

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов

Б.М. Карнаков, В.Д. Мур, С.В. Попруженко, В.С. Попов

Рассмотрено современное состояние теории ионизации атомов и атомных ионов под действием интенсивного лазерного излучения (теория Келдыша). Обсуждаются условия применимости этой теории, её связь с методом Ландау – Дыхне и приложение к задаче об ионизации атомов ультракороткими немонохроматическими лазерными импульсами произвольной формы. Для описания подбарьерного движения электрона в процессе туннелирования применяется квазиклассический метод мнимого времени, в рамках которого используются классические уравнения движения электрона в поле электромагнитной волны, но с мнимым "временем" $t \rightarrow it$. Рассмотрен эффект туннельной интерференции амплитуд перехода, возникающий при наличии нескольких точек перевала в плоскости комплексного времени и приводящий к быстрым осцилляциям в импульсном спектре фотоэлектронов. Учёт кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным остатком (выполненный вне рамок теории возмущений по кулоновскому полю) существенно изменяет спектрально-угловые распределения фотоэлектронов и скорость ионизации атомного уровня, причём последняя, как правило, возрастает на несколько порядков как в туннельном, так и в многофотонном режимах ионизации. Обсуждаются влияние постоянного магнитного поля на скорость ионизации и эффект магнитной кумуляции. Изложена релятивистская теория туннелирования, вычислены релятивистская и спиновая поправки к скорости ионизации, установлены границы области применимости нерелятивистской теории ионизации. Проиллюстрировано использование метода Фока для ковариантного описания нелинейной ионизации в релятивистском случае.

Ключевые слова: туннельная и многофотонная ионизация, релятивистская ионизация, интенсивное лазерное излучение, сверхсильное магнитное поле, теория Келдыша, метод мнимого времени

PACS numbers: 03.65.Sq, 32.80.Fb, 32.80.Rm, 32.80.Wr, 34.80.Qb

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501b.0003

Содержание

1. Введение (3).
2. Современное состояние эксперимента (5).
3. Основные уравнения теории Келдыша (6).
 - 3.1. Общие выражения для вероятности ионизации в теории Келдыша.
 - 3.2. Теория Келдыша и метод Ландау – Дыхне.
 - 3.3. Метод мнимого времени.
4. Ионизация в поле ультракоротких лазерных импульсов (11).
 - 4.1. Туннельная интерференция.
 - 4.2. Импульсные спектры фотоэлектронов.
 - 4.3. Результаты численных расчётов.
5. Кулоновские эффекты в фотоионизации (13).
 - 5.1. Угловые распределения в эллиптически поляризованном поле.
 - 5.2. Интерференционная структура спектра.
 - 5.3. Много-

квантовая ионизация атомов в поле произвольной частоты.
5.4. Другие приложения метода кулоновской поправки.

6. Влияние магнитного поля на скорость ионизации атомов. Лоренцева ионизация (18).
 - 6.1. Метод мнимого времени при наличии магнитного поля.
 - 6.2. Лоренцева ионизация атомов и ионов.
 - 6.3. Магнитная кумуляция.
 - 6.4. Сверхсильные магнитные поля.
7. Релятивистская теория ионизации (21).
 - 7.1. Общее выражение для вероятности ионизации в релятивистском случае.
 - 7.2. Ионизация полем плоской волны.
 - 7.3. Рождение пар в постоянном скрещённом поле.
 - 7.4. Ионизация из состояния в короткодействующем потенциале постоянным скрещённым полем.
 - 7.5. Спиновая поправка в релятивистской теории туннелирования.
8. Область применимости нерелятивистской теории Келдыша (26).
9. Заключение (27).
10. Приложения (27).
 - А. Аналитические модели лазерных импульсов.
 - Б. Подбарьерное движение в переменном поле.
 - В. Функция $\chi(u)$ и адиабатические разложения.
 - Г. О методе Фока в релятивистской механике.

Список литературы (32).

Б.М. Карнаков, В.Д. Мур, С.В. Попруженко.
Национальный исследовательский ядерный университет
"Московский инженерно-физический институт",
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: karnak@theor.mephi.ru, sergey.popruchenko@gmail.com
В.С. Попов. Государственный научный центр Российской Федерации
"Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А.И. Алиханова",
ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 11 июля 2014 г., после доработки 4 октября 2014 г.

1. Введение

Минуло полвека с момента публикации фундаментальной работы Келдыша [1], заложившей основы наших

представлений о процессе ионизации атомных систем и твёрдых тел под действием интенсивного лазерного излучения. В работе [1] впервые было показано, что туннельная и многофотонная ионизации атомов являются двумя предельными случаями нелинейной фотоионизации: туннельная ионизация имеет место в случае, когда параметр адиабатичности, или параметр Келдыша (см. ниже формулу (1.1)), $\gamma \ll 1$, тогда как при $\gamma \gg 1$ процесс ионизации является многофотонным.

