\kappa = 0,44$, $B = 6,3$, а в более позднем исследовании [4], выполненном на той же экспериментальной установке, $\kappa = 0,425 \pm 0,002$ и $B = 5,6 \pm 0,08$, что уже значительно ближе к наиболее часто используемой паре $\kappa = 0,41$ и $B = 5$. Во вторых, можно подвергнуть критике и саму формулу (3). Действительно, из вывода, данного Ландау, следует только

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + o(\ln y_+), \quad y_+ \rightarrow \infty. \quad (5)$$

То, что второй член асимптотики (5) — константа, является дополнительным предположением, от которого, возможно, следует отказаться. Проблема здесь, однако, состоит в том, что для определения вида второго члена разложения (5) нет достаточных теоретических оснований." [выделено нами. — Авт.]

Таким образом, в письме [2] высказывается определённое суждение о неадекватности универсального логарифмического закона (1). И ничего не предлагается взамен.

В письме [2] напоминаются традиционные законы подобия: универсальный логарифмический закон (3) для профиля скорости в пристеночном слое

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B + o(1), \quad y_+ \rightarrow \infty \quad (3)$$

(прямая в плоскости $\ln y_+$, u_+) и универсальный закон дефекта скорости вблизи оси, сращивание которых, как это было проделано Изаконом, Милликеном и фон Мизесом, предлагается как вывод универсального (подчёркиваем, независимого от числа Рейнольдса) логарифмического закона.

Далее в письме [2] читаем:

"Таким образом, логарифмический закон не существует сам по себе, он является частью общей концепции асимптотического описания поля скорости в трубе. Если уважаемые авторы хотят от него отказаться, они также должны отказаться от законов подобия Прандтля и Кармана и предложить, чем они собираются их заменить. Иными словами, если менять, то не только логарифмический закон на степенной, а всю классическую теорию асимптотического описания поля скорости в

трубе на другую, новую, которой, насколько можно судить, пока ещё нет".

Здесь мы вынуждены поправить уважаемого автора письма: такая теория уже давно существует (см. [8] и последующие публикации авторов, в частности, недавно вышедшую книгу [9]). Важно, что в наших работах была модифицирована с учётом влияния числа Рейнольдса [8] изложенная автором процедура Изакона–Милликена–фон Мизеса и законы подобия.

3. Обратимся к экспериментальным фактам. Эксперименты М.В. Загаролы [7] (рис. 1) находятся в чётком противоречии с универсальностью — независимостью от числа Рейнольдса. Видно расщепление данных по числу Рейнольдса и, в частности, зависимость от числа Рейнольдса дефекта скорости вблизи оси ("купола" на рис. 1) и сращиваемых с куполами прямолинейных участков в плоскости $\ln y_+$, u_+ .

Сказанного достаточно, чтобы усомниться в правильности закона Кармана–Прандтля. Нами было понято (ещё до экспериментов Загаролы), что это связано с неверностью основного предположения фон Кармана, воспроизведённого выше, так что влияние вязкости простирается на всё сечение трубы, а не только на вязкий подслои. Было принято предположение о неполной автомодельности по параметру y_+ , т.е. инвариантности распределения скорости относительно группы преобразований:

$$\partial_{y_+} u_+ = \frac{1}{y_+} \Phi, \quad \Phi = A(\text{Re}) (y_+)^{\alpha(\text{Re})}.$$

Это предположение включает как частный случай полную автомодельность по параметрам y_+ и Re , когда $\alpha = 0$, $A = \text{const}$, но является более общим. Нами была также принята "гипотеза исчезающей вязкости", согласно которой при $\nu \rightarrow 0$ градиент скорости стремится к конечному пределу. Эта гипотеза автоматически удовлетворяется в случае полной автомодельности по параметру y_+ , когда $\Phi = \text{const}$. Из двух принятых нами гипотез было строго выведено соотношение

$$u_+ = (C_1 \ln \text{Re} + C_2) (y_+)^{C_3 / \ln \text{Re}}.$$

Константы C_1 , C_2 , C_3 , входящие в последнюю формулу, были получены нами сравнением с опытами

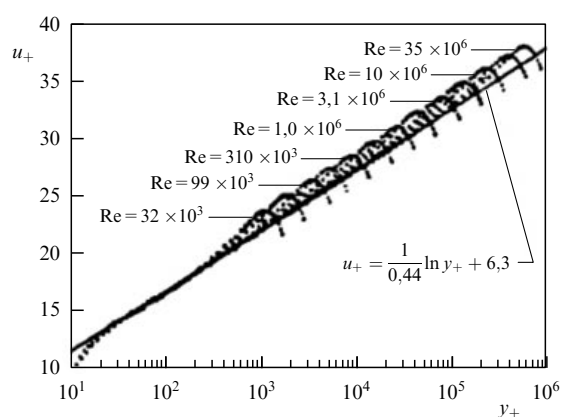


Рис. 1. Универсальный логарифмический закон не подтверждается данными экспериментов Загаролы на установке Supergipe (Принстон, США).

