

педестала, сформированного длинноволновой частью спектра, и предельно короткого импульса, соответствующего излучению гармоник. Фильтрация, отсекающая длинноволновую часть спектра, позволяет выделить излучение оптических гармоник с огибающей, показанной на рис. 9в. Спектрально ограниченный импульс, получаемый посредством идеальной компенсации фазы для излучения филамента после такой спектральной фильтрации, имеет длительность (рис. 9г) около 2 фс, что соответствует примерно половине периода поля для центральной длины волны электромагнитного излучения (1,1 мкм), образуемого после фильтрации всплеска.

7. Заключение

На основе технологии оптического параметрического усиления chirпированных импульсов в поле пикосекундных импульсов лазерной накачки с энергией на уровне 1 Дж реализована генерация импульсов среднего ИК-диапазона с длительностью менее 100 фс и пиковой мощностью свыше 0,3 ТВт. Экспериментальные исследования, выполненные с помощью фемтосекундных импульсов этого класса, демонстрируют возможность передачи через атмосферу импульсов электромагнитного излучения с энергией свыше 20 мДж в режиме одиночного лазерного филамента. В представленных экспериментах реализованы новые режимы генерации оптических гармоник, а также выяснены условия и предложены методы филаментационной компрессии субтераваттных импульсов среднего ИК-диапазона до длительностей, соответствующих нескольким периодам светового поля.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-02-01465, 13-02-92115, 14-02-00784, 14-29-07182) и фонда Роберта Уелча (грант А-1801). Исследование свойств быстропротекающих нелинейно-оптических процессов в поле сверхкоротких импульсов среднего ИК-диапазона выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00772). А.А.В. благодарит фонд "Династия" за поддержку.

Список литературы

- Colosimo P et al. *Nature Phys.* **4** 386 (2008)
- Agostini P, DiMauro L F *Contemp. Phys.* **49** 179 (2008)
- Shiner A D et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 073902 (2009)
- Serebryannikov E E, Zheltikov A M *Phys. Rev. Lett.* **113** 043901 (2014)
- Voronin A A, Zheltikov A M *Phys. Rev. A* **90** 043807 (2014)
- Andriukaitis G et al. *Opt. Lett.* **36** 2755 (2011)
- Kartashov D et al. *Opt. Lett.* **37** 2268 (2012)
- Kartashov D et al. *Opt. Lett.* **37** 3456 (2012)
- Popmintchev T et al. *Science* **336** 1287 (2012)
- Kartashov D et al. *Opt. Lett.* **38** 3194 (2013)
- Kartashov D et al. *Phys. Rev. A* **86** 033831 (2012)
- Bergé L *Opt. Express* **16** 21529 (2008)
- Pugžlys A et al. *Opt. Lett.* **34** 2075 (2009)
- Mitrofanov A V et al. *Opt. Lett.* **39** 4659 (2014)
- Bergé L et al. *Rep. Prog. Phys.* **70** 1633 (2007)
- Желтиков А М *УФН* **176** 623 (2006); Zheltikov A M *Phys. Usp.* **49** 605 (2006)
- Желтиков А М *УФН* **181** 33 (2011); Zheltikov A M *Phys. Usp.* **54** 29 (2011)
- Коротеев Н И, Желтиков А М *УФН* **169** 385 (1999); Zheltikov A M *Phys. Usp.* **42** 321 (1999)

PACS numbers: **12.20.-m**, 42.65.Re, 52.65.Rr
DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501i.0103

Квантово-электродинамические каскады в интенсивном лазерном поле

Н.Б. Нарожный, А.М. Федотов

Показано, что в интенсивном лазерном поле, наряду с каскадами, аналогичными широким атмосферным ливням, могут возникать самоподдерживающиеся каскады, черпающие энергию из поля. Такие каскады при интенсивности порядка или больше 10^{24} Вт см⁻² могут инициироваться даже покоящейся частицей, находящейся в фокальной области жёстко сфокусированного лазерного импульса. Эффект возникновения каскадов может существенно изменить течение любого процесса, происходящего в лазерном поле сверхвысокой интенсивности. При очень больших интенсивностях развитие таких каскадов приводит к истощению лазерного поля. Предложена схема эксперимента, которая позволит наблюдать оба типа каскадов одновременно уже на лазерных установках следующего поколения.

Ключевые слова: квантово-электродинамические каскады, лазеры сверхвысокой интенсивности, высокоэнергетичные пучки

1. Введение

Создание во второй половине 1980-х годов технологии усиления chirпированных импульсов (Chirped Pulse Amplification, CPA) [1] и её дальнейшее развитие привели к созданию петаваттных лазерных установок, генерирующих короткие импульсы когерентного оптического излучения с пиковой интенсивностью до 10^{22} Вт см⁻² [2]. Уже в 2016 г. в рамках европейского проекта ELI (Extreme Light Infrastructure) [3] планируется ввести в эксплуатацию три лазера с интенсивностью 10^{24} Вт см⁻². В перспективе в рамках проектов ELI, а также XCELS (Exawatt Center for Extreme Light Studies) в Институте прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде [4] планируется создание сверхмощных 200-петаваттных лазеров, которые обеспечат генерацию фемтосекундных импульсов с интенсивностью порядка 10^{26} Вт см⁻² или даже выше. Это открывает обширное поле для новых экспериментальных исследований. Среди приоритетных направлений фундаментальных исследований — лазерно-плазменное ускорение электронов и ионов, новые яркие источники излучения в жёстком рентгеновском диапазоне и γ -диапазоне, фотоядерная физика (в том числе управление ядерными реакциями с помощью лазерного поля), динамика ультрарелятивистской плазмы в экстремальных условиях ("лабораторная астрофизика"). Интенсивно обсуждаются возможности разнообразных приложений, начиная с создания "настольных" ускорителей элементарных частиц и ядер и заканчивая материаловедением и адронной терапией.

Несомненный интерес вызывает принципиальная возможность экспериментального изучения квантовой электродинамики в интенсивном внешнем поле, в том числе эффектов поляризации вакуума внешним полем: рождения внешним полем электрон-позитронных пар, двойного лучепреломления в вакууме, генерации гармо-

Н.Б. Нарожный, А.М. Федотов. Национальный исследовательский ядерный университет "Московский инженерно-физический институт", Москва, РФ. E-mail: narozhny@theor.mephi.ru

ник, эффектов самофокусировки и взаимной фокусировки (дефокусировки) в вакууме и т.д. С начала 1960-х годов в этой области было выполнено несколько десятков расчётов фундаментальных квантово-электродинамических процессов (в том числе вероятностей излучения и поглощения фотона, рождения пары фотоном и однофотонной аннигиляции пары, расщепления фотона, поляризованного и массового операторов — в постоянном поле и поле плоской монохроматической волны), в которых внешнее поле учитывалось непертурбативно. Обзор работ, выполненных до 1985 г., а также подробный список литературы можно найти в [5, 6]. До настоящего времени эксперименты по проверке эффектов нелинейной квантовой электродинамики в сильном поле ограничиваются исследованиями, проведёнными в 1996–1999 гг. на линейном ускорителе SLAC (Stanford Linear Accelerator Center). В этих работах изучался эффект рассеяния лазерного импульса интенсивностью 10^{18} Вт см⁻² на электронном пучке с энергией 46,6 ГэВ (нелинейный комптон-эффект) [7]. Были также зафиксированы акты рождения электрон-позитронных пар жёсткими фотонами, возникающими в результате нелинейного комптон-эффекта [8]. Подробное описание этих экспериментов дано в работе [9].