Вскоре после появления статьи [1] в работах Никишова и Ритуса [2] и Переломова, Попова и Терентьева [3–5] были получены явные аналитические выражения для энергетического и импульсного спектров фотоэлектронов и предэкспоненциального множителя в формуле Келдыша для скорости ионизации w (однако при условии, что электрон в атоме связан короткодействующими силами и его кулоновским взаимодействием с атомным остатком можно пренебречь, т.е. фактически для случая ионизации однозарядных отрицательных ионов типа H^- , Na^- и т.д.).

Важность учёта кулоновского взаимодействия была понята уже в ранних работах [6, 7]; в частности, была получена [7] кулоновская поправка к скорости ионизации атомов в туннельном режиме, $\gamma \ll 1$, которая часто использовалась в дальнейшем¹. В последующие годы предложенный в [1] непerturbативный метод вычисления амплитуд многоквантовых процессов в поле сильной электромагнитной волны получил широкое развитие, и в настоящее время он повсеместно применяется для расчётов нелинейных эффектов, наблюдаемых при взаимодействии атомов, молекул и свободных электронов с мощными лазерными полями. В современной литературе этот метод известен также как *приближение сильного поля* [11, 12]. Развитию теории ионизации Келдыша и её приложениям к описанию экспериментов посвящено несколько сотен работ (см., например, монографии и обзоры [13–18] и указанную там литературу). Поскольку с момента публикации обзора [15] прошло уже 10 лет — срок, за который успело накопиться значительное количество нового экспериментального и теоретического материала, представляется своевременным сделать обзор современного состояния теории Келдыша.

Цель данного обзора — изложить новые результаты, полученные в работах нашей группы после опубликования обзора [15], к которому мы отсылаем читателей за постановкой проблемы и историей вопроса.

Поскольку для экспериментального наблюдения многих обсуждаемых ниже эффектов (ионизация многозарядных ионов, влияние магнитного поля на процесс ионизации, рождение электрон-позитронных пар из вакуума и др.) требуются дальнейшее повышение напряжённости электрического поля и переход к более коротким (фемтосекундным и аттосекундным) лазерным импульсам, мы начнём с краткого описания современных достижений в физике сверхмощных лазеров и возможных перспектив в этой области. В разделе 3 сформулированы основные уравнения теории ионизации Келдыша, обсуждаются условия её применимости и её связь с другими методами расчёта вероятностей нелинейных эффектов в сильных лазерных полях, в том числе с методом Ландау–Дыхне и методом "мнимого времени"

(ММВ). Далее изложены результаты, относящиеся к ионизации ультракороткими лазерными импульсами (раздел 4) и учёту влияния кулоновского взаимодействия на нелинейную ионизацию атомов (раздел 5). Раздел 6 посвящён влиянию магнитного поля на процесс ионизации атомов. Обсуждаются методы получения сверхсильных магнитных полей и эффект лоренцевой ионизации. В разделе 7 рассмотрена релятивистская версия теории Келдыша, обсуждается использование метода Фока в релятивистской механике для решения уравнений движения электрона в лазерном поле и релятивистски ковариантного вычисления вероятности туннелирования. В разделе 8 сформулированы условия применимости нерелятивистского приближения в теории ионизации. Технические вопросы вынесены в приложение.

Сделаем несколько замечаний об используемых обозначениях. Всюду в обзоре электрическое и магнитное поля лазерной волны обозначаются соответственно как $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$, а векторный потенциал — как $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Частота и длина волны обозначаются через ω и $\lambda = 2\pi c/\omega$; значения интенсивности $\mathcal{I} = c\langle \mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2 \rangle / (8\pi)$ приводятся в единицах Вт см⁻². Разделы 3–6 посвящены нерелятивистским задачам, поэтому в них используется атомная система единиц, в которой $e = \hbar = m_e = 1$; при этом скорость света $c = \alpha^{-1} = 137$. В разделе 7 используется релятивистская система единиц, $\hbar = c = m_e = 1$, соответственно, $\alpha = e^2 = 1/137$.

