

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Транзиентная динамика возмущений в астрофизических дисках

Д.Н. Раздобурдин, В.В. Журавлёв

Рассмотрен круг вопросов, связанных с одной из главных нерешённых проблем в теории астрофизических дисков вообще и аккреционных дисков в частности — с проблемой возникновения в них эффективной вязкости в отсутствие магниторотационной неустойчивости. В этом случае вращательный поток невязкой жидкости с кеплеровским профилем угловой скорости спектрально устойчив, и кандидатом на механизм передачи энергии от регулярного движения к возмущениям становится транзиентный рост возмущений. Транзиентные возмущения качественно отличаются от мод возмущений и способны значительно усиливаться в сдвиговых потоках вследствие ненормальности контролирующего их эволюцию динамического оператора. Поскольку собственные векторы такого оператора и представляющие моды возмущений неортогональны друг другу, они могут интерферировать друг с другом во времени, давая транзиентный рост своих линейных комбинаций. Физически, растущее транзиентное возмущение представляет собой лидирующую спираль, ветви которой сокращаются дифференциальным вращением потока. Подробно обсуждается транзиентный рост вихревых сдвиговых гармоник в пространственно локальном пределе, а также методика поиска оптимальных возмущений, демонстрирующих наибольшее усиление. Особое внимание уделено вариационному методу получения таких решений, который заключается в итеративном интегрировании прямой и сопряжённой систем уравнений вперёд и назад во времени соответственно. Стиль изложения материала рассчитан на специалистов, для которых упомянутый круг вопросов является новым.

Ключевые слова: гидродинамика, турбулентность, аккреционные диски

PACS numbers: 02.30.-f, 02.60.Pn, 47.32.C-, 97.10.Gz, 97.82.Jw, 98.62.Mw

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511a.1129

Содержание

1. Введение: модальный и немодальный анализ возмущений (1129).
 2. Аналитическое решение для двумерных вихрей (1133).
2.1. Адиабатические возмущения во вращательном сдвиговом потоке. 2.2. Локальное приближение: переход к сдвиговым гармоникам. 2.3. Коэффициент усиления вихрей.
 3. Поиск оптимальных возмущений (1142).
3.1. Определение и свойства сингулярных векторов. 3.2. Получение оптимальных решений матричным методом. 3.3. Альтернатива: вариационный подход. 3.4. Сопряжённые уравнения.
 4. Оптимальные возмущения в кеплеровском диске (1155).
4.1. Локальное приближение. 4.2. Глобальная задача.
 5. Заключение (1157).
- Список литературы (1159).

Д.Н. Раздобурдин. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Российская Федерация; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп. 13, 119991 Москва, Российская Федерация
В.В. Журавлёв. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп. 13, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: zhuravlev@sai.msu.ru

Статья поступила 18 мая 2015 г., после доработки 1 сентября 2015 г.

1. Введение: модальный и немодальный анализ возмущений

Отличительной особенностью дисковой аккреции является то, что она невозможна без механизма диссипации энергии дифференциального вращения вещества. Именно внутреннее трение в диске, т.е. необратимое взаимодействие его соседних колец друг с другом, приводит к преобразованию гравитационной энергии аккрецирующей материи в тепловую энергию и в электромагнитное излучение, в то же время создавая поток вещества к центру, а поток момента импульса — на периферию диска.

Прямая диссипация возможна уже за счёт микроскопической вязкости газа (плазмы), однако в астрофизических условиях она оказывается совершенно недостаточной для объяснения наблюдаемой активности дисков. Диски, по сути, оказываются слишком большими для того, чтобы можно было объяснить характерное время аккреции, t_v , микроскопической вязкостью. К примеру, в протопланетных дисках для типичного пространственного масштаба $L \sim 10$ а.е., где коэффициент кинематической вязкости оценивается как $\nu_m \sim 10^7$ см² с⁻¹, время аккреции $t_v = L^2/\nu \sim 10^{13}$ лет (см. раздел 3.3.2 книги [1]). Как видно, t_v на несколько порядков превышает возраст Вселенной. При этом по наблюдениям газопылевых дисков вокруг молодых звёзд установлено, что время их жизни составляет всего лишь несколько миллионов лет

(см., например, обзор [2]). К аналогичному выводу можно прийти и для горячих аккреционных дисков, находящихся, в частности, вблизи чёрных дыр в тесных двойных звёздных системах. В этом случае для гораздо меньших характерных масштабов $L \sim 10^{10}$ см и несколько меньшего значения вязкости водородной плазмы $\nu_m \sim 10^5 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ мы всё равно получаем $t_v \sim 3 \times 10^7$ лет, что на много порядков превышает, например, длительность всплесков рентгеновских новых, связанных с нестационарной дисковой аккрецией (см. обзор [3]).

Между тем из статистической гидромеханики известно (см. обсуждение уравнений Рейнольдса в книге [4], т. 1, гл. 3), что присутствие в потоке значительных коррелирующих между собой флуктуаций компонент скорости жидкости эквивалентно существованию эффективной вязкости, многократно превышающей микроскопическую вязкость вследствие того, что масштаб перемешивания вещества в потоке с возмущениями много больше длины пробега отдельных частиц. В свою очередь, большая эффективная вязкость ведёт к усиленному отводу момента импульса на периферию диска и необходимому уменьшению t_v до наблюдаемых значений. Обсуждаемые возмущения, вообще говоря, могут носить и регулярный характер: так, например, аккреция может происходить вследствие приливных волн, генерируемых в диске соседним компаньоном двойной системы (см. [5]). Однако естественнее предполагать, что они порождаются *турбулентным* состоянием жидкости. Турбулентность, с одной стороны, черпает энергию вращательного движения вещества, что происходит на больших пространственных масштабах, а с другой — благодаря каскаду взаимодействия компонент возмущений с различными волновыми числами передаёт эту энергию на малые масштабы, где происходит её прямая диссипация из-за микроскопической вязкости.

Обратим внимание на важный момент, заключающийся в том, что за переход энергии от регулярного потока к возмущениям должен отвечать *линейный* механизм, т.е. такой, который следует из динамики малых возмущений, подчиняющихся линеаризованным гидродинамическим уравнениям. Это можно строго показать для вихревого движения жидкости, воспользовавшись уравнениями Навье–Стокса (см. книгу [6], раздел 1.4, а также работу [7]). Поэтому первым естественным шагом в теоретическом исследовании генерации турбулентности в каком-либо (стационарном) течении является поиск экспоненциально растущих линейных возмущений на его фоне. Такие возмущения принято называть *модами*, а соответствующий анализ — *модальным* или спектральным анализом возмущений, поскольку с его помощью определяются собственные значения соответствующего динамического оператора задачи: (комплексные) частоты мод. Турбулентность, возникающая благодаря существованию растущих мод, называется *сверхкритической*. В астрофизическом случае потока, вращающегося с кеплеровским профилем угловой скорости, существование спектральной (магниторотационной) неустойчивости и соответствующей сверхкритической (МГД) турбулентности было показано в аналитических и численных расчётах в работах [8–10] (см. также обзоры [11, 12]) для диска с замороженным в него первоначальным малым затравочным магнитным полем. Тем не менее магниторотационная неустойчивость перестаёт действовать в холодных дисках, где вещество слабо ионизовано.

Основными примерами являются протопланетные диски, аккреционные диски в спокойном состоянии катаклизмических двойных, внешние части аккреционных дисков в активных ядрах галактик. Таким образом, крайне важно было бы показать, что для существования турбулентности в кеплеровских дисках достаточно лишь условия дифференциальности вращения. Это свойство кеплеровского потока универсально, в отличие от таких его свойств, как присутствие магнитного поля совместно с условием достаточной степени ионизации вещества либо наличие неоднородностей потока, связанных с присутствием скачка завихренности (см., например, обзор [13]), градиента радиальной скорости (см. обзор [14]), вертикальных и/или горизонтальных градиентов каких-либо термодинамических величин (в качестве примеров приведём работы [15, 16]). Однако генерация турбулентности в *однородном* кеплеровском потоке без магнитного поля до сих пор остаётся под вопросом.

Главное осложнение здесь состоит в том, что такой поток спектрально устойчив: удельный момент импульса для кеплеровского профиля вращения возрастает с удалением от центра, поэтому по критерию Рэлея ([17] и [18] т. 6, параграф 27) невозможен рост осесимметричных мод; в свою очередь, неосесимметричные моды не могут быть растущими, поскольку не выполняется необходимое условие Рэлея о существовании экстремума завихренности в фоновом течении [19, 20]. Несмотря на это, и данные лабораторных экспериментов, и результаты численных расчётов свидетельствуют о том, что турбулентность возникает и в спектрально устойчивых потоках. В этом случае она называется докритической. Самым простым и в то же время наиболее ярким примером здесь является плоскопараллельное течение Куэтта, о чём подробно рассказано в классических монографиях [21, 22].

В теории гидродинамической устойчивости свойства какого-либо течения (с отличной от нуля микроскопической вязкостью) в отношении перехода к турбулентности принято характеризовать набором критических чисел Рейнольдса Re (см. раздел 1.3.2 книги [6]). Наименьшим из них является число Re_E , такое что при $Re < Re_E$ не существует таких начальных возмущений, независимо от их амплитуды, энергия которых росла бы в начальный момент времени $t = 0$. Re_E можно получить из энергетического уравнения Рейнольдса–Оппа (см. раздел 1.4 книги [6]). Для течения Куэтта $Re_E \approx 20$. При $Re > Re_E$ появляются растущие в момент $t = 0$ возмущения, но пока $Re < Re_G$, по-прежнему отсутствуют начальные возмущения с какой-либо амплитудой, которые бы не затухали при $t \rightarrow \infty$. Таково определение второго критического числа $Re_G > Re_E$. Наконец, при ещё больших значениях $Re > Re_G$ появляются возмущения, которые могут поддерживать свою амплитуду неограниченное время и начиная с некоторого $Re_T > Re_G$ экспериментально наблюдается переход потока к турбулентному состоянию. Для течения Куэтта $Re_T \approx 360$. Наибольшим же из критических чисел Рейнольдса является $Re_L > Re_T$, начиная с которого появляются растущие моды, т.е. поток становится спектрально неустойчивым. Для течения Куэтта, как и для интересующего нас кеплеровского потока, $Re_L = \infty$. Однако отличие кеплеровского потока заключается в том, что до настоящего момента для него ни теоретически, ни экспериментально не удалось получить значение Re_G и измерить Re_T .

С одной стороны, сложилось мнение, что для кеплеровского однородного потока $Re_G = Re_T \rightarrow \infty$. Оно основано на том косвенном аргументе, что (локально) действие на возмущения приливных и кориолисовых сил, отсутствующих в течении Куэтта, резко стабилизирует сдвиговый поток (см. рис. 9 в обзоре [11], на котором представлены результаты расчётов из работы [23]). Этот довод подкрепляется проведёнными пространственно локальными численными расчётами [24, 25] и серией лабораторных экспериментов [26–28], в которых устойчивость квазикеплеровского потока наблюдалась вплоть до $Re = 2 \times 10^6$. Под квазикеплеровским потоком мы подразумеваем здесь так называемый антициклонический (определение см., например, в [29]) поток, когда удельный момент импульса возрастает, а сама угловая скорость, наоборот, уменьшается на периферии¹.

С другой стороны, в потоке циклонического типа докритическая турбулентность наблюдается при конечных, хотя и больших значениях Re_T , см. работы [30, 31] об экспериментах со спектрально устойчивым течением Тейлора–Куэтта, а также их анализ в астрофизическом контексте, проведённый в работе Зельдовича [32] и позднее в работе [33]. Кроме того, отрицательные результаты, полученные в численных исследованиях, упомянутых выше, можно объяснить недостаточным численным разрешением, что обсуждалось в работе [34], а в последовавшей за ней работе [29] численными методами было проведено сравнение динамики возмущений в циклоническом и антициклоническом потоках и сделан вывод, что требования по численному разрешению во втором случае значительно выше, чем в первом, и текущих численных ресурсов недостаточно для обнаружения турбулентности в кеплеровском течении; также нельзя утверждать, что стабилизирующее действие силы Кориолиса в этом случае исключает существование конечного значения $Re_T < \infty$. Наконец, другой лабораторный эксперимент, представленный в работах [35, 36], показывает возникновение докритической турбулентности и отвод момента импульса на периферию квазикеплеровского потока. Противоречия в результатах, объявленных двумя разными группами исследователей, говорят о сложности эксперимента, связанной с неизбежным возникновением наведённых аппаратами вторичных течений. В настоящий момент идёт обсуждение влияния осевых границ на лабораторный поток (см. [37, 38]).

Так или иначе, можно резюмировать, что из всех типов однородных вращательных потоков именно квазикеплеровский (антициклонический) тип оказался наиболее устойчивым к возмущениям конечной амплитуды. Тем не менее ничтожность микроскопической вязкости в астрофизических условиях, с упоминания о которой мы начали наше изложение, одновременно означает, что в дисках достигаются огромные числа Рейнольдса: если вернуться к оценкам в протопланетном диске, а в качестве естественного предельного масштаба задачи взять толщину диска, $H \approx 0,05L = 0,5$ а.е., которой соответствует набор орбитальной скорости порядка скорости звука в диске на этом радиусе, $c_s \sim 0,5$ км с^{–1}, то получим $Re \approx 10^{10}$. Для дисков других типов оценка Re может

принимать ещё большие значения. Как видим, при учёте всех отрицательных результатов исследований для возможности того, что в астрофизических условиях кеплеровский поток турбулентен, остаётся ещё несколько порядков величины: $10^6 < Re_T < 10^{10}$.

Итак, поиск значения Re_T для кеплеровского течения является предметом дальнейших исследований, в этой же работе мы собираемся подробно осветить необходимое условие существования турбулентности и/или усиленного отвода момента импульса на периферию диска — переход энергии от регулярного потока к возмущениям в таком течении. Выше мы упомянули, что за этот переход должен отвечать линейный механизм. При этом, поскольку кеплеровское течение спектрально устойчиво и растущие моды отсутствуют, таким механизмом могут обладать только (малые) возмущения, отличные от мод. О существовании подобных, транзитивно растущих, немодальных возмущений в сдвиговом потоке известно ещё с работ Кельвина [39] и Орра [40, 41], а в астрофизике этой задачи касались в области звёздной динамики (см. [42, 43]), однако строго и именно в контексте гидродинамической устойчивости течений критерии существования таких возмущений и методика их поиска были разработаны лишь в 1990-х годах и были названы *немодальным* анализом возмущений. Чтобы подчеркнуть неприменимость здесь традиционного модального анализа, соответствующая концепция перехода к докритической турбулентности за счёт роста транзитивных возмущений была названа *обходным* (bypass) переходом. Немодальный анализ возмущений сформулирован в работах [44–47] (см. также обзоры [48, 49] и книгу [6]). В этих работах было выяснено, что математически немодальный рост является следствием неортогональности мод возмущений. Если моды, измеряемые физически осмысленной нормой, неортогональны друг другу, их линейные комбинации могут возрастать по этой норме, несмотря на то что каждая из мод в отдельности затухает, как это имеет место в спектрально устойчивом потоке (см. рис. 5 в разделе 3.1). В свою очередь, моды неортогональны в силу *ненормальности* линейного динамического оператора, управляющего эволюцией возмущений (см. вводную информацию об операторах в том же разделе). Ненормальный оператор не коммутирует с сопряжённым ему оператором, что связано с отличным от нуля сдвигом скорости в регулярном течении (см. об этом заключительную часть раздела 3.4 этой работы). При этом чем больше Re , тем выше степень неортогональности мод друг другу и, соответственно, возможен больший транзитивный рост. В указанных работах обсуждается, что максимально возможный транзитивный рост возмущений к фиксированному моменту времени, названный *оптимальным ростом*, определяется нормой динамического оператора, которую можно получить, используя аппарат вычисления сингулярных векторов оператора (см. подробно об этом раздел 3.1). Наконец, с нормой оператора также связано понятие псевдоспектра оператора (см. [48] и книгу [6]).

Позже данная методика была применена к астрофизическим потокам в работах [50–52], где с помощью различных моделей проводился поиск оптимальных возмущений, демонстрирующих оптимальный рост. В частности, было показано, что для кеплеровского профиля факторы роста становятся значительными лишь начиная с $Re \sim 10^6$, тогда как в аналогичной постановке

¹ В циклоническом потоке с удалением от центра возрастают обе указанные величины.

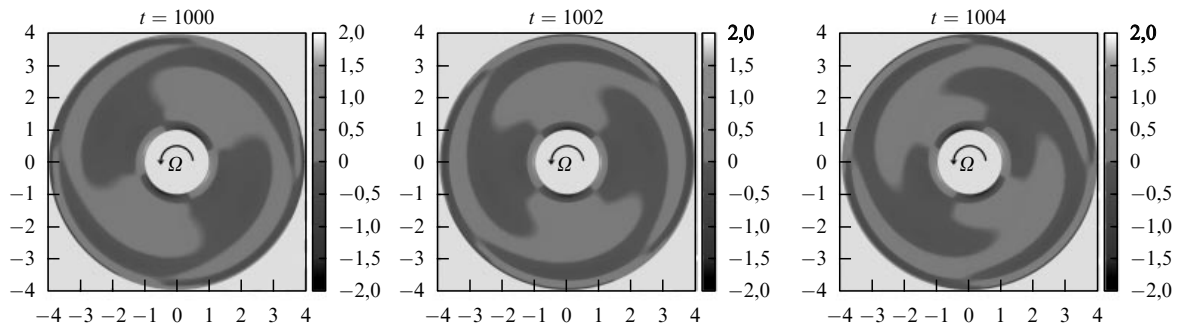


Рис. 1. Контуры наиболее неустойчивой моды возмущений с азимутальным волновым числом $m = 2$ в модели квазикеплеровского тонкого диска конечной радиальной протяжённости, описанной в разделе 3.2. Параметры расчёта: характерный угол раскрытия $\delta = 0,3$, положение внешней и внутренней границ $r_1 = 1$ и $r_2 = 4$, индекс политропы вещества $n = 3/2$. Мода обладает инкрементом $\Im[\omega] \approx 0,001$ и фазовой скоростью $\Re[\omega] \approx 0,26$. В единицах обратной кеплеровской частоты на внутреннем крае диска указано время, прошедшее от начального момента, в который мода обладает условно единичной амплитудой. Стрелкой показано направление вращения вещества в диске. Метод расчёта описан в разделе 4.2.

задачи для изомоментного профиля, а также для течения Куэтта такие же факторы роста достигаются уже при $Re \sim 10^3$ (см. обсуждение в конце работы [52]). В связи с этим упомянем и работы [53, 54] по транзитной динамике в спектрально устойчивом течении Тейлора–Куэтта, охватывающие и циклонический, и антициклонический режимы. В работе [53] была обнаружена корреляция между экспериментально полученной границей потери устойчивости ламинарным течением (см. [55]) и значением оптимального транзитного роста; в работе [54] было найдено, что при одном и том же значении Re в квазикеплеровском режиме транзитный рост имеет наименьшую силу. Используя корреляцию из [53], авторы [54] дали оценку $Re_T \sim 10^5$ для квазикеплеровского режима. Поскольку в упомянутых выше численных экспериментах [23–25] эффективные Re , порождаемые численной вязкостью, едва ли превышали значения $\sim 10^4 - 10^5$, вполне закономерно, что в них кеплеровский профиль оказывался устойчивым по отношению к возмущениям.

Помимо этого, к настоящему времени существует заметное количество астрофизических исследований транзитного роста локальных возмущений лагранжевым методом, когда выполняется переход в сопутствующую сдвигу систему координат и рассматриваются отдельные сдвиговые гармоники (см. раздел 2.2). Было найдено, что в локальном пространственном пределе всегда существуют испытывающие транзитный рост вихревые сдвиговые гармоники, которые в момент свинга (см. раздел 2.2) могут излучать волновые сдвиговые гармоники различных типов (в зависимости от учёта сжимаемости либо тех или иных неоднородностей в потоке), также испытывающих немодальный рост [56–68].

Наконец, в работах [69, 70] исследовалась нелинейная транзитная динамика трёхмерных возмущений с учётом глобальной структуры потока в модели геометрически тонкого диска с параметром вязкости α . Как и в работе [50], в них обсуждалась возможность возбуждения найденного типа возмущений уже существующей в диске слабой турбулентностью, которая и даёт малую эффективную вязкость, параметризуемую α . В разделе 2.3 мы также коснёмся влияния эффективной вязкости на транзитный рост вихрей различного масштаба по сравнению с толщиной диска. Таким образом, тран-

зитный рост возмущений может обсуждаться не только в контексте обходного перехода ламинарного потока к турбулентности, но и как один из механизмов для усиления оттока момента импульса в диске с уже существующей, но слабой турбулентностью, дающей малую эффективную вязкость. В последнем случае указанную турбулентность математически можно рассматривать как внешнее стохастическое возмущение сдвигового потока, который переходит в квазистационарное состояние со значительным усилением амплитуды возмущений за счёт ненормальности управляющего их динамикой линейного оператора (см. [50]).

Цель настоящей работы — детально рассмотреть явление транзитного роста на простейшем примере двумерных адиабатических возмущений в однородном вращательном сдвиговом потоке с квазикеплеровским профилем угловой скорости. В разделе 2 мы представляем анализ сдвиговых вихревых гармоник, ответственных за транзитный рост при пространственно локальном подходе к задаче, и на их примере обсуждаем механизм усиления возмущений. Разделы 3, 4 посвящены главным образом методологии исследования немодального роста возмущений и поиска максимально растущих, оптимальных возмущений. Мы представляем два метода получения кривой оптимального роста: матричный и вариационный. Вариационный метод распространён менее широко, особенно в астрофизических исследованиях (см. [71]), однако, по сути, является более универсальным, чем матричный. К примеру, при подготовке этой работы с его помощью в геометрически тонком квазикеплеровском потоке со свободными границами было рассчитано одно из оптимальных транзитных возмущений (рис. 2), а также самая неустойчивая мода возмущений (рис. 1), о чём подробнее будет рассказано в заключительной части раздела 4.2. Сравнивая рис. 2 и 1, мы видим, что возмущения этих двух типов действительно качественно отличаются друг от друга: транзитная спираль раскручивается потоком и при этом амплитуда её возрастает, в то время как модальная спираль вращается твердотельно и испытывает монотонный, но очень слабый рост, в силу того что обладает малым инкрементом. При этом фазовая скорость модальной спирали такова, что её радиус коротации, на котором происходит передача энергии от регулярного потока, находится внутри течения.

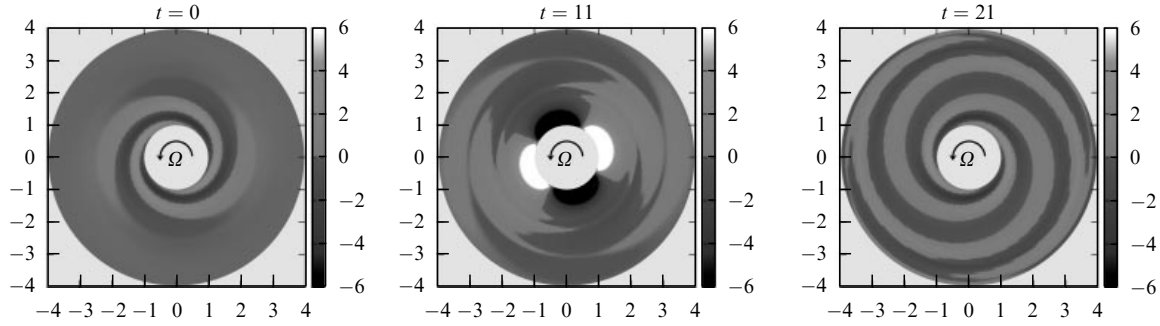


Рис. 2. Контуры возмущения $m = 2$, демонстрирующего максимально возможный транзитный рост полной акустической энергии в момент времени $t_{\text{opt}} = 10$, отсчитываемый от начала эволюции возмущения в единицах обратной кеплеровской частоты на внутреннем крае диска. Начальное возмущение обладает условно единичной амплитудой, модель потока взята та же самая, что и на рис. 1. Метод расчёта описан в разделе 4.2.

2. Аналитическое решение для двумерных вихрей

2.1. Адиабатические возмущения во вращательном сдвиговом потоке

Рассмотрим динамику малых адиабатических возмущений в идеальной жидкости с изоэнтропным уравнением состояния. Возмущения будем описывать с помощью эйлера подхода, т.е. рассматривая вариации таких физических величин, как объёмная плотность ρ , скорость $\mathbf{v}$ и давление p в данной точке пространства в один и тот же момент времени, в возмущённом течении по сравнению с фоновым потоком². Примем для простоты, что какой-либо градиент энтропии в жидкости отсутствует, тогда в правой части уравнения Эйлера нам удобно сразу перейти от градиента давления к градиенту энтальпии. Действительно, при постоянной энтропии дифференциал энтальпии в расчёте на единицу массы равен $dh = dp/\rho$ (см. [73]), причём это справедливо как в фоновом потоке, так и в потоке с возмущениями. Следовательно, для эйлеровых возмущений справедливо равенство $\delta(\nabla p/\rho) = \nabla \delta h$. Воспользовавшись им, запишем уравнения для $\delta\rho$, δh и $\delta\mathbf{v}$ (см. также [18], параграф 26):

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \delta h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \delta \mathbf{v}) + \nabla(\delta \rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

в которых мы приняли, что $\mathbf{v}$ и ρ — скорость и плотность, относящиеся к фоновому течению, которое и само может эволюционировать со временем. Уравнения (1), (2) являются линейными, поскольку возмущения считаются малыми и все квадратичные по их амплитуде члены отброшены.

