

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Описывает ли степенная формула турбулентный профиль скорости в трубе?

(Комментарий к статье Г.И. Баренблатта, А.Дж. Корина, В.М. Простокишина

"Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса:

уроки новых исследований" [УФН 184 265 (2014)])

И.И. Вигдорович

Обсуждается предложенная в работе Г.И. Баренблатта, А.Дж. Корина и В.М. Простокишина "Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса: уроки новых исследований" [УФН 184 265 (2014)] степенная формула для турбулентного профиля скорости в круглой трубе.

Ключевые слова: турбулентность, турбулентное течение в трубах, законы подобия, логарифмический закон, степенная формула для профиля скорости

PACS numbers: 47.10.-g, 47.27.-i, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201502g.0213

В недавно опубликованной обзорной статье [1], которая, насколько можно судить, является итогом более чем четвертьвековой работы авторов над рассматриваемой проблемой, утверждается, что универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля для профиля скорости в пристеночных турбулентных течениях "не может быть признан правильным и не может служить основой для преподавания и инженерных расчётов". Вместо него для течения в круглой трубе авторы предлагают формулу¹

$$u_+ = \left(\frac{\sqrt{3} \ln \text{Re}}{3} + \frac{5}{2} \right) \exp \left(\frac{3 \ln y_+}{2 \ln \text{Re}} \right),$$

$$u_+ = \frac{u}{u_*}, \quad y_+ = \frac{yu_*}{\nu}, \quad (1)$$

в которой y — расстояние до стенки, u_* — динамическая скорость (вычисляется по продольному перепаду давления), Re — число Рейнольдса, образованное по средней скорости и диаметру трубы d , ν — кинематическая вязкость жидкости. Область применимости степенного закона (1) — "основная промежуточная область", которая, как указано в разделе 8 обзора [1], у стенки примыкает к вязкому подслою. Таким образом, как утверждают авторы, вблизи стенки область применимости (1) — та же, что у логарифмического закона.

¹ В формуле (26) из работы [1] допущена опечатка [2].

И.И. Вигдорович. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Мичуринский просп. 1, 119192 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 939-30-88. E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

Статья поступила 12 июня 2014 г.,
после доработки 19 августа 2014 г.

Логарифмический закон, как справедливо пишут авторы, "считается одним из фундаментальных законов инженерной науки", и прежде чем от него отказаться, разумно выяснить, что из себя представляет предлагаемое альтернативное соотношение (1).

Но сначала напомним традиционные (можно назвать их классическими) представления о поведении усреднённого профиля скорости в трубе и известные законы подобия, вывод которых дан, например, в [3]. В вязком подслое, где $y_+ = O(1)$, выполняется закон стенки Прандтля, согласно которому все профили скорости могут быть описаны одной универсальной функцией $u_+(y_+)$. Эта функция имеет следующее асимптотическое поведение вблизи стенки:

$$u_+ = y_+ + O(y_+^4), \quad y_+ \rightarrow 0 \quad (2)$$

и вдали от неё:

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B + o(1), \quad y_+ \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Соотношение (3) есть логарифмический закон для профиля скорости в пристеночной области. Асимптотика (2) — точное соотношение, которое следует из уравнений Навье – Стокса.

В центральной части трубы, где $1/\xi = O(1)$, $\xi = 2y/d$, выполняется закон дефекта скорости Кармана,

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = f(\xi).$$

Здесь u_{\max} — скорость на оси трубы, $f(\xi)$ — универсальная функция, имеющая следующую асимптотику на стенке:

$$f = -\frac{1}{\kappa} \ln \xi + A + o(1), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (4)$$

где A — постоянная. Соотношение (4) есть формулировка логарифмического закона для профиля скорости во внешних переменных. Таким образом, поле усреднённой скорости описывается двумя законами подобия в терминах двух универсальных функций: $u_+(y_+)$ и $f(\xi)$. Область перекрытия асимптотических представлений (3) и (4) суть логарифмический подслой. (Можно заметить, что асимптотика (3) начинает описывать профиль скорости при значении $y_+ = 30$ [3], которое является практической нижней границей логарифмического подслоя или верхней границей вязкого подслоя.)

В эту достаточно стройную концепцию двух характерных масштабов и двух законов подобия формула (1) никак не вписывается. Асимптотику (3), например, нельзя заменить на асимптотику (1), потому что тогда, по крайней мере, придётся предположить, что при больших числах Рейнольдса в очень тонком вязком подслое, при $y_+ = O(1)$, профиль скорости в переменных стенки не универсален, а через Re зависит от диаметра трубы, что, вообще говоря, противоречит опыту.

