

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Замечания о новых моделях трения и неголономной механике*

А.В. Борисов, И.С. Мамаев

Представлен ответ на комментарий В.Ф. Журавлёва [УФН 185 1337 (2015)] о несостоятельности неголономной модели при исследовании качения твёрдых тел. Обсуждается модель неголономной механики. На примере результатов современных исследований показаны правомерность и перспективность неголономной модели наряду с другими развиваемыми моделями динамики и трения.

Ключевые слова: неголономная модель, сухое трение, кельтский камень, качение твёрдого тела

PACS numbers: **05.45. – а, 45.40. – f**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512g.1339

Данная статья является нашей реакцией на комментарий В.Ф. Журавлёва [1] и представляет собой, по сути, продолжение дискуссии о правомерности моделей трения, развёрнутой несколько лет назад на страницах журнала *Нелинейная динамика* (см., в частности, [2]).

С первых же строк вновь открытой полемики становится ясно, что В.Ф. Журавлёв всё так же придерживается своей принципиальной позиции о несостоятельности неголономной модели качения и намерения полностью заместить её собственной моделью поликомпонентного сухого трения, основанной на теории Контенсу–Эрисмана [3]. Стиль изложения В.Ф. Журавлёва остаётся неизменным, комментарий [1] содержит чересчур категоричные утверждения и некорректные формулировки результатов работ по неголономной механике, основанные на искажении хронологии событий и сути исследований.

Далее последовательно изложим наши впечатления и контраргументы.

1. В первом же абзаце В.Ф. Журавлёв допускает хронологический казус, едва ли не присуждая себе пальму первенства в демонстрации перед международным научным сообществом (а именно перед французскими математиками в 1995 г.) удивительных эффектов в динамике кельтского камня. В действительности эта задача известна, без преувеличения, очень давно, со времён древних кельтов (откуда и получила своё название). По-види-

мому, первая полноценная научная работа Г. Уолкера [4] о динамике кельтского камня была представлена ещё в 1896 г. (почти за 100 лет до сообщения В.Ф. Журавлёва во Франции) перед английским математическим сообществом и, конечно, уже тогда она вызвала большой интерес. Описание системы и анализ её динамики (со ссылкой на [4]) вошли в учебник Рауса [5] 1905 года. В 1979 г. (за 16 лет до сообщения В.Ф. Журавлёва) журнал *Scientific American* опубликовал занимательную научно-популярную статью Дж. Уолкера [6] об удивительной способности камня самопроизвольно менять направление своего вращения.

Сегодня кельтские камни известны во всём мире, и без труда можно приобрести их коммерческие модели. Однако в полной мере проблема до сих пор не разрешена, она является актуальной и продолжает рассматриваться с различных физических и математических точек зрения. Наиболее известны неголономная модель (см., например, [7, 8]) системы и модель с трением (см., например, [9]). Современное развитие методов нелинейной динамики (подробный обзор можно найти в [10]) выводит исследование эффектов кельтского камня в неголономной постановке на новый уровень. Становятся возможными обнаружение и подробный анализ режимов движения, характерных для диссипативных систем: устойчивого равновесия, странных хаотических аттракторов, предельных циклов [7] и др.

2. Отдельного критического замечания заслуживает утверждение В.Ф. Журавлёва об упругости усечённого эллипсоида и полуплоскости в модели кельтского камня, рассмотренной им в [9]. На самом деле используемая модель отвечает твёрдому телу с искусственно введённой, заимствованной из модели упругого взаимодействия площадкой контакта. Исследование системы с использованием совместной модели упругого тела и контактного взаимодействия, обладающей бесконечным числом степеней свободы, находится пока на грани компьютерных возможностей. Методы такого анализа пока только разрабатываются и верифицируются. Предложенное в [9] введение площадки контакта, которое, хотя, на первый взгляд, и упрощает задачу, привносит множе-

* Ответ на комментарий В.Ф. Журавлёва [УФН 185 1337 (2015)].

А.В. Борисов. Удмуртский государственный университет, ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Российская Федерация; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: borisov@rcd.ru

И.С. Мамаев. Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, ул. Студенческая 7, 426069 Ижевск, Российская Федерация
E-mail: mamaev@rcd.ru

Статья поступила 8 октября 2015 г.