Определим основные безразмерные параметры, характеризующие взаимодействие электромагнитного поля с атомами и свободными электронами. В атомной физике сильных полей наиболее часто используются параметр адиабатичности Келдыша [1]

$$\gamma = \frac{\sqrt{2Im_e} \omega}{e\mathcal{E}} = \frac{\omega}{\omega_t}, \quad (1.1)$$

параметр многоквантовости

$$K_0 = \frac{I}{\hbar\omega} = \frac{1}{2F\gamma}, \quad (1.2)$$

где $I = \hbar^2 \kappa^2 / (2m_e)$ — потенциал ионизации атомной системы, F — приведённое поле,

$$F = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{ch}}, \quad \mathcal{E}_{ch} = \frac{\hbar^2 \kappa^3}{m_e e} = (\kappa a_B)^3 \mathcal{E}_a. \quad (1.3)$$

Здесь $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$ — боровский радиус, $\mathcal{E}_{ch}$ — характерное электрическое поле для уровня с потенциалом ионизации I , $\mathcal{E}_a = m^2 e^5 / \hbar^4 = e/a_B^2 = 5,14 \times 10^9$ В см⁻¹ — атомная единица электрического поля (поле на первой боровской орбите в атоме водорода).

По физическому смыслу параметр Келдыша представляет собой отношение характерного импульса электрона в атоме $\hbar\kappa = \sqrt{2Im_e}$ к импульсу $e\mathcal{E}/\omega$, приобретаемому электроном в лазерном поле. Этот параметр можно также интерпретировать как отношение частоты лазерной волны к характерной частоте туннелирования $\omega_t = e\mathcal{E}/(\hbar\kappa)$. Величина $[K_0] + 1$ — минимальное число квантов лазерной волны, при поглощении которых возможна ионизация атомного уровня.

В литературе часто используется также параметр сильного поля [12]

$$z_F = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{m_e \hbar \omega^3} = \frac{2K}{\gamma^2}, \quad (1.4)$$

¹ Для произвольных значений γ , включая многофотонный случай $\gamma \gg 1$, кулоновская поправка была вычислена лишь недавно [8–10].

представляющий собой (с точностью до числового множителя) отношение средней по периоду $T = 2\pi/\omega$ колебательной энергии нерелятивистского электрона в поле волны

$$U_p = \left\langle \frac{m_e v^2}{2} \right\rangle_T = \frac{1 + \rho^2}{4} \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{m_e \omega^2} \quad (1.5)$$

к энергии кванта излучения. В формуле (1.5) усреднение проводится в системе отсчёта, в которой электрон в среднем покоится, а результат усреднения приведён для случая монохроматической волны с эллиптичностью ρ , причём $\rho = 0$ для линейной поляризации и $\rho = \pm 1$ для круговой.

Приведём также некоторые формулы, полезные при проведении численных оценок. Если длина волны лазера λ измеряется в нанометрах ($1 \text{ нм} = 10^{-7} \text{ см}$), энергия фотона $\hbar\omega$ и потенциал ионизации I — в электронвольтах, а интенсивность излучения $\mathcal{I}$ — в единицах $10^{15} \text{ Вт см}^{-2}$ (мощность лазера $10^{15} \text{ Вт} \equiv 1 \text{ ПВт}$), то

$$\hbar\omega = \frac{1,24 \times 10^3}{\lambda}, \quad K_0 = \frac{0,011I}{I_H}, \quad (1.6)$$

где $I_H = m_e e^4 / (2\hbar^2) = 13,6 \text{ эВ}$ — потенциал ионизации атома водорода. Для волны с эллиптичностью ρ напряжённость поля в атомных единицах (а.е.) даётся выражением

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_a} = 0,169 \left(\frac{\mathcal{I}}{1 + \rho^2} \right)^{1/2}, \quad -1 \leq \rho \leq 1. \quad (1.7)$$

В частности, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_a$ при $\mathcal{I} \approx 35(1 + \rho^2) [\text{ПВт см}^{-2}]$.

2. Современное состояние эксперимента

Со времени создания более 50 лет назад первых источников когерентного инфракрасного и оптического излучения — лазеров и лазеров — физика взаимодействия интенсивного электромагнитного излучения с веществом остаётся одной из наиболее быстро развивающихся областей современного естествознания. Основным фактором, поддерживающим интерес к этой области науки на протяжении нескольких десятилетий, является непрерывное развитие лазерной техники, делающее возможным достижение всё больших значений интенсивности, получение всё более коротких импульсов, а также генерацию мощных электромагнитных полей в новых диапазонах длин волн. Теоретические работы, результаты которых изложены в настоящем обзоре, появились в значительной мере потому, что достижения лазерно-физического эксперимента в последние 10–15 лет привели к постановке новых задач. Для исследований фундаментальных эффектов взаимодействия интенсивных электромагнитных полей с веществом наибольший интерес представляют следующие направления в современной лазерной технике:

- генерация лазерных импульсов сверхвысоких интенсивностей;
- создание мощных лазеров на свободных электронах (ЛСЭ);
- получение ультракоротких лазерных импульсов, в том числе фемтосекундных и аттосекундных ($1 \text{ фс} = 10^{-15} \text{ с}$, $1 \text{ ас} = 10^{-18} \text{ с}$). К настоящему времени достиг-

нута длительность импульсов когерентного излучения порядка 100 ас [19].

