Ноябрь 2015 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 185, № 11*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Лагранжевы уравнения движения частиц и фотонов в шварцшильдовском поле *

В.И. Ритус

Рассматриваются уравнения движения частицы в гравитационном поле чёрной дыры, сформулированные на языке обобщённых координат, скоростей и ускорений. Эти уравнения удобны для отыскания интегралов движения. Уравнения переписываются через физические скорости и ускорения, измеряемые неподвижным в шварцшильдовской системе наблюдателем, использующим собственные, местные эталоны длины и времени. Сила притяжения полем и центростремительное ускорение частицы пропорциональны её кинетической энергии $m/\sqrt{1-v^2}$. Это согласуется с одинаковым ростом в поле кинетической энергии частицы и энергии $\hbar\omega$ фотона по сравнению с их значениями вне поля. Притяжение частиц и фотонов к источнику гравитационного поля пропорционально их кинетическим энергиям. Траектория частицы в ультрарелятивистском пределе $v \to 1$ совпадает с траекторией фотона.

Ключевые слова: гравитационное поле, геометрия Шварцшильда, масса и энергия в гравитации

PACS number: **03.30.+p** DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511g.1229

Содержание

1. Уравнение движения частицы по геодезической траектории

Движение материальной частицы с массой m в гравитационном поле определяется принципом наименьшего действия $\delta S = 0$, согласно которому траектория частицы между точками a, b в 4-пространстве x^α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, является экстремалью действия S как функционала траектории. Действие S можно выбрать в ковариантной форме[1]

$$S = \int_a^b L\, \mathrm{d}s\,, \qquad L = \frac{1}{2}\, m g_{\alpha\beta}(x)\, \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\, \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\,, \tag{1}$$

в которой s является независимой от вида варьируемой траектории $x^\alpha(s)$ *скалярной* переменной, пробегающей ту же область значений, что и для экстремали. Ей можно придать смысл собственного времени частицы, если интервал собственного времени между двумя близкими точками определяется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$:

$$\mathrm{d}s^2 = -g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta$$

с сигнатурой $(-,+,+,+)$.

Функция Лагранжа L является *скаляром*, зависящим от обобщённых 4-координат $x^\alpha(s)$ и 4-скоростей

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} \equiv \dot{x}^\alpha \equiv u^\alpha\,, \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3\,.$$

Уравнения движения Лагранжа имеют обычный вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0\,. \tag{2}$$

Так как L не зависит явно от s, то эти уравнения допускают интеграл

$$u_\alpha u^\alpha = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

[1] В статье используется система единиц, где $c = G = 1$.

В.И. Ритус. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 132-64-26. Факс (499) 135-85-33
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 2 июля 2015 г.

* Побудительным мотивом появления этой статьи явились направленная в *УФН* заметка Р.И. Храпко (публикуемая в этом же номере *УФН* на с. 1225) и его переписка с редакцией, в которой содержится критика приведённой в обзоре Л.Б. Окуня (*УФН* **158** 511 (1989)) формулы (8.1) для силы притяжения релятивистской частицы гравитационным центром. В настоящей статье показано, в частности, как подобная формула могла бы возникнуть.

Выбирая константу равной -1 (т.е. измеряя компоненты физической скорости в единицах скорости света), получаем условие, при котором s становится собственным временем частицы. В таком случае обобщённый 4-импульс частицы в гравитационном поле и его квадрат определяются формулами

$$p^{\alpha}=mu^{\alpha}\,,\quad p_{\alpha}p^{\alpha}=-m^2\,,\quad p_{\alpha}=mu_{\alpha}=mg_{\alpha\beta}u^{\beta}\,,\tag{4}$$

аналогичными формулам для пространства Минковского, где, однако, $g_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$.

Используя лагранжеву функцию (1), уравнения движения (2) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}u^{\alpha}}{\mathrm{d}s}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}u^{\beta}u^{\gamma}=0\,,\tag{5}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\,g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\right).\tag{6}$$

Обратим внимание на то, что связь символов Кристоффеля с метрическим тензором возникла как следствие принципа наименьшего действия с лагранжевой функцией (1).