В связи с тем, что уже в настоящее время доступная для экспериментов интенсивность лазерного излучения возросла до 10^{22} Вт см⁻², а в рамках проектов ELI и XCELS планируется достигнуть значений до 10^{26} Вт см⁻² и выше, возникают уникальные возможности для исследования как уже наблюдавшихся квантово-электродинамических эффектов на новом техническом уровне, так и совершенно новых, до сих пор экспериментально не изученных, нелинейных вакуумных эффектов.

Так, при повторении SLAC-экспериментов на уровне планируемых сверхвысоких интенсивностей результатом столкновения высокоэнергетических частиц с лазерным импульсом будут уже не редкие единичные события рождения пар, а целые ливни (каскады) таких событий [10, 11]. Такие каскады последовательных излучений жёстких фотонов и рождения ими электрон-позитронных пар являются цепной реакцией, продолжающейся вплоть до момента полной потери энергии заряженными частицами, и очень напоминают широкие атмосферные ливни, порождаемые космическими частицами. Мы будем называть их каскадами типа S (от англ. shower — ливень) или S-каскадами. Для планирования экспериментов на лазерных установках следующего поколения весьма желательно провести моделирование процессов в этом новом режиме. Следует отметить, что при достаточно высоких, но, тем не менее, реалистичных интенсивностях лазерного поля для получения корректных результатов может потребоваться учёт всего множества радиационных поправок, возникающих от вставки неограниченного числа поляризационных петель, поскольку параметр разложения теории возмущений в этих условиях может оказаться больше единицы [12].

В недавних работах [13, 14] на основе простых оценок предсказано, что в электромагнитных полях при интенсивностях лазерного импульса начиная со значений порядка 10^{24} Вт см⁻² следует ожидать возникновения "спонтанных" ливней, инициированных первоначально медленными заряженными частицами. В этом случае лазерное поле играет двойную роль. Кроме того что лазерное поле представляет собой мишень для частиц высокой энергии, оно является постоянно работающим ускорителем, который восстанавливает потери энергии быстрых заряженных частиц на излучение. В результате

развитие каскада оказывается самоподдерживающимся, а его множественность ограничена уже не начальной энергией затравочной частицы, а длительностью импульса или временем полного выталкивания всех заряженных частиц из фокуса лазерного поля вследствие пондеромоторного эффекта. В этом отношении самоподдерживающийся квантово-электродинамический каскад напоминает лавинный пробой диэлектрика в сильном электрическом поле. Мы будем называть такие каскады каскадами типа А (от англ. avalanche — лавина). Предсказание существования А-каскадов кардинально меняет представления о характере взаимодействия интенсивных лазерных полей с веществом. Учёт образования лавин становится необходимым для описания эффектов взаимодействия при интенсивностях лазерного излучения свыше 10^{24} Вт см⁻² и планирования соответствующих экспериментов.

2. А-каскады

В этом разделе мы рассмотрим теорию каскадов А-типа. Предположим, что в начальный момент в центре фокальной области лазерного импульса в состоянии покоя находится затравочная заряженная частица (электрон). Взаимодействие частицы с полем определяется двумя параметрами: ξ и χ_e (см., например, [5, 6]),

$$\xi = \frac{eE}{m\omega} \sim \frac{eE\lambda}{m} \sim \frac{\lambda}{l_C} \frac{E}{E_S}, \quad \chi_e = \gamma \frac{E_{\perp}}{E_S}, \quad (1)$$

где λ и ω — длина волны и частота лазера, $\gamma = 1/(1-v^2)^{1/2}$ — лоренц-фактор частицы, $l_C = 1/m = 3,86 \times 10^{-11}$ см — комптоновская длина, E_{\perp} — компонента поля, перпендикулярная скорости частицы, $E_S = m^2/e = 1,32 \times 10^{16}$ В см⁻¹ — характерное квантово-электродинамическое поле¹. Параметр ξ не зависит от постоянной Планка \hbar и является классическим параметром нелинейности. При $\xi \ll 1$ применима теория возмущений по внешнему полю, а при $\xi \gtrsim 1$ взаимодействие частицы с внешним полем становится многофотонным. Параметр χ_e является динамическим квантовым параметром, он ответствен за величину нелинейных квантовых эффектов. Этот параметр можно рассматривать как меру напряжённости внешнего поля в системе покоя заряженной частицы ($\gamma = 1$). Отметим, что в случае поля плоской монохроматической волны ξ и χ_e являются релятивистски и калибровочно инвариантными параметрами,

$$\xi^2 = -\frac{e^2 \langle A^{\mu} A_{\mu} \rangle}{m^2}, \quad \chi_e^2 = \frac{e^2 \langle (F_{\mu\nu} p^{\nu})^2 \rangle}{m^6}, \quad (2)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Взаимодействие фотона с лазерным полем характеризуется динамическим квантовым параметром χ_{γ} , который определяется так же, как и для электрона в (1), но с $\gamma = \varepsilon_{\gamma}/m$, где ε_{γ} — энергия фотона.

Квантово-электродинамический каскад представляет собой цепочку элементарных процессов излучения фотона электроном (позитроном) и фоторождения пары (рис. 1). Длина формирования этих процессов определяется параметром ξ : $l_f \sim \lambda/\xi$ [5, 6]. Мы предполагаем, что пиковая напряжённость лазерного импульса E_0 удовлетворяет по крайней мере неравенству $E_0 \gtrsim 10^{-3} E_S$. Это соответствует $\xi \gtrsim 10^3$, или интенсивности лазера $I \gtrsim 5 \times 10^{23}$ Вт см⁻². Для таких полей $l_f \lesssim 10^{-3} \lambda$ и при вычислении вероятностей элементарных процессов поле можно рассматривать как постоянное (приближение локально

¹ В работе используется естественная система единиц $\hbar = c = 1$.

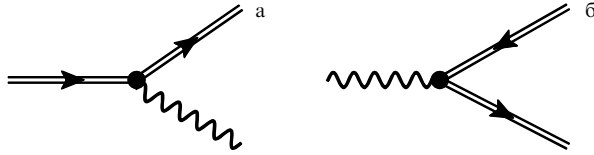


Рис. 1. Квантово-электродинамические процессы первого порядка во внешнем поле: (а) излучение фотона, (б) рождение пары фотоном. Двойные линии, направленные вправо (влево), соответствуют электронам (позитронам), взаимодействующим с внешним полем; волнистые линии соответствуют фотонам.

