

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

**К вопросу о правомерности неголономной модели
динамики кельтского камня**

С.П. Кузнецов

В связи с задачей о твёрдом теле выпуклой формы на шероховатой горизонтальной плоскости ("кельтский камень") обсуждается правомерность неголономной модели, постулирующей нулевую скорость точки контакта, вследствие чего трение не совершает работы. Эта модель абстрактна, но она конструктивна, подобно многим идеализациям, привычным в науке. Несмотря на консервативность (сохранение энергии), к системе неприменима теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма. Поэтому в фазовом пространстве возможны объекты, характерные для диссипативной динамики (аттракторы), что приводит к таким явлениям, как самопроизвольная смена направления вращения. Неголономные модели, промежуточные между консервативными и диссипативными системами, должны занять своё место в картине, формируемой современной теорией динамических систем.

Ключевые слова: кельтский камень, твёрдое тело, неголономная модель, аттрактор

PACS numbers: 05.45. – а, 45.40. – f

DOI: 10.3367/UFN.0185.201512h.1342

Выраженная в комментарии В.Ф. Журавлёва [1] неудовлетворённость в отношении неголономной механической модели динамики кельтского камня, использованной в опубликованных в *УФН* работах [2, 3], отчасти понятна, поскольку эта модель, в самом деле, существенно огрубляет и упрощает описание, если иметь в виду реальную физическую систему. Тем не менее отвергать вообще этот подход в контексте рассмотренной задачи представляется принципиально неверным и ошибочным методологически. Необходимо просто ясно отдавать себе отчёт в том, какие цели преследуются и какого уровня понимания на этой основе можно достичь. По нашему мнению, достоинство неголономной модели состоит в том, что она берёт за основу именно наиболее существенные моменты для объяснения парадоксального поведения кельтского камня, в том числе эффекта реверса. Эта модель обеспечивает возможность трактовки динамики объекта в рамках представлений теории динамических систем, которая благодаря своей глубокой проработанности и широте приложений занимает важнейшее место в современном научном мировоззрении [4–6].

С другой стороны, при далеко идущей конкретизации задачи, например закона трения, как предлагается в комментарии В.Ф. Журавлёва [1], возникают модели,

более сложные и в гораздо меньшей степени обозримые [7]. При надлежащем подборе функциональных характеристик и параметров это, наверное, дало бы возможность более точного в количественном отношении описания, но тогда, очевидно, исчезнет общность — для каждого конкретного камня задачу придётся решать отдельно, и именно к нему, конкретному объекту, будут относиться заключения о присутствии тех или иных феноменов, например реверса.

В разных областях физики плодотворно применяются и никем не оспариваются такие абстрагирующиеся от свойств реальных физических систем концепции, как материальная точка, абсолютно твёрдое тело, идеальный газ, идеальная жидкость [8]. Этому не мешает даже то обстоятельство, что буквальное следование соответствующим модельным представлениям нередко может привести к очевидным противоречиям с физической реальностью (которые, впрочем, непременно должны быть вскрыты и интерпретированы, что, разумеется, является обязанностью исследователя). Можно вспомнить, например, парадокс Даламбера – Эйлера об отсутствии сил сопротивления при движении тел в идеальной жидкости [8, 9] или парадокс Эренфеста, возникающий при попытке использовать идею твёрдого тела в рамках теории относительности [10]. Однако, отвлекаясь от деталей, относящихся к конкретным задачам, мы всегда получаем возможность гораздо более широкого обзора проблемы и выводов, относящихся к многообразным ситуациям.

Подобно упомянутым выше понятиям, абстрактным является также и основополагающее понятие динамической системы как объекта, мгновенное состояние которого определяется конечным набором переменных, задающих положение точки в фазовом пространстве, и

С.П. Кузнецов. Удмуртский государственный университет,
ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Удмуртия,
Российская Федерация;
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Зелёная 38, 410019 Саратов, Российская Федерация
E-mail: spkuz@rambler.ru, kuznetsov@sgu.ru

Статья поступила 8 октября 2015 г.