Поскольку производная $\mathrm{d}u^{\alpha}/\mathrm{d}s$ есть обобщённое 4-ускорение частицы, то естественно назвать величину $-m\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}u^{\beta}u^{\gamma}$ "4-силой", действующей на частицу в гравитационном поле, а величины $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — напряжённостями этого поля (см. [1] §§ 85, 87, [2] § 1, гл. 4).

Кривые $x^{\alpha}(s)$, удовлетворяющие уравнению (5), называют геодезическими.

Заметим, что интеграл движения (3), возникающий из-за отсутствия явной зависимости L от s, по существу совпадает с функцией Гамильтона, связанной с L преобразованием Лежандра:

$$H=\dot{x}^{\alpha}\,\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^{\alpha}}-L\,.\tag{7}$$

Более того,

$$H=\frac{1}{2m}\,p^{\alpha}p_{\alpha}=\frac{1}{2}\,m\dot{x}^{\alpha}\dot{x}_{\alpha}=L\,.\tag{8}$$

Это означает, что обе функции не содержат потенциальной энергии — *слагаемого*, зависящего только от 4-координат. Однако кинетическая "энергия" зависит от 4-координат из-за появления их в метрическом тензоре $g_{\alpha\beta}(x)$. Гамильтонова и лагранжева функции являются *скалярами*, поэтому слово "энергия" взято в кавычки.

Использование собственного времени и соответствующей скалярной лагранжевой функции в релятивистской классической и квантовой механике было предложено В.А. Фоком [3]. В дальнейшем оно существенно развито Ю. Швингером [4].

Истинное гравитационное поле создаётся материальными телами и вдали от них исчезает благодаря островному распределению материи. Метрика такого поля на больших расстояниях от создающих поле тел переходит в метрику Минковского: $g_{\alpha\beta}(x)\to\eta_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$. Это означает, что кривизна пространства-времени создаётся материальными телами в конечной области пространства, а вдали от неё 4-пространство остаётся плоским.

2. Движение частицы в поле чёрной дыры

Рассмотрим уравнения движения частицы с массой m в постоянном центрально-симметричном гравитационном поле чёрной дыры с массой M и гравитационным радиусом $r_{\mathrm{g}}=2GM/c^2$. Такое поле описывается метрикой Шварцшильда

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\tau^2-\mathrm{d}l^2=-g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}=$$
$$=\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\,\mathrm{d}\theta^2-r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\tag{9}$$

с ненулевыми компонентами

$$g_{00}=-\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right),\qquad g_{11}=\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)^{-1},$$
$$g_{22}=r^2\,,\qquad g_{33}=r^2\sin^2\theta\,,\tag{10}$$

а $\mathrm{d}s$ и $\mathrm{d}\tau$ имеют смысл интервалов собственного времени движущегося и покоящегося наблюдателей в шварцшильдовской системе отсчёта с обобщёнными координатами t, r, θ, φ. Физический смысл интервалов $\mathrm{d}s$ и $\mathrm{d}\tau$ и обозначения — те же, что и у Ландау и Лифшица [1].

Заметим, что гравитационное поле сферической звезды описывается метрикой Шварцшильда вплоть до поверхности звезды, где она гладко сшивается с внутренней метрикой звезды.

В окрестности каждой пространственной точки r, θ, φ можно ввести локальную декартову систему координат с правой тройкой единичных векторов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\theta}$, $\mathbf{e}_{\varphi}$ вдоль радиального, меридионального и азимутального направлений. Изменения истинных, физических расстояний в этих направлениях связаны с изменениями соответствующих координат r, θ, φ:

$$\mathrm{d}x=\sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}r=\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)^{-1/2}\mathrm{d}r\,,\tag{11}$$

$$\mathrm{d}y=\sqrt{g_{22}}\,\mathrm{d}\theta=r\,\mathrm{d}\theta\,,\tag{12}$$

$$\mathrm{d}z=\sqrt{g_{33}}\,\mathrm{d}\varphi=r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.\tag{13}$$

Аналогично, изменение истинного (физического, или собственного) времени τ, измеряемого по часам, покоящимся возле точки (r,θ,φ), связано с изменением координатного времени t, измеряемого по часам, покоящимся на бесконечности, соотношением

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{-g_{00}}\,\mathrm{d}t=\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)^{1/2}\mathrm{d}t\,.\tag{14}$$

Орбитальный момент $\mathbf{L}=[\mathbf{rp}]$ частицы в центрально-симметричном поле в любой момент времени ортогонален плоскости, в которой лежат радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы и её 3-скорость $\mathbf{v}$. А так как момент сохраняется как по величине, так и по направлению, то и вся орбита частицы лежит в одной плоскости, которую можно считать экваториальной плоскостью шварцшильдовской системы отсчёта, выбрав $\theta=\pi/2$.