2.1.1. Модель и основные уравнения. Для того чтобы выписать соответствующие уравнения для скалярных величин, конкретизируем модель, которую хотим здесь рассмотреть для иллюстрации транзитной динамики.

Прежде всего, будем считать, что фоновый поток является *стационарным* и носит чисто вращательный характер, что хорошо выполняется в астрофизических дисках. Это значит, что он обладает аксиальной симметрией, а следовательно, нам удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , в которой его скорость имеет только азимутальную ненулевую компоненту: $\mathbf{v} = (0, v_\varphi, 0)$. В дальнейшем мы будем также пользоваться угловой скоростью потока $\Omega = v_\varphi/r$. Важно отметить, что предположение о изоэнтропности (частном случае баротропности) жидкости сразу позволяет сказать, что v_φ и Ω зависят только от радиальной координаты (см. книгу [74], параграф 4.3). В то же время входящая в (1), (2) плотность является функцией и r , и z : $\rho = \rho(r, z)$. Наиболее часто встречается ситуация геометрически тонкого диска, когда $H(r)/r \ll 1$, где H — полутолщина диска. Это предположение будет нам полезно для того, чтобы узнать, как именно ρ меняется с изменением высоты над экваториальной плоскостью диска. Воспользуемся условием вертикального гидростатического равновесия в фоновом потоке:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -\Omega^2(r)z, \quad (3)$$

в котором справа стоит вертикальное гравитационное ускорение, возникающее за счёт воздействия центрального гравитирующего объекта, в окрестности которого находится диск. Это ускорение здесь записано в пренебрежении квадратичными поправками по малому параметру z/r . Интегрирование (3) с условием $h(z = H) = 0$ даёт вертикальное распределение энтальпии:

$$h = \frac{1}{2}(\Omega H)^2 \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right). \quad (4)$$

Далее, в силу принятого условия постоянства энтропии $p \propto \rho^\gamma$, где $\gamma = 1 + 1/n$ — показатель адиабаты вещества, записанный через показатель политропы, n . Это значит, что квадрат скорости звука в фоновом потоке, $a^2 = \gamma p/\rho$, и плотность будут зависеть от z следующим образом:

$$a^2 \propto \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right), \quad \rho \propto \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right)^n. \quad (5)$$

Наконец, введём упрощение, касающееся самих возмущений: ограничимся рассмотрением таких из них, у

² О приложениях гидродинамики к астрофизическим задачам и, в частности, об использовании теории гидродинамических возмущений в них см. книгу [72].

которых δv не зависит от z . Вообще говоря, это весьма сильное предположение нуждается в аргументации. В частности, уместно поставить вопрос: даже если допустить, что мы наложили подобного рода возмущения в какой-либо начальный момент времени, сохранится ли это свойство в процессе их дальнейшей эволюции, и если нет, то как скоро оно нарушится? Ответ на этот вопрос зависит от вертикальной структуры диска. Так, например, в работе [75] было показано, что для частного случая изотермического вертикального распределения плотности ($n \rightarrow \infty$) малые возмущения с полем скоростей, однородным по z , являются точными решениями уравнений (1), (2). В более общем случае с конечным значением n это не так, однако, например, трёхмерные расчёты в баротропных тороидальных течениях показывают, что наиболее неустойчивые возмущения в них слабо зависят от z (см. работу [76]). Это может быть связано с тем, что, когда угловая скорость не зависит от z , напряжения Рейнольдса, ответственные за передачу энергии от основного потока к возмущениям, не зависят от вертикальной компоненты возмущения скорости [77, 78]. Наконец, исследование трёхмерной динамики транзитных вихрей в кеплеровском потоке, выполненное в работе [51], также показывает, что наиболее быстро растущие возмущения в нестратифицированной по вертикали среде почти не зависят от z (см. также результаты [54]). Рассматривая теперь радиальную и азимутальную проекции (1), видим, что наше предположение означает независимость δh от z , а значит, в правой части вертикальной проекции (1) стоит нуль. Тогда, если дополнительно принять, что в начальный момент времени возмущение вертикальной скорости отсутствует, $\delta v_z = 0$, это будет означать, что оно не появится и в последующие моменты времени. Поэтому в возмущённом потоке, так же как и в фоновом, будет сохраняться вертикальное гидростатическое равновесие. Можно показать, что предположение о вертикальном гидростатическом равновесии в возмущённом потоке и предположение об однородном по z поле возмущения скорости эквивалентны друг другу, т.е. из одного всегда следует другое. В то же время, если жидкость не изоэнтропна и, к примеру, существует радиальный градиент энтропии в диске, даже принятых выше упрощающих допущений недостаточно для обращения δv_z в нуль.

Итак, мы пришли к выводу, что будем иметь дело с плоским полем возмущения скорости, т.е. $\delta v = \{\delta v_r, \delta v_\varphi, 0\}$, причём δv_r и δv_φ , как и δh , зависят только от радиальной координаты. Однако важный момент состоит в том, что этого нельзя сказать о $\delta \rho$, фигурирующем в уравнении неразрывности (2). Здесь уместно воспользоваться тем, что в изоэнтропной жидкости вариации давления и плотности связаны соотношением $d\rho = a^2 d\rho$, являющимся следствием баротропного уравнения состояния. В силу универсальности этого соотношения точно так же между собой будут связаны малые эйлеровы возмущения: $\delta \rho = a^2 \delta \rho$, где подразумевается, что a^2 — квадрат скорости звука в фоновом течении. Следовательно,

$$\delta \rho = \frac{\rho}{a^2} \delta h, \quad (6)$$

это выражение мы и подставим в (2), после чего от вертикальной координаты в уравнении (2) будут зависеть только фоновые величины. Интегрируя по z урав-

нение (2) в его новом виде, нам нужно будет учесть, что

$$\int_{-H}^H \frac{\rho}{a^2} dz = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} \frac{\rho}{a^2} \Big|_{z=0}, \quad (7)$$

$$\int_{-H}^H \rho dz \equiv \Sigma = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \rho \Big|_{z=0},$$

где мы воспользовались соотношениями (5) и ввели поверхностную плотность Σ .

Учитывая для (2) фундаментальное свойство гамма-функции, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, выпишем систему (1), (2) в явном виде, сразу для азимутальных комплексных фурье-гармоник $\delta v_r, \delta v_\varphi, \delta h \propto \exp(im\varphi)$:

$$\frac{\partial \delta v_r}{\partial t} = -im\Omega \delta v_r + 2\Omega \delta v_\varphi - \frac{\partial \delta h}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta v_r - im\Omega \delta v_\varphi - \frac{im}{r} \delta h, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \delta v_r) - \frac{ima_*^2}{r} \delta v_\varphi - im\Omega \delta h, \quad (10)$$

где $a_*^2 \equiv na_{\text{eq}}^2/(n+1/2)$, а a_{eq} — фоновое значение скорости звука в экваториальной плоскости диска. Кроме того, $\kappa^2 = (2\Omega/r) d(\Omega r^2)/dr$ — это квадрат эпициклической частоты, т.е. частоты свободных колебаний жидкости в плоскости (r, φ) , в чём легко убедиться, записав (8), (9) при $\delta h = 0$ и подставив туда решение в виде $\delta v_r, \delta v_\varphi \propto \exp(-i\omega t)$. Упомянем, что проведённое нами сведение трёхмерной задачи в тонком диске к эффективно двумерной задаче, очевидно, может быть выполнено простой заменой в исходных, непроинтегрированных по z уравнениях объёмной плотности на поверхностную, а показателя политропы — на $n+1/2$, как было впервые показано в работе [79].

2.1.2. Типы возмущений. Система уравнений (8)–(10) описывает динамику двух типов возмущений внутри диска, возможных в сформулированной нами двумерной постановке задачи: вихрей и волн плотности³. Критерий разделения между ними для возмущений транзитного типа обсудим ниже в локальной постановке задачи, допускающей более простую физическую интерпретацию поведения возмущений в дифференциально вращающемся потоке. Кроме того, при наличии радиальных свободных границ у фонового потока — к примеру, когда рассматривается диск конечной радиальной протяжённости со сверхкеплеровским градиентом угловой скорости, имеющий внутренний и внешний радиусы, где Σ обращается в нуль, — вблизи них возникают поверхностные гравитационные волны (см. работы [80–82]). Это происходит из-за того, что наличие сколько-нибудь значительного радиального градиента давления в потоке эквивалентно отличному от нуля эффективному гравитационному ускорению, за счёт которого по свободным поверхностям (или радиальным скачкам плотности) могут бежать волны, аналогичные океаническим.

2.1.3. О модах возмущений. Указанные типы возмущений детально исследовались в 1980-х годах в рамках спектральной задачи, когда система (8)–(10) решалась путём

³ Волны плотности ещё часто называют инерционно-акустическими волнами.

рассмотрения отдельных временных фурье-гармоник $\propto \exp(-i\omega t)$, называемых *модами* (см. обзоры [83, 84]). При этом локальное дисперсионное соотношение даёт только действительные значения ω во всех астрофизически важных случаях, когда $\Omega(r)$ таково, что удельный момент импульса, Ωr^2 , возрастает по направлению к периферии потока. Это означает локальную устойчивость дисков и невозможность экспоненциального роста мелкомасштабных возмущений, что согласуется также с известным критерием Рэля для частного случая аксиально-симметричных возмущений (см. параграф 27 в [18]). В отличие от этого, глобальная постановка задачи для неосесимметричных мод, когда решается система дифференциальных уравнений по радиальной координате с соответствующими граничными условиями на внутренней границе диска и на бесконечности (либо на внешней границе диска), приводит к дискретному набору ω , где могут присутствовать и комплексные частоты (см., например, [81, 82, 85–91] и др.). Отличная от нуля действительная часть частоты даёт угловую скорость *твердотельного* вращения данной моды в потоке. Вообще, твердотельность азимутального движения контуров постоянной фазы возмущений, с одинаковой фазовой скоростью $\Re[\omega]/m$ на всех r , является главной особенностью мод, выделяющей их среди прочих возмущений. Здесь символом $\Re$ обозначена действительная часть частоты ω . Отличная же от нуля мнимая часть частоты, $\Im[\omega]$, означает, что у моды происходит обмен (каноническими, см. [92]) энергией и моментом импульса либо с фоновым потоком [87, 93–95], либо с модой, обладающей (канонической) энергией противоположного знака [82, 96, 97]. Первый механизм в литературе также называется механизмом Ландау, второй — спариванием, или кауплингом, мод. Обмен энергией в обоих механизмах носит резонансный характер, т.е. всегда происходит в так называемом критическом слое на радиусе, где $\omega = m\Re[\Omega]$, называемом радиусом коротации. Подробнее освещение физики указанных резонансных механизмов усиления (затухания) мод можно найти в книге [98]. Тем не менее в потоках с почти кеплеровским вращением и спаривание мод, и взаимодействие их с фоновым потоком происходит чрезвычайно медленно, и соответствующие инкременты даже для значительных углов раскрытия диска $H/r \sim 0,1$ составляют лишь сотысячные доли характерной кеплеровской частоты [99, 100]. Этот результат привёл к общему выводу, что моды, по крайней мере в простейших баротропных дисках, не могут служить причиной какой-либо гидродинамической активности в аккреционных дисках и, в частности, не могут вызвать турбулентность или какой-либо другой вариант усиленного отвода момента импульса на периферию течения.

2.1.4. Об измерении возмущений. В заключение обсудим вопрос измерения возмущений. Действительно, в этой работе нас интересует, как сильно могут вырасти те или иные возмущения за некий отведённый промежуток времени. Чтобы придать этому количественное выражение, необходимо ввести норму возмущений, которая характеризовала бы амплитуду описывающих их величин, δv_r , δv_ϕ , δh , в данный момент времени. Это должна быть действительная и положительно определённая величина. Наиболее естественно выбрать для этого полную по диску акустическую энергию возмущения,

имеющую вид

$$E = \pi \int \Sigma \left(|\delta v_r|^2 + |\delta v_\phi|^2 + \frac{|\delta h|^2}{a_*^2} \right) r dr, \quad (11)$$

где также уже проведено интегрирование по азимутальной координате.

Взяв производную по времени от (11) и используя (8)–(10), будем иметь (см. также выражение (8) из работы [97])

$$\frac{dE}{dt} = -2\pi \int \frac{d\Omega}{dr} r \Sigma \Re[\delta v_r \delta v_\phi^*] r dr - 2\pi r \Sigma \Re[\delta v_r \delta h^*] \Big|_{r_1, r_2}, \quad (12)$$

где символ "*" обозначает комплексное сопряжение, а r_1 и r_2 — внутренняя и внешняя границы потока. При этом r_2 может располагаться на бесконечности. Поскольку $\Sigma \rightarrow 0$ на границах потока, второе слагаемое в правой части (12) исчезает, и мы видим, что E может изменяться именно в дифференциально вращающемся теле. В отсутствие вращения или при твердотельном вращении E остаётся постоянной по времени. Важно отметить, что возрастание/уменьшение E будет означать и среднее по потоку возрастание/уменьшение амплитуд, входящих в него, δv_r , δv_ϕ и δh , так как (11) содержит квадраты модулей этих величин, взятые с одними и теми же знаками. Заметим, что для мод из (12) следует, что

$$\frac{dE}{dt} \propto \exp(2\Im[\omega]t), \quad (13)$$

т.е. малые инкременты, полученные для квазикеплеровских течений, позволяют заключить, что полная акустическая энергия мод в них $E \simeq \text{const}$ на динамических $\sim \Omega^{-1}$ и звуковых $\sim (\Omega H/r)^{-1}$ временах.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы понять, как может изменяться E на таких же промежутках времени для возмущений произвольного типа. Итак, вводя вектор возмущения $\mathbf{q}(t)$ в виде совокупности функций $\{\delta v_r(r), \delta v_\phi(r), \delta h(r)\}$, взятых в какой-либо момент времени t , в качестве нормы для него выбираем

$$||\mathbf{q}(t)||^2 = E(t). \quad (14)$$

2.2. Локальное приближение: переход к сдвиговым гармоникам

На поставленный только что вопрос легче всего ответить, рассмотрев задачу в локальном пространственном приближении. В этом приближении принимается, что характерный масштаб возмущений, λ , составляет малую долю от некоторого опорного значения радиальной координаты, r_0 , в окрестности которого рассматривается динамика возмущений: $\lambda \ll r_0$. Вводится новая радиальная переменная $x \equiv r - r_0 \ll r_0$, а также новая азимутальная переменная $y \equiv r_0(\varphi - \Omega_0 t) \ll r_0$, где $\Omega_0 \equiv \Omega(r_0)$ — угловая скорость, с которой вращается новая система координат, используемая для решения задачи. При этом в уравнениях (8)–(10) удерживаются только ведущие члены разложения по малому x . На практике это означает, что в профиле угловой скорости достаточно учесть только линейную зависимость от x :

$$\Omega = \frac{d\Omega}{dx} \Big|_{r_0} x = -q\Omega_0 \frac{x}{r_0} \ll \Omega_0, \quad (15)$$

где $q \equiv -(r/\Omega)(d\Omega/dr)|_{r=r_0}$ и $\Omega(x=0) = 0$, в силу того что теперь мы находимся во вращающейся со скоростью Ω_0 системе отсчёта. Соответствующая линейная фоновая скорость равна $v_y^{\text{loc}} = r_0\Omega = -q\Omega_0x$.

Далее, в правых частях (8)–(10) мы оставляем только члены порядка до $\sim x/\lambda$, выбрасывая те, которые $\sim x/r_0$ и меньше. Для ясности распишем также коэффициент при δv_r в члене из (9), включающем в себя κ^2 :

$$-\frac{\kappa^2}{2\Omega} = -2\Omega - r \frac{d\Omega}{dr} = 2q\Omega_0 \frac{x}{r_0} + (r_0 + x) \frac{q\Omega_0}{r_0} = 3q\Omega_0 \frac{x}{r_0} + q\Omega_0,$$

откуда нам достаточно учесть только слагаемое $q\Omega_0$. Далее, помня о неинерциальности новой системы отсчёта, необходимо добавить компоненты возмущения силы Кориолиса: $2\Omega_0\delta v_\varphi$ в правую часть (8) и $-2\Omega_0\delta v_r$ в правую часть (9).

Заменив сначала в системе (8)–(10) $im \rightarrow \partial/\partial\varphi$, т.е. вернувшись обратно к произвольной зависимости эйлеровых возмущений от φ , и обозначив локальные аналоги возмущений компонент скорости и энтальпии как u_x, u_y и W соответственно, через описанную выше процедуру придём к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0x \frac{\partial}{\partial y}\right)u_x - 2\Omega_0u_y = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0x \frac{\partial}{\partial y}\right)u_y + (2 - q)\Omega_0u_x = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0x \frac{\partial}{\partial y}\right)W + a_*^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 0. \quad (18)$$

Вывод системы уравнений (16)–(18) был впервые выполнен в работе [42]⁴ (см. также работу [102]), где дано его детальное описание для различных моделей фонового потока.

2.2.1. Переход к сдвиговым гармоникам. Весьма удобным свойством системы (16)–(18) оказывается то, что заменой переменных, соответствующей переходу в сопутствующую сдвигу систему отсчёта, возможно сделать её однородной и по x , и по y , а это, в свою очередь, делает возможным разделение произвольного возмущения на отдельные пространственные фурье-гармоники (ПФГ) с определёнными волновыми числами k_x и k_y . Действительно, введём новые *безразмерные* переменные $x' = \Omega_0x/a_*$, $y' = \Omega_0(y + q\Omega_0xt)/a_*$, $t' = \Omega_0t$ ⁵. Такая замена соответствует замене частных производных по правилу

$$\frac{a_*}{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + qt' \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{a_*}{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (19)$$

$$\Omega_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + qx' \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Воспользовавшись (19), получаем систему уравнений, в которой все коэффициенты зависят только от t' . Теперь подставим в эту систему ПФГ в виде

$$f = \hat{f}(k_x, k_y, t') \exp(ik_x x' + ik_y y'), \quad (20)$$

где f — любая из неизвестных величин, $\hat{f}$ — её фурье-амплитуда, k_x и k_y — безразмерные волновые числа вдоль осей x' и y' , выраженные в единицах Ω_0/a_* . Если в частных решениях (20) вернуться обратно к переменным x, y , то становится ясно, что они представляют из себя периодические в пространстве возмущения, фаза которых формирует плоский фронт с ориентацией, зависящей при $k_y \neq 0$ от времени. Безразмерное волновое число по x имеет вид $\tilde{k}_x(t) \equiv k_x + qk_y t$ и изменяется со временем: волновой вектор поворачивается в процессе адвекции возмущения сдвиговым потоком, на что впервые обратили внимание Кельвин [39] и Опп [40], и поэтому ПФГ часто ещё называют *сдвиговыми гармониками*. Отметим сразу, что при $\tilde{k}_x < 0$ волновой вектор направлен внутрь диска, и в глобальном масштабе, для фурье-гармоники с конечным волновым числом m это соответствует так называемым *лидирующим* спиральям, ветви которых повернуты в сторону вращения диска. Наоборот, случай $\tilde{k}_x > 0$ соответствует *отстающим* спиральям, ветви которых повернуты в сторону, противоположную вращению диска. Если в начальный момент времени $k_x < 0$, то ветви первоначально лидирующей спирали сокращаются по мере деформации потоком, далее наступает так называемый момент *свинга*, t_s , когда волновой вектор ПФГ направлен строго в азимутальном направлении и $\tilde{k}_x(t_s) = 0$, после чего спираль превращается в отстающую, ветви которой, наоборот, начинают удлиняться из-за их деформации потоком (см. рис. 2). Этот процесс также хорошо известен в динамике звёздных галактических дисков (см. параграф 6.3.2 в книге [103]).

Итак, для ПФГ в результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = 2\hat{u}_y - i\tilde{k}_x(t)\hat{W}, \quad (21)$$

$$\frac{d\hat{u}_y}{dt} = -(2 - q)\hat{u}_x - ik_y\hat{W}, \quad (22)$$

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = -i(\tilde{k}_x(t)\hat{u}_x + k_y\hat{u}_y), \quad (23)$$

где подразумевается, что $\hat{u}_x$ и $\hat{u}_y$ выражены в единицах a_* , а $\hat{W}$ — в единицах a_*^2 . Здесь и ниже мы будем опускать штрих при обозначении временной переменной.

2.2.2. Потенциальная завихренность. Уравнения (21)–(23) обладают важным свойством: величина

$$I = \tilde{k}_x(t)\hat{u}_y - k_y\hat{u}_x + i(2 - q)\hat{W} \quad (24)$$

является инвариантом движения, в чём легко убедиться непосредственным вычислением dI/dt .

Оказывается, что I (с точностью до умножения на i) представляет собой ПФГ эйлера возмущения потенциальной завихренности. Потенциальная завихренность, ζ , которая есть по определению сама завихренность, делённая на плотность, $\zeta \equiv \omega/\rho$ (см. [104]), сохраняется на каждом элементе жидкости в плоских баротропных потоках. Следовательно, для её эйлера возмущения

⁴ Ещё раньше, в контексте задач лунной динамики, локальный подход к исследованию дифференциального вращения вещества был использован в работе Хилла [101].

⁵ Благодаря вертикальному гидростатическому равновесию в диске это означает, что мы выражаем длины в единицах его полутолщины, $H = a_*/\Omega_0$.

будем иметь

$$\delta \left(\frac{d\zeta}{dt} \right) = \frac{d\delta\zeta}{dt} + (\delta v \nabla) \zeta_0 = 0, \quad (25)$$

где ζ_0 — потенциальная завихренность фонового потока. Поскольку и в фоновом, и в возмущённом потоках поля скоростей являются плоскими, завихренность имеет только ненулевую z -компоненту и далее мы считаем её скаляром.

Далее, по определению (в невращающейся цилиндрической системе координат) величина

$$\zeta_0 = \frac{1}{r\Sigma} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) = \frac{\kappa^2}{2\Omega\Sigma} = \frac{(2-q)\Omega}{\Sigma} \quad (26)$$

и должна считаться константой в используемом нами локальном пространственном приближении, в силу того что сдвиг скорости тогда считается постоянной величиной, ср. (15). Поэтому второе слагаемое в последнем равенстве в (25) принимает нулевое значение, и мы действительно видим, что $\delta\zeta$ сохраняется. Как видно, первые два слагаемых в (24) появляются за счёт возмущения самой завихренности, которая равна ротору возмущения скорости, третье же слагаемое возникает за счёт отличного от нуля возмущения плотности, представляемого безразмерной величиной $\hat{W}$ (коэффициент " $2-q$ " появляется здесь из-за умножения на постоянное фоновое значение завихренности, ср. (26)).

2.2.3. Неоднородные волновые уравнения. Волны плотности и вихри. Продифференцируем теперь уравнение (22) по t и, выписывая результат, учтём соотношения, следующие из двух других уравнений (21), (23), а также определение (24). Получим новое уравнение:

$$\frac{d^2 \hat{u}_y}{dt^2} + K(t) \hat{u}_y = \tilde{k}_x(t) I, \quad (27)$$

где $K(t) \equiv \tilde{k}_x^2(t) + k_y^2 + 2(2-q)$. Как видно, (27) представляет собой отдельное *волновое* уравнение для возмущения азимутальной компоненты скорости, $\hat{u}_y$, имеющее при этом *неоднородную часть* $\sim I$ [62].

Действуя аналогично в отношении (21) и (23), получим пару уравнений такого же типа:

$$\frac{d^2 \hat{u}_x}{dt^2} + K(t) \hat{u}_x + 2iqk_y \hat{W} = -k_y I, \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \hat{W}}{dt^2} + K(t) \hat{W} + 2iqk_y \hat{u}_x = -2iI, \quad (29)$$

разделить которые можно, перейдя к переменным $\hat{u}_{\pm} = (\hat{u}_x \pm \hat{W})/2$ [64].

Остановимся подробнее, например, на уравнении (27). Его общее решение равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Сначала рассмотрим оба эти решения в пределе твердотельного вращения, т.е. в отсутствие сдвига, $q = 0$. Тогда коэффициенты в (27) становятся постоянными и

- однородное уравнение имеет частные фундаментальные решения $\hat{u}_y^{\text{dw}} \propto \exp(\pm i\omega t)$ с частотой $\omega = \sqrt{K}$, соответствующие плоским волнам плотности, распространяющимся в противоположных направлениях,

- частное решение с ненулевой неоднородной частью может быть взято в виде константы $\hat{u}_y^v = (k_x/K) I$. Ины-

ми словами, u_y^v соответствует нулевой частоте $\omega = 0$ и представляет собой статическое возмущение. Это возмущение, как видно, имеет отличную от нуля завихренность и соответствует вихрю (показать, что дивергенция возмущения скорости обращается в нуль для этого решения, можно, взяв аналогичное решение для $\hat{u}_x$ из уравнения (28), $\hat{u}_x^v$, и проверив, что комбинация $k_x \hat{u}_x^v + k_y \hat{u}_y^v = 0$).