ство неопределённых факторов. Среди таких факторов — неизвестная величина площадки контакта, размерами которой пренебрегают в ходе вычислений, и заимствованное из статической теории напряжений Герца (для движущегося тела!) распределение давления по площадке контакта. Отметим также, что теория Герца относится к задаче о локально сферическом контакте, в котором в предельном случае одна из сфер превращается в плоскость при стремлении её радиуса к бесконечности. Форма площадки контакта рассмотренного в [9] эллипсоида будет существенно отличаться от контакта для сфер, рассмотренных Герцем.

3. В очередной раз В.Ф. Журавлёв пытается упрекнуть неголономную модель в некорректности по Адамару из-за скачкообразного изменения времени скольжения тела при стремлении площадки контакта к нулю [11] (1966 г.), приводящей, по его мнению, к противоречиям при предельном переходе от системы с сухим трением к неголономной системе. В ответ стоит обратить внимание В.Ф. Журавлёва на недавние работы В.В. Козлова [12] и А.П. Иванова [13] (опубликованные в 2010 г. в рамках упомянутой выше полемической переписки), в которых показано, что движение шара стремится к неголоному качению при неограниченном уменьшении пятна контакта и увеличении коэффициента трения как для модели равномерного распределения, рассмотренной в [11] (где автор не учёл неограниченного возрастания коэффициента трения), так и для модели контакта Герца, модели Контенсу–Эрисмана и более общей модели, учитывающей сухое трение качения [14].

4. Предвзятость В.Ф. Журавлёва по отношению к неголономной модели приводит к появлению в комментарии в связи с работой Контенсу [15] любопытной формулировки "неголономная модель упругого контакта". Контенсу изучает нутационное движение волчка, представляющее собой комбинацию двух движений — скольжения и вращения, и показывает, что при больших скоростях вращения волчков сухое трение работает как вязкое трение, что приводит к существенным упрощениям в вычислениях. Неголономная модель не учитывает трения, и она просто не подходит для объяснения этих эффектов. А указанной В.Ф. Журавлёвым "неголономной модели упругого контакта" не существует. По тем же причинам неголономная модель не объясняет причины переворота волчка Томсона.

5. В.Ф. Журавлёв некорректно утверждает, что в сборнике по неголономным динамическим системам [16] (под нашей редакцией) "приводится пример, когда результаты эксперимента отличаются от теоретических в 130/3 раз". На самом деле в приведённом примере идёт речь не о натурном эксперименте, а только о сравнении результатов численного интегрирования уравнений движения кельтского камня, полученных разными группами исследователей.

6. Предлагаемая В.Ф. Журавлёвым модель трения, основанная на теории Контенсу–Эрисмана с аппроксимациями Паде, не подкрепляется доказательствами её применимости. В.Ф. Журавлёв не отвечает на вопросы о теоретических неопределённостях, в рамках которых она была построена. Следовательно, наряду со многими другими теориями динамики с сухим трением (см., например, [17, 18]), она носит не более чем умозрительный модельный характер и требует экспериментальной проверки. О необходимости лабораторных исследований в динамике

систем с сухим трением говорят, в частности, и последние экспериментальные работы в этой области [19, 20].

7. Неголономная механика наряду с лагранжевой и гамильтоновой механикой, гидродинамикой идеальной жидкости являются фундаментальными науками. Решаемые в их рамках задачи полностью удовлетворяют критерию фундаментальной науки по Кирхгофу [21]: "описать полно и простейшим образом происходящее в природе движение". Герц [22] поддерживал эти условия, требуя от фундаментального закона механики, "чтобы он, будучи применён к задаче с приблизительно точными условиями, всегда давал бы приблизительно точные результаты, но не совершенно неверные".