Одним из первых интегралов движения является квадрат 4-скорости (3), равный -1:

$$g^{00}u_0^2+g_{rr}u^{r\,2}+g_{\theta\theta}u^{\theta\,2}+g^{\varphi\varphi}u_{\varphi}^2=-1\,.\tag{15}$$

Так как $\theta = \pi/2$, то $u^\theta = 0$. Ещё две сохраняющиеся величины следуют из явной независимости лагранжевой функции с метрикой (9) от угла φ и времени t. Это орбитальный момент p_φ и энергия p_0:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\varphi} = m g_{\varphi\varphi} u^\varphi = m u_\varphi = m\tilde{L}\,, \tag{16}$$

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = m g_{00} u^0 = m u_0 = -m\tilde{E}\,. \tag{17}$$

Здесь использованы установившиеся обозначения орбитального момента $\tilde{L}$ в единицах mc и энергии $\tilde{E}$ в единицах mc^2 (см. [5–7]). Тогда для контравариантных компонент 4-скорости получаем

$$u^\varphi = g^{\varphi\varphi} u_\varphi = \frac{1}{r^2}\,\tilde{L}\,, \tag{18}$$

$$u^0 = g^{00} u_0 = \frac{\tilde{E}}{1 - r_{\mathrm{g}}/r}\,, \tag{19}$$

$$u^r = \mp\sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{r^2}\,\tilde{L}^2\right)}\,. \tag{20}$$

Выражение для u^r следует из (15) при использовании (18), (19). Значения $u^r \lesseqgtr 0$ соответствуют движению частицы к центру и от центра. Обратим внимание на то, что компоненты 4-скорости изменяются только при изменении радиуса r.

Приведём универсальные выражения констант движения через радиус и скорость частицы

$$\tilde{L} = \frac{r v_{\hat{\varphi}}}{\sqrt{1 - v^2}}\,, \qquad \tilde{E} = \sqrt{\frac{1 - r_{\mathrm{g}}/r}{1 - v^2}}\,. \tag{21}$$

Шляпка у индекса используется для обозначения физических компонент вектора в локальной лоренцевой системе отсчёта.

Теперь, используя компоненты 4-скорости u^α и символы Кристоффеля для шварцшильдовской метрики (учтено $\theta = \pi/2$):

$$\Gamma^t_{\ tr} = \Gamma^t_{\ rt} = -\Gamma^r_{\ rr} = \frac{r_{\mathrm{g}}}{2r^2(1 - r_{\mathrm{g}}/r)}\,,$$

$$\Gamma^r_{\ tt} = \frac{r_{\mathrm{g}}}{2r^2}\left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right), \quad \Gamma^r_{\ \theta\theta} = \Gamma^r_{\ \varphi\varphi} = -r\left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right),$$

$$\Gamma^\varphi_{\ \varphi r} = \Gamma^\varphi_{\ r\varphi} = \Gamma^\theta_{\ r\theta} = \Gamma^\theta_{\ \theta r} = \frac{1}{r}\,,$$

$$\Gamma^\varphi_{\ \varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\ \theta\varphi} = \Gamma^\theta_{\ \varphi\varphi} = 0\,,$$

можно получить уравнения движения (5):

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} = \pm\frac{2\tilde{L}}{r^3}\sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}\,, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} = \pm\frac{r_{\mathrm{g}}\tilde{E}}{r^2(1 - r_{\mathrm{g}}/r)^2}\sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}\,, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{r_{\mathrm{g}}}{2r^2} + \frac{\tilde{L}^2}{r^3}\left(1 - \frac{3r_{\mathrm{g}}}{2r}\right). \tag{24}$$

Таким образом, три компоненты "4-силы", участвующей в уравнении движения частицы, отличны от нуля. Это означает, что в общем случае азимутальная u^φ, радиальная u^r и нулевая u^0 компоненты обобщённой 4-скорости u^α изменяются при движении частицы. В то же время компонента u^θ вообще не фигурирует в уравнениях, поскольку из-за сохранения углового момента движение происходит в одной плоскости.