Таким образом, логарифмический закон не существует сам по себе, он является частью общей концепции асимптотического описания поля скорости в трубе. Если уважаемые авторы [1] хотят от него отказаться, то они также должны отказаться от законов подобия Прандтля и Кармана и предложить, чем они собираются их заменить. Иными словами, если менять, то не только логарифмический закон на степенной, а всю классическую теорию асимптотического описания поля скорости в трубе на другую, новую, которой, насколько можно судить, пока ещё нет.

В [1] справедливо отмечено, что при определении эмпирических констант κ и B по результатам измерений профилей скорости возникают проблемы. Эти проблемы могут быть вызваны разными причинами. Во-первых, они, конечно, связаны с погрешностями измерений, а также с различной интерпретацией полученных данных и методикой их обработки. Так, в упомянутой в [1] работе [4] предлагаются значения $\kappa = 0,44$ и $B = 6,3$, а в более позднем исследовании [5], выполненном на той же экспериментальной установке, — $\kappa = 0,421 \pm 0,002$ и $B = 5,6 \pm 0,08$, что уже значительно ближе к наиболее часто используемой паре $\kappa = 0,41$, $B = 5$. Во-вторых, можно подвергнуть критике и саму формулу (3). Действительно, из вывода, данного Ландау [6], строго следует только

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + o(\ln y_+), \quad y_+ \rightarrow \infty. \quad (5)$$

То, что второй член асимптотики (5) — константа, является дополнительным предположением, от которого, возможно, следует отказаться. Проблема здесь, однако, состоит в том, что для определения вида второго члена разложения (5) нет достаточных теоретических оснований.

Рассмотрим теперь, что в плане описания экспериментов даёт формула (1). На рисунке 1 в обычном полулогарифмическом масштабе построены экспериментальные профили скорости [4], полученные при $Re = 2,3046 \times 10^5$ и $7,7147 \times 10^6$, соответствующие им степенные представления (1), прямая, отвечающая логарифмическому закону при значениях постоянных $\kappa = 0,44$ и $B = 6,3$, принятых в работе [4], и линейный профиль (2). При числе $Re = 2,3046 \times 10^5$ (рис. 1а) степенная формула

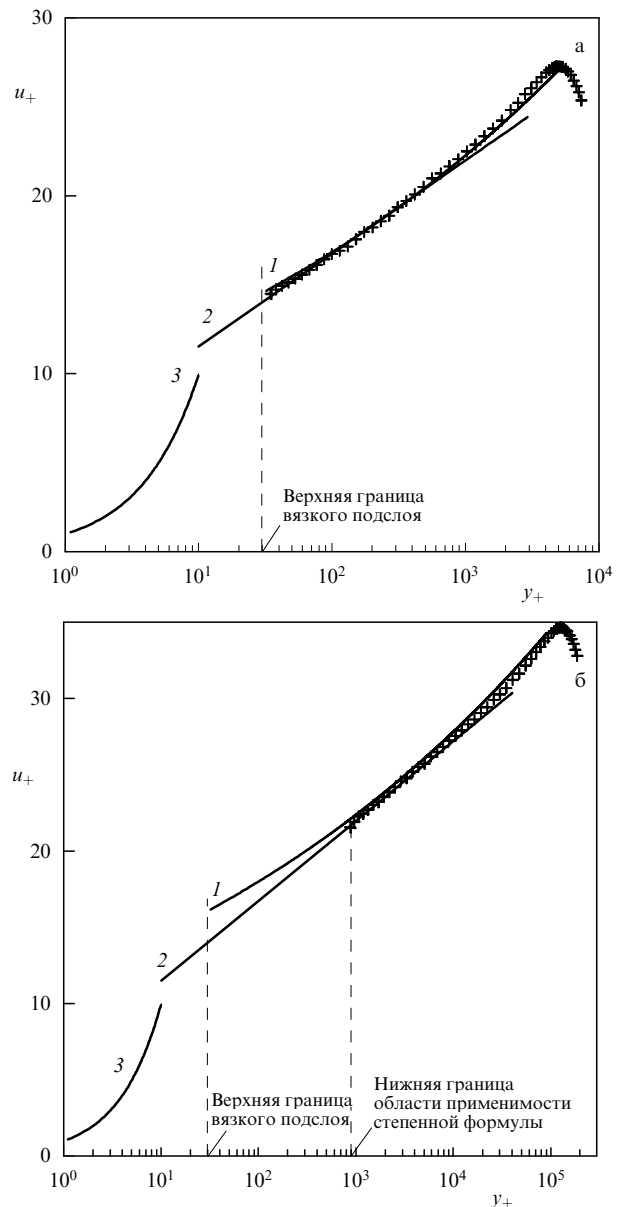


Рис. 1. Экспериментальные профили скорости в круглой трубе [4] при $Re = 2,3046 \times 10^5$ (а) и $7,7147 \times 10^6$ (б); 1 — формула (1), 2 — логарифмический закон (3), 3 — линейный профиль (2). Показаны верхняя граница вязкого подслоя и нижняя граница области применимости формулы (1).