2.2.4. Усиление волн плотности. С учётом ненулевого сдвига частота волн плотности становится функцией времени. К примеру, для лидирующих/отстающих спиралей эта частота постепенно убывает/возрастает, с одновременным увеличением/сокращением длины волны, что, в свою очередь, без учёта вязкости приводит к монотонному уменьшению/росту энергии и амплитуды волн плотности. Исследованию такого роста амплитуды волн плотности посвящены работы [58, 105]. Его причину можно понять из того факта, что в силу аксиальной симметрии фонового потока должен сохраняться канонический момент импульса волны, J_c (см. [92]). Отсюда получаем, следуя формуле (522) работы [92], что каноническая энергия, $E_c \sim \omega J_c$, начиная с достаточно больших времён *линейно* возрастает, поскольку $\omega = \sqrt{K}$ (см. чуть выше). Вопрос о сохранении J_c для рассматриваемых нами здесь локальных возмущений обсуждается в параграфе 3.2 работы [64]. В отличие от J_c , сама каноническая энергия в рассматриваемом случае уже не сохраняется, поскольку переменная во времени частота делает задачу неоднородной во времени. Указанный рост (или уменьшение) энергии, несмотря на то что здесь фигурирует частота волны, ω , по существу, уже является немодальным, поскольку ω есть функция времени, что, в свою очередь, связано именно с деформацией ПФГ сдвиговым потоком.

В этой работе, однако, нам будет в большей степени интересен "классический" вариант немодального роста, называемый в литературе "транзиентным". В рассматриваемой простейшей модели он представлен вихревым решением, которое при $q \neq 0$ становится динамическим и, в противоположность волнам, носит аperiodический характер.

2.2.5. Критерий существования вихрей. Но прежде чем подробнее обсуждать поведение вихревого решения, проанализируем оправданность указанного выше разделения возмущений на волны и вихри в присутствии сдвига. Действительно, как только $\tilde{k}_x$ становится переменным, решение $\hat{u}_y^v$ уже не точно удовлетворяет уравнению (27), поскольку появляется отличная от нуля вторая производная от $\hat{u}_y^v$. Более того, при $\tilde{k}_x \rightarrow 0$ уравнение (27) в пределе становится однородным и его решение соответствует только волнам плотности. Область, в которой $\tilde{k}_x \rightarrow 0$, соответствует свингу ПФГ, и мы, таким образом, видим, что в ней вихревое решение становится плохо определённым: вихрь должен приобретать волновые черты. Это значит, что мы больше не можем пренебрегать второй производной по времени в уравнении (27) для медленно эволюционирующей ветви решений. Иными словами, $\hat{u}_y^v$ больше нельзя считать, пусть даже и приближённо, решением уравнения (27). Обсудим более подробно критерий возможности разделения волн плотности и вихрей в сдвиговом потоке.

Для этого воспользуемся тем фактом, что вихревая динамика возможна только в потоке со звуковой

скоростью движения жидкости (см. [18], конец параграфа 10). В рассматриваемом случае бесконечного течения это означает, что разность скоростей движения жидкости на характерном масштабе задачи должна быть меньше скорости звука. Характерный пространственный масштаб задаётся мгновенным пространственным периодом ПФГ в радиальном направлении, $\lambda_x \sim H|\tilde{k}_x|^{-1}$. При этом, поскольку рассматриваются бесконечно малые возмущения, достаточно применить условие для существования вихревой динамики к фоновому потоку, и тогда упомянутая разность скоростей даётся просто изменением азимутальной скорости в нём, т.е. для потока с постоянным сдвигом скорости получаем

$$\frac{\lambda_x q \Omega_0}{a_*} = \frac{q}{|\tilde{k}_x|} \ll 1. \quad (30)$$

Таким образом, вихревая гармоника должна обладать малым по сравнению с толщиной диска пространственным периодом в радиальном направлении. Важно обратить внимание на то, что в условии (30) явно не фигурирует азимутальное волновое число k_y , а значит, возмущения могут быть вихревыми, даже если их пространственный масштаб в азимутальном направлении больше толщины диска. В связи с этим результатом наиболее важно рассмотреть случай первоначально лидирующих спиралей, т.е. ПФГ с $k_x < 0$. С такими спиралями момент свинга происходит при

$$t_s = -\frac{k_x}{qk_y} > 0, \quad (31)$$

т.е. когда $\tilde{k}_x = 0$. Понятно, что если в начальный момент времени такая спираль была вихревой, а значит, $k_x \gg 1$, и её эволюция поначалу описывалась приближённым решением $\hat{u}_y^v$, то в некотором временном интервале вокруг t_s вихревое приближение не действует, и необходимо интегрировать полное уравнение (27). Назовём указанный временной интервал "интервалом свинга" и получим условие, при котором его продолжительность будет всё же много меньше характерного времени эволюции ПФГ, определяемого временем раскрутки спирали, t_s (см. работу [71]).

Моменты, в которые нарушается вихревое приближение, можно оценить из предельного случая равенства в условии (30):

$$t_{s1, s2} = t_s \left(1 \pm \frac{q}{k_x} \right), \quad (32)$$

откуда видим, что интервал свинга скоротечен относительно всей эволюции вихревой спирали, $t_{s2} - t_{s1} \ll t_s$, как только

$$|k_x| \gg 2q, \quad (33)$$

где не фигурирует k_y . Условие (33) означает, что для исследования динамики вихрей мы можем пользоваться решением $\hat{u}_y^v$ всякий раз, когда в начальный момент времени спираль достаточно сильно закручена, вне зависимости от значения k_y , т.е. как в истинно коротковолновом пределе $k_y \gg 1$, так и в длинноволновом пределе $k_y \ll 1$. В последнем случае мы будем называть вихри "крупномасштабными".

При этом здесь мы исключаем из рассмотрения случай $k_y \sim 1$, поскольку, как было показано численно в работах [58, 62] и аналитически в рамках ВКБ-приближения в работе [64], тогда во время свинга вихрь дополнительно рождает пару волн плотности, соответствующих отстающим спиральям и распространяющихся в противоположных радиальных направлениях внутрь и во внешние части диска. Этот процесс асимметричен, поскольку возможна только генерация волн плотности вихрями, но не наоборот. В работе [64] были получены аналитические выражения для амплитуды и фазы порождаемой волны. Было показано, что её амплитуда пропорциональна, во-первых, завихренности вихря I и, во-вторых, комбинации $\epsilon^{-1/2} \exp(-4\pi/\epsilon)$ (см. формулу (53) в [64]). Здесь ϵ — малый параметр ВКБ-приближения,

$$\epsilon = \frac{qk_y}{k_y^2 + \kappa^2/\Omega_0^2}, \quad (34)$$

где, напомним, $\kappa^2/\Omega_0^2 = 2(2 - q)$. Выражение (34) говорит о том, что возбуждение волн плотности экспоненциально подавлено как в коротковолновом, так и в длинноволновом пределах и существенно только при $k_y \sim 1$ (уточним здесь, что мы не будем рассматривать экстремальные случаи, когда $q \ll 1$, и поэтому $\epsilon \ll 1$ даже при $k_y \sim 1$, а также когда $q \rightarrow 2$, и поэтому $\epsilon \gtrsim 1$ даже при $k_y \ll 1$).

Итак, критерием существования вихревого решения уравнения (27) мы ставим условие (33) совместно с требованием $k_y \ll 1$ либо $k_y \gg 1$, что исключает рождение волн плотности с ненулевой завихренностью во время свинга вихревой ПФГ. В то же время эти ограничения и являются критерием разделения волн и вихрей в возмущённом потоке. Действительно, при выполнении указанных ограничений волны плотности с нулевой завихренностью распространяются в потоке независимо от вихрей и представляют собой высокочастотную ветвь решений уравнения (27) с нулевой правой частью. Аналогичным образом, например, в земной атмосфере независимо друг от друга существуют ветер и звук.

2.2.6. Вихревое решение. Ниже пойдёт речь только об эволюции вихревых ПФГ в сдвиговом потоке. В заключение раздела 2.2 получим вихревые решения также для $\hat{u}_x$ и $\hat{W}$. Проще всего это сделать, пренебрегая в уравнениях (28) и (29) вторыми производными по времени от $\hat{u}_x$ и $\hat{W}$, аналогично тому как это было сделано с уравнением (27), чтобы выписать $\hat{u}_y^v$. Итак, будем иметь все три искомые величины:

$$\hat{u}_x^v = -\frac{K + 4q}{K^2 + 4q^2 k_y^2} k_y I, \quad (35)$$

$$\hat{u}_y^v = \frac{\tilde{k}_x}{K} I, \quad (36)$$

$$\hat{W}^v = 2i \frac{qk_y^2 - K}{K^2 + 4q^2 k_y^2} I. \quad (37)$$

Важно заметить, что существование вихревого решения в виде (35)–(37) с аperiodической зависимостью от времени становится возможным благодаря главному упрощающему предположению о локальном постоянстве сдвига скорости, следствием которого является существование временного инварианта I . Благодаря этому

систему из трёх однородных уравнений первого порядка (21)–(23) и удаётся свести к одному неоднородному уравнению второго порядка (27) (остальные динамические переменные могут быть получены из известного решения $\hat{u}_y(t)$), которое даёт два независимых волновых решения (общее решение соответствующего однородного уравнения) и одно аperiодическое вихревое решение (частное решение (27)). Однако если учесть градиент сдвига скорости в потоке, то инвариант I исчезнет, редукция системы (21)–(23) станет невозможной и прямо из неё мы должны будем получить три независимых волновых решения, два из которых, как и раньше, будут давать волны плотности, а третье — вихревую волну, которая носит имя волны Россби (см. обсуждение в параграфе 4 работы [62])⁶.

2.3. Коэффициент усиления вихрей

Для измерения роста локальных вихревых возмущений выберем в качестве локального аналога нормы (11) усреднённую плотность их акустической энергии:

$$E = \frac{1}{2S} \int_S \left((\Re[u_x])^2 + (\Re[u_y])^2 + \frac{(\Re[W])^2}{a_*^2} \right) dx dy, \quad (38)$$

где $\bar{S}$ — площадь области интегрирования S .

Подставляя в (38) решение в виде безразмерных ПФГ (20), получим после интегрирования по их пространственному периоду локальный вариант нормы (14):

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \frac{1}{2} (|\dot{u}_x|^2 + |\dot{u}_y|^2 + |\dot{W}|^2). \quad (39)$$

Используя вихревое решение для ПФГ (35)–(37), будем иметь норму в следующем виде:

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \left(\frac{\tilde{k}_x^2}{K^2} + \frac{4 + k_y^2}{K^2 + 4q^2 k_y^2} \right) I^2. \quad (40)$$

Далее будем пользоваться основной величиной, характеризующей транзитную динамику возмущений, — фактором их роста:

$$g(t) \equiv \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2}, \quad (41)$$

иными словами — нормой возмущения, отнесённой к своему значению в начальный момент времени.

Коротковолновые возмущения. При $k_y \gg 1$ мы можем в (40) во всяком случае пренебречь величиной 4 в числителе второго слагаемого, членом $4q^2 k_y^2$ в знаменателе второго слагаемого, а также слагаемым $2(2 - q) = \kappa^2 / \Omega_0^2$ в величине K . Тогда будем иметь

$$g \approx \frac{k_x^2 + k_y^2}{\tilde{k}_x^2 + k_y^2} \quad (42)$$

— результат, который был получен в работе [56] (см. также формулу (4) в [61]). Выражение (42) показывает, что ПФГ в виде первоначально лидирующей спирали с $k_x < 0$ до момента (31) испытывает рост амплитуды и в момент свинга, когда $\tilde{k}_x = 0$, достигает максимального значения

своей нормы, переходя далее к затуханию. Процесс отбора возмущениями энергии у фонового потока на языке жидких частиц подробно описан в работе [107] (см. там рис. 2). Он основан на "подхватывании" жидких частиц основным течением по мере перемещения тех в область с другим значением сдвиговой скорости (см. подробнее книгу [6], параграф 2.3.3). Важную роль при этом играет и взаимодействие жидких частиц друг с другом, конечным результатом которого является рост их дополнительной по отношению к фоновому потоку скорости.

2.3.1. О механизме транзитного роста. Здесь мы приведём дополнительное рассуждение, также проливающее свет на механизм транзитного роста. Как мы упоминали во введении и обсуждали в разделе 2.2, дифференциально вращающийся поток сокращает длину ветвей лидирующей спирали транзитно растущего вихря до тех пор, пока не будет достигнут момент свинга (см. рис. 2). Но в силу баротропности возмущённого течения циркуляция скорости вдоль жидкого контура, совпадающего с границами ветвей спирали, должна оставаться постоянной. Следовательно, имеющее место сокращение длины контура должно приводить к компенсирующему увеличению скорости газовых элементов, расположенных по очертаниям спирали. Рассмотрим эти наводящие соображения более строго, в локальном пространственном пределе (см. иллюстрацию на рис. 3). Поставим цель вычислить циркуляцию скорости, подобрав для этого как можно более простой жидкий контур. В отсутствие возмущений его вариант напрашивается сам собой: это параллелограмм, одна пара сторон которого (назовём их основаниями параллелограмма) расположена на фоновых линиях тока, т.е. параллельно оси y и симметрично по разные стороны от уровня $x = 0$. Условие, что эта пара сторон движется синхронно с жидкостью, автоматически означает, что и весь контур является сопутствующим фоновому потоку, поскольку скорость в потоке линейно зависит от x . Перейдём в

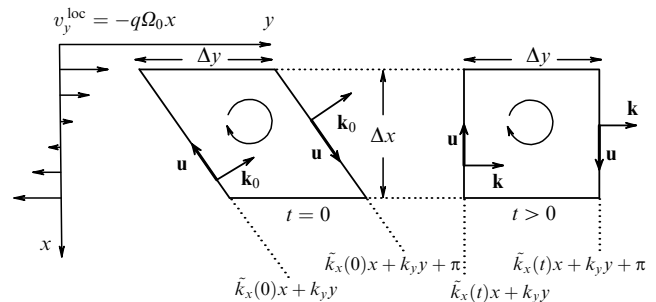


Рис. 3. Иллюстрация к физическим причинам транзитного усиления двумерных вихрей в локальном пространственном пределе (см. раздел 2.2). Рассмотрен случай одной коротковолновой ($k_y \gg 1$) вихревой ПФГ с $k_x < 0$ и изображено два положения жидкого контура, сопутствующего фоновому потоку: в начальный момент времени $t = 0$ и в момент свинга ПФГ, когда $\tilde{k}_x = 0$. О том, почему можно не учитывать деформацию контура возмущениями, см. пояснения к этому рисунку в тексте, в разделе 2.3.1. При $t = 0$ контур взят в виде параллелограмма, одна пара сторон которого ориентирована вдоль оси y и расположена симметрично по разные стороны от $x = 0$, а другая — вдоль двух линий фронта ПФГ, причём разность фаз между этими линиями составляет π . $\mathbf{u}$ — вектор возмущения скорости, $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ — волновой вектор ПФГ в разные моменты времени. Δx — высота параллелограмма, Δy — его основание.

⁶ О волнах Россби, возникающих за счёт градиента сдвига скорости (градиента завихренности) в несжимаемом вращающемся потоке см. книгу [106], параграф 43.

сопутствующую сдвигу систему отсчёта, в которой были записаны уравнения (21) – (23): в ней фоновая скорость, а вместе с ней и её циркуляция по выбранному контуру, равны нулю. Далее, с учётом малых возмущений величина циркуляции скорости должна измениться, строго говоря, по двум причинам: во-первых, появится возмущение скорости, $\mathbf{u}$ (определённое в сдвиговой системе отсчёта), а во-вторых, даже взятый в момент времени $t = 0$ в виде параллелограмма контур станет деформироваться из-за дополнительных смещений, вызываемых возмущениями. Однако для возмущений малой амплитуды, с которыми мы имеем дело, во втором случае будет важна лишь добавка, связанная с соответствующим малым изменением циркуляции фоновой скорости. Но эта добавка отсутствует, поскольку в сдвиговой системе отсчёта фоновая скорость всюду равна нулю. Таким образом, всё, что нужно сделать, — это определить циркуляцию $\mathbf{u}$ по контуру, сопутствующему фоновому потоку. В момент $t = 0$ выберем его таким образом, чтобы боковые стороны параллелограмма совпадали с линиями фронта ПФГ, отстоящими друг от друга на фазу π (см. рис. 3, где начальное направление фронта обозначено волновым вектором $\mathbf{k}_0$). Поскольку в сдвиговой системе отсчёта ПФГ, по своему определению, имеет постоянные линии фронта пространственной фазы, ясно, что и в моменты $t > 0$ они останутся лежать на боковых сторонах контура. Теперь обратим внимание, что мы рассматриваем случай $k_y \gg 1$, поэтому $\dot{Y}^v \rightarrow 0$, и из (23) имеем условие ортогональности $\mathbf{u} \perp \mathbf{k}$. Следовательно, возмущение скорости направлено вдоль боковых сторон параллелограмма, причём всегда в сторону обхода каждой из них. Что касается оснований параллелограмма, то их вклады в циркуляцию будут взаимно уничтожаться, поскольку на противоположное сменяется только направление их обхода, но не проекция $\mathbf{u}$. Учитывая всё только что сказанное, получаем для левого контура на рис. 3 циркуляцию в возмущённом потоке в сопутствующей сдвигу системе отсчёта:

$$C|_{t=0} = 2\Delta y \left(1 + \frac{k_y^2}{k_x^2}\right)^{1/2} |\mathbf{u}|_{t=0}.$$

Для правого контура на рис. 3, взятого в момент свинга спирали, аналогично:

$$C|_{t=t_s} = 2\Delta x |\mathbf{u}|_{t=t_s}.$$

Приравнявая эти выражения друг другу, видим, что закон сохранения циркуляции скорости даёт для вихревых ПФГ с $k_y \gg 1$:

$$g(t_s) = \frac{|\mathbf{u}(t_s)|^2}{|\mathbf{u}(0)|^2} = \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_y^2}. \quad (43)$$

Это совпадает с тем, что следует из выражения (42) для момента свинга спирали.

Итак, мы наглядно убедились, что транзиентный рост энергии вихря фактически вызван сокращением его периметра (его "размеров") фоновым сдвиговым потоком при неизменной циркуляции скорости, $C = \text{const}$, по этому периметру. Важно обратить внимание, что C , как и соответствующий ей поток завихренности, является мерой момента вращения вихря. Поэтому уместно привести здесь напрашивающуюся аналогию со сжимаю-

щимся с сохранением момента вращения телом: поскольку при этом угловая скорость вращения тела, которую мы обозначим как ω_{rot} , растёт обратно пропорционально моменту инерции, $\omega_{\text{rot}} \propto I_{\text{rot}}^{-1}$, энергия вращения тела $E_{\text{rot}} = 1/2 I_{\text{rot}} \omega_{\text{rot}}^2 \propto I_{\text{rot}}^{-1}$ растёт со временем. В нашем случае работу по сокращению размеров вихря производит фоновый поток, передавая ему тем самым кинетическую энергию.

Наконец, обратим ещё внимание на то, что, поскольку дифференциальное вращение носит чисто сдвиговый характер, т.е. происходит с нулевой дивергенцией скорости фоновых потоков, площадь, охватываемая рассмотренным выше контуром, должна оставаться неизменной. И действительно, площадь параллелограмма равна произведению его основания (неизменного в силу того, что фоновый поток однороден по y) и высоты (неизменной в силу того, что отсутствует радиальная фоновая скорость). Отсюда убеждаемся, что из-за постоянства C , а значит, и потока возмущения завихренности через поверхность, охватываемую контуром, постоянно и само возмущение завихренности. К этому же выводу мы пришли в разделе 2.2, обсуждая наличие инварианта (24).

2.3.2. Оценка оптимального роста. Выяснив физический механизм транзиентного усиления вихрей, вернёмся теперь к выражению (42) для их фактора роста в коротковолновом случае. Как видно, фактор роста отдельной ПФГ является функцией трёх аргументов, $g = g(k_x, k_y, t)$. Однако можно перейти к более общей характеристике транзиентной динамики, называемой *оптимальным ростом* возмущений, G . По определению

$$G \equiv \max_{\forall k_x} \{g\}. \quad (44)$$

Величина (44) даёт максимально возможное усиление среди всех вихрей с данным k_y , которое может произойти за интервал времени t . Заметим, что в следующих разделах мы будем пользоваться аналогом (44), введённым для полной пространственной задачи, определяемой системой уравнений (8)–(10) (см. формулу (90)). Там величина G будет определяться для возмущений с фиксированным азимутальным волновым числом m .

Для поиска оптимального роста существуют строгие математические алгоритмы, о которых пойдёт речь в следующем разделе. Здесь же для аналитических оценок, касающихся локального пространственного предела, нам достаточно будет заметить, что, поскольку фактор роста $g(k_x, k_y, t)$ индивидуальной ПФГ имеет максимум при $k_x = 0$, разумно предположить, что G можно оценить как

$$G \approx g(k_x = -k_y q t), \quad (45)$$

иными словами, принять, что из всех ПФГ с данным k_y к моменту времени t максимально возможного усиления достигает как раз та гармоника, которая испытывает в это время свинг.

Используя определение (45), из (42) получаем простое выражение:

$$G_1 \approx (q t)^2, \quad (46)$$

которое можно встретить также в работе [61] (см. в ней выражение (5)). Отметим, что в этой работе были также

получены поправки к G_1 за счёт ненулевой проекции волнового вектора на вертикальное направление, а также за счёт конечного значения k_y . Как мы видим, за достаточно большое время можно получить сколь угодно большой рост амплитуды мелкомасштабных вихрей $k_y \gg 1$. Этот рост, однако, носит степенной, а не экспоненциальный характер, как это ожидалось бы в случае модальной неустойчивости течения.

Длинноволновые возмущения. Обратимся теперь к другому предельному случаю, который мы собирались рассмотреть: когда $k_y \ll 1$ и азимутальный пространственный период ПФГ значительно превышает толщину диска (см. работу [71]). В этом случае во втором слагаемом в (40) опускаем k_y^2 в числителе и $4q^2k_y^2$ в знаменателе, а также считаем, что $K = \tilde{k}_x^2 + \kappa^2/\Omega_0^2$. При этом, поскольку должно выполняться условие (33), видим, что $\|\mathbf{q}(0)\|^2 \approx k_x^{-2}$.

Тогда для фактора роста ПФГ получаем

$$g \approx k_x^2 \frac{\tilde{k}_x^2 + 4}{(\tilde{k}_x^2 + \kappa^2/\Omega_0^2)^2}. \quad (47)$$

Эта величина возрастает при $\tilde{k}_x$, уменьшающемся со временем, т.е., как и для коротковолновых вихрей, транзитный рост имеет место для $k_x < 0$. Заметим, что теперь максимальное g , достигаемое во время свинга спирали, пропорционально квадрату самого k_x , а не квадрату отношения k_x/k_y , как это было для коротковолновых вихрей (ср. (42)). Кроме того, ещё одно важное отличие состоит в том, что теперь g зависит от значения эпициклической частоты как κ^{-4} . Такая сильная зависимость может оказаться важной в дисках с градиентом угловой скорости, большим, чем у кеплеровского профиля: для тонких дисков речь идёт прежде всего о внутренних областях релятивистских дисков, где $\kappa \rightarrow 0$ при приближении к их внутренней границе.

Следуя определению (45), получаем из (47) соответствующее выражение для оптимального роста:

$$G_2 \approx \frac{4\Omega_0^4}{\kappa^4} k_y^2 (qt)^2. \quad (48)$$

Обратим внимание, что (46), как и (48), справедливо только для достаточно больших времён, поскольку, чтобы получить это выражение, мы использовали условие $k_x = -qk_y t$, но в то же время должно выполняться условие $k_x \gg 1$, чего требует (33). Формула (48) показывает, что для профилей вращения, мало отличающихся от кеплеровского, когда $\kappa \sim \Omega_0$, для одинаковых промежутков времени $G_2 \ll G_1$, в силу того что явно входящее теперь в выражение для оптимального роста азимутальное волновое число ПФГ мало, $k_y \ll 1$ ⁷. Поэтому в рассмотренном локальном пространственном пределе мелкомасштабные вихри отбирают энергию у потока быстрее крупномасштабных. Однако интересен вопрос о том, какие из них способны к большему росту на всём протяжении времени. В потоке со строго нулевой вязкостью $G_{1,2} \rightarrow \infty$ также преимущество за мелкомасштабными ПФГ, как мы отметили только что. Тем не

менее сдвиговое течение может обладать заметной эффективной вязкостью, связанной, например, с некоторой слабо развитой турбулентностью. Оказывается, что тогда кривая $G(t)$ приобретает глобальный максимум $G_{\max}$, который соответствует наибольшему возможному немодальному росту возмущений безотносительно ко временным интервалам, с которыми мы всегда имели дело до сих пор. Физически уменьшение $G(t)$ начиная с некоторых больших промежутков времени обусловлено тем, что с возрастанием времени свинга t_s мы переходим ко всё более туго закрученным в начальный момент времени спиралям. Это, в свою очередь, означает переход к меньшему радиальному масштабу возмущений, а значит, и к меньшим временам диссипации возмущений за счёт вязкости. В конечном итоге лидирующие транзитные спирали начинают затухать быстрее, чем расти за счёт раскрутки потоком. Именно значения $G_{\max}$ для случаев $k_y \gg 1$ и $k_y \ll 1$ мы хотели бы сравнить между собой ниже.