Герц, являвшийся основоположником неголономной механики, взял за основу модель движения — качение без скольжения. Относительно приближённости этой модели Герц пишет, что "качение без скольжения в действительности является качением с незначительным скольжением, т.е. процессом трения", но сами процессы трения Герц считал уже не фундаментальными, а исключительно эмпирическими, поскольку не находил ясно понимаемых причин, приводящих к трению. Герц верно замечает, что "качение без скольжения не противоречит ни принципу энергии, ни какому-либо из законов, известных физике". Это замечание, наряду с замечанием о верных предсказаниях движения, является, по-видимому, самым убедительным основанием неголономной механики. А поскольку все жёсткие связи в механике мы вводим умозрительно, неголономные связи в этом смысле ничем не отличаются от голономных, которые тоже осуществляются приближённо.

8. И фундаментальная, и эмпирическая науки должны работать в рамках тех вопросов, на которые они способны ответить (по принципам полноты и простоты). В.Ф. Журавлёв, к сожалению, нигде не конкретизирует вопросы ни к неголономной модели, развиваемой в наших работах, ни к предлагаемой в его работах модели с трением. Наше мнение по этому поводу не изменилось: смысл строить сложную феноменологическую модель с трением имеется только тогда, когда стоит задача объяснить движение кельтского камня вплоть до момента его остановки и, возможно, более тонкие эффекты в финальной динамике. Однако методы, предложенные в статье [9] на основе модели Контенсу–Эрисмана с аппроксимациями Паде для качественного анализа динамики кельтского камня, позволили построить лишь одну траекторию движения тела. В лучшем случае авторы [9] лишь повторили результаты, полученные в рамках неголономной модели.

Кроме того, любые результаты, особенно те, которые получены с использованием феноменологических моделей (тем более основанных на множестве дополнительных неопределённых предположений), надо проверять экспериментально.

9. Неголономная модель отвечает на вопросы на этапах движения до того, как камень начинает останавливаться. Она является достаточно простой, что позволяет далеко продвинуться в анализе, применяя современные математические и компьютерные методы, объясняет эффекты динамики кельтского камня и позволяет сделать правдоподобные предсказания. А главное, находит истинную причину реверсов — несовпадение геометрических и инерционных осей в точке контакта (динамическая и геометрическая асимметрия).

В последнее время с помощью методов неголономной механики исследована динамика тел с различными геометрическими и инерционными свойствами (см., например, [23]) и предсказаны новые эффекты: эффект подъёма с переворотом в динамике кельтского камня в форме эллипсоида [24], реверс в динамике волчка Чаплыгина [25] и др. Экспериментальное обнаружение данных эффектов будет значительным подтверждением актуальности и правомерности неголономной механики.

Более того, справедливость неголономной модели подтверждается достаточно большим количеством экспериментальных работ, восходящих к Ирншоу, с вращающейся плоскостью [26], современных работ с использованием высокоскоростных видеокамер [27].

10. В.Ф. Журавлёв в очередной раз критикует неголономную механику исключительно умозрительно. Не прекращающиеся на протяжении нескольких лет нападки выглядят довольно странно. Неголономная механика — это раздел классической механики, восходящий к работам знаменитых математиков и механиков Аппеля, Чаплыгина, Жуковского, Рауса и многих других. Применение в анализе неголономных систем современных компьютерных методов и методов нелинейной динамики позволит и в будущем решать новые теоретические и прикладные задачи.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-19-01303).