для которого установлен оператор эволюции в виде правила, позволяющего однозначно определить состояние в любой последующий момент времени по начальному состоянию [4–6]. Абстракцию вносит само допущение об изоляции объекта от остального мира.

Далее, среди динамических систем выделяют консервативные (гамильтоновы) и диссипативные системы. Представление о консервативности — это тоже результат абстракции, поскольку любым системам реального мира всегда присуща диссипация вследствие взаимодействия принимаемых во внимание движений с окружающей средой и микроскопической структуры самой физической системы (атомы и молекулы). С другой стороны, диссипативность, если её понимать просто как потерю механической энергии или как сжатие фазового объёма облака изображающих точек для ансамбля систем в процессе динамической эволюции, оставляет за бортом фундаментальную связь с флуктуациями. А ведь именно они обуславливают происхождение диссипации и, если быть до конца последовательным, в принципе нарушают возможность представления состояния объекта как заданного конечным набором переменных. (Этот момент оказывается принципиальным, если обратиться к проблеме адекватного описания диссипации при учёте квантовых эффектов.)

Разумеется, абстракцией является и представление о неголономной связи [11–14]. Содержательность и продуктивность этой абстракции вряд ли можно обосновать беглыми рассуждениями, но их подтверждением служат вся история исследований и разработок, а также накопленный багаж знаний и инструментарий неголономной механики, вклад в развитие которой внесли многие выдающиеся учёные. Определить место в этой картине сложных динамических феноменов, присущих такой системе, как кельтский камень, — естественная и необходимая задача [2, 3, 14, 15].

С точки зрения теории динамических систем неголономная механика интересна тем, что она вводит в рассмотрение класс объектов, занимающих промежуточное положение между консервативными и диссипативными в традиционной трактовке системами. Неголономная модель кельтского камня — как раз пример такого рода. С одной стороны, это система консервативная в смысле сохранения механической энергии, с другой стороны, фазовый объём в процессе эволюции во времени не сохраняется, что делает возможным присутствие в фазовом пространстве объектов, характерных для диссипативной динамики, — аттракторов, в том числе простых (притягивающие неподвижные точки, предельные циклы) и сложных (странные аттракторы).

Главная интригующая особенность движения кельтского камня (реверс) находится в чётко выраженной взаимосвязи с поведением неголономной модели — а именно с наличием в фазовом пространстве сосуществующей пары симметричных инвариантных множеств — аттрактора и репеллера, из которых только аттрактор соответствует наблюдаемому движению физического объекта в промежуточной асимптотике, когда он уже ушёл от сильно неустойчивых состояний, но ещё не наступило затухание из-за трения.

Неголономная модель кельтского камня демонстрирует [3] разнообразные периодические и хаотические режимы, аттракторы, в том числе аттрактор типа Лоренца [6, 16, 17], переход к хаосу согласно традицион-

ному сценарию Фейгенбаума [6, 18]. Это представляет значительный интерес как с точки зрения возможных феноменов в рамках неголономной механики, так и с точки зрения наполнения конкретным содержанием идей и представлений современной нелинейной динамики. Оговорки относительно применимости неголономной модели для количественного описания задачи в достаточно ясной форме приведены в заключении нашей статьи [3].

Сила теоретической концепции выражается не только и не столько в том, что она предоставляет возможность количественно описывать конкретные системы, но и в том, что она позволяет создать основу для описания и интерпретации с единых позиций широкого круга явлений, даже если речь идёт о их рассмотрении на качественном уровне. Ввиду этого неголономная механика, несомненно, заслуживает внимания и исследования, поскольку предлагает именно такую широкую основу, в частности, для решения многообразных практически значимых задач, например в механике экипажей, робототехнике и пр. [19–21].

Автор благодарен Российскому научному фонду за поддержку работы в рамках гранта 15-12-20035.