И. Никурадзе [10] (256 опытов), выполненными в лаборатории Прандтля. Были определены их значения, оказавшиеся в пределах точности опытов равными

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_2 = \frac{5}{2}, \quad C_3 = \frac{3}{2}.$$

Эти константы, в отличие от индивидуальных подборок для каждой серии опытов, о которых упоминается в письме [2], были строго фиксированы и при всех дальнейших обработках опытных данных оставались неизменными.

На рисунках 2 и 3 представлено сравнение предложенного в наших работах степенного закона

$$u_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) (y_+)^{3/2 \ln \text{Re}} \quad (4)$$

с экспериментами Никурадзе [10] и Загаролы [7]. Сравнение мы проводили, используя чувствительное преобразование: вместо u_+ рассматривалась функция

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2\alpha u_+}{\sqrt{3} + 5\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}.$$

Это преобразование приводит предложенный нами степенной закон к простому соотношению

$$\psi = \ln y_+.$$

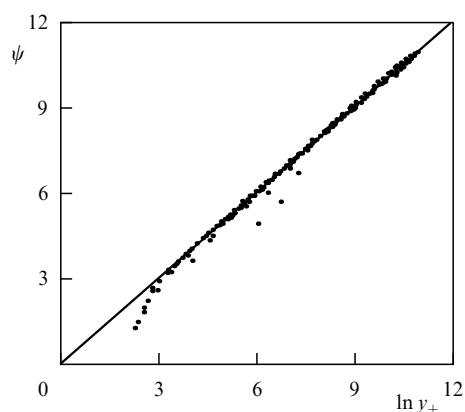


Рис. 2. Данные Никурадзе подтверждают новый степенной закон.

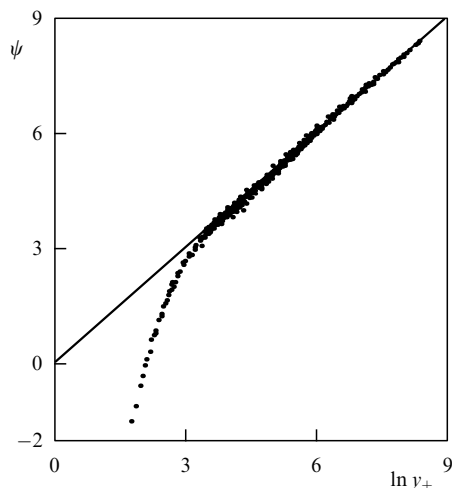


Рис. 3. Данные Загаролы подтверждают новый степенной закон.

Сравнение показывает, что начиная с верхней границы вязкого подслоя $y_+ \sim 30$ и вплоть до малой окрестности оси $2y/d > 0,95$ экспериментальные точки аккуратно ложатся на биссектрису первого квадранта $\psi = \ln y_+$, что подтверждает предложенный нами степенной закон.

Замечательно, что при $y_+ < 30$ экспериментальные точки расположены на единой кривой в этой плоскости и не расщепляются по числу Рейнольдса. Этот факт даёт определённую перспективу исследования течения в верхней части вязкого подслоя.

Попутно нами было показано [8], что опыты Загаролы начиная с $\text{Re} \sim 10^6$ нельзя считать проведёнными на установках с гладкими трубами, поскольку явно начинает проявляться влияние шероховатости стенок. Этот вывод был подтверждён в [11].

Мы приходим к следующим выводам:

1. Вопреки предположению фон Кармана, влияние вязкости в турбулентном потоке в трубе остаётся неисчезающим во всём его объёме. Универсальный логарифмический закон Кармана–Прандтля не может быть признан правильным.