хорошо описывает профиль скорости во всём логарифмическом подслое (его условная нижняя граница, как сказано выше, проведена при $y_+ = 30$) и ещё дополнительно в некоторой области над ним. А вот при большем числе $Re = 7,7147 \times 10^6$ (рис. 1б) картина уже совершенно иная. Хотя по причине, которая будет объяснена ниже, экспериментальных точек для значений $y_+ < 887$ нет, ясно, что при убывании y_+ профиль скорости, по крайней мере приблизительно, проходит по логарифмической прямой 2, а затем переходит на линию 3. Таким образом, расхождение формулы (1) с профилем скорости в области, расположенной между двумя штриховыми прямыми на рис. 1б, растёт при движении в направлении стенки и вблизи верхней границы вязкого подслоя становится очень значительным. Это вызвано принципиальным недостатком формулы (1). При любом фиксированном

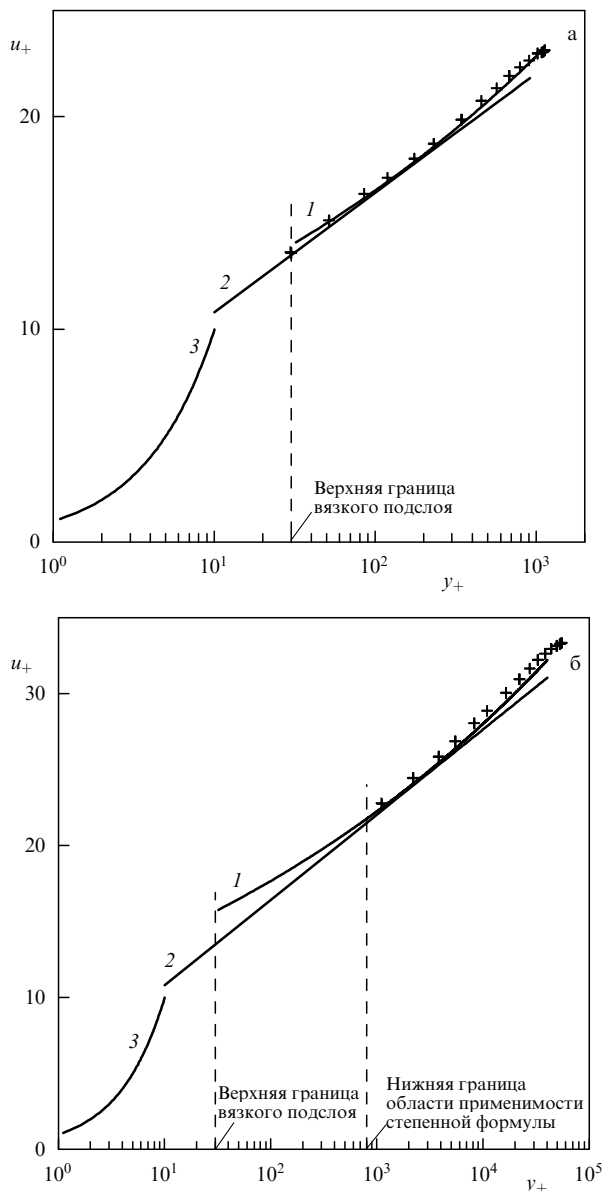


Рис. 2. Экспериментальные профили скорости в круглой трубе [7] при $Re = 4,34 \times 10^4$ (а) и $3,24 \times 10^6$ (б). Обозначения, как на рис. 1.

значении y_+ в пределе при $Re \rightarrow \infty$ она даёт $u_+ \rightarrow \infty$. Хотя значение u_+ при фиксированном y_+ может быть только конечным.

Таким образом, вопреки утверждению, сделанному в разделе 8 обзора [1], область применимости формулы (1) при больших числах Рейнольдса никак не может начинаться от границы вязкого подслоя. Она, в принципе, значительно уже, чем область применимости логарифмического закона и, как видно на рис. 1б, приблизительно составляет одну верхнюю декаду логарифмического подслоя. Ту же картину показывает рис. 2, где представлены данные из гораздо более ранней работы [7]. Хотя вывод о том, что при $Re \rightarrow \infty$ формула (1) неприменима в большей части логарифмического подслоя, можно сделать вообще без сопоставления с экспериментальными данными. Достаточно просто обратить внимание на то, какое предельное значение скорости она даёт при $Re \rightarrow \infty$.