Подробный обзор этих направлений, включая физические принципы получения импульсов, технику эксперимента и наиболее значимые результаты, сделан в работах [20] (сверхвысокие интенсивности), [17, 21, 22] (ультракороткие импульсы) и [19, 23] (аттосекундная физика). Информацию о возможностях современных ЛСЭ и рентгеновских лазеров и выполняемых с их помощью экспериментах можно почерпнуть из работ [24–28] (см. также сайт [29]).

Перечислим показатели современных лазерных установок, наиболее важные с точки зрения экспериментов по нелинейному взаимодействию мощного лазерного излучения с атомами, элементарными частицами и вакуумом. Импульсы сверхвысокой интенсивности генерируются с помощью твердотельных лазеров ближнего инфракрасного (ИК) и оптического диапазонов длин волн — наиболее часто используются неодимовый (длина волны $\lambda = 1064 \text{ нм}$) и титан-сапфировый ($\lambda \approx 800 \text{ нм}$) лазеры, в частности их вторые гармоники. Современные лазерные установки позволяют получать импульсы интенсивностью до $\mathcal{I} = c\mathcal{E}_0^2/(8\pi) \approx 2 \times 10^{22} \text{ Вт см}^{-2}$ [30] (при этом напряжённость электрического поля составляет $\mathcal{E}_0 \approx 10^{12} \text{ В см}^{-1}$), что примерно на шесть порядков величины превышает значение $\mathcal{I}_a = c\mathcal{E}_a^2/(8\pi) \approx 3,51 \times 10^{16} \text{ Вт см}^{-2}$, при котором напряжённость электрического поля волны равна атомной. Длительность импульсов с такой интенсивностью составляет несколько десятков фемтосекунд. Нелинейный характер взаимодействия мощного электромагнитного излучения с веществом проявляется уже при существенно меньших интенсивностях. Так, туннельная ионизация атома водорода наступает при интенсивности порядка $\mathcal{I} \approx 10^{14} \text{ Вт см}^{-2} \ll \mathcal{I}_a$, при $\mathcal{I} \approx 10^{18} \text{ Вт см}^{-2}$ движение электрона становится релятивистским (при длине волны порядка 1 мкм), импульсы интенсивностью $10^{19} - 10^{20} \text{ Вт см}^{-2}$ возбуждают релятивистские коллективные движения в плазме, позволяя, в частности, получать ультрарелятивистские электронные пучки и протоны с энергиями до нескольких ГэВ. Наконец, при интенсивностях порядка $10^{22} \text{ Вт см}^{-2}$ происходит многократная ионизация атомов вплоть до уровней с релятивистскими энергиями связи, сравнимыми с величиной $m_e c^2$.

В настоящее время существуют технически обоснованные проекты [31–34] создания новых лазеров, обещающие увеличение максимально достижимой интенсивности ещё на несколько порядков, вплоть до величин, близких к критическому полю $\mathcal{E}_{cr}$ квантовой электродинамики [35–37]:

$$\mathcal{E}_{cr} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 1,32 \times 10^{16} \text{ В см}^{-1} = \alpha^{-3} \mathcal{E}_a. \quad (2.1)$$

(Обозначение $\mathcal{E}_{cr}$ следует работе [36]). Соответствующая интенсивность составляет $\mathcal{I}_{cr} = c\mathcal{E}_{cr}^2/(8\pi) = \alpha^{-6} \mathcal{I}_a = 4,65 \times 10^{29} \text{ Вт см}^{-2}$. Отметим соотношения:

$$W_1 = e\mathcal{E}_{cr}l_C = m_e c^2, \quad W_2 = e\mathcal{E}_a a_B = \alpha^2 W_1 = 2 \text{ Ry}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{E}_{cr}^2 l_C^3 = \frac{m_e c^2}{\alpha}, \quad \mathcal{E}_a^2 a_B^3 = \alpha^2 m_e c^2,$$

где $l_C = \hbar/(m_e c) = \alpha a_B = 3,86 \times 10^{-11} \text{ см}$ — комптоновская длина, $1 \text{ ридберг (Ry)} = 13,6 \text{ эВ}$.

Для исследований фундаментальных эффектов взаимодействия сверхсильных электромагнитных полей с веществом наибольший интерес в этой области представляют эксперименты по многократной и релятивистской нелинейной ионизации атомов, а также планируемые эксперименты по поиску эффектов нелинейной квантовой электродинамики, включая рождение пар из вакуума и др. [20, 34, 38, 39].