2.3.3. Учёт вязкости. Оценку влияния вязкости на максимально возможный транзитный рост вихрей можно выполнить следующим образом. Для достаточно больших времен $qt \gg 1$ имеем $k_x \gg k_y$ для любого из двух рассматриваемых нами пределов значений k_y . Поэтому в отсутствие сдвига в потоке и соответствующей раскрутки спирали последние затухла бы за характерное вязкое время $\Delta t_v \sim \lambda_x^2/\nu$, где ν — кинематический коэффициент эффективной вязкости. Выполняя стандартную параметризацию вязкости с использованием параметра α Шакуры–Сюняева, $\nu = \alpha a_* H$, получим, что $\Delta t_v \sim (\Omega_0^{-1} a k_x^2)^{-1}$ быстро уменьшается с возрастанием $|k_x|$. В то же время чем больше $|k_x|$, тем больше время транзитного роста спирали, $\Delta t_{\text{tg}} \sim |k_x|/(qk_y)$. Одновременно с появлением сдвига в потоке спираль начинает раскручиваться и, следовательно, момент рассеяния за счёт действия вязкости отступает в будущее. Таким образом, условие равенства указанных характерных времён, $\Delta t_{\text{tg}} = \Delta t_v$, даёт нижний предел длительности транзитного роста вихрей в вязком течении. Используя его, получаем

$$\max(\Delta t_{\text{tg}}) \gtrsim \alpha^{-1/3} (qk_y)^{-2/3}. \quad (49)$$

Как можно убедиться, выражение (49) воспроизводит оценку, сделанную в работе [61] (см. в ней формулу (81)).

Далее, верхняя граница для оптимального роста, соответствующего интервалу времени (49), $G_{\max} \equiv G(\max(\Delta t_{\text{tg}}))$, даётся его невязким значением, взятым из выражения для G_1 либо для G_2 . Получаем, что для $k_y \gg 1$

$$(G_{\max})_1 \approx \alpha^{-2/3} q^{2/3} k_y^{-4/3} \quad (50)$$

(см. также выражение (83) в работе [61]). В то же время для $k_y \ll 1$ будем иметь

$$(G_{\max})_2 \approx \frac{4\Omega_0^4}{\kappa^4} \alpha^{-2/3} q^{2/3} k_y^{2/3}. \quad (51)$$

Этот результат показан на рис. 4 для некоторого малого значения α и нескольких значений q : кеплеровского и сверхкеплеровских. Мы видим, что даже для кеплеровского сдвига, когда $\kappa = \Omega_0$, для k_y , заметно отличающегося от 1 в какую бы то ни было сторону,

⁷ В разделе 4.2 ниже даны расчёты G в глобальной задаче (см. рис. 11), из которых следует, что при $m \rightarrow 1$ различие в скорости транзитного роста между вихрями с азимутальной длиной волны, меньшей и большей толщины диска, значительно сокращается.

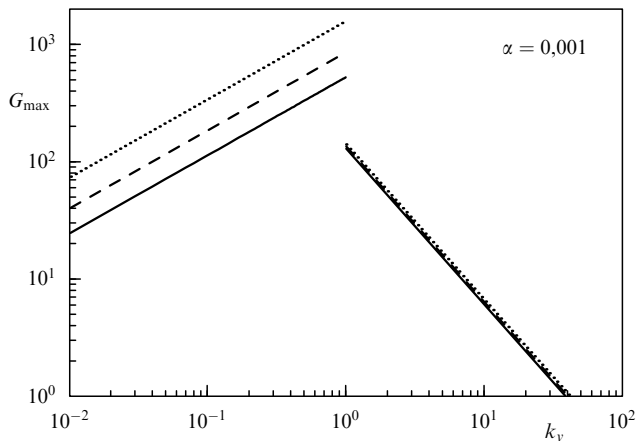


Рис. 4. Оценка максимально возможного транзитного роста акустической энергии в диске с эффективной вязкостью, задаваемой параметром $\alpha = 0,001$. Сплошные, штриховые и пунктирные линии соответствуют случаям $q = 1,5, 1,6$ и $1,7$. Три правые кривые получены с помощью оценки (50), три левые — с помощью оценки (51).

$(G_{\max})_2 \gtrsim (G_{\max})_1$. Это имеет место благодаря тому, что крупномасштабные вихри значительно меньше подвержены диссипации, что с запасом компенсирует низкую скорость их роста по сравнению с мелкомасштабными вихрями. Заметим также, что, несмотря на то что $(G_{\max})_2$ всё же убывает с уменьшением k_y , это происходит с меньшей скоростью, чем в случае уменьшения $(G_{\max})_1$ с ростом k_y . В результате этого увеличивается и интегральный транзитный рост крупномасштабных вихрей по всем значениям k_y в сравнении с мелкомасштабными. Ещё более существенное преимущество крупномасштабных вихрей появляется при переходе к сверхклевровскому сдвигу, когда $q > 3/2$, за счёт того, что $(G_{\max})_2 \propto \kappa^{-4}$ (см. комментарий после формулы (47)). Видно, что отклонение от значения $q = 3/2$ уже в несколько процентов ведёт к усилению их транзитного роста в несколько раз.

Как обсуждается в работе [71], оценка (51) неплохо согласуется и с точными расчётами оптимального роста в тонких дисках в глобальном пространственном пределе для малых азимутальных волновых чисел m . Таким образом, крупномасштабные вихри также способны участвовать в дополнительном отводе углового момента на периферию диска с уже существующей в нём слабой турбулентностью.

В разделе 3 мы переходим к строгому математическому обоснованию алгоритмов поиска наиболее сильно растущих возмущений в сдвиговых потоках. Такие возмущения будут называться оптимальными, а соответствующее им усиление, как мы уже упоминали, — оптимальным ростом G . При помощи одного из таких алгоритмов были получены решения, представленные во введении на рис. 1 и 2. Также будет приведён другой пример расчёта G с решением общей системы уравнений (8)–(10) в геометрически тонком диске (см. рис. 11 ниже). Переходя к математическим аспектам немодальной динамики возмущений в сдвиговых потоках, уже во вводной части к следующему разделу мы убедимся, что явление транзитного роста можно трактовать как следствие неортогональности мод возмущений, что будет видно, в частности, по простым аналогиям, данным на рис. 5 и 6.

3. Поиск оптимальных возмущений

3.1. Определение и свойства сингулярных векторов

Общие свойства решения начально-краевой задачи об эволюции малых возмущений, описываемой самыми общими уравнениями (1), (2), удобно исследовать, пользуясь абстрактными понятиями функционального пространства так называемых векторов состояния системы, а также линейных операторов, действующих на эти векторы. В разделе 2.1 в приложении к системе уравнений (8)–(10) мы уже ввели частный случай вектора состояния как совокупности азимутальных фурье-гармоник эйлеровых возмущений $\mathbf{q}(t) \equiv \{\delta v_r(r), \delta v_\phi(r), \delta h(r)\}$, берущихся в какой-либо фиксированный момент времени t . В данном разделе будем подразумевать исходный общий случай, когда $\mathbf{q}(t) \equiv \{\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}), \delta h(\mathbf{r}), \delta \rho(\mathbf{r})\}$. Рассмотрим некоторые из свойств динамического оператора $\mathbf{Z}$, действующего в банаховом пространстве векторов $\mathbf{q}$ и соответствующего системе (1), (2). Этот оператор переводит начальный вектор возмущения $\mathbf{q}(0)$ в последующий вектор $\mathbf{q}(t)$, т.е. в операторном виде систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Z}\mathbf{q}(0). \quad (52)$$

Все функции, входящие в $\mathbf{q}(t)$, будем считать бесконечно гладкими и имеющими равномерно ограниченную производную в области определения. Последнее условие следует из физических соображений: в реальных газовых потоках не могут существовать возмущения со сколь угодно малой длиной волны. Кроме того, в силу линейности задачи в начальный момент времени все векторы $\mathbf{q}(0)$ будем считать имеющими единичную норму.

В данном разделе мы обсудим, что из указанных общих предположений следуют важные выводы о свойствах оператора $\mathbf{Z}$. Так, будет выяснено, что не существует такого начального условия $\mathbf{q}(0)$, норма которого к моменту времени t выросла бы более чем в строго определённое число раз. Будут приведены два метода, позволяющие вычислить этот предел усиления возмущений. Кроме того, будет показано, что в пространстве начальных условий существует ортонормированный базис, задачу нахождения которого можно свести к задаче на собственные значения некоего отличающегося от $\mathbf{Z}$ оператора.

3.1.1. Непрерывность динамического оператора. Первым важным свойством оператора $\mathbf{Z}$ является его непрерывность. Чтобы показать это, запишем оператор в интегральной форме:

$$\mathbf{Z}\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t \left(\mathbf{M}_1(s)\mathbf{q}(s) + \mathbf{M}_2(s) \frac{\partial \mathbf{q}(s)}{\partial \mathbf{r}} \right) ds. \quad (53)$$

Здесь введены матрицы $\mathbf{M}_1(s)$ и $\mathbf{M}_2(s)$, элементами которых являются коэффициенты в динамических уравнениях, стоящие перед соответствующей пространственной производной от $\mathbf{q}$. Явный вид этих матриц можно получить из системы уравнений (1) и (2). Число строк в матрицах равно количеству величин, формирующих вектор состояния $\mathbf{q}$, а число столбцов — количеству пространственных переменных. Поскольку величины,

описывающие фоновый поток, являются ограниченными и непрерывными, все элементы матриц $\mathbf{M}_1(s)$ и $\mathbf{M}_2(s)$ также являются ограниченными и непрерывными в области определения оператора $\mathbf{Z}$. В дополнение заметим, что после введения вязких сил в уравнении (53) появится ещё одно слагаемое, соответствующее второй пространственной производной от $\mathbf{q}$. В этом случае все рассуждения аналогичны.

Как видим, оператор (53) представляет собой суперпозицию непрерывных отображений (см. [108], гл. 1), поэтому и сам определяет непрерывное отображение (см. [109], гл. 2). Следствием этого является его ограниченность на ограниченных множествах (см. [109], гл. 4).

Таким образом, отображение, определяемое выражением (53), является непрерывным и ограниченным, из чего следует *равномерная ограниченность* векторов $\mathbf{q}$ в любой момент времени t . Используем теперь это их свойство.

3.1.2. Вполне непрерывный динамический оператор. Следующим свойством $\mathbf{Z}$ является его вполне непрерывность. Напомним определение этого понятия.

Определение 1 (вполне непрерывный оператор). Оператор $\mathbf{Z}$, отображающий банахово пространство $\mathbf{E}$ в себя, называется вполне непрерывным, если он каждое ограниченное множество переводит в относительно компактное ([109], гл. 4).

Таким образом, для доказательства вполне непрерывности оператора (53) достаточно доказать относительную компактность его множества значений, поскольку ограниченность области определения оператора $\mathbf{Z}$ мы постулировали, сказав, что все $\mathbf{q}(0)$ имеют единичную норму. Воспользуемся теоремой Арцела, согласно которой, для того чтобы семейство непрерывных функций, определяемых на отрезке, было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равномерно непрерывно ([109], гл. 4).

Вывод о равномерной ограниченности множества значений мы сделали только что выше, а для равномерной непрерывности семейства дифференцируемых функций достаточно равномерной ограниченности их производных ([110], гл. 2), которая была нами постулирована в начале изложения. Таким образом видим, что множество значений оператора $\mathbf{Z}$ относительно компактно, а значит, он вполне непрерывен.

Теперь, если ввести скалярное произведение векторов (в физических задачах оно, как правило, вводится таким образом, чтобы норма вектора совпадала с энергией возмущения, как это сделано, например, в уравнении (14)), то можно определить сопряжённый оператор $\mathbf{Z}^\dagger$ с помощью тождества Лагранжа для произвольных векторов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ (подробнее о сопряжённых операторах см., например, [108], гл. 1):

$$(\mathbf{Z}\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{g}). \quad (54)$$

При этом если оператор $\mathbf{Z}$ вполне непрерывен, то вполне непрерывными будут также сопряжённый оператор $\mathbf{Z}^\dagger$ и самосопряжённые составные операторы $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ ([109], гл. 4).

3.1.3. Линейные операторы: от частного к общему. Линейные операторы могут быть разных видов в зависимости

от своих свойств. Начнём с того, что перечислим те из них, которые встретятся ниже, причём специально будем двигаться от более частного случая к более общему. В первую очередь упомянем положительно определённые операторы, т.е. такие, что для любого вектора $\mathbf{q}$ скалярное произведение $(\mathbf{Z}\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0$. Из определения следует, что собственные значения положительно определённого оператора положительны. Действительно, если в уравнении $\mathbf{Z}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}$ умножить обе части справа на $\mathbf{q}$, то в его левой части будет стоять положительная величина, а в правой — произведение собственного значения на положительную величину, откуда следует, что собственное значение оператора положительно.

Более общим видом линейных операторов, которые встречаются наиболее часто в различных физических задачах, являются самосопряжённые (эрмитовы) операторы — те, которые тождественны своему сопряжённому оператору: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\dagger$ ([111], параграф 14.4). Собственные значения самосопряжённого оператора действительны ([111], параграф 14.8).

В свою очередь, самосопряжённые операторы являются частным случаем нормальных операторов. Оператор $\mathbf{Z}$ называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряжённым: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ ([111], параграф 14.4). Все собственные значения нормального оператора являются комплексно-сопряжёнными собственным значениям сопряжённого к нему оператора. Собственные функции $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^\dagger$ совпадают. Кроме того, собственные векторы нормального оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны ([111], параграф 14.8). По этой причине для данного типа операторов информации о собственных значениях достаточно для вычисления *операторной нормы*. Напомним, что нормой оператора $\mathbf{Z}$, отображающего банахово пространство $\mathbf{H}$ в себя, называется число, равное $\|\mathbf{Z}\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{H}} (\|\mathbf{Z}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|)$ ([108], гл. 1). Знание нормы управляющего оператора для нас крайне полезно, поскольку оно позволяет выяснить предел роста нормы вектора под действием этого оператора.

В случае нормального оператора эта задача решается достаточно просто: чтобы это проиллюстрировать, мы (по примеру [49]) рассмотрим важный частный случай, в котором оператор $\mathbf{Z}$ представим в виде операторной экспоненты: $\mathbf{Z} = \exp(\mathbf{A}t)$ (подробнее о подобных операторах рассказано в разделе 3.3.1). Оператор $\mathbf{A}$ не зависит от времени, а его собственные значения по традиции обозначаются как $\{-i\omega_1, -i\omega_2, \dots, -i\omega_N\}$, причём ω могут быть как вещественными, так и комплексными. В этом случае собственные значения оператора $\mathbf{Z}$ равны $\{\exp(-i\omega_1 t), \exp(-i\omega_2 t), \dots, \exp(-i\omega_N t)\}$. Теперь воспользуемся определением собственных векторов и собственных значений оператора, переписав его в матричной форме:

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{P}, \quad (55)$$

где $\mathbf{P}$ — диагональная матрица с собственными значениями $\mathbf{Z}$ на диагонали, столбцы матрицы $\mathbf{X}$ являются собственными векторами $\mathbf{Z}$, расположенными в соответствии с порядком их собственных значений в $\mathbf{P}$.

Из (55) имеем спектральное разложение оператора $\mathbf{Z}$: $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}$. Далее воспользуемся свойством субмультипликативности операторной нормы ([111], параграф 14.2): $\|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{X}^{-1}\|$. В случае ортонормированных

собственных векторов матрица $\mathbf{X}$ становится унитарной, $\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{I}$, следовательно, её норма в этом случае равна единице, $\|\mathbf{X}\| = 1$, а норма $\|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{P}\| = \exp(\omega_{\max} t)$, где $\omega_{\max} = \max_{j \leq N} (\Im[\omega_j])$.

Наконец, наиболее общим видом линейных операторов являются *ненормальные* операторы, т.е. такие, которые не коммутируют со своим сопряжённым: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger \neq \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$. Собственные значения таких операторов могут быть как чисто вещественными, так и комплексными, а собственные векторы *неортогональны* друг другу. Из-за неортогональности собственных векторов вычисление нормы подобных операторов является более сложной задачей, поскольку матрица $\mathbf{X}$, введённая выше, уже не является унитарной. По этой же причине энергия комбинации мод не равна сумме энергий каждой из этих мод, т.е. не действует правило Парсеваля, а появляются ненулевые перекрёстные члены. Иными словами, благодаря интерференции во времени между неортогональными модами возмущения, описываемые подобным оператором, могут возрастать даже в тех случаях, когда не существует растущих мод. Подобное изменение энергии возмущения, математически связанное с ненормальностью динамического оператора, и получило название транзистентного роста возмущения. О свойствах ненормальных операторов в контексте гидродинамической устойчивости течений см. работу [112] и примеры в ней, а также разделы 3 и 4 книги [6].

3.1.4. Эффект неортогональности собственных векторов на простом геометрическом примере. Проиллюстрируем механизм транзистентного роста на простом геометрическом примере. На плоскости (x, y) введём два вектора, символизирующих две моды возмущений. Запишем их в виде двух комплексных чисел, $\mathbf{f}_1 = f_0 \exp(-i\omega_1 t)$, $\mathbf{f}_2 = f_0 \exp(-i\omega_2 t + i\psi)$, причём числа $\omega_{1,2}$ могут быть тоже комплексными. В таком виде будет более очевидна аналогия $\mathbf{f}_{1,2}$ с модами возмущений. Действительная часть каждого из векторов $\mathbf{f}_{1,2}$ даёт x -компоненту соответствующего вектора, мнимая — его y -компоненту. Понятно, что $\Re[\omega_{1,2}]$ — это угловые скорости, с которыми оба вектора вращаются в плоскости, а $\Im[\omega_{1,2}]$ — темп, с которым меняются их длины. Ниже будем считать, что мнимые части $\omega_{1,2}$ отрицательны, что соответствует сокращению длин $\mathbf{f}_{1,2}$. Напомним, что в случае мод первые величины дают угловые скорости твердотельного вращения узора (см. рис. 1), а вторые — темп их затухания, по аналогии со спектрально устойчивым течением. Кроме того, будем считать, что в момент $t = 0$ векторы имеют одинаковые длины f_0 , а угол между ними равен ψ .

Теперь возьмём вектор $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ и определим для него величину, аналогичную (41), которая даёт фактор изменения квадрата длины $\mathbf{q}$ со временем. Получим

$$g = \frac{1}{2(1 + \cos \psi)} \left[\exp(2\Im[\omega_1]t) + \exp(2\Im[\omega_2]t) + 2 \exp(\Im[\omega_1 + \omega_2]t) \cos(\Re[\omega_1 - \omega_2]t + \psi) \right]. \quad (56)$$

Уже отсюда понятно, что при угле ψ , близком к π , знаменатель (56) мал, и сколько-нибудь незначительный рост выражения в числителе приведёт к большому росту величины g . Рассмотрим это на двух частных примерах. В первом случае примем, что $\Re[\omega_{1,2}] = 0$, во втором — что

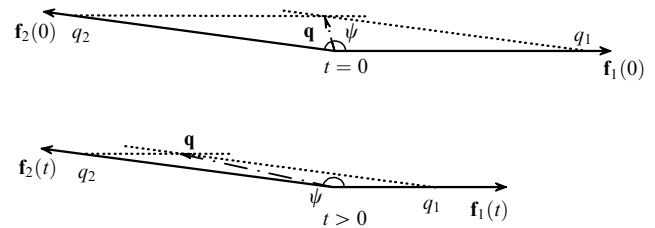


Рис. 5. Рост длины суммы двух неортогональных между собой векторов, $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, при сокращении их длин, но постоянном угле между ними. Принято, что $q_1 = q_2 = 1$.

$\Im[\omega_{1,2}] = 0$. Для простоты будем считать, что $\cos \psi \approx -1 + \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$.

Тогда для случая $\Re[\omega_{1,2}] = 0$ видим, что если дополнительно допустить большую разницу в декрементах, $|\Im[\omega_1]| \gg |\Im[\omega_2]|$, то через достаточное количество времени g будет даваться выражением

$$g \approx \frac{\exp(2\Im[\omega_2]t)}{2\epsilon}, \quad (57)$$

а это соответствует $g \gg 1$ в таком диапазоне длительностей, что $|\Im[\omega_1]t| \gg 1$, но в то же время $|\Im[\omega_2]t| \ll 1$. Это означает, что, несмотря на сокращение длин обоих векторов по отдельности, в случае их сильной неортогональности (характеризуемой большим отличием ϵ от единицы) их сумма испытывает транзистентный рост длины до значений $\sim \epsilon^{-1}$ (рис. 5). И только на ещё больших интервалах времени g опять уменьшается в темпе, определяемом наиболее медленно сокращающимся вектором. Аналогичный эффект имеет место и в случае транзистентных возмущений, которые могут быть представлены как суперпозиция затухающих мод, имеющих нулевую фазовую скорость.

В обратном случае $\Im[\omega_{1,2}] = 0$ из (56) можно получить такое приближительное выражение:

$$g \approx \frac{1 - \cos(\Re[\omega_1 - \omega_2]t)}{\epsilon}, \quad (58)$$

справедливое, когда значение косинуса, входящего здесь в числитель, не слишком близко к единице. Как видим, в отличие от примера с суммой неортогональных векторов, сокращающих свои длины (когда длина $\mathbf{q}$ сначала возрастает до максимума, а потом монотонно убывает до нуля при $t \rightarrow \infty$), длина суммы вращающихся векторов испытывает осциллирующий рост, многократно возвращаясь к своим большим значениям $\sim \epsilon^{-1}$ через одинаковые промежутки времени $\sim |\Re[\omega_1 - \omega_2]|^{-1}$, что очевидно из иллюстрации на рис. 6. В отличие от первого случая, этот второй возможный вариант усиления суперпозиций мод возмущений неуместно было бы называть "транзистентным ростом", как мы это сделали, к примеру, при анализе локальных ПФГ в разделе 2.3. Поэтому в отношении него уместнее использовать более общий термин "немодальный рост". Один из примеров реализации такого случая немодального роста суперпозиции нейтральных мод с ненулевыми фазовыми скоростями рассмотрен в разделе 3.2 и исследовался в работе [113].

3.1.5. Сингулярные векторы. Итак, только что мы показали, как неортогональность мод приводит к существованию транзистентно растущих возмущений. Во многих физических и астрофизических задачах эволюция линей-

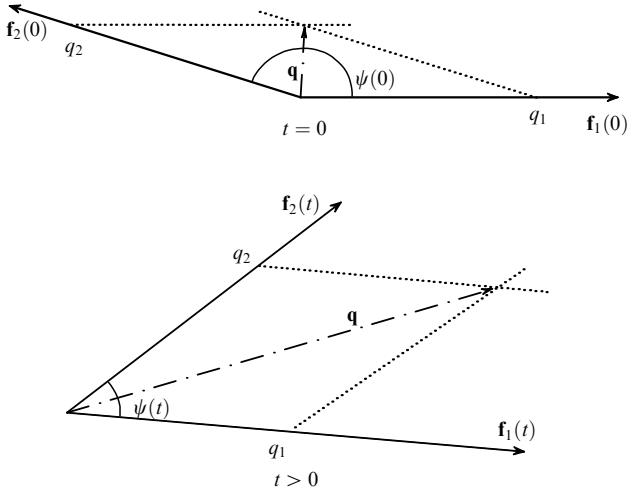


Рис. 6. Рост длины суммы двух неортогональных между собой векторов, $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, при сохранении их длин, но изменении угла между ними. Принято, что $q_1 = q_2 = 1$.

ных возмущений определяется именно ненормальными операторами, имеющими неортогональные собственные векторы. При этом ненормальность $\mathbf{Z}$ обеспечивается присутствием сдвига в фоновом потоке. Мы сможем убедиться в этом, получив систему сопряжённых динамических уравнений, соответствующих действию сопряжённого оператора $\mathbf{Z}^\dagger$ (см. раздел 3.4.1).

Таким образом, одного знания набора собственных значений ненормального оператора недостаточно, чтобы полностью описать возможный (транзиентный) рост возмущений в системе. Дополнительно, как минимум, становится необходимым знание их собственных векторов, а точнее — попарных скалярных произведений ("углов") между собственными векторами по выбранной норме возмущений. Ещё одним потенциальным усложнением задачи с ненормальным динамическим оператором является то, что уже нельзя гарантировать полноту системы его собственных векторов, а значит, нельзя гарантировать адекватность решения задачи с использованием собственных векторов в виде базиса для разложения произвольного возмущения.

По совокупности этих причин для вычисления максимальной величины транзиентного роста, которую могут продемонстрировать возмущения, мы в дальнейшем будем использовать аппарат сингулярных чисел и векторов. Как показано ниже, сингулярные векторы образуют полную ортонормированную систему, что позволяет использовать их в качестве базиса для описания эволюции возмущений. Более того, сингулярные значения, в отличие от собственных, позволяют узнать величину роста энергии возмущения к любому моменту времени даже для ненормальных операторов.