3. Скорость и ускорение частицы, измеряемые шварцшильдовским наблюдателем

Приспособим теперь эти уравнения движения для наблюдателя, находящегося в определённом месте (r, θ, φ) шварцшильдовской системы координат и измеряющего трёхмерные физические скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ частицы по показаниям местного, собственного времени τ своих часов.

Абсолютная величина физической скорости равна

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{g_{rr}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + g_{\varphi\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\,, \tag{25}$$

а её радиальная и азимутальная компоненты

$$v_{\hat{r}} = \sqrt{g_{rr}}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\,, \qquad v_{\hat{\varphi}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} \tag{26}$$

определяют 3-вектор скорости

$$\mathbf{v} = v_{\hat{r}}\mathbf{e}_r + v_{\hat{\varphi}}\mathbf{e}_\varphi\,. \tag{27}$$

Так как $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\tau\sqrt{1 - v^2}$, то связь лоренцевых физических компонент 4-скорости с её обобщёнными контравариантными компонентами такова:

$$u_{\hat{r}} \equiv \frac{v_{\hat{r}}}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{g_{rr}}\,u^r\,, \quad u_{\hat{\varphi}} \equiv \frac{v_{\hat{\varphi}}}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,u^\varphi\,,$$
$$u^{\hat{0}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \sqrt{-g_{00}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \sqrt{-g_{00}}\,u^0\,. \tag{28}$$

Физические импульс $\mathbf{p}$ и энергия ε частицы образуют физический 4-импульс $p^{\hat{\alpha}}$ и выражаются через физическую скорость

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\,, \qquad \varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}\,. \tag{29}$$

С помощью полученных связей между физическими и обобщёнными компонентами 4-скорости нетрудно преобразовать систему уравнений (22)–(24) в эквивалентную систему:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - r_{\mathrm{g}}/r}}\left\{-\frac{M}{r^2}\,\mathbf{e}_r + \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\frac{v_{\hat{\varphi}}}{r}\,\mathbf{v}_R\right\}, \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - r_{\mathrm{g}}/r}}\,\frac{M}{r^2}\,v_{\hat{r}}\,, \tag{31}$$

где 3-вектор

$$\mathbf{v}_R = v_{\hat{\varphi}}\mathbf{e}_r - v_{\hat{r}}\mathbf{e}_\varphi \tag{32}$$

ортогонален скорости $\mathbf{v}$, равен ей по модулю и получается *правым* поворотом $\mathbf{v}$ на угол $\pi/2$.

Используя физический 3-вектор ускорения

$$\mathbf{w} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - r_{\mathrm{g}}/r}} \left\{ -\frac{1 - v^2}{r^2}\, M \mathbf{e}_r + \left(1 - \frac{3r_{\mathrm{g}}}{2r}\right) \frac{v_{\hat{\varphi}}}{r}\, \mathbf{v}_R \right\}, \tag{33}$$

можно представить уравнения (30)–(32) в форме пространственной и временно́й компонент 4-ускорения $a^{\hat{\alpha}} \equiv \mathrm{d}u^{\hat{\alpha}}/\mathrm{d}s$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right) = m\sqrt{1 - v^2}\,(\mathbf{a}, a^{\hat{0}})\,, \tag{34}$$

$$(\mathbf{a}, a^{\hat{0}}) = \frac{\mathrm{d}u^{\hat{\alpha}}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathbf{w}}{1 - v^2} + \mathbf{v}\, \frac{(\mathbf{vw})}{(1 - v^2)^2}\,, \frac{(\mathbf{vw})}{(1 - v^2)^2} \right). \tag{35}$$

Появление в правой части (34) множителя $\sqrt{1 - v^2}$ связано с использованием в левой части производной по местному времени τ, в отличие от производной по собственному времени s движущейся частицы в определении $a^{\hat{\alpha}}$ (см. [8], формула (193), или [1] §§ 7, 9). Сравните также формулу (34) с формулой (7.3) в обзоре Окуня [9].