Введение в эксплуатацию мощных ЛСЭ открыло новые возможности для экспериментов по нелинейному взаимодействию лазерного излучения с веществом в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах длин волн [28]. Установки такого типа в настоящее время работают в Германии [29], Японии [25] и США [26]. Достигнутые на сегодняшний день на ЛСЭ рекордно высокие интенсивности лазерных импульсов составляют 10^{16} Вт см $^{-2}$ при $\lambda \approx 13$ нм (лаборатория DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron), Германия), 10^{14} Вт см $^{-2}$ при $\lambda \approx 50$ нм (установка Spring-8 (Super Photon ring 8 GeV), Япония) и 10^{18} Вт см $^{-2}$, $\lambda \approx 1,2$ нм (ЛСЭ на установке SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), Стэнфорд, США). Начиная с 2002 г. с использованием ЛСЭ были выполнены многочисленные эксперименты по нелинейному взаимодействию интенсивного излучения высокой частоты с атомами, молекулами, многозарядными ионами, наноструктурами и твёрдым телом.

Ещё 15–20 лет назад получение интенсивных лазерных импульсов в рентгеновском диапазоне длин волн считалось делом далёкого будущего, поэтому теоретическим работам в этой области уделялось мало внимания. Произошедший около 10 лет назад экспериментальный прорыв в физике взаимодействия мощного ультрафиолетового и рентгеновского излучения с веществом оказался в значительной мере неожиданным. Как следствие, в настоящее время при большом количестве новых экспериментальных данных остро ощущается недостаток теории. В ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах нелинейное взаимодействие света с заряженными частицами качественно отличается от такового в случае низких частот, реализуемого с помощью ИК-лазеров. Действительно, при интенсивности 10^{16} Вт см $^{-2}$ (близкой к атомной) в поле ИК-лазера с длиной волны 1 мкм средняя колебательная энергия электрона (определённая уравнением (1.5)) составляет около 1 кэВ, а амплитуда колебаний равна примерно 30 нм (600 а.е.), тогда как для той же интенсивности при длине волны 10 нм эти величины приблизительно равны 0,2 эВ и 0,1 а.е. соответственно, т.е. в поле интенсивных рентгеновских лазеров энергетические и пространственные масштабы, характеризующие движение электрона, оказываются много меньше соответствующих атомных величин. Поэтому при одинаковой напряжённости электромагнитного поля значения основных безразмерных параметров различаются на несколько порядков. Взаимодействие атомов с мощными импульсами оптических и инфракрасных лазеров обычно характеризуется условиями $\gamma \lesssim 1$, $z_f \gg 1$, в то время как в поле мощных рентгеновских лазеров реализуется противоположный предел, $\gamma \gg 1$, $z_f \ll 1$. В разделе 5 изложены результаты работ [8, 9], в которых рассматривалась многофотонная ионизация атомов при больших значениях параметра Келдыша.

Наконец, в последние годы стало возможным использование в эксперименте импульсов мощного оптического и инфракрасного излучения длительностью всего в

несколько фемтосекунд, т.е. состоящих из одного-двух оптических периодов [17, 19]. Оказывается возможным стабилизировать и контролировать форму короткого импульса, т.е. управлять параметрами, отличающими короткий импульс от монохроматической волны. В качестве такого параметра обычно выбирают абсолютную фазу импульса, имея в виду представление вектора электрического поля как произведения синусоидального монохроматического колебания на огибающую, форма и сдвиг которой относительно фазы синуса определяют форму импульса. Соответственно, говорят об эффектах, связанных с абсолютной фазой [17]. Наблюдение таких эффектов создаёт дополнительные возможности для управления свойствами сверхкоротких импульсов. В частности, зависимость формы спектра фотоэлектронов от абсолютной фазы, наблюдаемая экспериментально, может использоваться для восстановления формы импульса, производящего ионизацию [40]. Используя эффект генерации высоких гармоник оптических и инфракрасных лазеров, удалось получить ещё более короткие импульсы, длительность которых составляет менее 1 фс. Такие импульсы, называемые аттосекундными, получают с помощью когерентного сложения нескольких высоких гармоник исходного лазерного импульса. В настоящее время аттосекундная оптика является одним из наиболее быстро развивающихся направлений в физике сильных полей (см. обзоры [19, 23] и приведённые там ссылки).