Определение 2 (сингулярные числа и векторы). *Неотрицательное вещественное число σ называется сингулярным числом линейного оператора $\mathbf{Z}$, если существуют такие векторы единичной длины $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, что*

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{v} &= \sigma\mathbf{u}, \\ \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} &= \sigma\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (59)$$

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются левым и правым сингулярными векторами, соответствующими сингулярному числу σ .

Заметим, что сингулярные числа и векторы связаны с собственными числами и векторами составных самосопряжённых операторов $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$. Для того чтобы в этом убедиться, подействуем оператором $\mathbf{Z}^\dagger$ на вектор $\mathbf{Z}\mathbf{v}$, а оператором $\mathbf{Z}$ — на вектор $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u}$, после чего воспользуемся определением:

$$\mathbf{Z}^\dagger(\mathbf{Z}\mathbf{v}) = \mathbf{Z}^\dagger(\sigma\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} = \sigma^2\mathbf{v}, \quad (60)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u}) = \mathbf{Z}(\sigma\mathbf{v}) = \sigma\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma^2\mathbf{u}. \quad (61)$$

Таким образом, векторы $\mathbf{v}$ являются собственными векторами оператора $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$, а $\mathbf{u}$ — оператора $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$. Квадраты сингулярных значений являются собственными значениями составных операторов.

Операторы $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ являются положительно определёнными, поскольку для любого вектора $\mathbf{f}$ выполняются неравенства $(\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) > 0$ и $(\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{f}) > 0$. Поскольку все собственные значения положительно определённого оператора положительны, сингулярные значения вещественны.

Поскольку операторы $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ являются самосопряжёнными и вполне непрерывными, их предельный спектр состоит из одной точки, равной 0 ([108], гл. 4). Далее, в силу того что предельный спектр оператора — это объединение всех точек непрерывного спектра, предельных точек дискретного спектра, а также собственных значений бесконечной кратности, вполне непрерывность составных операторов приводит к тому, что для любого малого $\epsilon > 0$ набор собственных чисел, превосходящих ϵ , дискретен.

Таким образом, набор сингулярных значений ограничен сверху вследствие ограниченности оператора (53), дискретен и имеет предельную точку $\sigma = 0$. Поскольку сингулярные векторы принято нумеровать в порядке уменьшения их величины [114], рост нормы возмущения к моменту времени t ограничен первым сингулярным значением в этот момент времени, а возмущением, демонстрирующим подобный рост, является первый правый сингулярный вектор.

Из всего сказанного выше следует, что для вычисления максимально возможной величины роста возмущения достаточно вычислить первое сингулярное значение, называемое в литературе оптимальным ростом, а соответствующий этому значению правый сингулярный вектор будет тем самым (оптимальным) возмущением, которое демонстрирует максимально возможный рост. Ниже приведены два метода, позволяющие вычислять набор сингулярных значений и соответствующий им набор сингулярных векторов.

Не менее важным следствием вполне непрерывности динамического оператора $\mathbf{Z}$ является выполнение теоремы Гильберта — Шмидта для операторов $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$. В ней утверждается, что для любого самосопряжённого линейного оператора существует ортонормированная система $\{\phi_n\}$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, такая что каждый элемент ξ записывается единственным образом в следующем виде:

$$\xi = \sum c_k \phi_k + \xi',$$

где вектор ξ' удовлетворяет условию $\mathbf{U}\xi' = 0$; при этом

$$\mathbf{U}\xi = \sum \lambda_k c_k \phi_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Из этого следует, что система сингулярных функций ортогональна и полна, как система собственных векторов самосопряжённого оператора, и может использоваться в качестве базиса для разложения произвольного возмущения.

3.2. Получение оптимальных решений матричным методом

Первый метод расчёта сингулярных векторов условно назовём здесь *матричным*. Он основан на сингулярном разложении матрицы динамического оператора. Как правило, в качестве базиса для вычисления матрицы оператора используется система его собственных векторов.

Заметим, что возможен и другой вариант, применявшийся, например, в работе [50], когда пространство покрывается сеткой точек, а затем каждому возмущению ставится в соответствие столбец чисел, отвечающий значениям возмущения в этих точках. Динамическому оператору ставится в соответствие матрица, полученная с помощью разностной аппроксимации производных в динамических уравнениях. Сингулярное разложение этой матрицы позволяет вычислить сингулярные векторы в узлах сетки. Недостатком такого подхода является больший размер матрицы оператора, что приводит к увеличению времени расчёта SVD-разложения, преимуществом — отсутствие необходимости вычислять собственные векторы оператора. В данном разделе мы дадим описание матричного метода в базисе собственных векторов.

Задача формулируется как вычисление такой линейной комбинации мод динамического оператора, которая демонстрирует наибольший рост нормы к заданному моменту времени. Будем считать, что известен набор собственных векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \dots \mathbf{f}_N\}$ оператора $\mathbf{Z}$ и соответствующий набор собственных значений $\{\exp(-i\omega_1 t), \exp(-i\omega_2 t), \exp(-i\omega_3 t), \dots, \exp(-i\omega_N t)\}$. В пространстве линейных комбинаций собственных векторов представление произвольного вектора возмущений имеет вид (более подробно см. параграф 4.3.2 и раздел 4.4 в книге [6])

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^N \kappa^j \hat{f}_j, \quad (62)$$

где числа $\{\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, \dots, \kappa^N\}$ являются координатами вектора $\mathbf{q}$ в базисе собственных векторов. Обратим внимание, что вся зависимость $\mathbf{q}$ от времени заложена в его координатах.

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$ в этом представлении можно вычислить по известным координатам с помощью метрической матрицы $\mathbf{M}$:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = (\mathbf{q}^\dagger)^i M_{ij} \mathbf{g}^j, \quad (63)$$

где элементы метрической матрицы равны соответствующему скалярному произведению собственных векторов:

$$M_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j). \quad (64)$$

Матрица $\mathbf{M}$, таким образом, является положительно определённой, поскольку норма ненулевого вектора всегда положительна.

Задача вычисления максимально возможного роста возмущений при этом сводится к нахождению таких

значений κ^j , при которых рост нормы возмущения, определяемого с их помощью по формуле (62), был бы максимальным к заданному моменту времени.

Представление оператора $\mathbf{Z}$ в базисе собственных векторов можно легко вычислить, подействовав этим оператором на базисный элемент:

$$\mathbf{Z}\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j(\tau) = \exp(-i\omega_j \tau) \mathbf{f}_j, \quad (65)$$

следовательно, в базисе собственных векторов оператор представляется диагональной матрицей $\mathbf{P}$ с комплексными экспонентами на главной диагонали: $\mathbf{P} = \text{diag}\{\exp(-i\omega_1 \tau), \exp(-i\omega_2 \tau), \exp(-i\omega_3 \tau), \dots, \exp(-i\omega_N \tau)\}$.

Далее, воспользуемся первым равенством из определения 2: $\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$, и перепишем его в матричном виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{-1}. \quad (66)$$

Матрица $\mathbf{\Sigma}$ — это диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят сингулярные значения $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N\}$. Столбцы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ представляют собой соответственно правые и левые сингулярные векторы.

Теперь запишем скалярное произведение для двух произвольных сингулярных векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$ следующим образом:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = (\mathbf{q}^\dagger)^i M_{ij} \mathbf{g}^j = ((\mathbf{F}\mathbf{q})^\dagger)^i (\mathbf{F}\mathbf{g})^j, \quad (67)$$

где матрица $\mathbf{F}$ — это *разложение Холецкого* метрической матрицы $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Поскольку матрица $\mathbf{M}$ является положительно определённой, её разложение Холецкого существует всегда и является единственным.

Системы сингулярных векторов ортонормированы, следовательно, для матриц $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ верны следующие соотношения:

$$\mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (68)$$

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (69)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Поэтому обратные к $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ матрицы выражаются через эрмитово сопряжённые следующим образом:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (70)$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (71)$$

Используя эти выражения в (66), получаем

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (72)$$

Последнее равенство перепишем в следующей форме:

$$\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{U})\mathbf{\Sigma}(\mathbf{F}\mathbf{V})^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^\dagger. \quad (73)$$

Теперь видим, что правая часть этого равенства совпадает с так называемым *SVD-разложением* матрицы $\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^{-1}$. Напомним читателю, что SVD-разложением называется представление матрицы в виде произведения $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^\dagger$, где $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\tilde{\mathbf{V}}$ являются ортогональными матрицами, а $\mathbf{\Sigma}$ — диагональной с положительными числами на главной диагонали [115]. Это разложение существует для любой вещественной матрицы и является единственным. Нетрудно убедиться, что матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ и $\mathbf{\Sigma}$ удовлетворяют условиям SVD-разложения, следова-

тельно, для вычисления сингулярных чисел и векторов достаточно выполнить такое разложение для матрицы $\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^{-1}$. Процедура SVD-разложения входит в состав большинства программных математических пакетов по матричной алгебре.

Исходные матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ вычисляются с помощью $\mathbf{F}^{-1}$: $\mathbf{U} = \mathbf{F}^{-1}\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1}\tilde{\mathbf{V}}$. Наибольшее из чисел, формирующих главную диагональ матрицы Σ , является первым сингулярным значением в момент времени t , а соответствующий столбец матрицы $\mathbf{V}$ — первым сингулярным вектором в базисе собственных векторов.

3.2.1. Иллюстрация матричного метода. Матричный метод поиска оптимальных возмущений использовался во многих работах по устойчивости лабораторных течений (см., к примеру, [45, 47, 53, 54, 116, 117], и в астрофизических работах [51, 52, 118]). Проиллюстрируем его здесь на простом полуаналитическом исследовании [113], где базис собственных векторов⁸ рассчитывался в приближении ВКБ в геометрически тонком и баротропном квазикеплеровском торе со свободными границами. При этом для простоты рассматривались только те моды, радиус коротации которых находится за пределами внешней границы тора. (О механизмах обмена мод энергией друг с другом и с фоновым потоком на радиусе коротации см. обсуждение спектральной задачи, соответствующей уравнениям (8)–(10), в разделе 2.1). В случае, когда радиус коротации находится вне течения, энергия мод сохраняется, и это значит, что они не демонстрируют экспоненциального роста или затухания, т.е. их частоты ω являются действительными величинами (см. выражение (13)). Такие моды называются *нейтральными*. Тем не менее вследствие их неортогональности друг другу, иными словами, из-за неортогональности собственных векторов динамического оператора системы возмущений мы ожидаем немодального роста их линейных комбинаций (см. аналогию на рис. 6 и комментарии к ней в тексте).

Моды, которые мы ниже собираемся получить, физически соответствуют инерционно-акустическим волнам, образующим на диске твердотельно вращающийся узор, т.е. имеющим постоянную во времени и в пространстве проекцию волнового вектора на азимутальное направление. При этом, как будет видно из ВКБ-решения, их характерная длина волны в радиальном направлении близка к толщине диска, H . Что же касается их характерного масштаба в азимутальном направлении, λ_ϕ , он может быть как больше, так и меньше H , что определяется значением азимутального волнового числа m , входящего в систему (8)–(10). Результаты, касающиеся оптимального роста возмущений, будут представлены для случая $\lambda_\phi \gg H$ (см. рис. 7).

Мы увидим, что в данном случае оптимальное возмущение представляет собой не раскручиваемую потоком спираль, которую мы обсуждали в контексте транзистентного роста вихрей (см. рис. 2), а волновой пакет, первоначально находящийся у внешней границы тора и затем распространяющийся в направлении его внутренней границы. В момент отражения от внутренней границы его полная акустическая энергия достигает макси-

мум и затем уменьшается, пока волновой пакет уходит обратно на периферию течения. После отражения от внешней границы описанный процесс повторяется. Таким образом, немодальный рост носит в данном случае не транзистентный, а осциллирующий характер, как и должно быть согласно аналогии на рис. 6.

3.2.2. Фоновый поток. В качестве модели потока возьмём баротропное тороидальное течение конечной радиальной протяжённости. Сначала зададим азимутальную компоненту скорости с соответствующим степенным профилем угловой скорости:

$$\Omega = \Omega_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-q}, \quad (74)$$

где r_0 — расстояние от центра тяготения до точки в экваториальной плоскости тора, в которой вращение происходит с кеплеровской частотой Ω_0 , $2 > q > 3/2$. Будем считать, что вещество движется во внешнем ньютоновском гравитационном потенциале, создаваемом центральной точечной массой:

$$\Phi = - \frac{\Omega_0^2 r_0^3}{(r^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Как будет видно ниже, в этом случае параметр q характеризует толщину тора, которая стремится к нулю при приближении профиля угловой скорости к кеплеровскому. Как и в разделе 2.1, будем пользоваться здесь политропным уравнением состояния и запишем баланс сил для потока с использованием энтальпии h :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \Omega^2 r - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (75)$$

где первое и второе уравнения — проекции уравнения Эйлера на радиальное и вертикальное направления соответственно. Совместное интегрирование (75) даёт выражение

$$h(r, z) = \frac{\Omega_0^2 r_0^3}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\Omega_0^2 r_0^{2q}}{2(1-q)} r^{2(1-q)} + C,$$

где константу интегрирования C определим из условия, что $h(r_1, 0) = 0$ на внутренней границе тора $r_1 < r_0$.

Тогда в безразмерных координатах $\hat{x} \equiv r/r_0$, $\hat{y} \equiv z/r_0$ получаем

$$\begin{aligned} h &= (\Omega_0 r_0)^2 \left[(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{-1/2} - \hat{x}_1^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(q-1)} (\hat{x}_1^{-2(q-1)} - \hat{x}^{-2(q-1)}) \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь $\hat{x}_1 \equiv r_1/r_0$. Распределение энтальпии (76) даёт и внешнюю радиальную границу тора $\hat{x}_2 > 1$, где $h(\hat{x}_2, 0) = 0$. Величину $\hat{x}_d = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$ будем называть радиальной протяжённостью потока.

Теперь легко перейти к интересующему нас случаю квазикеплеровского, геометрически тонкого тора: $q = 3/2 + \epsilon^2/2$, $\epsilon \ll 1$. Используя это предположение, выражение для профиля энтальпии можно упростить следую-

⁸ Договоримся, что собственные векторы оператора $\mathbf{Z}$, домноженные на собственные значения, т.е. временную зависимость $\exp(-i\omega t)$, в этой работе мы называем модами возмущений.

щим образом:

$$\frac{h}{\Omega_0^2 r_0^2} = \frac{\hat{H}^2}{2\hat{x}^3} \left[1 - \left(\frac{\hat{y}}{\hat{H}} \right)^2 \right], \quad (77)$$

где $\hat{H}(x)$ — безразмерная полутолщина тора в единицах r_0 , которая имеет вид

$$\hat{H} = \delta \hat{x} \left[\frac{\hat{x}_1(1 + \ln \hat{x}) - \hat{x}(1 + \ln \hat{x}_1)}{\hat{x}_1 - 1 - \ln \hat{x}_1} \right]^{1/2}. \quad (78)$$

Здесь введён наглядный малый параметр

$$\delta \equiv \hat{H}(\hat{x} = 1) = 2^{1/2} \epsilon \left(1 - \frac{1 + \ln \hat{x}_1}{\hat{x}_1} \right)^{1/2} \ll 1,$$

задающий характерный угол раскрытия дискообразного тора с $\delta \ll \hat{x}_d$. Можно убедиться, что выражение (77) совпадает с выражением (4).

Выражения (77), (78) полностью задают квазикеплеровский фоновый поток, на примере которого и будет проиллюстрировано применение матричного метода вычисления немодального роста суперпозиций его мод возмущений. В следующем разделе дано решение спектральной задачи для такого потока, т.е. найдены профили мод возмущений.

3.2.3. Моды. Моды — это нестационарные возмущения с экспоненциальной зависимостью от времени $\propto \exp(-i\omega t)$. Они же являются решениями операторного уравнения (52), определяющего эволюцию линейных возмущений в нашем потоке. Это значит, что моды — векторы состояния, которые мы получаем при воздействии оператором $\mathbf{Z}$ на его собственные векторы $\mathbf{f}_i$:

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{Z}\mathbf{f}_i = \exp(-i\omega t) \mathbf{f}_i.$$

Повторим, что числа $\exp(-i\omega t)$ — собственные значения $\mathbf{Z}$, которые нам предстоит найти наряду с его собственными векторами.

На практике мы не будем записывать уравнение именно в виде (52), а выведем эквивалентное этой проблеме обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по радиальной координате для эйлерова возмущения энтальпии. Как и везде в этой работе, будем считать, что в возмущённом потоке сохраняется вертикальное гидростатическое равновесие, т.е. что $\delta v_z = 0$. Поскольку мы имеем дело с тонким по z тором, $\delta \ll 1$, наши возмущения, взятые сразу в виде азимутальных фурье-гармоник $\propto \exp(im\varphi)$, удовлетворяют системе уравнений (8)–(10), куда входят фоновые величины, проинтегрированные по z (см. раздел 2.1). Переход к рассмотрению мод означает в ней замену $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$, после чего из (8) и (9) получаем, что комплексные фурье-гармоники эйлеровых возмущений компонент скоростей, которые обозначим здесь как $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_\varphi$, следующим образом выражаются через комплексную фурье-гармонику возмущения энтальпии, которую обозначим здесь как $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{v}_r = \frac{i}{D} \left(\bar{\omega} \frac{d\mathbf{W}}{d\hat{x}} - \frac{2m\Omega\mathbf{W}}{\hat{x}} \right), \quad (79)$$

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{1}{D} \left(\kappa^2 \frac{d\mathbf{W}}{d\hat{x}} - \frac{m\bar{\omega}\mathbf{W}}{\hat{x}} \right), \quad (80)$$

где $D \equiv \kappa^2 - \bar{\omega}^2$, $\kappa^2 = (2\Omega/x) d(\Omega\hat{x}^2)/d\hat{x}$ — как обычно, квадрат эпитциклической частоты, а $\bar{\omega} \equiv \omega - m\Omega$ — смещённая частота. Ниже в этом разделе принято, что все частоты берутся в единицах частоты Ω_0 , а время — в единицах Ω_0^{-1} .

Подставляя (79) и (80) в уравнение неразрывности (10), получаем следующее уравнение относительно $\mathbf{W}$:

$$\frac{D}{\hat{x}\Sigma} \frac{d}{d\hat{x}} \left(\hat{x}\Sigma \frac{d\mathbf{W}}{d\hat{x}} \right) - \left[\frac{2m}{\bar{\omega}} \frac{D}{\hat{x}\Sigma} \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{\Omega\Sigma}{D} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{D}{h_*} + \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right] \mathbf{W} = 0, \quad (81)$$

где

$$\Sigma(r) = \int_{-H}^H \rho dz \propto \hat{H} \left(\frac{\hat{H}^2}{\hat{x}^3} \right)^n, \quad h_* = \frac{\hat{H}^2}{2\hat{x}^3}. \quad (82)$$

Здесь h_* — значение безразмерной фоновой энтальпии в экваториальной плоскости диска (ср. (77)). Чтобы воспроизвести данную только что зависимость поверхностной плотности Σ от r , достаточно вспомнить, что $\Sigma \sim H\rho|_{z=0}$, а $\rho \sim h^n$ для политропного уравнения состояния. Уравнение (81), а также его более общий аналог для мод трёхмерных возмущений часто встречается в литературе. Их вывод и анализ можно найти, например, в работах [77, 88, 90, 91, 119].

Как мы уже сказали, решение уравнения (81) осложнено резонансами: коротационным, где $\bar{\omega} = 0$, и линдбладовскими, где $D = 0$. Эти точки являются особыми для (81). Однако для иллюстрации матричного метода оптимизации ограничимся расчётом только части мод, резонансы которых находятся за пределами внешней границы потока, $\hat{x}_2$. Условие того, что внутренний линдбладовский резонанс находится на $\hat{x} > \hat{x}_2$, означает

$$\omega < (m-1)\Omega(\hat{x}_2), \quad (83)$$

где мы в условии $D = 0$ положили $\kappa \approx \Omega$, поскольку для тонкого тора имеем дело с почти кеплеровским профилем угловой скорости. Также напомним, что ω является действительной величиной. Отметим, что в случае $m = 1$ внутренний линдбладовский резонанс оказывается в точке $\hat{x} = 0$, а значит, не существует мод с $m = 1$, удовлетворяющих условию (83). По этой причине мы будем рассматривать только моды с $m > 1$. Итак, при сделанных ограничениях слагаемое $\propto D/h_* \sim \delta^{-2}$ будет велико всюду в потоке, следовательно, решение уравнения можно искать с помощью ВКБ-приближения.

ВКБ-решение уравнения (81) запишем в виде

$$\mathbf{W} = C_0 S_1 \cos(S_0 + \varphi_0), \quad (84)$$

в котором $S_0 \sim \delta^{-1}$, а $S_1 \sim \delta^0$.

После подстановки (84) в уравнение (81) получаем его в виде разложения по δ . Группируя слагаемые при одинаковых главных степенях δ , а именно, при δ^{-2} и при δ^{-1} , найдём явный вид функций S_0 и S_1 :

$$S_0 = \int_{\hat{x}_1}^{\hat{x}} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{-D}{h_*} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right]^{1/2} d\hat{x},$$

$$S_1 = \left(\frac{-D}{\hat{x}\Sigma} \right)^{1/2} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{-D}{h_*} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right]^{-1/4}.$$

Фаза φ_0 фиксируется граничными условиями.

ВКБ-решение (84) нерегулярно в граничных точках $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, в которых $h_* \rightarrow 0$. В рамках метода ВКБ возможно найти решение, регулярное на границах (см. [120]), но в данном случае воспользуемся традиционной сшивкой (84) с приближённым *регулярным* решением исходного уравнения (81) вблизи $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$. Эта сшивка и должна дать дискретный набор собственных частот ω , а также значения φ_0 .

Для того чтобы найти регулярное решение в окрестностях $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, перейдём к новой радиальной координате $\tilde{x} \equiv |\hat{x} - \hat{x}_{1,2}|$ и запишем разложение уравнения (81) в главном порядке по переменной $\tilde{x} \ll 1$. Технически это означает, что всем не равным в $\hat{x}_{1,2}$ нулю величинам из (81) приписываются их значения строго в точках $\hat{x}_{1,2}$. Полутолщина диска, обращённая на границах в нуль, аппроксимируется как $\hat{H} = \hat{H}_{1,2} \tilde{x}^{1/2}$. Здесь константа $\hat{H}_{1,2}$ равна

$$\hat{H}_{1,2} = \delta \hat{x}_{1,2} \left| \frac{\ln \hat{x}_{1,2}}{1 + \ln \hat{x}_{1,2} - \hat{x}_{1,2}} \right|^{1/2}.$$

Получим следующее приграничное уравнение:

$$\tilde{x} \frac{d^2 \mathbf{W}}{d\tilde{x}^2} + (n + 1/2) \frac{d\mathbf{W}}{d\tilde{x}} + E_{1,2} \mathbf{W} = 0, \quad (85)$$

где

$$E_{1,2} = \frac{(2n + 1)(-D_{1,2}) \hat{x}_{1,2}^3}{H_{1,2}^2},$$

$D_{1,2}$ — значения D в точках $\hat{x}_{1,2}$.

Регулярное в $\tilde{x} = 0$ решение (85) имеет вид

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_{1,2} \tilde{x}^{-(2n-1)/4} J_{n-1/2}(\tilde{z}), \quad (86)$$

где $\tilde{z} = 2E_{1,2}^{1/2} \tilde{x}^{1/2}$.

Заметим, что уравнение (85) при $\tilde{x} \rightarrow 0$ эквивалентно граничному условию для возмущения энтальпии на свободной границе потока, которое заключается в равенстве нулю в граничных точках $\hat{x}_{1,2}$ лагранжева возмущения энтальпии, $\Delta h|_{\hat{x}_{1,2}} = 0$ (см., например, [81]).

В силу того что знаменатель $\tilde{z}$ содержит малое δ , на некотором расстоянии от граничных точек $\tilde{z} \gg 1$ при сохранении условия $\tilde{x} \ll 1$. В этой области $\mathbf{W}$ даётся асимптотикой (86) для большого аргумента:

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{C}_{1,2} \tilde{x}^{-n/2} (4\pi^2 E_{1,2})^{-1/4} \cos\left(2E_{1,2}^{1/2} \tilde{x}^{1/2} - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (87)$$

Сшивка (87) с разложением ВКБ-решения вблизи $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ даёт нулевую фазу $\varphi_0 = -n\pi/2$ в выражении (84) и следующее дисперсионное уравнение:

$$\int_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2} \left((2n + 1) \frac{-D\hat{x}^3}{\hat{H}^2} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right)^{1/2} d\hat{x} = \pi(n + p), \quad (88)$$

где p — целое число. Решая (88) для разных значений p , получаем дискретный набор значений ω , который входит в величину D . Это и есть набор собственных частот ω_i , которыми обладают интересующие нас нейтральные моды.

