

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Ещё раз о динамике кельтского камня

(комментарий к статьям А.В. Борисова, И.С. Мамаева

"Странные аттракторы в динамике кельтских камней" [УФН 173 407 (2003)]

и А.В. Борисова, А.О. Казакова и С.П. Кузнецова

"Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель" [УФН 184 493 (2014)]

В.Ф. Журавлёв

Модель движения тела по шероховатой поверхности, в которой скорость контакта тела считается равной нулю, часто приводит к качественно неверному описанию движения. Физически обоснованная модель должна исходить из конечности размеров площадки контакта, а также учитывать наряду с трением скольжения ещё и трение вращения.

Ключевые слова: кельтский камень, двухкомпонентная модель трения, эффект Жуковского

PACS numbers: 05.45.-a, 45.40.-f

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512f.1337

Обе комментируемые работы [1, 2] посвящены динамике кельтского камня на шероховатой горизонтальной плоскости.

Автор настоящего комментария в 1995 г. рассказывал французским математикам в Национальном институте исследований в информатике и автоматике (Institut national de recherche en informatique et en automatique — INRIA) (Роканкур, Франция) о динамике кельтского камня с демонстрацией эксперимента. Эксперимент произвёл впечатление на слушателей, и один из них предложил показать его физикам и добавил: "Они тут же изобретут новую элементарную частицу". Эта шутка демонстрировала то затруднение, которое испытывали слушатели в объяснении увиденного.

Поведение кельтского камня, действительно, вызывает удивление, и успеха в адекватном объяснении эксперимента можно достичь, в первую очередь, при физически обоснованном выборе модели. Чисто математические обстоятельства в этой задаче играют второстепенную роль.

Модель кельтского камня, построенная и изученная в [3], представляет собой усечённый упругий эллипсоид, опирающийся на упругую полуплоскость. Площадка контакта рассчитывается по теории контактных напряжений Герца. Главный вектор и главный момент сил взаимодействия камня и плоскости получаются интегри-

рованием элементарных сил сухого трения по Кулону в виде двукратных интегралов эллиптического типа.

Дифференциальные уравнения движения Эйлера с правыми частями в виде двукратных интегралов неудобны для анализа. Известны два способа упростить задачу.

Первый способ, применённый авторами работ [1, 2], состоит в замене герцевской площадки контакта точкой и предположении, что в этой точке проскальзывание отсутствует (неголономное условие). Это предположение приводит к сильному упрощению задачи, поскольку силы трения сводятся к реакции неголономной связи.

Такая модель контактного взаимодействия катящихся упругих тел (неголономная модель) широко распространена (см., например, [4]).

Эта модель некорректна по Адамару. Сколь угодно малая, но отличная от точечной площадка контакта приводит к скачкообразному изменению результата.

В частном случае качения шара по плоскости такая некорректность показана Ю.И. Неймарком и Н.А. Фуфаевым в [5].

Очень плохое соответствие эксперименту неголономной модели упругого контакта заставило П. Контенсу [6] в задаче о динамике корабельной гировертикали обратиться к рассмотрению конечной площадки контакта. В [7] приводится пример, когда результаты эксперимента отличаются от теоретических в 130/3 раз. В [8] показано, что в задаче о волчке Томсона неголономная модель не только количественно, но и даже качественно противоречит эксперименту.

Второй способ упростить задачу и сделать это упрощение корректным использован в [3, 8]. Двукратные интегралы в правых частях дифференциальных уравнений обсуждаемой в [3] модели кельтского камня представлены равномерно сходящимися во всей области

В.Ф. Журавлёв. Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
просп. Вернадского 101, корп. 1, 119526 Москва,
Российская Федерация
E-mail: zhurav@ipmnet.ru

Статья поступила 12 февраля 2015 г.

изменения кинематических параметров разложениями Паде.

Закон сухого трения Кулона

$$F = fN \operatorname{sign} v \quad (1)$$

при учёте не только скорости проскальзывания v , но и вращения с угловой скоростью ω в первом приближении Паде зависит от этих скоростей как дробно-линейная функция

$$F = \frac{fNv}{|v| + \alpha|\omega|}, \quad (2)$$

где α определяется размерами площадки контакта и законом распределения в ней нормальных напряжений.

Принципиально важным является то обстоятельство, что зависимость силы трения от скорости v в формуле (2) не содержит разрыва первого рода, как это имеет место в законе (1). Это имеет место, если угловая скорость $\omega \neq 0$, какой бы малой она ни была. Специалисты в гирокопии называют этот эффект эффектом "оживления трения по Жуковскому".