Широкое использование в современном эксперименте ультракоротких импульсов, поле которых существенно отличается от монохроматического, является стимулом для дальнейшего развития теории. В ранних работах, посвящённых теории атомных, квантово-электродинамических и других процессов в сильных полях, поле лазерной волны считалось монохроматическим, что вполне соответствовало большой длительности использовавшихся в то время импульсов. В настоящее время имеется уже значительное число работ, в которых теория нелинейных процессов в сильных полях обобщается для случая импульсов малой длительности (см. обзоры [15, 17] и приведённые там ссылки). В разделе 4 кратко излагаются результаты работ [10, 41, 42], вышедших после опубликования обзоров [15, 17].

3. Основные уравнения теории Келдыша

В работе Келдыша [1] выражение для амплитуды нелинейной ионизации было введено по аналогии с таковым в нестационарной теории возмущений первого порядка. Ниже показано, каким образом это выражение получается из решения нестационарного уравнения Шрёдингера. Обсуждается связь между теорией Келдыша и другими близкими подходами: методом Ландау–Дыхне и методом мнимого времени. Целесообразность обсуждения этих вопросов обусловлена тем, что в современной литературе часто встречаются неточные утверждения, одним и тем же формулам приписывается разный смысл и т.п.

3.1. Общие выражения

для вероятности ионизации в теории Келдыша

В нерелятивистской задаче о вырывании электрона из связанного состояния в короткодействующем потенциале $U_{\text{ст}}(r)$ под действием внешнего однородного электриче-

ского поля $\mathcal{E}(t)$ конечной длительности, $\mathcal{E}(t \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, требуется решить уравнение Шрёдингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{1}{2} \Delta + U_{\text{sr}}(r) + \mathcal{E}(t)\mathbf{r} \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$\psi(\mathbf{r}, t \rightarrow -\infty) \rightarrow \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{ik^2 t}{2}\right). \quad (3.2)$$

Здесь $\psi_0(\mathbf{r})$ — волновая функция невозмущённого уровня, $I = \kappa^2/2$ — энергия связи (потенциал ионизации), κ — характерный импульс электрона в связанном состоянии. Для описания взаимодействия электрона с электрическим полем лазерной волны используются дипольное приближение и так называемая калибровка длины. Считая, что других связанных состояний нет, запишем волновую функцию после выключения электрического поля (при $t \rightarrow +\infty$) в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a\psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{ik^2 t}{2}\right) + \psi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

где второе слагаемое в правой части описывает освобождённый электрон, который уходит на большое расстояние от атома. Поэтому при $r \rightarrow \infty$ это слагаемое представляет собой расходящуюся сферическую волну, коэффициенты разложения которой по плоским волнам определяют импульсное распределение фотоэлектронов. Полная вероятность ионизации выражается как

$$w = 1 - |a|^2 = \int |\psi_{\text{out}}|^2 d^3 r. \quad (3.4)$$

Воспользуемся интегральной формой уравнения (3.1) с начальным условием (3.2):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int d^3 r_1 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) U_{\text{sr}}(r_1) \psi(\mathbf{r}_1, t_1), \quad (3.5)$$

где G — запаздывающая временная функция Грина электрона в электрическом поле, удовлетворяющая уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta - \mathcal{E}(t)\mathbf{r} \right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) = \delta(t - t_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (3.6)$$

и условию $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) = 0$ при $t < t_1$:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) = -i \frac{\eta(t - t_1)}{(2\pi)^3} \int d^3 p \exp(iS(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1)), \quad (3.7)$$

где $\eta(z)$ — функция Хевисайда, $S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1)$ — классическая функция действия для электрона в однородном электрическом поле,

$$S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{v}_p(t)\mathbf{r} - \mathbf{v}_p(t_1)\mathbf{r}_1 - \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \mathbf{v}_p^2(t') dt', \quad (3.8)$$

$\mathbf{v}_p(t)$ — зависящая от времени скорость электрона в поле волны,

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{p} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(t), \quad \frac{1}{c} \mathbf{A}(t) = - \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt', \quad (3.9)$$

$\mathbf{p}$ — постоянный вектор, равный импульсу (скорости) электрона на бесконечности, $\mathbf{A}(t)$ — векторный потенциал, отвечающий полю $\mathcal{E}(t)$, $\mathbf{A}(-\infty) = \mathbf{A}(+\infty) = 0$.

Можно также рассмотреть более общий случай, в котором

$$\mathbf{A}(+\infty) \neq \mathbf{A}(-\infty) = 0. \quad (3.10)$$

При условии (3.10) уравнения (3.5)–(3.7) сохраняют свой вид, но классическое действие даётся более сложным выражением, которое получается заменой

$$\mathbf{v}_p(t_i) \rightarrow \mathbf{p} + \frac{1}{c} (\mathbf{A}(t_i) - \mathbf{A}(+\infty)), \quad t_i = t, t_1,$$

в действии (3.8). Обычно считается, что электрическое поле лазерного импульса удовлетворяет условию [43]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt = 0, \quad (3.11)$$

которое означает, что импульс за полное время своего действия не совершает работы над частицей: $\mathbf{p}(-\infty) = \mathbf{p}(+\infty)$. Для импульсов, распространяющихся в нелинейной среде, ограничение (3.11), по-видимому, можно обойти (см., например, работу [44], в которой обсуждается генерация полуволновых лазерных импульсов ИК-диапазона длин волн при филаментации в азоте).