Сами профили мод даются выражениями (84) и (86) с учётом соотношений между соответствующими констан-

тами:

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{C_1} &= \left(\frac{\hat{H}_1^{2n+1}}{2\pi \hat{x}_1^{3n-1} (-D_1)} \right)^{1/2}, \\ \frac{C_2}{C_1} &= (-1)^p \left[\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right)^{3n-1} \frac{D_2}{D_1} \left(\frac{\hat{H}_1}{\hat{H}_2} \right)^{2n+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (89)$$

Получив профиль $\mathbf{W}(\hat{x})$ для выбранного нами ω_i , соответствующие ему комплексные фурье-гармоники эйлеровых возмущений скоростей $\mathbf{v}_r(\hat{x})$ и $\mathbf{v}_\varphi(\hat{x})$ вычисляем по формулам (79) и (80) и, таким образом, имеем весь собственный вектор $\mathbf{f}_i \equiv \{\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_\varphi, \mathbf{W}\}$ оператора $\mathbf{Z}$, соответствующий его собственному значению $\exp(-i\omega_i t)$.

3.2.4. Оптимальный рост. Имея собственные векторы динамического оператора, можно приступить к вычислению *оптимального роста*, т.е. нахождению такой их линейной комбинации, которая демонстрирует наибольший рост нормы к заданному моменту времени. Оптимальный рост на момент времени t имеет вид

$$G(t) = \max_{\mathbf{q}(0)} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2}. \quad (90)$$

Это выражение является обобщением (44) для пространственно глобального случая.

Скалярное произведение двух векторов из линейной оболочки N собственных векторов оператора $\mathbf{Z}$ введём таким образом, чтобы квадрат соответствующей нормы совпадал с акустической энергией возмущения (14):

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \pi \int_{r_1}^{r_2} \Sigma \left[(\delta v_r)_f (\delta v_r)_g^* + (\delta v_\varphi)_f (\delta v_\varphi)_g^* + \right. \\ &\quad \left. + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(\delta h)_f (\delta h)_g^*}{h_*} \right] r dr, \end{aligned} \quad (91)$$

где индексами f или g мы обозначаем принадлежность той или иной физической величины вектору $\mathbf{f}$ или $\mathbf{g}$ соответственно. Напомним, что под величинами δv_r , δv_φ , δh мы подразумеваем здесь азимутальные фурье-гармоники соответствующих эйлеровых возмущений компонент скоростей и энтальпии.

Теперь воспользуемся процедурой вычисления оптимальной комбинации собственных векторов, описанной выше. Благодаря тому что мы имеем собственные векторы в аналитическом виде, матрицу $\mathbf{M}$ можно получить простым численным интегрированием комбинации элементарных функций по формуле скалярного произведения (91):

$$M_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j). \quad (92)$$

Далее выполняется разложение Холецкого $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, а затем и SVD-разложение матрицы $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$. Обе эти процедуры являются стандартными в численных методах матричной алгебры.

На рисунке 7а приведён пример зависимости максимально возможного роста энергии, $G(t)$, среди всех суперпозиций 20 нейтральных мод к моменту времени t на временах порядка звукового $t_s \sim (\delta\Omega_0)^{-1}$, а на рис. 7б — на временах порядка $10t_s$. На рисунке 7а также отображён рост энергии оптимальных комбинаций мод, $g(t)$. Видно, что кривые $g(t)$ касаются общей кривой оптимального роста $G(t)$, как и должно быть, каждая —

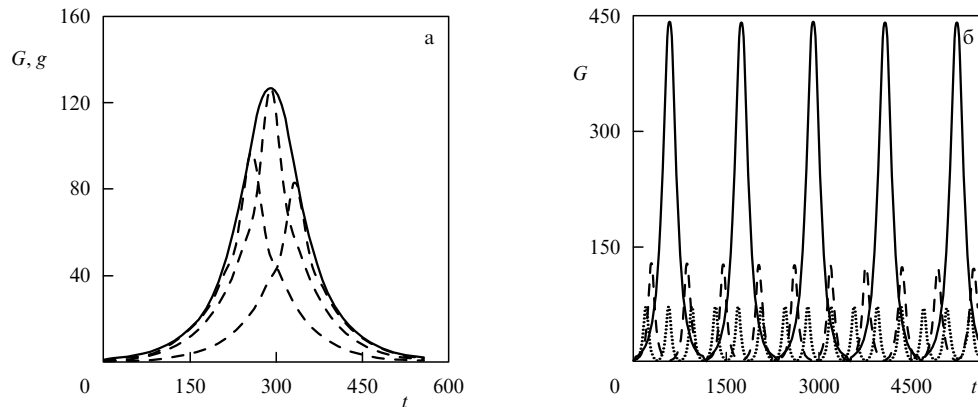


Рис. 7. На рис. а сплошной линией нанесена кривая оптимального роста $G(t)$ линейной комбинации медленных мод тонкого диска для $\delta = 0,002$. Штриховыми линиями нанесены факторы роста полной акустической энергии $g(t)$ отдельно взятых оптимальных возмущений от времени. Эти возмущения являются оптимальными для моментов времени $t = 250, 290, 390$, выраженного в единицах характерного кеплеровского периода $2\pi\Omega_0^{-1}$. На рис. б нанесены только кривые $G(t)$. Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют значениям $\delta = 0,001, 0,002, 0,003$. На рис. а, б размерность линейной комбинации $N = 20$, параметры $x_d = 1,0, m = 25, n = 3/2$. (Рисунок из работы [113].)

в свой момент оптимизации. А сам оптимальный рост имеет в данной модели квазипериодическую форму, достигая максимумов на временах $\sim t_s$, причём чем тоньше тор, тем больших значений g могут достичь суперпозиции мод.

3.2.5. Поток углового момента. В разделе 3.2.4 было показано, что некоторые комбинации мод способны демонстрировать существенный рост акустической энергии. Узнаем подробнее, что из себя представляет оптимальное возмущение. Рост амплитуды возмущений говорит о том, что основное течение передаёт им энергию. За это отвечает первое слагаемое в правой части (12), а подынтегральное выражение в нём иногда называют мощностью сил Рейнольдса (см. работу [77]), которую обозначим F_R . Оказывается, что F_R просто соотносится с плотностью потока удельного углового мо-

мента, связанного с возмущениями, $F: F_R = -(\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}\hat{x})F$ (см. разделы 2.3 и 4 работы [97]). Видно, что для кеплеровского вращения F_R и F имеют один и тот же знак: при росте энергии возмущений $F > 0$ происходит отток углового момента на периферию тора, тогда как при уменьшении энергии возмущений — наоборот.

Итак, воспользуемся выражением для F ,

$$F = \hat{x}\Sigma\langle\delta v_r\delta v_\varphi\rangle, \quad (93)$$

и рассчитаем эволюцию профиля F для оптимальной суперпозиции мод, которая представлена кривой $g(t)$ для $t = 290$ на рис. 7а. На рисунке 8 показано, как меняется со временем радиальное распределение F на интервале $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Во-первых, видим, что F локализовано в радиальном направлении, и область его локализации с течением времени смещается: в фазе роста амплитуды

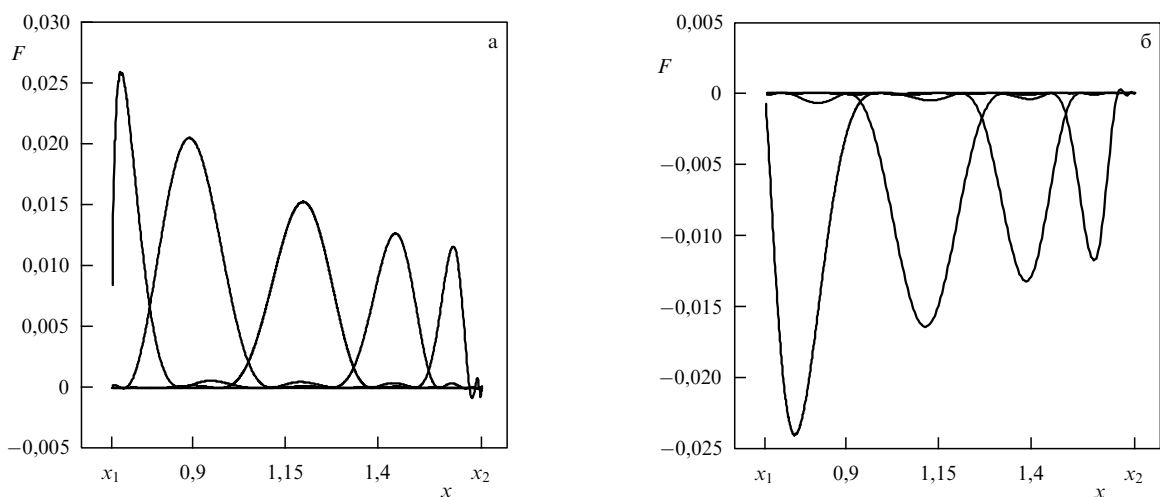


Рис. 8. Радиальные профили усреднённой по азимутальному направлению плотности потока углового момента F оптимального возмущения, соответствующего кривой $g(t)$ на рис. 7а, для времени оптимизации $t = 290$. (а) Профили F в моменты времени $t = 50, 100, 150, 200, 240$ до достижения максимума $g(t)$, каждый профиль имеет по одному большому максимуму, положение которого сдвигается от внешней границы диска x_2 к внутренней границе x_1 по мере возрастания t . (б) Профили F в моменты времени $t = 290, 350, 400, 450$ после максимума $g(t)$, каждый профиль имеет аналогично по одному большому минимуму, положение которого сдвигается от внутренней границы диска x_1 к внешней x_2 по мере дальнейшего возрастания t . На рис. а, б размерность линейной комбинации $N = 20$, параметры $\delta = 0,002, x_d = 1,0, m = 25, n = 3/2$. (Рисунок из работы [113].)

возмущения — к внутренней границе тора, а в фазе уменьшения амплитуды — обратно к внешней границе. Следовательно, мы можем говорить, что немодально растущее возмущение представляет собой в данном случае волновой пакет, состоящий из набора нейтральных мод (каждая из которых, напомним, вращается твердотельно с угловой скоростью, меньшей скорости вращения самого потока). В начальный момент этот волновой пакет расположен у внешней границы тора и движется в направлении внутренней границы. При этом он вызывает отток углового момента на периферию диска, так как $F > 0$, а его акустическая энергия растёт. В момент отражения от внутренней границы знак F и направление движения волнового пакета изменяются на противоположные, что далее ведёт к уменьшению его акустической энергии, а угловой момент втекает обратно во внутренние части тора. Поскольку отсутствует какая-либо вязкая диссипация, а фоновый поток стационарен, очевидно, что если продолжить дальше следить за эволюцией оптимальной суперпозиции мод, картина повторится: волновой пакет, отразившись теперь от внешней границы, вновь направится в сторону внутренней. Обратим ещё внимание на то, что полученный нами вид $G(t)$ говорит о следующем: в эволюции этого частного типа возмущений существуют эпохи (интервалы времени, отсчитываемые от условного начала эволюции возмущений), на которых невозможно усиление никаких комбинаций мод. Такие эпохи соответствуют локальным минимумам на кривой $G(t)$ (см. рис. 7б). Это вызвано тем, что значительное усиление могут испытывать лишь волновые пакеты, изначально располагающиеся у внешней границы тора. В то же время скорость их радиального смещения определяется звуковой скоростью в потоке, а значит, интервалы времени, "благоприятные" для немодального усиления, всегда составляют $\sim \hat{x}_d/\delta$.

Если далее на плоскости (r, φ) отобразить линии постоянной фазы возмущений, соответствующих обсуждаемому волновому пакету, оказывается, что в то же самое время на стадии роста он соответствует *отстающей* спирали. Она максимально раскрыта в начальный момент времени, но по мере своего распространения в сторону внутренней границы диска закручивается всё сильнее. Напротив, после отражения от внутренней границы она трансформируется в тугую закрученную *лидирующую* спираль и в процессе движения обратно к внешней границе степень закрутки, наоборот, уменьшается. Такое поведение оптимального возмущения аналогично процессу усиления/ослабления волн плотности сдвиговым потоком, которое мы обсуждали в разделе 2.2 в контексте пространственно локальной задачи.

3.3. Альтернатива: вариационный подход

Другим способом нахождения сингулярных векторов является вариационный метод. Он представляет собой обобщение метода *прямых итераций* для нахождения собственных значений и векторов матриц конечной размерности (см., например, монографию [115]). Вариационный метод менее требователен к вычислительным ресурсам, чем матричный [121] и, что важно, может быть распространён на исследование нестационарных фоновых потоков, а также на решение нелинейной задачи по транзитной динамике возмущений с конечной амплитудой. В отличие от матричного метода, он не требует

дискретного представления динамического оператора, т.е., к примеру, разложения возмущений по его собственным векторам, вычисление которых в сдвиговом потоке сопряжено с известными трудностями обхода коротационного и линдбладовских резонансов (см. [122]).

Поскольку для линейной динамики вариационный метод *оказывается эквивалентен* решению более простой задачи поиска наибольшего собственного значения оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ (см. раздел 3.1, а также, например, работу [123]), начнём с описания именно такой задачи, а вывод вариационного метода непосредственно из вариационного принципа изложим позже в рамках обобщения на нелинейный случай.

3.3.1. Линейные автономные операторы. В разделе 3.1 после введения понятия сингулярных значений обсуждалось, что первое сингулярное значение одновременно является наибольшим собственным значением составного оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$, а первый правый сингулярный вектор — соответствующим собственным вектором этого оператора. Сначала попробуем понять, чему эквивалентно действие $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ на начальный вектор состояния $\mathbf{q}(0)$. При этом действие первой (правой) части составного оператора нам известно из его определения (52) и заключается в интегрировании уравнений динамики возмущений, к примеру, системы (8)–(10), которую запишем здесь в символическом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad (94)$$

до момента времени t с начальным условием $\mathbf{q}(0)$. Заметим, что вследствие линейности задачи оператор $\mathbf{A}$ в (94) не зависит от самого $\mathbf{q}$.

Легче всего понять, чему эквивалентно последующее действие оператора $\mathbf{Z}^\dagger$ на $\mathbf{q}(t)$ в случае, когда оператор $\mathbf{A}$ является *автономным*, т.е. не зависящим от времени [112].

Тогда решение уравнения (94) можно записать в операторном виде: $\mathbf{q}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{q}(0)$, т.е. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{Z}$ связаны соотношением

$$\mathbf{Z} = \exp(\mathbf{A}t). \quad (95)$$

Правая часть (95) называется *операторной экспонентой* и под ней надо понимать формально записанный бесконечный ряд: $\mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/2 + \dots$

Сопряжённый к $\mathbf{Z}$ оператор также можно записать через операторную экспоненту $\mathbf{Z}^\dagger = \exp(\mathbf{A}^\dagger t)$, где $\mathbf{A}^\dagger$ является оператором, сопряжённым к $\mathbf{A}$ и определяющимся соотношением Лагранжа $(\mathbf{A} \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}})$, $\mathbf{q}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$ — произвольные векторы. Данное выражение для $\mathbf{Z}^\dagger$ следует из применения операции сопряжения к бесконечному операторному ряду, приведённому чуть выше. Теперь рассмотрим скалярное произведение:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{q}} \right) = (\mathbf{A} \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}). \quad (96)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{q}} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\exp(\mathbf{A}t) \mathbf{q}(0), \tilde{\mathbf{q}}) - \\ &- \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \right) = \left(\mathbf{q}(0), \frac{\partial}{\partial t} (\exp(\mathbf{A}^\dagger t) \tilde{\mathbf{q}}) \right) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (97)$$

После объединения (96) и (97) получаем следующее тождество:

$$\left(\mathbf{q}(0), \frac{\partial}{\partial t} (\exp(\mathbf{A}^\dagger t) \tilde{\mathbf{q}}) \right) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \right) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}). \quad (98)$$

Нетрудно заметить, что если $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\partial \tilde{\mathbf{q}} / \partial t$ связаны соотношением

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} = -\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}, \quad (99)$$

то $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \exp(-\mathbf{A}^\dagger t) \tilde{\mathbf{q}}(0)$ и тождество (98) выполняется для любого $\mathbf{q}$.

Таким образом, действие оператора $\mathbf{Z}^\dagger = \exp(\mathbf{A}^\dagger t)$ эквивалентно интегрированию уравнения (99) *назад* по времени от момента t с начальным условием $\mathbf{q}(t)$ до момента $t = 0$. Уравнение (99) называется *сопряжённым*.

Дополнительно отметим, что, несмотря на то что оператор $\mathbf{Z}$ можно представить в виде $\mathbf{Z} = \exp(\mathbf{A}t)$, а $\mathbf{Z}^\dagger$ — в виде $\mathbf{Z}^\dagger = \exp(\mathbf{A}^\dagger t)$, составной оператор $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ непредставим в виде $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} = \exp((\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно использовать разложение операторных экспонент в бесконечные ряды.

Итак, действие составного оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ на начальный вектор $\mathbf{q}(0)$ эквивалентно интегрированию вперёд во времени исходного уравнения (94) с начальным условием $\mathbf{q}(0)$ до момента t , а затем — интегрированию сопряжённого уравнения (99) *назад* во времени обратно до начального момента с начальным условием в виде вектора $\mathbf{q}(t)$, с которым мы пришли до этого к моменту времени t , интегрируя (94).

Любой вектор, для которого действие составного оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ эквивалентно умножению на константу, будет являться правым сингулярным вектором динамического оператора, а константа — квадратом соответствующего сингулярного значения: $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{v} = \sigma^2 \mathbf{v}$. Однако нам нужен именно первый, т.е. наибольший, правый сингулярный вектор. Для его вычисления рассмотрим итерационную процедуру, один такт которой соответствует воздействию составного оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ с последующей нормировкой результата воздействия на единицу. Чтобы показать сходимость итераций к первому сингулярному вектору, рассмотрим разложение произвольного вектора состояния по сингулярным векторам $\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathbf{v}_k(0)$ и подытожим на него итерационным оператором $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 q_k \mathbf{v}_k(0)$.

Как нетрудно заметить, итерационный оператор увеличивает вес каждого сингулярного вектора пропорционально квадрату соответствующего сингулярного значения. Таким образом, предел $(\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z})^{p \rightarrow \infty} \mathbf{q}(0)$, где p — натуральное число, для произвольного начального вектора состояния $\mathbf{q}(0)$ равен первому правому сингулярному вектору, поскольку он соответствует наибольшему сингулярному значению. При этом скорость сходимости зависит от разницы между сингулярными векторами.

Заметим, что для сходимости именно к первому сингулярному вектору необходимо, чтобы начальное приближение не было ортогонально первому сингулярному вектору, поскольку если в разложении вектора $\mathbf{q}(0)$ вес первого сингулярного вектора будет равен нулю: $q_1 = 0$, воздействие итерационного оператора не приведёт к увеличению этого веса: $\sigma_1^2 q_1 = 0$. Итерационная

схема в этом случае сойдётся к сингулярному вектору с максимальным сингулярным значением из всех тех, что обладают ненулевым весом в разложении начального приближения.

Таким образом, для нахождения первого правого сингулярного вектора необходимо применить итерационную процедуру, каждый такт которой состоит из интегрирования исходного уравнения (94) вперёд во времени и сопряжённого уравнения (99) *назад* во времени, с последующей нормировкой на единицу после каждого такта итераций.

3.3.2. Линейные неавтономные операторы. Увидеть, что действие оператора $\mathbf{Z}^\dagger$ для случая зависящего от времени оператора $\mathbf{A}$ (так называемый *неавтономный* оператор, см. [124]) точно так же соответствует интегрированию *назад* во времени уравнения (99), можно следующим образом.

Оказывается, что для неавтономного оператора $\mathbf{A}$ действие оператора $\mathbf{Z}$ можно разбить на произведение бесконечно малых операторов:

$$\mathbf{Z}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \exp(\mathbf{A}(t_j)) \delta t, \quad (100)$$

где $\delta t = \tau/n$, $(j-1)\delta t < t_j < j\delta t$ (см. [124]).

Отсюда по правилу поиска сопряжения от произведения операторов получаем

$$\mathbf{Z}^\dagger(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^1 \exp(\mathbf{A}^\dagger(t_j)) \delta t. \quad (101)$$

Видим, что на каждом отрезке δt интегрирование проводится *назад* во времени, а сами эти отрезки расположены в порядке убывания j , поэтому в результате действие $\mathbf{Z}^\dagger$ снова эквивалентно интегрированию уравнения (99) *назад* во времени.

Таким образом, как и в случае автономных операторов, действие $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ эквивалентно последовательному интегрированию (94) вперёд во времени, и (99) — *назад* во времени.

Соответственно, итерационная процедура поиска первого сингулярного вектора, описанная выше, применима и в случае неавтономных операторов.

3.3.3. Вычисление старших сингулярных векторов. Поскольку сингулярные векторы образуют ортогональную систему функций, они могут служить базисом для разложения любого линейного возмущения. Таким образом, может оказаться полезным вычисление не только первого, но и более старших сингулярных векторов, поэтому ниже мы приведём краткое описание способа вычисления этих векторов с помощью вариационного метода.

Для того чтобы итерации, описанные выше, сошлись не к первому сингулярному вектору, а к вектору номер N , достаточно, чтобы область определения итерационного оператора являлась дополнением подпространства линейных комбинаций предыдущих $N-1$ векторов до полного множества или, что эквивалентно, начальное приближение было ортогонально уже посчитанным сингулярным векторам, т.е. должно выполняться условие $(\mathbf{q}(0), \mathbf{v}_j(0)) = 0$ для $j < N$. В этом случае и результат воздействия итерационного оператора будет ортогона-

лен посчитанным сингулярным векторам:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}(0), \mathbf{v}_j(0)) &= \left(\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \sum_{k=N}^{\infty} q^k \mathbf{v}_k(0), \mathbf{v}_j(0) \right) = \\ &= \left(\sum_{k=N}^{\infty} \sigma_k^2 q^k \mathbf{v}_k(0), \mathbf{v}_j(0) \right) = 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Итак, если представить разложение некоторого вектора по сингулярным векторам в виде

$$\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \mathbf{v}_k(0), \quad (103)$$

то замена начального условия в итерационной процедуре на $\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{N-1} q^k \mathbf{v}_k(0)$ обеспечит сходимость прямых итераций к искомому сингулярному вектору номер N . Таким образом, по известным $N - 1$ сингулярным векторам всегда можно вычислить следующий.

3.3.4. Обобщение на нелинейный случай. В случае нелинейной динамики изложенное в предыдущих двух разделах обоснование итеративного поиска оптимального роста возмущений перестаёт быть верным, однако в несколько обобщённом виде это обоснование можно дать исходя из вариационного принципа, что мы сейчас и покажем.

Задача формулируется как поиск начального условия, демонстрирующего наибольший рост нормы к заданному моменту времени, т.е. необходимо найти такой вектор $\mathbf{q}(0)$, на котором функционал

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{\|\mathbf{q}(\tau)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \quad (104)$$

достигает максимума при условии, что вектор $\mathbf{q}$ удовлетворяет динамическим уравнениям, которые у нас записаны в виде операторного уравнения (94). Для этого используется техника, подобная методу неопределённых множителей Лагранжа нахождения условного экстремума функции, известного из курса математического анализа.

Лагранжиан, необходимый для нахождения условного экстремума, состоит в данном случае из двух слагаемых: функционала, максимум которого необходимо отыскать, и так называемого "штрафного" слагаемого, которое отлично от нуля только тогда, когда $\mathbf{q}$ перестаёт удовлетворять динамическим уравнениям (94) (см. также [125, 126] и обзор [49]):

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \int_0^t (\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{q}) d\tau. \quad (105)$$

Как видим, штрафное слагаемое в (105) записано в виде дополнительно проинтегрированного по времени скалярного произведения множителей Лагранжа, входящих в $\tilde{\mathbf{q}}$, и уравнения (94). В отличие от известной задачи поиска условного экстремума функции, в данном случае лагранжиан является уже функционалом, определённым на множестве всех возможных значений $\mathbf{q}$, а множители Лагранжа сами становятся функциями.

Экстремум (104) достигается при одновременном обращении в нуль вариации лагранжиана по величинам $\mathbf{q}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$. Эти вариации определим следующим образом (см. книгу [127]):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q} + \epsilon \delta \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})}{\epsilon}, \quad (106)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})}{\epsilon}, \quad (107)$$

где $\delta \mathbf{q}$ и $\delta \tilde{\mathbf{q}}$ — произвольные в любой момент времени функции.

Вариация по неопределённым множителям, очевидным образом, равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\epsilon \delta \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{q}) d\tau = \\ &= - \int_0^t (\delta \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{q}) d\tau. \end{aligned} \quad (108)$$

Приравнявая (108) к нулю, получаем, в силу произвольности $\delta \tilde{\mathbf{q}}$, уравнение (94). Для вычисления вариации по векторам состояния воспользуемся тождеством Лагранжа: $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \mathbf{q}) = (\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ (подробнее о сопряжённых операторах в нелинейных задачах см., например, [128]), и проинтегрируем штрафное слагаемое по частям, после чего перепишем лагранжиан в следующей форме:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{G}(\mathbf{q}) - (\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \Big|_0^t + \int_0^t (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^\dagger(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) d\tau. \quad (109)$$

Воспользовавшись малостью ϵ и вещественностью скалярного произведения⁹, вычислим вариацию по векторам состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - (\tilde{\mathbf{q}}(t), \epsilon \delta \mathbf{q}(t)) + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\mathbf{q}}(0), \epsilon \delta \mathbf{q}(0)) + \int_0^t (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^\dagger(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}, \epsilon \delta \mathbf{q}) d\tau \right], \end{aligned} \quad (110)$$

при этом первое слагаемое можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2 + \epsilon (\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) + \epsilon (\mathbf{q}(t), \delta \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2 + \epsilon (\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) + \epsilon (\mathbf{q}(0), \delta \mathbf{q}(0))}. \end{aligned} \quad (111)$$

Поскольку скалярное произведение вещественно, имеем $(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) = (\mathbf{q}(t), \delta \mathbf{q}(t))$, и поэтому преобразование можно продолжить:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \right] &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2 + 2\epsilon (\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2 + 2\epsilon (\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0))} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2\epsilon (\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{2\epsilon (\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) \|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4} \right] = \\ &= \frac{2(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - 2(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4}, \end{aligned} \quad (112)$$

⁹ Вещественность скалярного произведения нам дополнительно необходима только в этом разделе, чтобы получить в простом виде условия связи (114) и (115), см. ниже.