Разложив функцию (2) в ряд Тейлора по v в окрестности $v = 0$, получим

$$F = \xi v, \quad \xi = \frac{fN}{\alpha|\omega|}, \quad (3)$$

откуда следует, что сухое трение при наличии не только скольжения, но и вращения приобретает черты вязкого трения.

По этой причине говорить, что сухое трение обеспечивает отсутствие проскальзывания в точке контакта кельтского камня с плоскостью (неголономное условие) можно, только если камень не вращается. Но как раз особенности вращения кельтского камня и представляют собой главный интерес.

Таким образом, рассматриваемая в комментируемых работах [1, 2] модель в строгом смысле является не физической моделью, а искусственной математической моделью, не имеющей отношения к реальному объекту.

Иногда на неголономную модель обкатывания твёрдых тел смотрят как на некоторое приближение. Это

приближение надо обосновывать. Возможности такого обоснования можно увидеть в формуле (3), если считать угловую скорость ω достаточно малой. В различных технических задачах такой подход вполне возможен. Однако анализ разнообразных тонких математических обстоятельств в рамках грубых исходных приближений представляется неоправданным.

Между тем если вместо закона Кулона (1), установленного для простейшей кинематики, использовать закон трения (2), строго вытекающий из (1) в случае произвольной кинематики, то, как показано в [3, 8], все реально наблюдаемые эффекты вращения как кельтского камня, так и волчка Томсона получаются с той точностью, с которой известен сам закон Кулона (1).

Список литературы

- Борисов А В, Мамаев И С УФН **173** 407 (2003); Borisov A V, Mamaev I S *Phys. Usp.* **46** 393 (2003)
- Борисов А В, Казаков А О, Кузнецов С П УФН **184** 493 (2014); Borisov A V, Kazakov A O, Kuznetsov S P *Phys. Usp.* **57** 453 (2014)
- Журавлев В Ф, Климов Д М Изв. РАН. Механика твердого тела (3) 8 (2008); Zhuravlev V Ph, Klimov D M *Mech. Solids* **43** 320 (2008)
- Маркеев А П Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью (М. – Ижевск: Ин-т комп'ют. исслед., 2014)
- Неймарк Ю И, Фуфаев Н А Динамика неголономных систем (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Neimark Ju I, Fufaev N A *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1972)
- Contensou P, in *Kreiselprobleme. Gyrodynamics. Intern. Symp. on Gyrodynamics, 1962, Celerina, Switzerland* (Ed. H Ziegler) (Berlin: Springer, 1963) p. 201; Пер. на русск. яз.: Контенсу П, в сб. *Проблемы гирокопии. Материалы междунар. симпозиума, 20–22 августа 1962 г., Целерина, Швейцария* (Под ред. Г Циглера) (М.: Мир, 1967) с. 60
- Килин А А, в сб. *Неголономные динамические системы. Интегрируемость. Хаос. Странные аттракторы* (Под ред. А В Борисова, И С Мамаева) (М. – Ижевск: Ин-т комп'ют. исслед., 2002) с. 321, Приложение 1
- Журавлев В Ф, Климов Д М Изв. РАН. Мех. тверд. тела (6) 157 (2005); Zhuravlev V Ph, Klimov D M *Mech. Solids* **40** (6) 117 (2005)
- Жуковский Н Е Собрание сочинений Т. 1 (М.–Л.: Гостехиздат, 1948) с. 339

Once more on the dynamics of the rattleback

(comment on "Strange attractors in rattleback dynamics" by A.V. Borisov and I.S. Mamaev [*Usp. Fiz. Nauk* **173** 407 (2003); *Phys. Usp.* **46** 393 (2003)] and "Nonlinear dynamics of the rattleback: a nonholonomic model" by A.V. Borisov, A.O. Kazakov, S.P. Kuznetsov [*Usp. Fiz. Nauk* **184** 493 (2014); *Phys. Usp.* **57** 453 (2014)])

V.F. Zhuravlev

*A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
prosp. Vernadskogo 101, korp. 1, 119526 Moscow, Russian Federation
E-mail: zhurav@impnet.ru*

If the motion of a body along a rough surface is modeled such that the point of contact has a zero velocity, in many cases qualitatively incorrect results can be obtained. For the model to be physically valid, it is necessary to take into account the finite contact area and the presence of rotational friction along with the sliding friction.

Keywords: rattleback, two-component friction model, Zhukovskii effect

PACS numbers: **05.45. –a, 45.40. –f**

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201512f.1337

Bibliography — 9 references

Received 12 February 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (12) 1337–1338 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (12) (2015)