постоянного поля). Более того, в формировании каскада могут принимать участие только частицы с параметрами $\chi_{e,\gamma} \gtrsim 1$, что необходимо для того, чтобы заряженная частица смогла излучить жёсткий фотон, способный затем породить пару (при $\chi_\gamma \ll 1$ вероятность рождения пары экспоненциально мала). В нашем случае это означает, что параметры $\chi_{e,\gamma}$ значительно превышают чисто полевые инварианты, приведённые к безразмерному виду нормированием на характерное поле E_S , и, следовательно, внешнее поле можно считать постоянным скрещённым полем [5, 6]. Вероятности элементарных процессов в постоянном скрещённом поле впервые были вычислены А.И. Никишовым и В.И. Ритусом [5, 6]. При $\chi_{e,\gamma} \gtrsim 1$ для оценки вероятностей элементарных процессов можно воспользоваться выражениями

$$W_{e,\gamma} \sim \frac{\alpha m^2}{\varepsilon_{e,\gamma}} \chi_{e,\gamma}^{2/3}, \quad \chi_{e,\gamma} \gg 1. \quad (3)$$

В нашей задаче $W_{e,\gamma}$ определяют времена жизни электрона и фотона по отношению к процессу излучения жёсткого фотона и рождения пары соответственно,

$$t_{e,\gamma} \sim \frac{1}{W_{e,\gamma}}. \quad (4)$$

Для частиц с $\chi_{e,\gamma} \sim 1$ времена жизни $t_{e,\gamma} \sim (1/\alpha m)(E_0/E_S)$ оказываются в $1/\alpha$ раз больше времён формирования процессов $t_f = l_f$. Для оценки это позволяет считать, что каскад развивается следующим образом. Первоначально покоившаяся частица разгоняется внешним полем так, что её параметр χ_e возрастает до значения $\chi_e \sim 1$ и через промежуток времени $\sim t_e$ излучает жёсткий фотон, который затем рождает пару, а частица, у которой параметр χ_e из-за отдачи уменьшился на величину χ_γ , за то же время опять разгоняется до $\chi_e \sim 1$ и снова излучает жёсткий фотон и т.д. По такой же схеме развиваются и ветви каскада, порождённые вторичными частицами. Разумеется, предложенная схема может реализоваться, только если время ускорения, определённое соотношением $t_{acc} d\chi dt \sim 1$, меньше или порядка времён $t_{e,\gamma}$, которые в свою очередь должны быть много меньше времени нахождения частицы в фокальной области импульса t_{esc} , т.е. много меньше либо длительности импульса, либо времени, за которое частица будет вытолкнута из фокальной области пондеромоторной силой. При этом, так как за время $t < t_{acc}$ частица не способна излучить жёсткий фотон, можно считать, что в промежутках между актами излучения она движется по классической траектории. Таким образом, каскад может развиваться, если соблюдается иерархия времён:

$$t_{acc} \lesssim t_{e,\gamma} \ll t_{esc}. \quad (5)$$

Длина свободного пробега электрона много больше длины формирования процесса излучения, поэтому при

оценке t_{acc} поле уже нельзя считать постоянным и скрещённым и нужно использовать какую-то разумную модель, позволяющую решить классическое уравнение движения частицы. Отметим, что эффект развития каскада может присутствовать только в таких полях, в которых параметр χ_e не является интегралом движения. В частности, А-каскад не возникает в случаях поля плоской волны или постоянного поля. Мы используем модель однородного чисто электрического поля, вращающегося с частотой лазерного импульса ω . Такое поле возникает в пучностях циркулярно поляризованной стоячей монохроматической волны. Уравнение движения электрона во вращающемся электрическом поле $\dot{\mathbf{p}}(t) = e\mathbf{E}(t)$ легко решается, и для $\chi_e(t)$ в пределе $\omega t \ll 1$ мы получаем

$$\chi_e(t) \approx \frac{E}{E_S} \sqrt{1 + \frac{p_\perp^2}{m^2}} = \frac{E}{E_S} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{4} (\omega t)^4}. \quad (6)$$

Вследствие того что параметр ξ очень велик, значение $\xi(\omega t)^2$ может превысить единицу, даже если $\omega t \ll 1$, и тогда $\chi_e(t) \sim \xi(E/E_S)(\omega t)^2$. Отсюда находим время

$$t_{acc} \sim \frac{1}{m} \frac{E_S}{E} \sqrt{\frac{m}{\omega}}. \quad (7)$$

Отметим чрезвычайно важное обстоятельство, состоящее в том, что вращающееся электрическое поле не только ускоряет частицу, но и искривляет её траекторию. Именно поэтому частица приобретает поперечную к полю составляющую импульса.

Используя решения уравнений движения для величин ε_e и χ_e , легко получить зависимость от времени вероятности (3). Тогда из соотношения (4) находим

$$t_e \sim \frac{1}{m} \left(\frac{E_S}{\alpha^3 E} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{m}{\omega}}, \quad (8)$$

и левое неравенство в (5) сводится к условию [15]

$$E \gtrsim E_* = \alpha E_S. \quad (9)$$

Здесь E_* — новое характерное поле, которое определяет порог для развития каскада в поле оптических лазеров. Такое поле на длине свободного пробега электрона совершает над ним работу порядка m . Соответствующая полю E_* интенсивность составляет $I_* = 2,5 \times 10^{25}$ Вт см⁻². Что касается правого неравенства в (5), то для оптических частот и напряжённостей поля порядка E_* оно выполняется с хорошим запасом.

На рисунке 2 представлены результаты численных расчётов, иллюстрирующие эволюцию динамического квантового параметра $\chi(t)$ вдоль траектории частицы в полях с различной конфигурацией [15]. Видно, что, хотя детали поведения $\chi(t)$ во всех трёх случаях различаются, основные качественные характеристики, такие как период и амплитуда колебаний, по порядку величины совпадают. Особенно важно, что такое совпадение имеет место на малых временах, $\omega t < 1$. Поэтому можно считать, что оценки, проведённые для случая равномерно вращающегося электрического поля, справедливы, по крайней мере качественно, для любого поля, ускоряющего заряженные частицы.

Эффект возникновения каскада типа А может существенно изменить течение любого процесса, происходящего в лазерном поле сверхвысокой интенсивности. В качестве примера рассмотрим возникновение каскада, инициируемого электрон-позитронными парами, рож-

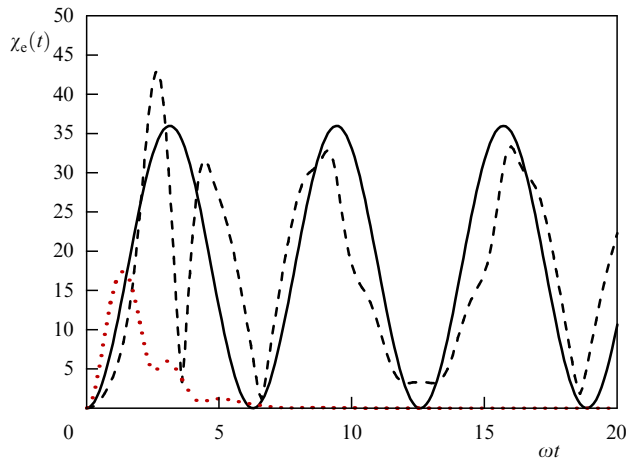


Рис. 2. Эволюция динамического квантового параметра $\chi_c(t)$ вдоль траектории частицы при $\xi = 3 \times 10^3$, $\omega = 1$ эВ в трёх случаях: лобовое столкновение двух эллиптически поляризованных плоских волн (сплошная кривая); столкновение под углом 90° двух линейно поляризованных плоских волн (штриховая кривая); одиночный жёстко сфокусированный e-поляризованный импульс (пунктирная кривая).