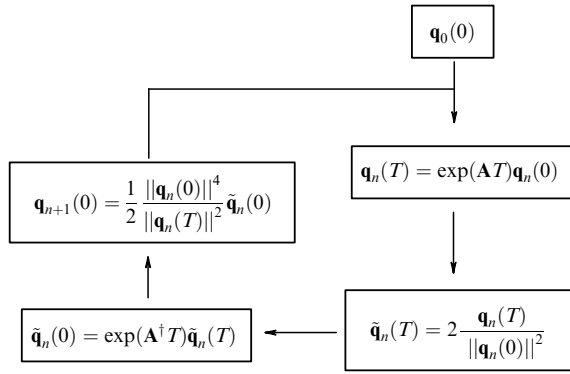


Рис. 9. Схема итерационного цикла поиска оптимального возмущения для момента времени T , удовлетворяющего системе общего вида (94) (см. обзор [49]).

что приводит к окончательному выражению для вариации:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \frac{2(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} - 2(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4} - (\tilde{\mathbf{q}}(t), \delta \mathbf{q}(t)) + (\tilde{\mathbf{q}}(0), \delta \mathbf{q}(0)) + \int_0^t (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^+(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{q}) d\tau. \quad (113)$$

Поскольку варьирование $\delta \mathbf{q}$ независимо для разных моментов времени, приравнивание (113) к нулю в одно и то же время приводит к уравнению на неопределённые множители (99), которое обеспечивает равенство нулю вариации лагранжиана (113) в интервале $0 < \tau < t$, и к дополнительным соотношениям между $\mathbf{q}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$, которые необходимы для обращения в нуль вариации лагранжиана в моменты $\tau = 0$ и $\tau = t$:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \frac{2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \mathbf{q}(t), \quad (114)$$

$$\mathbf{q}(0) = \frac{\|\mathbf{q}(0)\|^4}{2\|\mathbf{q}(t)\|^2} \tilde{\mathbf{q}}(0). \quad (115)$$

Векторы $\mathbf{q}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$, которые удовлетворяют уравнениям (94), (99) и условиям связи (114), (115), обращают в нуль вариации лагранжиана, а значит, именно для них целевой функционал (104) достигает экстремума.

Как и для случая линейных систем, совместное решение уравнений можно искать с помощью метода прямых итераций, схема которого показана на рис. 9. Обсуждение этого вопроса можно найти в работах [129–131].

Ещё раз отметим, что в случае линейных возмущений задача оптимизации функционала (104) превращается в задачу поиска наибольшего собственного значения составного оператора $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$.

3.4. Сопряжённые уравнения

3.4.1. Получение сопряжённых уравнений. Чтобы получить явный вид уравнений, сопряжённых к (8)–(10), будем использовать норму, идентичную полной акустической энергии возмущения (14). Скалярное произведение, соответствующее этой норме, совпадает с уже использовавшимся нами выражением (91). Взяв его,

распишем $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q})$ как

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q}) = & \pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \Sigma \left[\delta \tilde{v}_r \left(im\Omega \delta v_r^* + 2\Omega \delta v_\varphi^* - \frac{\partial \delta h^*}{\partial r} \right) + \right. \\ & + \delta \tilde{v}_\varphi \left(-\frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta v_r^* + im\Omega \delta v_\varphi^* + \frac{im \delta h^*}{r} \right) + \\ & \left. + \frac{\delta \tilde{h}}{a_*^2} \left(-\frac{a_*^2}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma \delta v_r^*) + \frac{ima_*^2}{r} \delta v_\varphi^* + im\Omega \delta h^* \right) \right] r dr. \end{aligned} \quad (116)$$

Теперь в левой части равенства воспользуемся тождеством Лагранжа $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q}) = (\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ и равенством (99) и распишем полученное скалярное произведение по формуле (91). Правую часть преобразуем таким образом, чтобы выделить зависимость от компонент $\delta \mathbf{q}$ в виде множителей. При этом пространственные производные будем раскрывать с помощью интегрирования по частям. Получим

$$\begin{aligned} \pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \Sigma r dr \left[-\delta v_r^* \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} - \delta v_\varphi^* \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} - \delta h^* \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right] = \\ = \pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \Sigma r dr \left[\delta v_r^* \left(im\Omega \delta \tilde{v}_r - \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta \tilde{v}_\varphi + \frac{\partial \delta \tilde{h}}{\partial r} \right) + \right. \\ + \delta v_\varphi^* \left(2\Omega \delta \tilde{v}_r + im\Omega \delta \tilde{v}_\varphi + \frac{im}{r} \delta \tilde{h} \right) + \\ + \delta h^* \left(\frac{1}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \delta \tilde{v}_r) + \frac{im}{r} \delta \tilde{v}_\varphi + \frac{im\Omega}{a_*^2} \delta \tilde{h} \right) \left. \right] - \\ - \pi r \Sigma \delta \tilde{h} \delta v_r^* \Big|_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} - \pi r \Sigma \delta \tilde{v}_r \delta h^* \Big|_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}. \end{aligned} \quad (117)$$

Подстановки в правой части (117) равны нулю, поскольку $\Sigma \rightarrow 0$ на границах.

Вследствие того что компоненты вариации $\delta \mathbf{q}$ произвольны и не зависят друг от друга, (117) преобразуется в три независимых равенства, каждое из которых соответствует одной из компонент $\delta \mathbf{q}$. Эти равенства приводят к системе сопряжённых уравнений:

$$\frac{\partial \delta \tilde{v}_r}{\partial t} = -im\Omega \delta \tilde{v}_r + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta \tilde{v}_\varphi - \frac{\partial \delta \tilde{h}}{\partial r}, \quad (118)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{v}_\varphi}{\partial t} = -2\Omega \delta \tilde{v}_r - im\Omega \delta \tilde{v}_\varphi - \frac{im}{r} \delta \tilde{h}, \quad (119)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{h}}{\partial t} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \delta \tilde{v}_r) - \frac{ima_*^2}{r} \delta \tilde{v}_\varphi - im\Omega \delta \tilde{h}. \quad (120)$$

Далее, проведя в (118)–(120) переход к локальному пространственному пределу аналогично тому, как это было сделано, чтобы получить систему (16)–(18) из уравнений (8)–(10) в разделе 2.2, найдём явный вид сопряжённых к (16)–(18) уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{u}_x - (2 - q)\Omega_0 \tilde{u}_y = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}, \quad (121)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{u}_y + 2\Omega_0 \tilde{u}_x = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}, \quad (122)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{W} + a_*^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (123)$$

где тильды над u_x , u_y и W означают, что эти величины составляют сопряжённый вектор состояния.

Наконец, перейдя в (121)–(123) в сопутствующую сдвигу систему отсчёта, запишем сопряжённые уравнения для отдельных ПФГ:

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = (2 - q)\hat{u}_y - i\tilde{k}_x(t)\hat{W}, \quad (124)$$

$$\frac{d\hat{u}_y}{dt} = -2\hat{u}_x - i\tilde{k}_y\hat{W}, \quad (125)$$

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = -i(\tilde{k}_x(t)\hat{u}_x + \tilde{k}_y\hat{u}_y). \quad (126)$$

Решая совместно методом прямых итераций системы (8)–(10) и (118)–(120) для глобальных азимутальных фурье-гармоник двумерных возмущений либо системы (21)–(23) и (124)–(126) для локальных ПФГ, автоматически придём к оптимальным начальным профилям возмущений энthalпии и компонент скоростей, дающим наибольший рост полной акустической энергии на данном интервале времени. Такая задача в приложении к кеплеровским потокам решалась в работе [71].

3.4.2. Условие ненормальности $\mathbf{Z}$. Здесь мы покажем, что ненормальность динамического оператора, определяемого системой (8)–(10), является прямым следствием наличия градиента угловой скорости в потоке. Речь об этом шла в разделе 3.1, в части, посвящённой введению понятия сингулярных векторов. Теперь мы можем показать это строго и в весьма общем случае, поскольку знаем явный вид $\mathbf{A}^\dagger$, заданный системой (118)–(120). Сначала вычислим коммутатор $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^\dagger$:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = \begin{pmatrix} \frac{16\Omega^4 - \kappa^4}{4\Omega^2} & 0 & \frac{im}{2r\Omega}(4\Omega^2 - \kappa^2) \\ 0 & \frac{\kappa^4 - 16\Omega^4}{4\Omega^2} & \frac{4\Omega^2 - \kappa^2}{2\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{ima^2}{2r\Omega}(\kappa^2 - 4\Omega^2) & \frac{a^2}{r\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r\Omega}{2\Omega}(\kappa^2 - 4\Omega^2) \right) + \frac{a^2}{2\Omega}(\kappa^2 - 4\Omega^2) \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (127)$$

Нетрудно заметить, что $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]$ обращается в нуль при $\kappa = 2\Omega$, что соответствует твердотельному вращению. В этом случае коммутатор $[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^\dagger] = [\exp(\mathbf{A}t), \exp(\mathbf{A}^\dagger t)]$ легко вычисляется, поскольку для коммутирующих операторов произведение их операторных экспонент равно экспоненте от их суммы, в чём можно убедиться, записав операторные экспоненты в виде соответствующих бесконечных рядов,

$$\begin{aligned} [\exp(\mathbf{A}t), \exp(\mathbf{A}^\dagger t)] &= \exp(\mathbf{A}t) \exp(\mathbf{A}^\dagger t) - \\ &- \exp(\mathbf{A}^\dagger t) \exp(\mathbf{A}t) = \exp((\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)t) - \\ &- \exp((\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t) = 0. \end{aligned} \quad (128)$$

Таким образом, при твердотельном вращении оператор $\mathbf{Z}$ становится нормальным.

Оказывается, что верно также и обратное утверждение: если $\mathbf{Z}$ является нормальным для любого момента времени t , то движение твердотельно. Для того чтобы в этом убедиться, воспользуемся формулой Кэмпбелла – Бэйкера – Хаусдорфа ([132], гл. 25) для записи составных

операторов $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) \exp(\mathbf{A}^\dagger t) &= \exp\left((\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)t + \frac{t^2}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] + \right. \\ &+ \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] - \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] + \dots \Big), \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}^\dagger t) \exp(\mathbf{A}t) &= \exp\left((\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t + \frac{t^2}{2}[\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}] + \right. \\ &+ \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}]] - \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}]] + \dots \Big) = \\ &= \exp\left((\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t - \frac{t^2}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] + \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] - \right. \\ &- \frac{t^3}{12}[\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] + \dots \Big). \end{aligned} \quad (130)$$

Равенство $[\exp(\mathbf{A}t), \exp(\mathbf{A}^\dagger t)] = 0$ выполняется для любого t , поэтому должны быть независимо равны нулю слагаемые при одинаковых степенях t , что возможно, только если коммутатор $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = 0$. Последнее же выполняется только в случае твердотельного вращения.

Из всего только что сказанного следует, что для того, чтобы динамический оператор $\mathbf{Z}$ системы уравнений (8)–(10) был нормальным, *необходимо и достаточно*, чтобы вращение было твердотельным. Таким образом, любое отклонение от твердотельного вращения, т.е. в случае астрофизических дисков появление градиента угловой скорости в потоке, делает динамический оператор ненормальным, а моды возмущений — неортогональными друг другу.

4. Оптимальные возмущения в кеплеровском диске

В заключительном разделе этой работы мы хотим кратко обсудить примеры использования вариационного подхода для поиска оптимальных возмущений в астрофизических дисках. Под последними мы понимаем геометрически тонкие диски, когда профиль азимутальной скорости в фоновом потоке близок к кеплеровскому. В численных расчётах мы рассмотрим бесконечный по r диск, обладающий только внутренней (свободной) границей, и тонкий квазикеплеровский тор, имеющий и внешнюю, и внутреннюю радиальные границы и использовавшийся для анализа суперпозиций нейтральных мод, с целью проиллюстрировать матричный метод оптимизации (см. раздел 3.2). Однако в методических целях начнём с простейшей, аналитически решаемой задачи для транзитного роста локальных коротковолновых возмущений с $k_y \gg 1$, обсуждавшихся нами подробно в разделе 2.3.

4.1. Локальное приближение

Действительно, применим метод прямых итераций к системе (21)–(23), (124)–(126) в пределе $k_y \gg 1$, соответствующем динамике несжимаемой жидкости. В этом пределе систему (21)–(23) можно свести к одному уравнению для $\hat{u}_x$:

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} + 2qk_y \frac{\tilde{k}_x}{k_y^2 + \tilde{k}_x^2} \hat{u}_x = 0, \quad (131)$$

дающему аналитическое решение

$$\hat{u}_x(t) = \hat{u}_x(0) \frac{k_x^2 + k_y^2}{\hat{k}_x^2 + k_y^2}, \quad (132)$$

которое, конечно, повторяет (35) при $k_y \gg 1$.

В то же время сопряжённые уравнения (124)–(126) в пределе несжимаемой жидкости дадут, что сопряжённая к $\hat{u}_x$ величина $\hat{u}_x$ сохраняется со временем¹⁰:

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = 0. \quad (133)$$

Тогда очевидно, что после p итераций произвольного начального профиля $\hat{u}_x^{\text{in}}(k_x, k_y, t=0)$ получим, что он домножается на следующую величину:

$$\left[\frac{k_x^2 + k_y^2}{(\hat{k}_x(t))^2 + k_y^2} \right]^p. \quad (134)$$

С учётом перенормировки решения на каждой итерации множитель (134) подавляет при $p \rightarrow \infty$ все ПФГ, составляющие $\hat{u}_x^{\text{in}}(k_x, k_y, t=0)$, кроме оптимальной ПФГ, соответствующей максимуму (134) как функции k_x . Для фиксированного интервала времени t это значение k_x равно

$$k_x = \frac{1}{2} k_y (-qt - ((qt)^2 + 4)^{1/2}). \quad (135)$$

Подстановка (135) в выражение для фактора роста ПФГ (42) даст интересующий нас оптимальный рост G , определённый для локальной задачи как (44):

$$G(t) = \frac{(qt)^2 + qt[(qt)^2 + 4]^{1/2} + 4}{(qt)^2 - qt[(qt)^2 + 4]^{1/2} + 4}. \quad (136)$$

Выражение (136) представляет первое сингулярное значение, к которому сходится обсуждаемый здесь итерационный цикл для коротковолновых локальных вихрей. Видно, что для больших времён, $qt \gg 1$, оно даёт $G \approx (qt)^2$, что повторяет приближительную оценку G по формуле (46).

Также заметим, что точный результат (136) можно было бы получить в данном простом примере и напрямую из выражения для фактора роста ПФГ (42), найдя максимум g как функции k_x при фиксированном t .

Для произвольного k_y значение оптимального роста может быть получено численным интегрированием вперёд–назад полных систем прямых и сопряжённых уравнений, которые для ПФГ представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.2. Глобальная задача

В случае, когда азимутальный масштаб возмущений становится сравнимым с горизонтальной шкалой структуры диска, необходимо решать численно уравнения в частных производных в системах (8)–(10) и (118)–(120), что было выполнено в работе [71] с использованием явной разностной схемы второго порядка (leap-frog) (см., например, работу [76]).

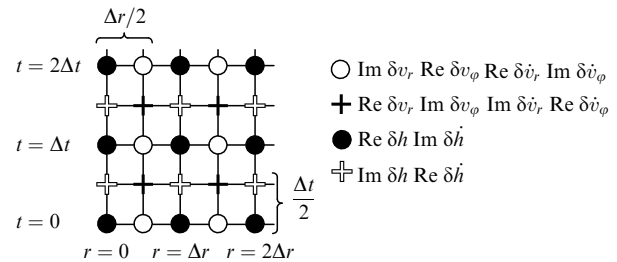


Рис. 10. Иллюстрация к численной схеме интегрирования систем уравнений (8)–(10) и (118)–(120).

Для записи указанной разностной схемы каждое уравнение делится на действительную и мнимую части и на плоскости (r, t) вводится 4 сетки, в узлах которых по соответствующим разностным выражениям вычисляются затем неизвестные величины (рис. 10). Сетки смещены друг относительно друга на половину шага по времени, Δt , и/или на половину шага по радиальной координате, Δr . Благодаря этому приёму для вычисления производных по r и по t можно использовать центральную аппроксимацию, которая обеспечивает точность порядка $(\Delta r)^2$ и $(\Delta t)^2$. Шаг по времени определяется шагом по r из условия Куранта, следующего из локального дисперсионного соотношения, которое можно получить из интегрируемых уравнений.

4.2.1. Сравнение транзитного роста вихрей в глобальном и локальном пространственных пределах. В качестве фонового потока возьмём неограниченный кеплеровский диск, имеющий только внутреннюю границу, находящуюся на $r = r_1$. Чтобы увидеть, как отражается на величине транзитного роста эффект аксиальной геометрии диска и, главное, строгий закон изменения угловой скорости вращения с r , взятый уже с учётом реального градиента сдвига, соответствующего кеплеровскому закону, $\Omega = \Omega(r_1)(r/r_1)^{-3/2}$, примем для упрощения, что остальные величины, входящие в уравнения для возмущений, имеют постоянные значения:

$$\Sigma = \text{const}, \quad a_{\text{eq}} = \frac{\delta}{\sqrt{2n}} (\Omega r)|_{r_1}. \quad (137)$$

В работе [71] показано, что учёт более реалистичного распределения Σ и a_{eq} (например, для случая стандартного аккреционного диска) не меняет качественные выводы, которые даны чуть ниже. Результаты локальных и глобальных расчётов оптимальных возмущений, выполненных на основе вариационного метода, даны на рис. 11.

Здесь сравнивается транзитный рост вихрей с азимутальным масштабом, как меньшим, так и большим толщины диска. Главный качественный вывод заключается в том, что для мелкомасштабных вихрей ($\lambda_\phi < H$) их усиление уменьшается значительно быстрее с переходом к масштабам порядка радиальной шкалы диска ($m \sim 1$), чем для крупномасштабных вихрей. Можно проверить, что для предельного случая глобальных возмущений с $m = 1$ различие значений G для мелкомасштабных и крупномасштабных вихрей для использованных параметров и на интервалах времени до $t \approx 20$ составляет всего лишь 1,5–2 раза. В то же время в случае локальных вихрей, как видно, значения G для

¹⁰ Можно проверить, что величина I , сохранявшаяся для прямых уравнений (21)–(23), становится зависящей от времени в сопряжённых уравнениях (124)–(126) (см. приложение в работе [71]).

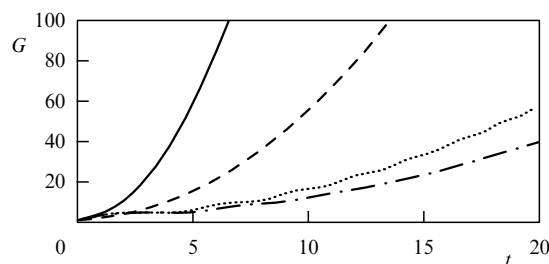


Рис. 11. Сравнение оптимального роста мелкомасштабных и крупномасштабных вихрей (см. раздел 2.3) в глобальном и локальном пространственных пределах. Сплошная и пунктирная кривые рассчитаны для локальных ПФГ по формуле (44) с помощью итерационного цикла для уравнений (21)–(23) и (124)–(126) при $k_y = 12,5$ и $k_y = 0,125$ соответственно. В качестве глобальных возмущений взяты гармоники с $m = 5$. Оптимальные возмущения рассчитаны по формуле (90) с помощью итерационного цикла для уравнений (8)–(10) и (118)–(120) с индексом политропы $n = 3/2$. Исходя из соответствия $(m/r)H \sim k_y$ для аналогичного крупномасштабного вихря был взят диск с $\delta = 0,05$ (штрихпунктирная линия), а для мелкомасштабного — формально толстый диск с $\delta = 5$ (штриховая линия). В обоих случаях время измеряется в единицах $\Omega(r_1)^{-1}$.

$\lambda_\varphi < H$ и $\lambda_\varphi > H$ различаются на несколько порядков. Таким образом, представленный расчёт показывает, что и глобальные крупномасштабные вихри в тонких кеплеровских дисках способны усиливаться в десятки раз на весьма коротких временных интервалах, составляющих несколько кеплеровских периодов на внутренней границе диска. В свою очередь, это может свидетельствовать о важности транзientного роста возмущений для отвода углового момента из диска на масштабах, значительно превышающих толщину диска.

4.2.2. Транзientные спирали и моды в квазикеплеровском торе. В заключение вернёмся к модели диска, рассмотренной нами для иллюстрации матричного метода определения оптимальных возмущений (см. раздел 3.2). Как известно (см., например, работы [81, 82, 96], а также работу [100]), такой поток обладает слабой спектральной неустойчивостью, так как в нём существуют экспоненциально растущие инерционно-акустические моды. Их инкременты, как мы уже упоминали в разделе 2.1, быстро убывают с уменьшением относительной геометрической толщины тора, т.е. с приближением Ω к кеплеровскому значению. Тогда возмущения могут расти только за счёт транзientного механизма сокращения лидирующих спиралей сдвиговым потоком (см. обсуждение в разделе 2.3), что происходит на коротких временах, составляющих несколько характерных кеплеровских периодов в потоке. Однако в промежуточном случае, когда градиент давления в торе ещё достаточно велик, и немодальный, и модальный рост возмущений будет иметь место одновременно, только на разной шкале времён. Экспоненциальный рост мод всегда будет преобладать над транзientным ростом начиная с некоторых достаточно больших интервалов времени. Интересный момент заключается в следующем: по сути, это означает, что при вычислении вариационным методом первого сингулярного значения динамического оператора, т.е. оптимального роста для данного временного промежутка t , с некоторого момента кривая $G(t)$ должна переходить к экспоненциальному росту, соответствующему фактору роста наиболее неустойчивой моды. В то же время

итерационный цикл, всегда сходящийся к оптимальному начальному вектору возмущений $\mathbf{q}(t = 0)$, должен теперь давать не лидирующую транзientную спираль, а моду. Если первая в моменты времени $t > 0$ начинает деформироваться сдвиговым потоком и усиливаться из-за сокращения своего периметра (см. обсуждение в разделе 2.1), то вторая испытывает твердотельное вращение с угловой скоростью, совпадающей с Ω на коротационном радиусе внутри потока, поскольку именно за счёт резонансного обмена энергией с фоновым потоком на этом радиусе и увеличивается её амплитуда. Таким образом, метод оптимизации возмущений не только является инструментом для исследования транзientного роста возмущений, но также позволяет находить инкременты и профили наиболее неустойчивых мод в сдвиговых потоках произвольной сложности, т.е. решать и спектральную задачу.

Пример расчёта транзientной спирали и неустойчивой моды в одном и том же тороидальном потоке путём совместного решения системы (8)–(10) и системы (118)–(120) вариационным методом был приведён на рис. 2 и 1 во введении. При этом мы видим, что уже даже при $\delta = 0,3$ максимальный инкремент очень мал и проходит $\sim 10^3$ кеплеровских времён, прежде чем самая неустойчивая мода увеличит свою амплитуду хотя бы в 2 раза. В то же время, транзientно растущая спираль вырастает примерно в 6 раз уже за несколько оборотов вещества на внутреннем краю диска.

5. Заключение

Эта работа посвящена проблеме транзientной динамики возмущений, представляющей особый интерес в теории астрофизических, и в частности аккреционных, дисков. В однородном кеплеровском потоке невязкой жидкости, в отсутствие условий для появления магниторотационной неустойчивости, не существует экспоненциально растущих малых возмущений. Тем не менее данные наблюдений свидетельствуют о том, что и в таком случае каким-то образом должен реализовываться отток момента импульса на периферию диска. Последнее по крайней мере означает, что должен существовать механизм перехода энергии от регулярного вращательного движения к гидродинамическим возмущениям. В спектрально устойчивых потоках такую роль играет транзientный рост возмущений. Здесь мы обсуждали его главным образом на простейшем примере двумерных вихрей и выяснили, что причиной их роста является сокращение длины вихревых лидирующих спиралей дифференциальным вращением потока (см. рис. 2 и 3). Физически рост энергии вихрей происходит благодаря сохранению их момента импульса, что в локальном пределе выражается сохранением возмущения потенциальной завихренности и существованием инварианта I (см. раздел 2.2). При этом рассмотрены случаи и мелкомасштабных, $k_y \gg 1$, и крупномасштабных, $k_y \ll 1$, вихрей, а также проведено сравнение их оптимального роста с учётом отличной от нуля эффективной вязкости в диске (см. рис. 4). Важным моментом является то, что транзientный рост крупномасштабных вихрей резко усиливается при переходе к сверхкеплеровскому вращению, что может оказаться существенным в релятивистских дисках, где $q > 3/2$. Особое внимание в этой работе мы уделили математическим аспектам немодального ана-

лиза и методике поиска оптимальных возмущений. Подробно обсуждалось, что транзитный рост является следствием ненормальности управляющего динамического оператора задачи и неортогональности его собственных векторов — мод возмущений (см. рис. 5 и 6), а значит, адекватным методом исследования роста произвольных возмущений становится поиск не собственных, а сингулярных векторов этого оператора. Мы рассмотрели два таких метода: матричный и вариационный, применив каждый из них к конкретной задаче (см. соответствующие результаты на рис. 7 и 11). Матричный метод подразумевает дискретное представление динамического оператора, например, в базисе его собственных векторов, вариационный — сводится к итеративному интегрированию системы прямых и сопряжённых уравнений вперёд и назад во времени соответственно. Было подчёркнуто, что вариационный метод является более универсальным и может применяться к исследованию немодальной динамики возмущений в нестационарных потоках, а также для нелинейной задачи.