Полагая, что вероятность ионизации за время действия импульса мала, заменим волновую функцию $\psi(\mathbf{r}_1, t_1)$ в правой части уравнения (3.5) её невозмущённым значением (3.2). В результате получаем приближённое решение уравнения в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \exp(i\mathbf{v}_p(t)\mathbf{r}) \times \\ & \times \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3 r_1 \exp\left[-i\left(\mathbf{v}_p(t_1)\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \mathbf{v}_p^2(t') dt'\right)\right] \times \\ & \times U_{\text{sr}}(r_1) \psi_0(\mathbf{r}_1) \exp\left(\frac{ik^2 t_1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

которое на больших расстояниях при $t \rightarrow \infty$ имеет вид расходящейся волны:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \exp\left(i\mathbf{p}\mathbf{r} - \frac{ip^2 t}{2}\right) M(\mathbf{p}), \quad (3.13)$$

где амплитуда $M(\mathbf{p})$ определяет импульсное распределение вылетающих электронов:

$$dw(\mathbf{p}) = |M(\mathbf{p})|^2 d^3 p. \quad (3.14)$$

Из сравнения формул (3.12) и (3.13) получаем (с точностью до несущественного фазового множителя) амплитуду фотоионизации в виде

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}) = & -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(iS_0(\mathbf{p}, t)) \times \\ & \times \int d^3 r \exp(-i\mathbf{v}_p(t)\mathbf{r}) U_{\text{sr}}(r) \psi_0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$S_0(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \kappa^2 t + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \mathbf{v}_p^2(t') dt'. \quad (3.16)$$

В работе Келдыша [1] амплитуда фотоионизации вычислялась по формуле

$$M_K(\mathbf{p}) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \psi_p^*(\mathbf{r}, t) V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \psi_0(\mathbf{r}, t) d^3r, \quad (3.17)$$

где $V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(t)\mathbf{r}$. При этом волновая функция начального состояния заменялась не возмущённой электрическим полем волновой функцией связанного состояния электрона, как это было сделано при выводе формулы (3.13), а в качестве волновой функции вылетающего электрона использовалась волковская волновая функция электрона во внешнем электрическом поле [45–47]

$$\psi_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left[i \left(\mathbf{v}_p(t)\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{v}_p^2(t') dt' \right) \right], \quad (3.18)$$

где скорость $\mathbf{v}_p(t)$ даётся формулой (3.9).

Амплитуда (3.17) совпадает с (3.15). Чтобы убедиться в этом, проведём в (3.15) следующие преобразования. Учтём, что из уравнения Шрёдингера для невозмущённой волновой функции следует

$$U_{\text{sr}}(r) \psi_0(\mathbf{r}) \exp \left(\frac{i\kappa^2 t}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \Delta + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_0(\mathbf{r}) \exp \left(\frac{i\kappa^2 t}{2} \right),$$

и перенесём действие операторов Δ и $\partial/\partial t$ налево. При этом формула (3.15) принимает вид

$$M(\mathbf{p}) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \left(\frac{1}{2} \Delta - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-i \left(\mathbf{v}_p(t)\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{v}_p^2(t') dt' \right) \right] \right\} \psi_0(\mathbf{r}) \exp \left(\frac{i\kappa^2 t}{2} \right)$$

и после выполнения дифференцирования переходит в (3.17).

Формулы (3.15) и (3.17) носят общий характер (в условиях малости вероятности ионизации и для короткодействующих сил, характеризующихся потенциалом $U_{\text{sr}}(r)$) и единым образом описывают как случай применимости теории возмущений в её низших порядках, так и случай непертурбативного характера рассматриваемого процесса (туннельная и многофотонная ионизация в переменном поле). Формулы (3.15) и (3.17) существенно упрощаются для s-состояний, когда асимптотика начальной волновой функции имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r}) = C_K \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\exp(-\kappa r)}{r}, \quad r \gg \frac{1}{\kappa}, \quad (3.19)$$

где C_K — безразмерный асимптотический коэффициент². В результате формула (3.15) принимает особенно простой вид:

$$M(\mathbf{p}) = i \frac{C_K}{\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iS_0(\mathbf{p}, t)) dt, \quad (3.20)$$

где фаза $S_0(\mathbf{p}, t)$ определена формулой (3.16).