Метрика проявила себя в выражениях для скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ (см. (26) и (33)).

В представлении (30) первый член обязан силе притяжения к центру, а второй — силе инерции, обязанной ненулевому орбитальному моменту и соответствующей азимутальной скорости $v_{\hat{\varphi}}$ (см. 21)). Подчеркнём постоянную направленность силы притяжения к центру притяжения, а силы инерции — вдоль вектора $\mathbf{v}_R$. Пропорциональность 4-силы кинетической энергии ε в уравнениях движения (30), (31) очевидна.

Хотя радиальная скорость $v_{\hat{r}}$ может иметь оба знака (отрицательный при движении к центру и положительный — от центра), вектор $\mathbf{v}_R$ всегда направлен в сторону выпуклости траектории. При движении по окружности, а также в апоастре или периастре, когда радиальная скорость исчезает, вектор $\mathbf{v}_R$ направлен по радиусу: $\mathbf{v}_R = v\mathbf{e}_r$. В этих случаях ускорение исчезает, $\mathbf{w} = 0$, связывая скорость и радиус формулой (43).

Обратим внимание на то, что кинетическая энергия частицы изменяется только в случае ненулевой радиальной скорости (см. (31)).

Формулу (30) можно представить также в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - r_{\mathrm{g}}/r}} \times \left\{ -\frac{M}{r^2} (\mathbf{e}_r + v_{\hat{\varphi}} \mathbf{v}_R) + \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{2r}\right) \frac{v_{\hat{\varphi}}}{r}\, \mathbf{v}_R \right\}. \tag{36}$$

В этом представлении член притяжения совпадает с приведённым в формуле (8.1) обзора Окуня [9]. Этот член получил здесь половину шварцшильдовской добавки из орбитального члена, так что вектор $\mathbf{e}_r$ заменился вектором

$$\mathbf{e}_r + v_{\hat{\varphi}} \mathbf{v}_R = \frac{1}{r} \left[(1 + v^2)\, \mathbf{r} - (\mathbf{rv})\mathbf{v} \right], \tag{37}$$

как у Окуня. Соответственно изменился и орбитальный член. Однако член притяжения потерял постоянную направленность к центру притяжения.

Так как $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{v}_R$ направлены в сторону выпуклости траектории, а $v_{\hat{\varphi}} \geqslant 0$, то член притяжения в (36) всегда направлен в сторону вогнутости траектории, а орбитальный член — в сторону выпуклости. Разумеется, и здесь эти члены компенсируют друг друга, когда $v_{\hat{r}} = 0$, $v_{\hat{\varphi}} = v$.

Разложения (27), (32) векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_R$ по ортам $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ позволяют получить и другие представления формулы (30).

4. Финитные и инфинитные орбиты

При движении по окружности, а также вблизи апоастра или периастра радиальная скорость u^r исчезает. Это означает, что

$$\tilde{E} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}\,. \tag{38}$$

Функцию в правой части этого уравнения называют эффективным потенциалом:

$$U(x, L) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{L^2}{x^2}\right)}\,. \tag{39}$$

Как функция безразмерного радиуса $x = r/r_{\mathrm{g}}$ и безразмерного орбитального момента $L = \tilde{L}/r_{\mathrm{g}}$, потенциал положителен в физическом интервале $1 < x < \infty$, равен 0 при $x = 1$ и 1 при $x = \infty$, а в точках

$$x_{1,2} = L^2 \mp L\sqrt{L^2 - 3} \tag{40}$$

достигает максимума и минимума соответственно.

При $L < \sqrt{3}$ с ростом x потенциал монотонно растёт от 0 до 1.

При $L = \sqrt{3}$ потенциал имеет точку перегиба при $x = x_0 = 3$, принимая в ней значение $\sqrt{8/9}$.

При $L > \sqrt{3}$ максимальное $U(x_1, L)$ и минимальное $U(x_2, L)$ значения потенциала монотонно растут с ростом L в интервалах

$$\sqrt{\frac{8}{9}} < U(x_1, L) < \infty \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{8}{9}} < U(x_2, L) < 1\,,$$

принимая значения 1 и $\sqrt{25/27}$ при $L = 2$ (см. рисунок).