Список литературы

1. Журавлёв В Ф *УФН* **185** 1337 (2015); Zhuravlev V F *Phys. Usp.* **58** (12) (2015)
2. Борисов А В, Мамаев И С *УФН* **173** 407 (2003); Borisov A V, Mamaev I S *Phys. Usp.* **46** 393 (2003)
3. Борисов А В, Казаков А О, Кузнецов С П *УФН* **184** 493 (2014); Borisov A V, Kazakov A O, Kuznetsov S P *Phys. Usp.* **57** 453 (2014)
4. Лоскутов А Ю *УФН* **180** 1305 (2010); Loskutov A *Phys. Usp.* **53** 1257 (2010)
5. Afraimovich V S et al. *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (4) 435 (2014)
6. Кузнецов С П *Динамический хаос* (М.: Физматлит, 2006)
7. Журавлёв В Ф, Климов Д М *Изв. РАН. Механика твёрдого тела* (3) 8 (2008); Zhuravlev V Ph, Klimov D M *Mech. Solids* **43** 320 (2008)
8. Feynman R P, Leighton R B, Sands M *The Feynman Lectures on Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1963); Пер. на русск. яз.: Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* (М.: Мир, 1967)
9. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: The Univ. Press, 1930); Пер. на русск. яз.: Ламб Г *Гидродинамика* (М.–Л.: ОГИЗ, 1947)
10. Соколовский Ю И *Теория относительности в элементарном изложении* (М.: Наука, 1964); Пер. 1-го русск. изд.: Sokolovskii Iu I *The Special Theory of Relativity* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1962)
11. Hertz H *Prinzipien der Mechanik in neuem zusammenhange Dargestellt* (Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1894); Пер. на англ. яз.: *The Principles of Mechanics Presented in a New Form* (Mineola, N.Y.: Dover Publ., 2003); Пер. на русск. яз.: Герц Г *Принципы механики, изложенные в новой связи* (Под общ. ред. И И Артоблевского) (М.: Изд-во АН СССР, 1959)
12. Неймарк Ю И, Фуфаев Н А *Динамика неголономных систем* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Neimark Ju I, Fufaev N A *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1972)
13. Mei F *Appl. Mech. Rev.* **53** (11) 283 (2000)
14. Borisov A V, Mamaev I S, Bizyaev I A *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (3) 277 (2013)
15. Borisov A V, Kazakov A O, Sataev I R *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (6) 718 (2014)
16. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** (2) 130 (1963)
17. Gonchenko A S, Gonchenko S V, Kazakov A O *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (5) 521 (2013)
18. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **19** (1) 25 (1978)

19. Baillieul J, Sastry S S, Sussmann H J (Eds) *Essays on Mathematical Robotics* (The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 104) (New York: Springer-Verlag, 2012)
20. Becker F et al. *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (1–2) 63 (2013)
21. Svinin M, Morinaga A, Yamamoto M *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (1–2) 126 (2013)

On the validity of nonholonomic model of the rattleback

S.P. Kuznetsov

Udmurt State University,

ul. Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Udmurtiya, Russian Federation;

Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,

ul. Zelenaya 38, 410019 Saratov, Russian Federation

E-mail: spkuz@rambler.ru, kuznetsov@sgu.ru

In connection with the problem of a convex-shaped solid body on a rough horizontal plane (the rattleback or Celtic stone), the paper discusses the validity of the nonholonomic model, which postulates that the contact point has a zero velocity and hence friction performs no mechanical work. While abstract, this model is undoubtedly constructive, similar to many idealizations commonly used in science. Despite its energy-conserving nature, the model does not obey Liouville's theorem on phase volume conservation, thus allowing the occurrence in the phase space of objects characteristic for dissipative dynamics (attractors) and thereby leading to phenomena like the spontaneous reversal of rotations. Nonholonomic models, intermediate between conservative and dissipative systems, should take their deserved place in the general picture of the modern theory of dynamical systems.

Keywords: rattleback, solid body, nonholonomic model, attractor

PACS numbers: **05.45. – a, 45.40. – f**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512h.1342

Bibliography — 21 references

Received 8 October 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (12) 1342–1344 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (12) (2015)