даемыми лазерным полем из вакуума [15]. Среди нелинейных вакуумных эффектов рождение пар из вакуума классическим электромагнитным полем представляет, по-видимому, наибольший интерес. Долгое время считалось, что этот эффект может наблюдаться, только если напряжённость внешнего электрического поля близка к критическому для квантовой электродинамики значению E_S . Такое поле, впервые введённое Заутером [16, 17], совершает над электроном работу, равную m , на его комптоновской длине. Однако, как было показано нами в работах [18–20], рождение пар сфокусированными лазерными импульсами становится наблюдаемым эффектом при пиковой напряжённости $E_0 < E_S$. Дело в том, что так называемая швингеровская экспонента $\exp(-\pi E_S/E_0)$ определяет вероятность рождения пары в комптоновском объёме $V_C \sim l_C^3$ за комптоновское время $T_C \sim l_C$. При $E_0 < E_S$ вероятность рождения пары в комптоновском 4-объёме экспоненциально мала. Однако если поле создано в 4-области с объёмом VT , намного превышающим комптоновский, то вероятность рождения пары приобретает большой предэкспоненциальный множитель, по порядку величины равный отношению $VT/(V_C T_C)$. Для оптического лазерного импульса с длиной волны $\lambda = 1$ мкм и длительностью 10 фс, сфокусированного до дифракционного предела, данное отношение достигает величины порядка 10^{25} . Значение этого множителя настолько велико, что он может компенсировать малость швингеровской экспоненты при $E_0 < E_S$. Поэтому рождение пар может наблюдаться при пиковых напряжённостях лазерного импульса, даже на два порядка меньших E_S , и оно будет доступно для наблюдения на установках следующего поколения, которые обсуждаются сейчас в рамках проектов ELI и XCELS.

Полное число пар, рождённых в процессе развития каскада за один выстрел лазера, в предположении, что в фокальной области изначально находится только одна покоящаяся электрон-позитронная пара, рождённая, например, внешним фотоном, оценивается [15] как

$$N_e \sim \exp\left(\frac{t_{\text{esc}}}{t_c}\right) \sim \exp\left(\pi \alpha \mu^{1/4} \sqrt{\frac{m}{\omega}}\right), \quad (10)$$

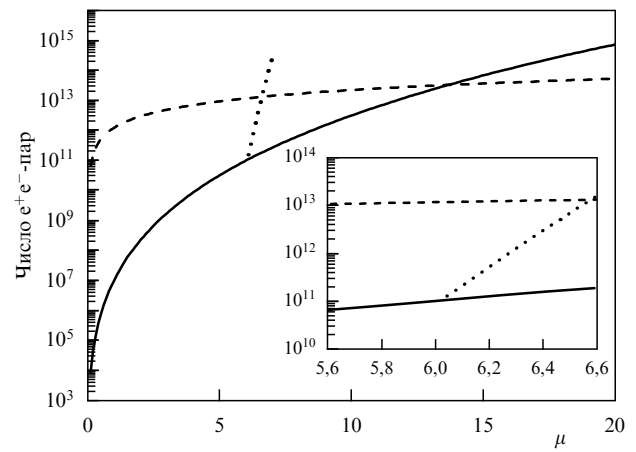


Рис. 3. Число рождённых пар как функция $\mu = E/E_*$. Сплошная кривая соответствует числу пар N_e , рождённых в процессе каскада, сгенерированного одной частицей. Пунктирная кривая показывает число пар в каскадах, сгенерированных парами, рождёнными из вакуума полем двух сталкивающихся циркулярно поляризованных 10-фемтосекундных лазерных импульсов. Точка пересечения кривых соответствует пороговому значению μ , при котором начинается спонтанное рождение пар из вакуума. Штриховая линия показывает предельно возможное число пар $N_{e,\text{max}}$, которое определяется энергией лазерного импульса. Частота лазера $\omega = 1$ эВ. На вставке показана область пересечения кривых в увеличенном масштабе.

где $\mu = E/E_*$ (см. сплошную кривую на рис. 3). Число N_e , естественно, возрастает с увеличением пиковой напряжённости, и в конце концов число рождённых пар оказывается настолько велико, что их энергия может уравниваться с энергией самого лазерного импульса. В предположении, что лазерный импульс сфокусирован до дифракционного предела, так что объём фокальной области, в которой рождаются пары, имеет порядок $(\lambda/2)^3$, полную энергию поля можно оценить как $W \sim (E^2/4\pi)(\lambda/2)^3$. Таким образом, максимальное число пар, которые могут быть образованы полем, ограничено величиной

$$N_{e,\text{max}} = \frac{W}{2\epsilon_e} \sim \alpha \mu^{5/4} \left(\frac{m}{\omega}\right)^{5/2}. \quad (11)$$

Эта величина представлена на рис. 3 штриховой кривой. Видно, что энергия рождённых пар уравнивается с энергией лазерного импульса при значении $\mu \approx 10$, которое для случая столкновения двух циркулярно поляризованных импульсов соответствует суммарной интенсивности $I \approx 6 \times 10^{26}$ Вт см $^{-2}$.

Оценка (11) получена в предположении, что роль затравки для развития каскада играет только одна пара. Однако, согласно работе [19], пороговая интенсивность для рождения пар в рассматриваемом нами случае составляет $I_{\text{th}} \approx 2,3 \times 10^{26}$ Вт см $^{-2}$. Число рождённых пар N_e вследствие его очень резкой экспоненциальной зависимости от интенсивности при $I \approx 6 \times 10^{26}$ Вт см $^{-2}$ достигает величины $N_e \approx 6 \times 10^8$. Это означает, что разрушение лазерного импульса наступает гораздо раньше, чем предсказывает оценка (11). Зависимость N_e от поля с учётом числа спонтанно рождённых пар представлена на рис. 2 пунктирной кривой. Точка разветвления сплошной и пунктирной кривых соответствует пороговому значению $\mu = \mu_{\text{th}}$, которое, согласно [19], для случая поля двух сталкивающихся циркулярно поляризованных импульсов составляет $\mu_{\text{th}} \approx 6$. Мы видим, что N_e достигает максимально возможного значения при $\mu \approx 6,6$, что

соответствует интенсивности сталкивающихся импульсов $I \approx 2,7 \times 10^{26}$ Вт см⁻². Отметим, что, так как в этом случае при $\mu < \mu_{th}$ пары не рождаются, участок сплошной кривой до точки разветвления в отсутствие затравочной пары не реализуется.

Ранее в работах [18, 19] было показано, что эффект рождения пар сверхсильным лазерным полем приводит к истощению импульса и устанавливает естественный предел достижимой интенсивности лазера. Мы видим теперь, что развитие А-каскада, инициированного затравочной частицей, является ещё одним механизмом разрушения лазерного импульса. При этом, если процесс происходит в вакууме, а интенсивность настолько велика, что поле начинает рождать пары, развитие каскада становится катализатором разрушения лазерного импульса. Приведённые нами оценки являются убедительным аргументом в пользу утверждения, высказанного Н. Бором более 80 лет назад [21], о невозможности достижения напряжённости порядка E_S для поля, рождающего электрон-позитронные пары.