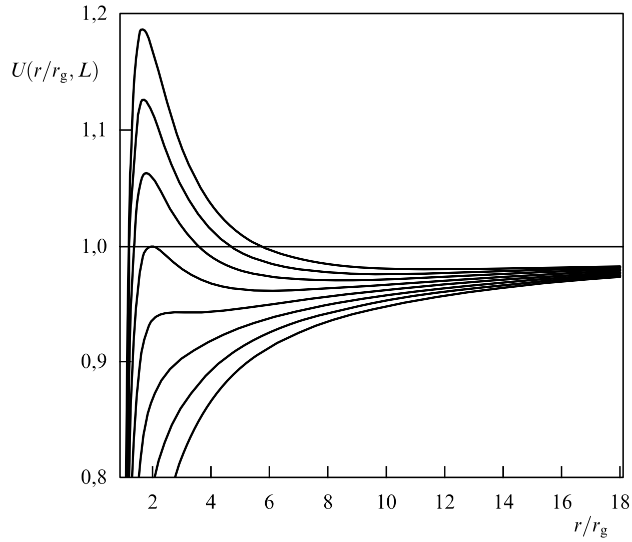

Рисунок. Эффективный потенциал $U(x, L)$ для значений $L = \sqrt{n}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таким образом, при $L > \sqrt{3}$ потенциал принимает форму ковша, внутри которого располагаются финитные орбиты кеплеровского типа с энергией $\tilde{E}$, лежащей между минимумом и максимумом потенциала, если $L < 2$, или между минимумом и 1, если $L > 2$.

Нас будут интересовать также инфинитные орбиты с началом и концом на бесконечности или концом при $r = r_{\mathrm{g}}$, т.е. в чёрной дыре.

Скорость движения по окружности, а также в апоастре и периастре, связана с радиусом и орбитальным моментом определением момента

$$L = x\,\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad x = \frac{r}{r_{\mathrm{g}}}\,, \tag{41}$$

так как в этих случаях радиальная скорость равна нулю, а $v_{\hat{\varphi}} = v$. С другой стороны, из равенства нулю радиального ускорения в этих точках следует связь между орбитальным моментом и радиусом:

$$L = \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,, \qquad x = \frac{r}{r_{\mathrm{g}}} \tag{42}$$

(см. (24)). Тогда согласно (41) и (42) скорость и радиус связаны соотношением

$$v = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}\,, \qquad x = \frac{r}{r_{\mathrm{g}}}\,. \tag{43}$$

Таким образом, обе последние формулы следуют из равенства нулю ускорения.

Скорость частицы при движении по окружности растёт с уменьшением радиуса и при $r = 1{,}5 r_{\mathrm{g}}$ достигает скорости света.

Вайнберг получил формулу (42) и назвал её условием равновесия, рассматривая окружность как предел эллиптической орбиты (см. (8.4.24) в [2]). Это справедливо лишь для окружностей с радиусом $r_2(L)$, соответствующим минимуму потенциала $U(x, L)$, так как для окружностей с радиусом $r_1(L)$, соответствующим его максимуму, ближайшие к r_1 радиусы принадлежат инфинитным орбитам. В то же время приведённые формулы справедливы для любой финитной орбиты в точках, где радиальные скорость и ускорение равны нулю.

Полезную информацию содержат продольная и поперечная по отношению к скорости компоненты ускорения $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w} = w_{\parallel}\,\frac{\mathbf{v}}{v} + w_{\perp}\,\frac{\mathbf{v}_R}{v}\,,\\
&w_{\parallel} = -\frac{v_{\hat{r}}(1-v^2)}{v\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}}\,\frac{M}{r^2}\,,\\
&w_{\perp} = -\frac{v_{\hat{\varphi}}}{v\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}}\left[(1-v^2)\,\frac{M}{r^2} - \left(1-\frac{3r_{\mathrm{g}}}{2r}\right)\frac{v^2}{r}\right].
\end{aligned} \tag{44}$$

В частности, при радиальном падении частицы с малой скоростью $(-v_{\hat{r}} = v \ll 1)$ ускорение $w_{\parallel} = g$ — местному ускорению свободного падения, измерявшемуся Галилеем.