Возникает вопрос: как объяснить хорошее совпадение формулы (1) с результатами измерений, которое в

работе [1] демонстрируют рис. 3 и 4? Ответ: на этих рисунках представлены только части профилей скорости, попавшие в интервал, доступный для измерений. Дело в том, что существует некоторое минимальное расстояние до стенки, на котором можно вести измерения скорости, при том что толщина вязкого подслоя при $Re \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому в физическом эксперименте при больших числах Рейнольдса невозможно измерить профиль скорости вплоть до границы вязкого подслоя. Как видно на рис. 1б и 2б, нижняя граница области применимости степенной формулы как раз приблизительно совпадает с расстоянием до стенки, на котором эти измерения ещё удаётся выполнить. Таким образом, если бы на рис. 3 и 4 работы [1] попали данные по профилям скорости во всём заявленном диапазоне расстояний до стенки (т.е. начиная с нижней границы логарифмического подслоя), то картина была бы совершенно иной.

Выводы из настоящего письма следующие. Формула (1) не может быть альтернативой логарифмическому закону, просто потому, что области применимости двух этих соотношений — разные. Область применимости логарифмического закона — логарифмический подслей. Степенная формула описывает профиль скорости в одной верхней декаде этого подслоя, а также в некоторой области, расположенной над ним. В основной части логарифмического подслоя (при $Re \rightarrow \infty$ эта часть в логарифмическом масштабе может быть сколь угодно широкой) формула (1) неприменима, поскольку при любом фиксированном значении y_+ и $Re \rightarrow \infty$ она даёт физически неправильный результат $u_+ \rightarrow \infty$. При небольших числах Рейнольдса, когда протяжённость логарифмического подслоя сравнительно невелика, эти различия между логарифмическим законом и степенной формулой мало заметны. Более того, степенная формула имеет практическое преимущество, поскольку хорошо аппроксимирует часть профиля, расположенную выше логарифмического подслоя. При $Re \rightarrow \infty$ различия могут быть сколь угодно большими, так же как и ошибка, с которой формула (1) описывает реальный профиль скорости.

Следует также отметить, что формула (1), как и любое неуниверсальное, т.е. зависящее от числа Рейнольдса, соотношение, не может быть включена в существующую концепцию описания поля скорости в терминах известных законов подобия (законы стенки и дефекта скорости). Отвергая логарифмический закон, уважаемые авторы фактически предлагают отказаться и от этих законов, ничего пока не предлагая взамен.

Список литературы

1. Баренблатт Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **184** 265 (2014); Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Phys. Usp.* **57** 250 (2014)
2. Баренблатт Г И, Корин А Дж, Простокишин В М *УФН* **184** 1371 (2014); Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Phys. Usp.* **57** (12) (2014), <https://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0184.201412j.1371>
3. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности Ч. 1* (М.: Наука, 1965); Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence Vol. 1* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971)
4. Zagarola M V "Mean flow scaling of turbulent pipe flow", Ph.D. Thesis (Princeton: Princeton Univ., 1996)
5. McKeon B J et al. *J. Fluid Mech.* **501** 135 (2004)

6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости* (Теоретическая физика, Т. 3, Под общ. ред. Л Д Ландау) (М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1944)
7. Nikuradse J "Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren", VDI (Verein Deutscher Ingenieure)-Forschungsheft 356, Supplement to "Engineering Research" ("Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens") Edition B Vol. 3 (Berlin: VDI-Verlag, 1932); Translated into English: "Laws of turbulent flow in smooth pipes", NASA TT F-10,359 (Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1966); Перевод на русск. яз.: Никурадзе И "Закономерности турбулентного движения в гладких трубах", в сб. *Проблемы турбулентности* (Под ред. М А Великанова, Н Т Швейковского) (М. – Л.: ОНТИ, 1936) с. 75

Does the power formula describe turbulent velocity profiles in tubes?

(comment on "Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned" [*Phys. Usp.* **57** 250 (2014); *Usp. Fiz. Nauk* **184** 265 (2014)])

I.I. Vigdorovich

*Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
Michurinskii prosp. 1, 119192 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (495) 939 30 88. E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru*

Discusses the power formula for turbulent velocity profiles in a circular tube offered by G.I. Barenblatt, A.J. Chorin, and V.M. Prostokishin in their paper "Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned" (*Phys. Usp.* **57** 250 (2014); *Usp. Fiz. Nauk* **184** 265 (2014)).

Keywords: turbulence, turbulent flow in pipes, scaling laws, log law, power formula for the velocity profile

PACS numbers: **47.10**, –g, **47.27**, –i, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201502g.0213

Bibliography — 7 references

Received 12 June 2014, revised 19 August 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (2) 213–216 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (2) (2015)