Конечно, приведённые здесь результаты носят скорее оценочный характер. Более строгий подход должен строиться на основе самосогласованной системы кинетических уравнений. Теория каскадов S-типа к настоящему времени хорошо развита, особенно в контексте широких атмосферных ливней (ШАЛ), которые генерируются космическими лучами в атмосфере [22]. Каскады во внешнем магнитном поле очень похожи на ШАЛ, и они тоже хорошо изучены [23, 24]. В случае лазерного поля каскады А-типа управляются так называемыми каскадными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t)}{\partial t} \pm e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_e \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \frac{\partial f_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t)}{\partial \mathbf{p}_e} = \\ = \int w_{rad}(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{p}_\gamma) f_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\gamma, t) d^3 p_\gamma - \\ - W_{rad}(\mathbf{p}_e) f_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t) + \int w_{cr}(\mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{p}_e) f_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\gamma, t) d^3 p_\gamma, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\gamma, t)}{\partial t} = \int w_{rad}(\mathbf{p}_e \rightarrow \mathbf{p}_\gamma) [f_+(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t) + \\ + f_-(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t)] d^3 p_e - W_{cr}(\mathbf{p}_\gamma) f_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\gamma, t), \end{aligned} \quad (12b)$$

где $f_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_e, t)$ и $f_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\gamma, t)$ — функции распределения позитронов, электронов и фотонов соответственно, $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e/\varepsilon_e$ — скорости и $\varepsilon_e = \sqrt{p_e^2 + m^2}$ — энергии электронов и позитронов, $dW_{rad}(\mathbf{p}_e \rightarrow \mathbf{p}_\gamma) = w_{rad}(\mathbf{p}_e \rightarrow \mathbf{p}_\gamma) d^3 p_\gamma$ и $dW_{cr}(\mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{p}_e) = w_{cr}(\mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{p}_e) d^3 p_e$ — дифференциальные вероятности излучения фотона (рис. 1а) и рождения пары фотоном (рис. 1б) во внешнем электромагнитном поле, $W_{rad}(\mathbf{p}_e)$ и $W_{cr}(\mathbf{p}_\gamma)$ — соответствующие полные вероятности этих процессов [25]. Уравнения (12а) и (12б) отличаются от стандартных уравнений для ШАЛ [26, 27] только наличием в левой части уравнения (12а) второго слагаемого, которое учитывает действие силы Лоренца на заряженную частицу. Отметим, что классическая сила радиационного трения уже учтена первыми двумя слагаемыми в правой части уравнения (12а) и её не надо вводить дополнительно (см. по этому поводу [25, 28, 29]).

В работе [25] на основе уравнений (12а) и (12б) проведено моделирование каскадов А-типа в однородном равномерно вращающемся электрическом поле в рамках предположений, сформулированных выше. Мы приведём здесь только сравнение результатов расчётов инкремента роста числа пар с оценками, сделанными

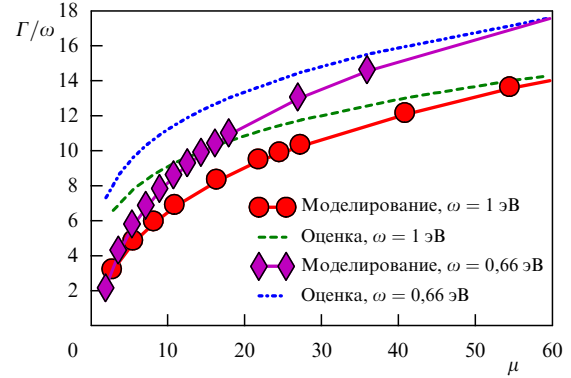


Рис. 4. Инкремент $\Gamma = d \ln N_c/dt$ как функция безразмерной напряжённости поля μ для двух значений частоты поля, $\omega = 1$ эВ и $\omega = 0,66$ эВ. Штриховая и пунктирная кривые соответствуют оценкам для Γ , сделанным в соответствии с формулой (10).

ранее в работе [15]. Из рисунка 4 видно, что они хорошо согласуются.

В работе [30] с помощью метода частиц в ячейках (Particle-in-Cell, PIC) учтены плазменные эффекты. Учёт механизма ускорения для самоподдерживающихся каскадов требует двумерного или даже трёхмерного рассмотрения, что существенно усложняет задачу, тогда как в случае каскадов S-типа такого усложнения не возникает. В работе [30] рассматривалось поле двух сталкивающихся линейно поляризованных лазерных импульсов. Импульсы, имеющие гауссову огибающую, распространялись вдоль оси x , компоненты поля в момент времени $t = 0$ выражались в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_y, H_z = E_0 \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma_r^2}\right) \sin(\omega x - \phi) \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{\sigma_x^2}\right] \pm \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где E_0 — амплитуда электрического поля одного импульса, $2x_0$ — начальное расстояние между импульсами, ϕ — сдвиг фазы. Расчёты были выполнены при следующих значениях параметров: $\sigma_x = 125/\omega$, $\sigma_r = 40/\omega$, $x_0 = \sigma_x/2$, $\phi = 0,8\pi$, $\xi = 1,2 \times 10^3$, что при $\lambda = 0,8$ мкм отвечает пиковой интенсивности $I = 3 \times 10^{24}$ Вт см⁻², радиусу фокусировки 10 мкм и длительности 100 фс. Каскад инициировался одиночным электроном, покоящимся в начале координат.

Расчёты качественно подтверждают описанную выше картину развития каскада. Как и ожидалось, множественность сначала экспоненциально возрастает, однако в момент, когда плотность плазмы достигает значения ξn_{cr} и, следовательно, плазма перестаёт быть оптически прозрачной, начинается поглощение и происходит быстрое "истощение" лазерного поля на хвостах импульсов, при этом число пар достигает насыщения (рис. 5, 6). На рисунке 7 показана эволюция энергий лазерного поля и рождённых частиц. Видно, что примерно половина энергии лазерного импульса поглощается образующейся электрон-позитронно-фотонной плазмой, а затем переизлучается в виде γ -квантов.

3. S-каскады. Коллапс и возрождение каскада

Рассмотрим теперь задачу о столкновении ультрарелятивистских электронов с полем двух сталкивающихся

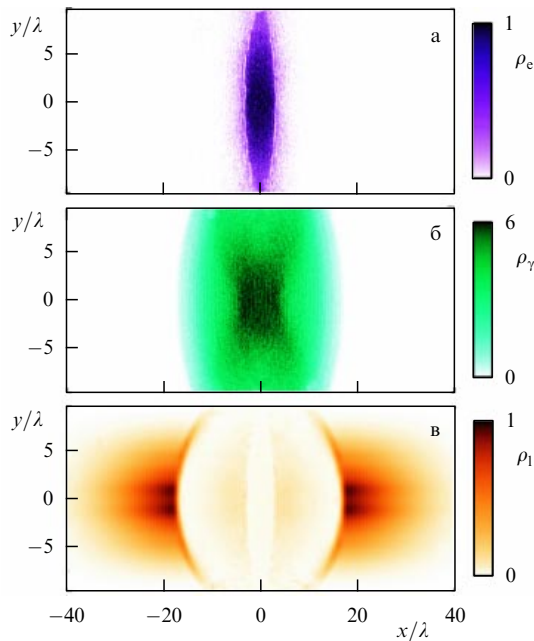


Рис. 5. Нормированная плотность электронов $\rho_e = n_e/\xi n_{cr}$ (а), нормированная плотность фотонов $\rho_\gamma = n_\gamma/\xi n_{cr}$ (б) и интенсивность лазерного поля, нормированная на максимум начальной интенсивности ρ_l (в), в момент времени $t = 25,5\lambda/c$ при столкновении двух линейно поляризованных импульсов. Распределение позитронной плотности примерно такое же, как и электронной.