Из $w_{\perp} = 0$ следует связь (43) скорости с радиусом круговой орбиты, приводящая, в частности, к $v = 1$ на орбите с радиусом $r = (3/2) r_{\mathrm{g}}$. При радиусе $r \lessgtr (3/2) r_{\mathrm{g}}$ у частицы с $v = 1$ появляется ненулевое ускорение $w_{\perp} \lessgtr 0$, которое сбрасывает частицу с круговой орбиты в чёрную дыру или на бесконечность.

Современный Галилей, измеряя скорость спутника на круговой орбите, смог бы убедиться, что $w_{\parallel}$ и $w_{\perp}$ равны нулю, так как $v_{\hat{r}} = 0$, а $v_{\hat{\varphi}} = v$ и удовлетворяет (43).

5. Движение ультрарелятивистской частицы и фотона

Траектория движения фотона следует из уравнения движения частицы

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{u^r}{u^{\varphi}} = \mp r^2 \sqrt{\gamma v^2 - \left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\frac{1}{r^2}}\,\Bigg|_{v\to 1} \to\\
\to \mp r^2 \sqrt{\gamma - \left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\frac{1}{r^2}}\,,
\end{aligned} \tag{45}$$

если, обозначив константу движения $(\tilde{E}/\tilde{L})^2$ через γ, скорость частицы v устремить к скорости света. В возникающем для фотона уравнении остаётся одна константа движения γ вместо двух, приведённых в (21).

Удобно перейти от $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$ к $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi$, где $u = r_{\mathrm{g}}/r \leqslant 1$. Тогда

$$u' \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{\gamma r_{\mathrm{g}}^2 - u^2 + u^3}\,. \tag{46}$$

Отсюда

$$u'' + u = \frac{3}{2}\,u^2\,. \tag{47}$$

Для инфинитных траекторий константа движения $\gamma r_{\mathrm{g}}^2 = (r_{\mathrm{g}}/b)^2$, где b — прицельный параметр. Будем считать r_{g}/b малым.

В нулевом приближении, полагая правую часть (47) равной нулю, получаем решение

$$u_0 = \frac{r_{\mathrm{g}}}{b}\,\sin\varphi\,,$$

соответствующее прямолинейной, невозмущённой полем, траектории с прицельным параметром $b = r\sin\varphi$.

В следующем приближении положим $u = u_0 + u_1$. Уравнение для u_1

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2}\,u_0^2$$

имеет решение

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\mathrm{g}}}{b}\right)^2 (1+\cos^2\varphi)\,.$$

Решение

$$u = u_0 + u_1 = \frac{r_{\mathrm{g}}}{b}\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\mathrm{g}}}{b}\right)^2 (1+\cos^2\varphi)$$

при $r = \infty$ должно обращаться в нуль. Этому условию удовлетворяют углы

$$\varphi_1 = -\frac{r_{\mathrm{g}}}{b} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \pi + \frac{r_{\mathrm{g}}}{b}\,. \tag{48}$$

Тогда угол отклонения фотона от невозмущённого прямолинейного движения оказывается равным

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \pi = \frac{2r_{\mathrm{g}}}{b}\,. \tag{49}$$

Этот результат получен Эйнштейном в 1915 г. [10]. Ясно, что он будет справедлив и для ультрарелятивистской частицы.

Уравнение (46) приводит к вещественным решениям, пока функция

$$f(x) = \left(\frac{r_g}{b}\right)^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\,, \qquad x = \frac{r}{r_g}\,, \tag{50}$$

под знаком корня положительна. В интервале $r_g < r < \infty$ эта функция имеет минимум в точке $r = 1{,}5 r_g$, равный

$$f(x_0) = \left(\frac{r_g}{b}\right)^2 - \frac{4}{27}\,, \qquad x_0 = \frac{3}{2}\,,$$

а на концах интервала принимает значение $(r_g/b)^2$.

Таким образом, пока прицельный параметр $b < b_{\min} = \sqrt{27/4}\, r_g$, функция $f(x)$ положительна во всём физическом диапазоне расстояний и падение фотона с таким прицельным параметром из бесконечности заканчивается в чёрной дыре.