2. Предложенный в наших работах неуниверсальный (зависящий от числа Рейнольдса) степенной закон

$$u_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) (y_+)^{3/2 \ln \text{Re}}$$

справедлив во всём диапазоне от верхней границы вязкого подслоя $y_+ \sim 30$ до малой окрестности оси трубы: $2y/d > 0,95$. При этом опыты Никурадзе [10] подтверждают степенной закон во всём диапазоне чисел Рейнольдса до $\text{Re} = 3,24 \times 10^6$. Опыты Загаролы подтверждают степенной закон для чисел Re вплоть до 1×10^6 . При больших числах Re в опытах на установке Superpipe (Принстон, США) проявляется шероховатость стенок [8, 11]. После учёта поправок на шероховатость по стандартной процедуре степенной закон подтверждается для опытов Загаролы для всех чисел Re . Отметим, что имеющиеся в письме попытки использования промежуточно-асимптотического степенного закона (4) вне области его применимости необоснованны.

3. Дополнительным аргументом в пользу предложенного степенного закона является показательное соответствие основанных на этом законе соотношений с данными многочисленных экспериментов в пограничных слоях.

4. Мы считаем, что письмо [2] не затрагивает содержания наших работ, отражённых в обзоре [1].

Список литературы

1. Баренблатт Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **184** 265 (2014); Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Phys. Usp.* **57** 250 (2014)
2. Вигдорович И И *УФН* **185** (2) (2015); Vigdorovich I I *Phys. Usp.* **58** (2) (2015)
3. Ландау Л, Лифшиц Е *Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости* (Теоретическая физика, Т. 3, Под общ. ред. Л Д Ландау) (М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1944)
4. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (Теоретическая физика, Т. 6) 3-е изд., перераб. (М.: Наука, 1986); Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Course of Theoretical Physics, Vol. 6) 2nd ed., rev. (Oxford: Pergamon Press, 1987)

5. Bridgman P W *Dimensional Analysis* (New Haven: Yale Univ. Press, 1931); Бриджмен П У *Анализ размерностей* (М. – Ижевск: РХД, 2001)
6. Баренблатт Г И *Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг* (Долгопрудный: Интеллект, 2009); Barenblatt G I *Scaling* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
7. Zagarola M V "Mean flow scaling of turbulent pipe flow", Ph.D. Thesis (Princeton: Princeton Univ., 1996)
8. Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Appl. Mech. Rev.* **50** 413 (1997)
9. Barenblatt G I *Flow, Deformation and Fracture* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014)
10. Nikuradse J "Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren", VDI (Verein Deutscher Ingenieure)-Forschungsheft 356, Supplement to "Engineering Research" ("Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens") Edition B Vol. 3 (Berlin: VDI-Verlag, 1932); Translated into English: "Laws of turbulent flow in smooth pipes", NASA TT F-10,359 (Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1966); Перевод на русск. яз.: Никурадзе И "Закономерности турбулентного движения в гладких трубах", в сб. *Проблемы турбулентности* (Под ред. М А Великанова, Н Т Швейковского) (М. – Л.: ОНТИ, 1936) с. 75
11. Perry A E, Hafez S, Chong M S J. *Fluid Mech.* **439** 395 (2001)

On the problem of turbulent flows in pipes at very large Reynolds numbers

(reply to comment by I. I. Vigdorovich [*Phys. Usp.* **58** (2015); *Usp. Fiz. Nauk* **185** 213 (2015)] on "Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned" [*Phys. Usp.* **57** 250 (2014); *Usp. Fiz. Nauk* **184** 265 (2014)])

G.I. Barenblatt

P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (499) 380 41 52
University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com

A.J. Chorin

University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
E-mail: chorin@math.berkeley.edu

V.M. Prostokishin

P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA;
National Research Nuclear University "MEPhI",
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com

The problem of turbulent flow in pipes, although at first sight of purely engineering interest, has since the 1930s been the subject of much attention by mathematicians and physicists, including such outstanding figures as T. von Karman, L. Prandtl and L.D. Landau. It has turned out that despite — or perhaps due to — the seemingly simple formulation of this problem, research on it has revealed new aspects of the still very mysterious phenomenon of turbulence. Reference [1] briefly summarizes our last twenty years' work on the problem. Some of our results strongly disagree with commonly accepted views which, unsurprisingly, makes them difficult to accept. This is well exemplified by the letter [2], so its analysis here may hopefully be of interest to *UFN's (Physics – Uspekhi)* readers.

Keywords: turbulence, intermediate asymptotic laws, asymptotic at high Reynolds numbers, turbulence flow in pipes, scaling laws, universal logarithmic law

PACS numbers: **47.27. – i**, 47.27.Ak, 47.27.N –

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201502h.0217

Bibliography — 11 references

Received 4 July 2014, revised 1 September 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (2) 217–220 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (2) (2015)