циркулярно поляризованных фокусированных лазерных импульсов с частотой ω и длительностью $\tau \gg 1/\omega$ [31]. Поляризацию импульсов выберем таким образом, чтобы магнитная составляющая поля в фокусе стоячей волны обратилась в нуль и поле там можно было рассматривать как равномерно вращающееся электрическое поле. Как и в разделе 2, будем считать, что параметр $\xi \gg 1$, а напряжённости поля $E, H \ll E_S$.

Оценим сначала продолжительность S-каскада τ_S . Начальное значение параметра χ для первичного ультрарелятивистского электрона можно оценить как $\chi_0 \sim (\epsilon_0/mc^2)(E_0/E_S)$, где E_0 — пиковое значение напряжённости суммарного электрического поля двух сталкивающихся импульсов в фокальной области, ϵ_0 — начальная энергия электрона. В результате каждого события любая частица превращается в две, так что множественность каскада можно оценить так же, как в работе [23]:

$$2^n = \frac{\chi_0}{\chi_f}, \quad (14)$$

где n — число поколений вторичных частиц, χ_f — значение динамического квантового параметра конечных электронов. Для τ_S имеем $\tau_S \sim t_e n$, где $t_e \sim W_e^{-1}(\epsilon_0, \chi_0)$ — среднее время жизни начального электрона по отношению к излучению жёсткого фотона. Окончательно получаем

$$\tau_S \sim \tau_C \frac{\epsilon_0}{amc^2} \chi_0^{-2/3} \log_2 \left(\frac{\chi_0}{\chi_f} \right). \quad (15)$$

Начальные электроны предполагаются ультрарелятивистскими, так что $\chi_0 > 1$. Очевидно, что каскад S-типа затухает ("коллапсирует"), когда $\chi_f < 1$. Мы примем значение $\chi_f \sim 0,1$. При таком χ_f развитие S-каскада не может продолжаться, так как время жизни фотона по

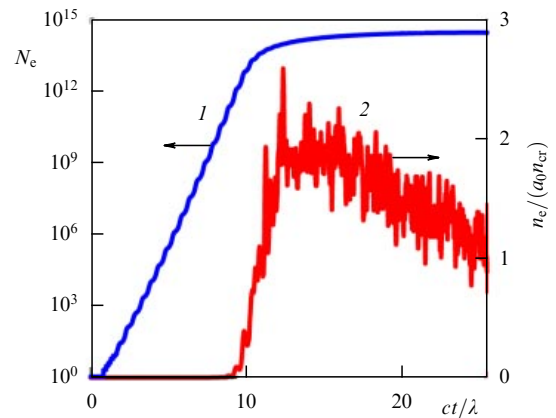


Рис. 6. Число N_e электронов, образованных в процессе каскада (кривая 1) и плотность электрон-позитронной плазмы, нормированная на критическую релятивистскую плотность (кривая 2), как функции времени.

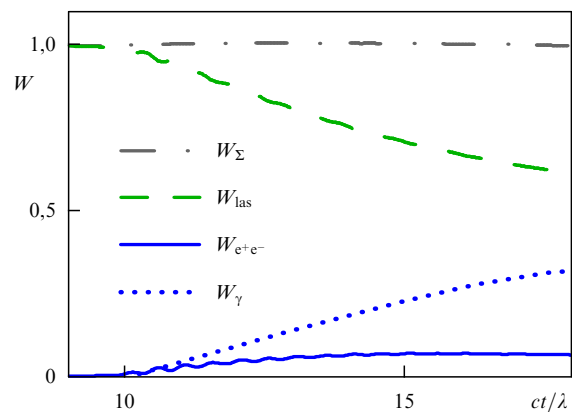


Рис. 7. Энергия электронов и позитронов (сплошная кривая), энергия фотонов (пунктирная кривая), энергия лазерного поля (штриховая кривая) и полная энергия всей системы (штрихпунктирная кривая) как функции времени. Все энергии нормированы на начальную энергию лазерного поля.

отношению к рождению пары $t_\gamma \sim W_\gamma^{-1} \sim \exp(8/3\chi_f)$ становится экспоненциально большим.

Нас интересует случай, в котором $n > 1$ и время τ_S меньше длительности лазерного импульса τ_L . Для этого должны выполняться следующие условия:

$$t_{e,\gamma} < \tau_C \frac{\epsilon_0}{amc^2} \chi_0^{-2/3} \log_2(10\chi_0) < \tau_L. \quad (16)$$

Пусть $\epsilon_0 = 3$ ГэВ и $E_0 = 3,2 \times 10^{-3} E_S$. Тогда $\chi_0 \approx 20$ и левое неравенство в (16) выполняется благодаря большому логарифму, $\log_2(10\chi_0) \approx 8$. Правое неравенство в (16) при $\tau_L \gtrsim 10$ фс выполняется с хорошим запасом.

Как упоминалось в разделе 2, под действием вращающегося электрического поля заряженная частица приобретает очень большой импульс, поперечный по отношению к направлению распространения лазерных импульсов, так что динамический квантовый параметр χ частицы возрастает на значительную величину, $\Delta\chi \sim 1$, за малое время $t_{acc} \sim (E_S/E_0)\sqrt{mc^2/(\hbar\omega)}\tau_C$, $\omega t_{acc} \ll 1$. Если траектория частицы искривляется настолько сильно, что частица может излучить в поперечном направлении достаточно жёсткий фотон, который в свою очередь может родить пару, то возникает каскад A-типа. В нашем случае

начальная частица имеет большой продольный импульс и, следовательно, большое значение χ . Поэтому значительное искривление траектории является необходимым условием для развития А-каскада при столкновении ультрарелятивистского электрона с лазерным импульсом.