При $b = b_{\min}$ орбита фотона, падающего из бесконечности, достигает радиуса $r_0 = 1{,}5 r_g$, совершает здесь много оборотов и в конце концов заканчивается либо в чёрной дыре, либо на бесконечности.

При $b > b_{\min}$ орбита фотона достигает радиуса, большего, чем r_0, после чего снова уходит на бесконечность.

Таким образом, рассмотренный выше метод решения уравнения (47) пригоден, если $(r_g/b) \leqslant \sqrt{4/27} \approx 0{,}38$.

6. Заключение

Гравитационное поле одинаково увеличивает *кинетическую* энергию частицы и энергию (частоту) фотона, попадающих в поле из бесконечности. Если вне поля они имели энергии $\varepsilon_\infty = m/\sqrt{1 - v_\infty^2}$ и $\hbar\omega_\infty$, то в поле их энергии одинаково возрастают:

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\varepsilon_\infty}{\sqrt{-g_{00}}}\,, \qquad \hbar\omega = \frac{\hbar\omega_\infty}{\sqrt{-g_{00}}}\,, \tag{51}$$

(ср. с (88.9) и (88.6) в [1]). Можно говорить об одинаковом притяжении полем энергий ε и $\hbar\omega$. Но изменение ε приводит к изменению скорости и появлению ускорения частицы, а изменение $\hbar\omega$ скорости фотона не меняет и ускорение отсутствует. Однако сохранение момента приводит к изменению направления скорости частицы и фотона, а в ультрарелятивистском случае — к совпадению их траекторий.

В заключение заметим, что согласно предложению Г. Вейля под массой частицы понимается релятивистский инвариант $m = \sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2}$ (см. [11], § 27). Масса фотона равна нулю.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000)
2. Weinberg S *Gravitation and Cosmology*: *Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley, 1972); Вайнберг С *Гравитация и космология*: *Принципы и приложения общей теории относительности* (М.: Мир, 1975)
3. Фок В А *Изв. АН СССР Отд. матем. и естеств. наук* (4 – 5) 551 (1937); Fock V A *Phys. Z. Sowjetunion* **12** 404 (1937)
4. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
5. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973); Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)
6. Lightman A P, Press W H, Price R N, Teukolsky S A *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1975); Лайтман А, Пресс В, Прайс Р, Тюкольски С *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (М.: Мир, 1979)
7. Новиков И Д, Фролов В П *Физика черных дыр* (М.: Наука, 1986); Frolov V P, Novikov I D *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998)
8. Pauli W *Relativitätstheorie* (Leipzig: Teubner, 1921); *Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
9. Окунь Л Б *УФН* **158** 511 (1989); Okun' L B *Sov. Phys. Usp.* **32** 629 (1989)
10. Einstein A *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wissenschaft. Berlin* **47** (2) 831 (1915)
11. Weyl H *Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1923); Вейль Г *Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности* (М.: Янус, 1996)

Lagrange equations of motion of particles and photons in the Schwarzschild field

V.I. Ritus
Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (499) 132 64 26. Fax +7 (499) 135 85 33
E-mail: *ritus@lpi.ru*

The equations of motion of a particle in the gravitational field of a black hole are considered in a formulation which uses generalized coordinates, velocities and accelerations and is convenient for finding the integrals of motion. The equations are rewritten in terms of the physical velocities and accelerations measured in the Schwarzschild frame by a stationary observer using proper local length and time standards. The attractive force due to the field and the centripetal acceleration of a particle are proportional to the particle's kinetic energy $m/\sqrt{1 - v^2}$, consistent with the fact that the particle's kinetic energy and the photon's energy $\hbar\omega$ in the field increase by the same amount from their out-of-the-field values. The attraction exerted on particles and photons by the gravitational field source is proportional to their kinetic energies. The particle trajectory in the ultrarelativistic limit $v \to 1$ coincides with the photon trajectory.

Keywords: gravitational field, Schwarzschild's geometry, mass and energy in gravitation

PACS number: **03.30.+p** DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511g.1229

Bibliography — 11 references *Received 2 July 2015*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (11) 1229 – 1234 (2015) *Physics – Uspekhi* **58** (11) (2015)