Как мы обсуждали, транзитный рост возмущений используется в концепции обходного перехода к турбулентности в ламинарных потоках, а также может быть важен как механизм дополнительного усиления оттока момента импульса и темпа аккреции в дисках со слабой турбулентностью. Обратим внимание, что картина турбулентности, возникающей за счёт обходного механизма, фундаментально отличается от "классической", в которой энергия отбирается у основного потока модами, экспоненциально растущими на больших пространственных масштабах, а роль нелинейных взаимодействий состоит лишь в том, чтобы отбирать у них эту энергию и перераспределять её между модами с другим абсолютным значением волнового вектора k (так называемый прямой либо обратный каскад). Это значит, что в фазовом пространстве возникает поток энергии $\epsilon_T(k)$, доставляющий (в случае прямого каскада) кинетическую энергию возмущений на малый масштаб, соответствующий вязкой диссипации. В этой картине распределение мод по направлениям в фазовом пространстве, $\mathbf{k}$, имеет второстепенное значение, а ϵ_T может быть ненулевым только вдоль направления изменения $\mathbf{k}$ по своему абсолютному значению. Совершенно иная ситуация должна иметь место, когда за отбор энергии у основного потока отвечает рассмотренный в этой работе другой линейный механизм — транзитный рост возмущений, демонстрируемый в дисках лидирующими спиралями, т.е. пространственными фурье-гармониками, соответствующими лишь таким значениям $\mathbf{k}$, при которых $k_x/k_y < 0$. В спектрально устойчивом течении, в отсутствие подпитки резервуара лидирующих спиралей, первоначально имеющиеся в среде возмущения неизбежно затухнут из-за того, что лидирующие спирали превратятся в отстающие. Таким образом, существование турбулентного состояния здесь возможно только в случае положительного нелинейного отклика, заключающегося в появлении отличного от нуля ϵ_T и в направлении позиционного изменения вектора $\mathbf{k}$, т.е. по углам фазового пространства, когда отстающие спирали отдают обратно лидирующим спиралям часть своей энергии, достаточную для поддержки транзитного роста. Одновременно другая часть энергии, содержащейся в отстающих спиралях, диссипирует в тепло за счёт их перехода в область больших значений k . При этом

последнее может уже происходить не за счёт прямого каскада, а благодаря чисто линейному процессу закрутки отстающей спирали потоком, т.е. росту со временем отношения $k_x/k_y > 0$ при $k_y = \text{const}$. Как видим, неотъемлемой частью альтернативной картины турбулентности в сдвиговом потоке является *поперечный* каскад, т.е. угловое перераспределение пространственных фурье-гармоник возмущений (см. об этом, например, приложение в обзоре [59]). Поддержка транзитного роста малых возмущений поперечным каскадом детально исследовалась в работе [133] для двумерной модели в течении Куэтта. Столь серьёзные изменения в представлениях о возможной структуре турбулентных движений должны отразиться и на аналитических методах оценки значения коэффициента турбулентной вязкости (см., например, [134]), и на методах анализа численных экспериментов по турбулентности в астрофизических дисках (см., например, [135, 136], где исследовались главным образом спектральные свойства турбулентности, усреднённые по направлениям $\mathbf{k}$). Заметим, что мы не ошиблись здесь, цитируя работы по численным расчётам турбулентности в дисках с магнитным полем, в которых имеет место модальный рост возмущений за счёт магниторотационной неустойчивости. Дело в том, что, как показывают недавние исследования [137, 138], даже в кеплеровском потоке, где действует магниторотационная неустойчивость, на коротких временах оптимальные транзитно растущие возмущения преобладают над экспоненциально растущими модами. Так же как и в немагнитном потоке, эти транзитные возмущения локально представлены сдвиговыми гармониками. Таким образом, и в МГД-турбулентных аккреционных дисках немодальная динамика возмущений может играть лидирующую роль в отборе энергии у основного потока. Указанием на это может быть и ещё одна недавняя работа [139], где аналогично работе [133] в спектрально устойчивом плоскопараллельном сдвиговом потоке с магнитным полем численно исследовался поперечный каскад сдвиговых гармоник и было продемонстрировано, что двумерная турбулентность возникает благодаря положительной обратной связи с линейным транзитным ростом сдвиговых гармоник. Можно вспомнить и другой пример сдвигового течения, когда обходной путь перехода к турбулентности оказывается предпочтительнее "классического", несмотря на то что в нём присутствуют растущие моды: плоское течение Пуазейля. В качестве подтверждения этому упомянем работы [140, 141], где в таком течении численно исследовалась не развившаяся уже турбулентность (как это делается в подавляющем большинстве работ, касающихся МГД-турбулентности в кеплеровском потоке), а ряд сценариев генерации турбулентности из регулярных начальных малых возмущений различного типа (см. также гл. 9 книги [6]). При этом оказалось, что популярный ранее сценарий срыва потока в турбулентное состояние за счёт вторичной неустойчивости мод, достигших насыщения, требует значительно большего времени и/или значительно большей амплитуды начальных возмущений, чем такой же срыв потока в турбулентное состояние, но за счёт вторичной неустойчивости возмущений в форме так называемых "прожилок" (streaks), вырастающих благодаря транзитному механизму. Заметим ещё, что, как видно из рис. 1 работы [140], время развития турбулентности из регулярных начальных воз-

мушений сильно зависит от амплитуды последних: и это неудивительно, поскольку сдвиговой пространственной фурье-гармонике меньшей амплитуды требуется большее время для того, чтобы вырасти до амплитуды насыщения, когда в силу вступает вторичная неустойчивость, непосредственно ведущая к срыву в турбулентность. Видно, что время такого роста может составлять сотни характерных сдвиговых времён в потоке — и тем не менее это никак не сказывается впоследствии на свойствах и силе турбулентных движений. Хотя пока подобные результаты имеются в нашем распоряжении только для плоскопараллельных течений, в будущем они могут быть получены и для квазикеплеровского течения в области больших чисел Рейнольдса, поскольку локально такое течение отличается от плоскопараллельного только наличием стабилизирующей поток кориолисовой силы. В качестве полезной иллюстрации к данному кругу вопросов были также предложены простые конечно-размерные динамические модели ненормальных систем с нелинейной положительной обратной связью, иллюстрирующие основные свойства перехода к турбулентности в спектрально устойчивых сдвиговых потоках (см. [48, 142]). Так, на рис. 10 работы [48] можно увидеть, как время достижения такой упрощённой системой одного и того же "турбулентного" состояния возрастает с уменьшением начальной амплитуды возмущений, пока, наконец, не принимает бесконечного значения.

В заключение ещё раз отметим, что здесь не шла речь о трёхмерной динамике возмущений. Между тем существуют указания на то, что учёт естественной неоднородности диска в вертикальном направлении за счёт вертикального градиента плотности и давления даёт качественно новую картину как транзитного роста возмущений, так и последующего перехода к турбулентности (см. [143]). При этом динамика возмущений является существенно трёхмерной, и можно показать, что для трёхмерных транзитных вихрей также существует аналог инварианта движения, I , сохраняющийся во времени (см. [60, 63]). Новые численные расчёты, проведённые в работе [144], также указывают на то, что учёт вертикальной неоднородности диска приводит к его дестабилизации в докритическом режиме при больших числах Рейнольдса, в отличие от того, что наблюдалось в однородном потоке (см. [25]).

Д.Н. Раздобурдин поддержан грантом РФФИ 14-12-00146 за написание раздела 3 данного обзора. В.В. Журавлёв поддержан частично грантами РФФИ 14-02-91172 и 15-02-08476, а также частично программой 9 Президиума РАН.

Список литературы

1. Armitage P J *Astrophysics of Planet Formation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010)
2. Youdin A N, Kenyon S J, in *Planets, Stars and Stellar Systems* Vol. 3 *Solar and Stellar Planetary Systems* (Eds T D Oswalt, L M French, P Kalas) (Berlin: Springer, 2013) p. 1
3. Remillard R A, McClintock J E *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **44** 49 (2006)
4. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидродинамика* Ч. 1 (М.: Наука, 1965); Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics* Vol. 1 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971)
5. Menou K *Science* **288** 2022 (2000)
6. Schmid P J, Henningson D S *Stability and Transition in Shear Flows* (New York: Springer, 2001)
7. Henningson D S, Reddy S C *Phys. Fluids* **6** 1396 (1994)
8. Balbus S A, Hawley J F *Astrophys. J.* **376** 214 (1991)
9. Hawley J F, Gammie S F, Balbus S A *Astrophys. J.* **440** 742 (1995)
10. Stone J M et al. *Astrophys. J.* **463** 656 (1996)
11. Balbus S A, Hawley J F *Rev. Mod. Phys.* **70** 1 (1998)
12. Balbus S A *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **41** 555 (2003)
13. Фридман А М, Бисикало Д В *УФН* **178** 577 (2008); Fridman A M, Bisikalo D V *Phys. Usp.* **51** 551 (2008)
14. Курбатов Е П, Бисикало Д В, Кайгородов П В *УФН* **184** 851 (2014); Kurbatov E P, Bisikalo D V, Kaigorodov P V *Phys. Usp.* **57** 787 (2014)
15. Lovelace R V E et al. *Astrophys. J.* **513** 805 (1999)
16. Klahr H, Hubbard A *Astrophys. J.* **788** 21 (2014)
17. Rayleigh Lord "On the dynamics of revolving fluids", in *Scientific Papers* Vol. 6 (Cambridge: The Univ. Press, 1916) p. 447
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Физматлит, 2006); Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
19. Rayleigh Lord "On the stability or instability of certain fluid motions", in *Scientific Papers* Vol. 1 (Cambridge: The Univ. Press, 1880) p. 474
20. Charney J G, Fjörtoft R, von Neumann J *Tellus* **2** 237 (1950)
21. Drazin P G, Reid W H *NASA STI/Recon Tech. Rep. A* **82** 17950 (1981)
22. Joseph D D *NASA STI/Recon Tech. Rep. A* **77** 287 (1976)
23. Balbus S A, Hawley J F, Stone J M *Astrophys. J.* **467** 76 (1996)
24. Hawley J F, Balbus S A, Winters W F *Astrophys. J.* **518** 394 (1999)
25. Shen Y, Stone J M, Gardiner T A *Astrophys. J.* **653** 513 (2006)
26. Ji H et al. *Nature* **444** 343 (2006)
27. Schartman E, Ji H, Burin M J *Rev. Sci. Instrum.* **80** 024501 (2009)
28. Schartman E et al. *Astron. Astrophys.* **543** 13 (2012)
29. Lesur G, Longaretti P Y *Astron. Astrophys.* **444** 25 (2005)
30. Taylor G I *Proc. R. Soc. London A* **157** 546 (1936)
31. Wendt G *Ann. Physik* **409** 445 (1933)
32. Zeldovich Y B *Proc. R. Soc. London A* **374** 299 (1981)
33. Richard D, Zahn J-P *Astron. Astrophys.* **347** 734 (1999)
34. Longaretti P-Y *Astrophys. J.* **576** 587 (2002)
35. Paoletti M S, Lathrop D P *Phys. Rev. Lett.* **106** 024501 (2011)
36. Paoletti M S et al. *Astron. Astrophys.* **547** 11 (2012)
37. Avila M *Phys. Rev. Lett.* **108** 124501 (2012)
38. Edlund E M, Ji H *Phys. Rev. Lett.* **89** 021004 (2014)
39. Kelvin L *Phil. Mag.* **23** 459 (1887)
40. Orr W McF *Proc. R. Irish Acad. A* **27** 9 (1907)
41. Orr W McF *Proc. R. Irish Acad. A* **27** 69 (1907)
42. Goldreich P, Lynden-Bell P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **130** 125 (1965)
43. Julian W H, Toomre A *Astrophys. J.* **146** 810 (1966)
44. Farrell B F *Phys. Fluids* **31** 2093 (1988)
45. Butler K M, Farrell B F *Phys. Fluids A* **4** 1637 (1992)
46. Reddy S C, Schmid P J, Henningson D S *SIAM J. Appl. Math.* **53** 15 (1993)
47. Reddy S C, Henningson D S *J. Fluid Mech.* **252** 209 (1993)
48. Trefethen L N et al. *Science* **261** 578 (1993)
49. Schmid P J *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39** 129 (2007)
50. Ioannou P J, Kakouris A *Astrophys. J.* **550** 931 (2001)
51. Yecko P A *Astron. Astrophys.* **425** 385 (2004)
52. Mukhopadhyay B, Afshordi N, Narayan R *Astrophys. J.* **629** 383 (2005)
53. Meseguer A *Phys. Fluids* **14** 1655 (2002)
54. Marettke S, Hof B, Avila M J *Fluid Mech.* **742** 254 (2014)
55. Coles D J *Fluid Mech.* **21** 385 (1965)
56. Ломинадзе Д Г, Чагелашвили Г Д, Чанашвили П Г *Письма в Астрон. журн.* **14** 856 (1988); Lominadze D G, Chagelishvili G D, Chanishvili R G *Sov. Astron. Lett.* **14** 364 (1988)
57. Фридман А М *Письма в Астрон. журн.* **15** 1122 (1989); Fridman A M *Sov. Astron. Lett.* **15** 487 (1989)
58. Chagelishvili G D et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 3178 (1997)
59. Chagelishvili G D et al. *Astron. Astrophys.* **402** 401 (2003)
60. Tevzadze A G et al. *Astron. Astrophys.* **407** 779 (2003)

61. Afshordi N, Mukhopadhyay B, Narayan R *Astrophys. J.* **629** 373 (2005)
62. Bodo G et al. *Astron. Astrophys.* **437** 9 (2005)
63. Tevzadze A G, Chagelishvili G D, Zahn J P *Astron. Astrophys.* **478** 9 (2008)
64. Heinemann T, Papaloizou J C B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **397** 52 (2009)
65. Heinemann T, Papaloizou J C B *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **397** 64 (2009)
66. Tevzadze A G et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **401** 901 (2010)
67. Volponi F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **406** 551 (2010)
68. Salhi A, Pieri A B *Phys. Rev. E* **90** 043003 (2014)
69. Umrhan O M et al. *Astron. Astrophys.* **446** 1 (2006)
70. Rebusco P et al. *Phys. Fluids* **21** 076601 (2009)
71. Zhuravlev V V, Razdoburdin D N *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **442** 870 (2014)
72. Pringle J E, King A R *Astrophysical Flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007)
73. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976); Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)
74. Тассуль Ж-Л *Теория вращающихся звезд* (М.: Мир, 1982); Tassoul J-L *Theory of Rotating Stars* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1978)
75. Okazaki F T, Kato S, Fukue J *Astron. Soc. Jpn.* **39** 457 (1987)
76. Frank J, Robertson J A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **232** 1 (1988)
77. Kojima Y *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **236** 589 (1989)
78. Kojima Y, Miyama S M, Kubotani H *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **238** 753 (1989)
79. Чурилов С М, Шухман И Г *Астрон. циркуляр.* (1157) 1 (1981)
80. Blaes O V, Glatzel W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **220** 253 (1986)
81. Glatzel W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **225** 227 (1987)
82. Glatzel W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **228** 77 (1987)
83. Narayan R, Goodman J, in *Theory of Accretion Disks. Proc. of a NATO Advanced Research Workshop, Garching, Germany, March 6–10, 1989* (NATO ASI Ser. C, Vol. 290, Ed. F Meyer) (Dordrecht: Kluwer, 1989) p. 231
84. Narayan R, in *Structure and Emission Properties of Accretion Disks. Proc. of IAU Colloq. 129, the 6th Institute d'Astrophysique de Paris (IAP) Meeting, Paris, France, 2–6 July, 1990* (Eds C Bertout, S Collin-Souffrin, J P Lasota) (Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres, 1991) p. 153
85. Papaloizou J C B, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **208** 721 (1984)
86. Papaloizou J C B, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **213** 799 (1985)
87. Papaloizou J C B, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **225** 267 (1987)
88. Goldreich P, Goodman J, Narayan R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **221** 339 (1986)
89. Kojima Y *Prog. Theor. Phys.* **75** 251 (1986)
90. Kato S *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **39** 645 (1987)
91. Sekiya M, Miyama S M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **234** 107 (1988)
92. Friedman J L, Schutz B F *Astrophys. J.* **221** 937 (1978)
93. Goldreich P, Narayan R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **213** 7P (1985)
94. Drury L O *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **217** 821 (1985)
95. Narayan R, Goldreich P, Goodman J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **228** 1 (1987)
96. Glatzel W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **231** 795 (1988)
97. Savonije G J, Heemskerk M H M *Astron. Astrophys.* **240** 191 (1990)
98. Степанянц Ю А, Фабрикант А Л *УФН* **159** 83 (1989); Stepanyants Yu A, Fabrikant A L *Sov. Phys. Usp.* **32** 783 (1989)
99. Журавлев В В, Шакура Н И *Письма в Астрон. журн.* **33** 604 (2007); Zhuravlev V V, Shakura N I *Astron. Lett.* **33** 536 (2007)
100. Журавлев В В, Шакура Н И *Письма в Астрон. журн.* **33** 754 (2007); Zhuravlev V V, Shakura N I *Astron. Lett.* **33** 673 (2007)
101. Hill G W *Am. J. Math.* **1** 5 (1878)
102. Regev O, Umrhan O M *Astron. Astrophys.* **481** 21 (2008)
103. Binney J, Tremaine S *Galactic Dynamics* 2nd ed. (Princeton: Princeton Univ. Press, 2008)
104. Johnson B M, Gammie C F *Astrophys. J.* **626** 978 (2005)
105. Chagelishvili G D, Rogava A D, Segal I N *Phys. Rev. E* **50** R4283 (1994)
106. Бреховских Л М, Гончаров В В *Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн)* (М.: Наука, 1982); Brekhovskikh L M, Goncharov V *Mechanics of Continua and Wave Dynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
107. Чагелишвили Г Д, Чанишвили Р Г, Ломинадзе Дж Г *Письма в ЖЭТФ* **63** 517 (1996); Chagelishvili G D, Chanishvili R G, Lominadze D G *JETP Lett.* **63** 543 (1996)
108. Бирман М Ш и др. *Функциональный анализ* (Под общ. ред. С Г Крейна) (М.: Наука, 1972); Vilenkin N Ya et al. *Functional Analysis* (Ed. S G Krein) (Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972)
109. Колмогоров А Н, Фомин С В *Элементы теории функций и функционального анализа* (М.: Наука, 1968); Kolmogorov A N, Fomin S V *Introductory Real Analysis* (New York: Dover Publ., 1975)
110. Ильин В А, Садовничий В А, Сендов Бл Х *Математический анализ. Т. 2 Продолжение курса* (М.: Изд-во МГУ, 1987)
111. Korn G A, Korn T M *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1968); Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1984)
112. Farrell B F, Ioannou P J *J. Atmos. Sci.* **53** 2025 (1996)
113. Раздобурдин Д Н, Журавлев В В *Письма в Астрон. журн.* **38** 138 (2012); Razdoburdin D N, Zhuravlev V V *Astron. Lett.* **38** 117 (2012)
114. Golub G H, Reinsch C *Numer. Math.* **14** 403 (1970)
115. Golub G H, Van Loan C F *Matrix Computations* (Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1996)
116. Hanifi A, Schmid P J, Henningson D S *Phys. Fluids* **8** 826 (1996)
117. Malik M, Alam M, Dey J *Phys. Fluids* **18** 034103 (2006)
118. Zhuravlev V V, Shakura N I *Astron. Nachr.* **330** 84 (2009)
119. Kato S *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **53** 1 (2001)
120. Heading J *An Introduction to Phase-Integral Methods* (Mineola: Dover Publ., 2013); Хединг Дж *Введение в метод фазовых интегралов. (Метод ВКБ)* (М.: Мир, 1965)
121. Luchini P J *Fluid Mech.* **404** 289 (2000)
122. Lin C *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Univ. Press, 1955); Линь Ц *Теория гидродинамической устойчивости* (М.: ИЛ, 1958)
123. Andersson P, Berggren M, Henningson D S *Phys. Fluids* **11** 134 (1999)
124. Farrell B F, Ioannou P J *J. Atmos. Sci.* **53** 2041 (1996)
125. Corbett P, Bottaro A *J. Fluid Mech.* **435** 1 (2001)
126. Guégan A, Schmid P J, Huerre P *J. Fluid Mech.* **566** 11 (2006)
127. Gunzburger M D *Perspectives in Flow Control and Optimization* (Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003)
128. Марчук Г И *Матем. сб.* **189** (10) 75 (1998); Marchuk G I *Sbornik Mathematics* **189** 1505 (1998)
129. Cherubini S et al. *J. Fluid Mech.* **656** 231 (2010)
130. Cherubini S et al. *J. Fluid Mech.* **689** 221 (2011)
131. Cherubini S, De Palma P J *Fluid Mech.* **716** 251 (2013)
132. Richtmyer R D *Principles of Advanced Mathematical Physics Vol. 2* (New York: Springer-Verlag, 1981); Рихтмайер Р *Принципы современной математической физики Т. 2* (М.: Мир, 1984)
133. Horton W et al. *Phys. Rev. E* **81** 066304 (2010)
134. Canuto V M, Goldman I, Hubickyj O *Astrophys. J. Lett.* **280** L55 (1984)
135. Simon J B, Hawley J F, Beckwith K *Astrophys. J.* **690** 974 (2009)
136. Davis S W, Stone J M, Pessah M E *Astrophys. J.* **713** 52 (2010)
137. Squire J, Bhattacharjee A *Astrophys. J.* **797** 15 (2014)
138. Squire J, Bhattacharjee A *Phys. Rev. Lett.* **113** 025006 (2014)
139. Mamatsashvili G R et al. *Phys. Rev. E* **89** 043101 (2014)

140. Schmid P J, Reddy S C, Henningson D S, in *Advances in Turbulence VI* (Eds S Gavrilakis, L Machiels, P A Monkewitz) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996) p. 381
141. Reddy S C et al. *J. Fluid Mech.* **365** 269 (1998)
142. Waleffe F *Phys. Fluids* **7** 3060 (1995)
143. Lominadze J G, in *Advances in Plasma Astrophysics. Proc. of the Intern. Astronomical Union, IAU Symp.* Vol. 274 (Eds A Bonanno, E de Gouveia Dal Pino, A G Kosovichev) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011) p. 318
144. Marcus P et al. *Astrophys. J.* **808** 87 (2015); arXiv:1410.8143

Transient dynamics of perturbations in astrophysical disks

D.N. Razdoburdin

*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskie gory, 119991 Moscow, Russian Federation;
Lomonosov Moscow State University, P.K. Sternberg State Astronomical Institute,
Universitetskii prosp. 13, 119991 Moscow, Russian Federation*

V.V. Zhuravlev

*Lomonosov Moscow State University, P.K. Sternberg State Astronomical Institute,
Universitetskii prosp. 13, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: zhuravlev@sai.msu.ru*

This paper reviews some aspects of one of the major unsolved problems in understanding astrophysical (in particular, accretion) disks: whether the disk interiors may be effectively viscous in spite of the absence of magnetorotational instability? In this case a rotational homogeneous inviscid flow with a Keplerian angular velocity profile is spectrally stable, making the transient growth of perturbations a candidate mechanism for energy transfer from the regular motion to perturbations. Transient perturbations differ qualitatively from perturbation modes and can grow substantially in shear flows due to the nonnormality of their dynamical evolution operator. Since the eigenvectors of this operator, alias perturbation modes, are mutually nonorthogonal, they can mutually interfere, resulting in the transient growth of their linear combinations. Physically, a growing transient perturbation is a leading spiral whose branches are shrunk as a result of the differential rotation of the flow. This paper discusses in detail the transient growth of vortex shearing harmonics in the spatially local limit as well as methods for identifying the optimal (fastest growth) perturbations. Special attention is given to obtaining such solutions variationally, by integrating the direct and adjoint equations forward and back in time, respectively. The material is presented in a newcomer-friendly style.

Keywords: hydrodynamics, turbulence, accretion disks

PACS numbers: **02.30.-f**, 02.60.Pn, 47.32.C-, 97.10.Gz, 97.82.Jw, 98.62.Mw

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511a.1129

Bibliography — 144 references

Received 18 May 2015, revised 1 September 2015

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (11) 1129–1161 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (11) (2015)