Поясним последнее утверждение подробнее. Продольная компонента импульса частицы $\mathbf{p}_{\parallel}(t)$ в поле двух сталкивающихся импульсов может измениться только вследствие излучения фотонов, и характерное время её изменения $t_{\parallel} \sim \tau_S \lesssim \tau_L$. Изменение поперечной компоненты $\mathbf{p}_{\perp}(t)$ определяется вращающимся электрическим полем $\mathbf{E}(t) = \{E_0 \cos(\omega t), E_0 \sin(\omega t), 0\}$,

$$\dot{\mathbf{p}}_{\perp}(t) = e\mathbf{E}(t),$$

и характерное время её изменения $t_{\perp} \sim 1/\omega$. Мы подразумеваем, что заряженная частица попадает в фокальную область в момент времени $t = 0$ с нулевым поперечным импульсом, $\mathbf{p}_{\perp}(0) = 0$. Тогда, принимая во внимание соотношение $t_{\parallel}/t_{\perp} \sim \omega\tau_L \gg 1$, для $\chi(t)$ получим формулу

$$\chi(t) \approx \sqrt{\chi_{\parallel}^2(t) + (\Delta\chi_{\perp}(t))^2}, \quad (17)$$

справедливую на временном интервале $\Delta t \lesssim 1/\omega$. Здесь $\chi_{\parallel} = \chi(0) = (E_0/E_S)(1 + p_{\parallel}^2/m^2)^{1/2}$ имеет смысл динамического квантового параметра в отсутствие ускоряющего поля, а χ_{\perp} увеличивается в соответствии с (6) на величину $\Delta\chi_{\perp} \sim 1$ за время $t_{\text{acc}} \ll 1/\omega$. В результате, как видно из (17), существенное искривление траектории, а следовательно, и начало каскада А-типа могут наступить, только если $\chi_{\parallel} \sim 1$. Следовательно, А-каскад начинается с задержкой по отношению к S-каскаду, и время задержки τ_R можно оценить с помощью формулы (15), где нужно положить $\chi_f = 1$. Для длительности А-каскада τ_A получим $\tau_A \sim \tau_L - \tau_R$. Конечно, при этом должны быть выполнены условия $t_{\text{acc}} \ll t_{e,\gamma} < \tau_A$. Легко проверить, что для принятых выше значений ϵ_0 , E_0 и τ_L эти условия выполняются.

Численное моделирование рассматриваемого процесса проведено методом Монте-Карло в работе [31]. При этом для описания поля фокусированного лазерного импульса использовалась реалистическая трёхмерная модель фокусированного поля, описанная в работе [32]. Результаты представлены на рис. 8–10. Все распределения нормированы в предположении, что каскад генерируется одним электроном. Скорость рождения пар $dN_{e^-e^+}(t)/dt$ в зависимости от времени представлена на рис. 8 для случая $E_0 = 3,2 \times 10^{-3}E_S$, $\epsilon_0 = 3$ ГэВ. Предположим, что сила Лоренца "выключена" и электроны не ускоряются полем. Тогда они теряют энергию лишь за счёт излучения фотонов и развивается только S-каскад. Скорость рождения пар без учёта действия силы Лоренца представлена штриховой кривой. Каскад начинает развиваться сразу же, как только электрон попадает в лазерное поле, и затухает за время $\tau_S \approx 0,6\tau_L$. Сплошная кривая представляет полную скорость рождения пар. Видно, что на начальной стадии сплошная кривая совпадает со штриховой кривой, а это означает, что вначале развивается только S-каскад. В полном согласии с нашими оценками примерно через $0,3\tau_L$ полная скорость рождения пар начинает превышать скорость без учёта силы Лоренца. Наконец, появляется второй пик на сплошной кривой, который сигнализирует о "возрождении" каскадного процесса за счёт развития А-каскада. Штрихпунктирная кривая на рис. 8, представ-

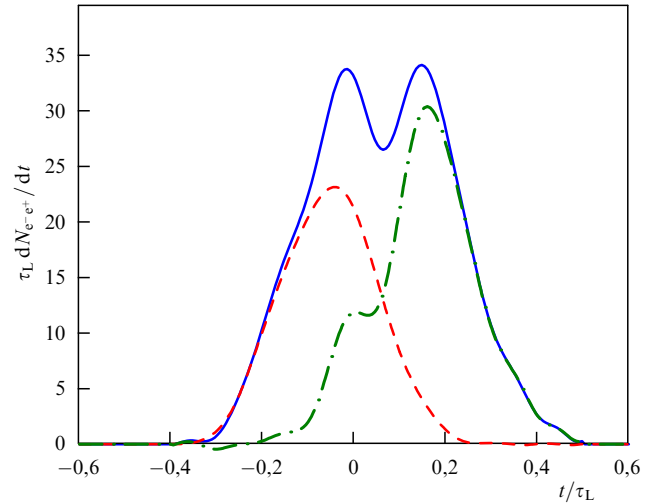


Рис. 8. Скорость рождения пар как функция времени. Сплошная кривая — результат моделирования с учётом силы Лоренца, штриховая кривая — результат моделирования без учёта силы Лоренца, штрихпунктирная кривая — разность этих результатов. Начальные параметры: $E_0 = 3,2 \times 10^{-3}E_S$, $\epsilon_0 = 3$ ГэВ.

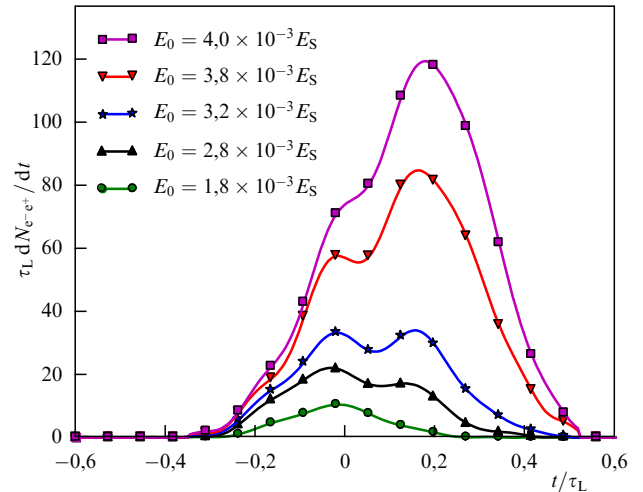


Рис. 9. Скорости рождения пар в зависимости от времени при различных значениях E_0 . Начальная энергия электронов $\epsilon_0 = 3$ ГэВ.

ляющая собой разность между двумя кривыми, соответствует каскаду А-типа, который развивается вследствие ускорения электронов полем в направлении, перпендикулярном направлению распространения лазерных импульсов. Скорости рождения пар при различных значениях E_0 приведены на рис. 9. Видно, что "возрождение" каскада А-типа (представленное вторым пиком) возникает только в достаточно сильном поле. Для выбранных параметров лазерных импульсов и электронного пучка это происходит при $E_0 > 2,8 \times 10^{-3}E_S$.

Другим признаком возрождения каскада служит угловое распределение фотонов. Ультрарелятивистские электроны, генерирующие каскад S-типа, излучают фотоны в направлении своего движения. Каскад А-типа возникает только тогда, когда появляются быстрые частицы, ускоренные в поперечном направлении. Эти электроны излучают фотоны преимущественно в том же направлении. На рисунке 10 представлено полное число фотонов N_{γ} , излучаемых вдоль и поперёк электронного пучка, в зависимости от времени. Число фото-

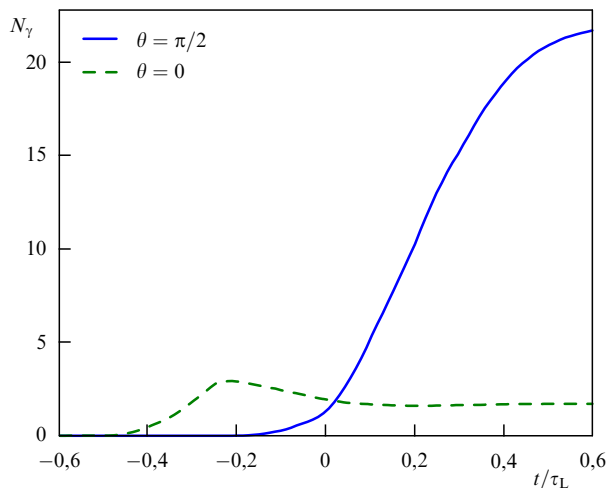


Рис. 10. Полное число фотонов, излучаемых в направлении начального электронного пучка ($\theta \in [0, 0,1]$ рад — штриховая кривая) и в перпендикулярном направлении ($\theta \in [\pi/2 - 0,05, \pi/2 + 0,05]$ рад — сплошная кривая), в зависимости от времени. $E_0 = 3,2 \times 10^{-3} E_S$, $\varepsilon_0 = 3$ ГэВ.