Список литературы

1. Журавлёв В Ф *УФН* **185** 1337 (2015); Zhuravlev V F *Phys. Usp.* **58** (12) (2015)
2. Борисов А В *Нелинейная динамика* **6** 365 (2010)
3. Журавлев В Ф *Приклад. матем. мех.* **62** 762 (1998); Zhuravlev V *J. Appl. Math. Mech.* **62** 705 (1998)
4. Walker G T *Quart. J. Pure Appl. Math.* **28** 175 (1896)
5. Routh E J *Dynamics of a System of Rigid Bodies* Vols 1, 2 (New York: Dover, 1905)
6. Walker J *Sci. Am.* **241** (4) 172 (1979)
7. Борисов А В, Казаков А О, Кузнецов С П *УФН* **184** 493 (2014); Borisov A V, Kazakov A O, Kuznetsov S P *Phys. Usp.* **57** 453 (2014)
8. Takano H *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (1) 81 (2014)
9. Журавлев В Ф, Климов Д М *Изв. РАН. Механика твердого тела* (3) 8 (2008); Zhuravlev V Ph, Klimov D M *Mech. Solids* **43** 320 (2008)
10. Лоскутов А Ю *УФН* **180** 1305 (2010); Loskutov A *Phys. Usp.* **53** 1257 (2010)
11. Фуфаев Н А *Приклад. матем. мех.* **30** 67 (1966); Fufaev N A *J. Appl. Math. Mech.* **30** 78 (1966)
12. Козлов В В *Нелинейная динам.* **6** 903 (2010)
13. Иванов А П *Нелинейная динам.* **6** 907 (2010)
14. Карапетян А В *Приклад. матем. мех.* **74** 531 (2010); Karapetyan A V *J. Appl. Math. Mech.* **74** 380 (2010)
15. Contensou P, in *Kreiselprobleme. Gyrodynamics. Intern. Symp. on Gyrodynamics, 1962, Celerina, Switzerland* (Ed. H Ziegler) (Berlin: Springer, 1963) p. 201; Пер. на русск. яз.: Контенсу П, в сб. *Проблемы гироскопии. Материалы междунар. симпозиума, 20–22 августа 1962 г., Целерина, Швейцария* (Под ред. Г Циглера) (М.: Мир, 1967) с. 60
16. Килин А А, в сб. *Неголономные динамические системы. Интегрируемость. Хаос. Странные аттракторы* (Под ред. А В Борисова, И С Мамаева) (М. – Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002) с. 321, Приложение 1
17. Mamaev I S, Ivanova T B *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (1) 116 (2014)
18. Borisov A, Erdakova N, Ivanova T, Mamaev I *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (6) 607 (2014)
19. Kudra G, Awrejcewicz J *Acta Mech.* **226** 2831 (2015)
20. Borisov A et al. *Regul. Chaotic Dyn.* **20** (5) 518 (2015)
21. Kirchhoff G *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik* (Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1876); Пер. на русск. яз.: Кирхгоф Г *Механика. Лекции по математической физике* (М.: Изд-во АН СССР, 1962)
22. Hertz H *Prinzipien der Mechanik in neuem zusammenhange Dargestellt* (Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1894); Пер. на англ. яз.: *The Principles of Mechanics Presented in a New Form* (Mineola, N.Y.: Dover Publ., 2003); Пер. на русск. яз.: Герц Г *Принципы механики, изложенные в новой связи* (Под общ. ред. И И Артоболовского) (М.: Изд-во АН СССР, 1959)
23. Borisov A V, Mamaev I S, Bizyaev I A *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (3) 277 (2013)
24. Борисов А В, Килин А А, Мамаев И С *Докл. РАН* **408** 192 (2006); Borisov A V, Kilin A A, Mamaev I S *Dokl. Phys.* **51** 272 (2006)
25. Borisov A V, Kazakov A O, Sataev I R *Regul. Chaotic Dyn.* **19** (6) 718 (2014)
26. Levy-Leblond J-M *Eur. J. Phys.* **7** 252 (1986)
27. Cross R *Am. J. Phys.* **81** 280 (2013)

Notes on new friction models and nonholonomic mechanics

A.V. Borisov

Udmurt State University,
ul. Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russian Federation;
National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: borisov@rcd.ru

I.S. Mamaev

M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
ul. Studencheskaya 7, 426069 Izhevsk, Russian Federation
E-mail: mamaev@rcd.ru

This is a reply to the comment by V.F. Zhuravlev (see *Usp. Fiz. Nauk* **185** 1337 (2015) [*Phys. Usp.* **58** (12) (2015)]) on the inadequacy of the nonholonomic model when applied to the rolling of rigid bodies. The model of nonholonomic mechanics is discussed. Using recent results as examples, it is shown that the validity and potential of the nonholonomic model are not inferior to those of other dynamics and friction models.

Keywords: nonholonomic model, dry friction, rattleback, rolling motion of a rigid body

PACS numbers: **05.45. – a, 45.40. – f**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512g.1339

Bibliography — 27 references

Received 8 October 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (12) 1339–1341 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (12) (2015)