нов, излучаемых в направлении $\theta = 0$, сначала увеличивается при $t < 0$, а затем начинает уменьшаться в результате "коллапса" S-каскада, хотя некоторые ранее излученные фотоны продолжают рождать пары и при $t > 0$. В то же время число фотонов, излучаемых в направлении $\theta = \pi/2$, начинает значительно возрастать при $t \geq 0$. Оценки времён затухания S-каскада и его трансформации в A-каскад хорошо согласуются с результатами, представленными на рис. 8. Значительная разница в числе фотонов, испущенных в этих двух направлениях, объясняется разным числом вовлеченных в каскады частиц. S-каскад генерируется одним электроном, тогда как в развитии A-каскада принимает участие большое число вторичных частиц.

4. Заключение

Квантовая электродинамика к настоящему времени вполне разработана теоретически и хорошо проверена экспериментально. Однако непосредственной экспериментальной проверке до сих пор почти не подвергалась область сильных полей. В то же время эта область представляет особый интерес, поскольку соответствует существенно непертурбативным квантовым эффектам. Одним из наиболее значимых является процесс рождения электрон-позитронных пар из вакуума сильным полем. Более того, в сильных полях этот эффект может стать доминирующим и, в частности, может воспрепятствовать достижению характерного для квантовой электродинамики поля E_S . Наконец, в свете проектов ELI и XCELS возникает перспектива провести с помощью оптических лазеров всестороннюю экспериментальную проверку наших представлений о квантовой электродинамике в сильном внешнем поле.

В недавних работах [13, 14, 25, 30] был открыт ещё один эффект, существенно меняющий характер взаимодействия излучения с веществом при экстремальных интенсивностях, — квантово-электродинамические каскады A-типа. В отличие от "обычных" каскадов S-типа, A-каскады черпают энергию непосредственно из лазерного поля и потому также препятствуют достижению E_S . Учёт квантово-электродинамических каскадов требует существенной модернизации программных кодов, используемых для расчёта динамики лазерной плазмы в

полях сверхвысокой интенсивности, без которых, в частности, невозможно планирование соответствующих экспериментов. В работе [31] предложена экспериментальная схема, позволяющая реализовать и изучить каскады обоих типов в рамках единого эксперимента при интенсивности $I \sim 5 \times 10^{24}$ Вт см⁻². Согласно этой схеме происходит трансформация S-каскада в A-каскад, причём оба каскада могут быть чётко идентифицированы как по времени своего возникновения, так и по угловому распределению излучаемых жёстких фотонов. Необходимый уровень интенсивности, как ожидается, в ближайшее время будет достигнут на строящихся сейчас лазерных установках следующего поколения.

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность С.С. Буланову, Н.В. Ёлкиной, Г. Корну, И.Ю. Костюкову, А.А. Миронову, Ж. Муру, В.Д. Муру, Е.Н. Нерушу, В.С. Попову, в содружестве с которыми были получены результаты, представленные в этой работе, а также А. Беллу, С.В. Буланову, Дж. Кирку, Н.М. Наумовой, А.М. Сергееву, И.В. Соколову за полезные обсуждения. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 13-02-00372) и грантом НШ-4829.2014.2 Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

Список литературы

1. Strickland D, Mourou G *Opt. Commun.* **56** 219 (1985)
2. Yanovsky V et al. *Opt. Express* **16** 2109 (2008)
3. Mourou G, Tajima T *Opt. Photon. News* **22** (7) 47 (2011); Extreme Light Infrastructure, <http://www.eli-laser.eu/>
4. Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS), <http://www.xcels.iapras.ru>
5. Никишов А И, Ритус В И *Труды ФИАН* **111** 3 (1979)
6. Никишов А И, Ритус В И *Труды ФИАН* **168** 232 (1986)
7. Bula C et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 3116 (1996)
8. Burke D L et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 1626 (1997)
9. Bamber C et al. *Phys. Rev. D* **60** 092004 (1999)
10. Sokolov I V et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 195005 (2010)
11. Bulanov S S et al. *Phys. Rev. A* **87** 062110 (2013)
12. Narozhny N B *Phys. Rev. D* **21** 1176 (1980)
13. Bell A R, Kirk J G *Phys. Rev. Lett.* **101** 200403 (2008)
14. Fedotov A M, Narozhny N B, in *Extreme Light Infrastructure: Report on the Grand Challenges Meeting, 27–28 April 2009, Paris* (Eds G Korn, P Antici) (Paris: Extreme Light Infrastructure, 2009) p. 17
15. Fedotov A M et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 080402 (2010)
16. Sauter F Z. *Phys.* **69** 742 (1931)
17. Sauter F Z. *Phys.* **73** 547 (1931)
18. Narozhny N B et al. *Phys. Lett. A* **330** 1 (2004)
19. Буланов С С и др. *ЖЭТФ* **129** 14 (2006); Bulanov S S et al. *JETP* **102** 9 (2006)
20. Fedotov A M *Laser Phys.* **19** 214 (2009)
21. Sommerfeld A *Atombau und Spektrallinien* Vol. 2 (Braunschweig: F. Vieweg, 1951); *Atomic Structure and Spectral Lines* (London: Methuen, 1934); Зоммерфельд А *Строение атома и спектры* Т. 2 (М.: Гостехиздат, 1956)
22. Auger P et al. *Rev. Mod. Phys.* **11** 288 (1939)
23. Akhiezer A I, Merenkov N P, Rekalov A P *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **20** 1499 (1994)
24. Anguelov V, Vankov H *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **25** 1755 (1999)
25. Elkina N V et al. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **14** 054401 (2011)
26. Gaisser T K *Cosmic Rays and Particle Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
27. Bharucha-Reid A T *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications* (New York: McGraw-Hill, 1960)
28. Di Piazza A, Hatsagortsyan K Z, Keitel C H *Phys. Rev. Lett.* **105** 220403 (2010)
29. Neitz N, Di Piazza A *Phys. Rev. Lett.* **111** 054802 (2013)
30. Nerush E N et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 035001 (2011)
31. Mironov A A, Narozhny N B, Fedotov A M *Phys. Lett. A* **378** 3254 (2014)
32. Нарожный Н Б, Фофанов М С *ЖЭТФ* **117** 867 (2000); Narozhny N B, Fofanov M S *JETP* **90** 753 (2000)