В условиях применимости теории возмущений ко взаимодействию электрона с внешним полем, удерживая в разложении экспоненты в (3.20) линейное по полю слагаемое и проводя двукратное интегрирование по частям, получаем для потенциала нулевого радиуса

$$M(\mathbf{p}) = -\frac{2\sqrt{\kappa}}{\pi(\kappa^2 + p^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p} \mathcal{E}(t) \exp \left[\frac{i(\kappa^2 + p^2)t}{2} \right] dt, \quad (3.21)$$

что совпадает с выражением для амплитуды, вычисленной в нестационарной теории возмущений первого порядка [48].

3.2. Теория Келдыша и метод Ландау – Дыхне

В ряде работ (см., например, [49, 50]) для вычисления вероятностей многоквантовых процессов в интенсивном лазерном поле используется метод Ландау – Дыхне [48, 51, 52], первоначально предложенный для описания переходов между связанными состояниями под действием адиабатического возмущения. Обсудим связь между теорией Келдыша и методом Ландау – Дыхне применительно к задаче об ионизации.

В случае адиабатически изменяющегося электрического поля (при выполнении условия $I \gg \omega$, необходимого для многоквантовой ионизации) фаза в показателе экспоненты в (3.20) является большой величиной, подынтегральная функция быстро осциллирует и для вычисления интеграла в амплитуде перехода можно использовать метод перевала. Положения перевальных точек $t_s(\mathbf{p})$ в верхней полуплоскости комплексного времени t , для которых $\partial S_0(\mathbf{p}, t)/\partial t = 0$, определяются уравнением

$$E_1(t_s) \equiv -\frac{1}{2} \kappa^2 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(t_s) \right)^2 \equiv E_2(\mathbf{p}, t_s). \quad (3.22)$$

Тогда для вклада отдельной точки перевала $t_{s\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots$, в амплитуду (3.20) получаем

$$M_\alpha(\mathbf{p}) = i C_K \sqrt{\frac{i\kappa}{\pi S_0''(\mathbf{p}, t_{s\alpha})}} \exp(iS_0(\mathbf{p}, t_{s\alpha})). \quad (3.23)$$

В случае, когда доминирует вклад одной точки³, дифференциальная вероятность ионизации принимает вид

$$\frac{dw}{d^3p} = |M(\mathbf{p})|^2 = \frac{\kappa C_K^2}{\pi |\mathcal{E}(t_s) \mathbf{v}_p(t_s)|} \times \\ \times \exp \left(-2 \operatorname{Im} \int_{\tilde{t}_1}^{t_s(\mathbf{p})} [E_2(\mathbf{p}, t) - E_1(t)] dt \right), \quad (3.24)$$

где $\tilde{t}_1$ — произвольная точка на вещественной оси времени.

Формула (3.24) имеет вид, аналогичный выражению для вероятности перехода между состояниями 1 и 2 дискретного спектра под влиянием адиабатического воз-

² $C_K = 1/\sqrt{2}$ для состояния в потенциале нулевого радиуса.

³ Наличие нескольких решений уравнения (3.22), вклады которых в амплитуду ионизации сравнимы по величине, приводит к появлению в спектре фотоэлектронов интерференционной структуры (см. раздел 4.1). Интерференция наиболее существенна в поле с линейной поляризацией [3]. В пределе коротких импульсов, или в случае заметной эллиптичности поля, доминирующий вклад в амплитуду вносится одной стационарной точкой и интерференционные эффекты несущественны.

мушения в квазиклассическом по времени методе Ландау–Дыхне, и представляет собой его обобщение для случая переходов в состояния непрерывного спектра. При этом в роли состояния 1 выступает не возмущённое электрическим полем связанное состояние электрона, а состоянием 2 является состояние вырывающегося электрона, соответствующее его инфинитному движению во внешнем электрическом поле $\mathcal{E}(t)$. Значение $t_s(\mathbf{p})$, найденное из (3.22), определяет комплексный момент "времени перехода" между рассматриваемыми состояниями.

Обсудим связь формулы (3.24) с формулой (53,9) из [48]:

$$|M_{1 \rightarrow 2}|^2 \propto \exp \left(2 \operatorname{Im} \int_C E(t) dt \right), \quad (3.25)$$

а также с родственной ей формулой (52,1) из [48], применимой в случае независящего от времени гамильтониана.

Согласно основной идее метода Ландау–Дыхне [48, §§ 52, 53] квадрат модуля амплитуды перехода определяется (вообще говоря, с экспоненциальной точностью) мнимой частью действия, набираемого при квазиклассическом по времени (или по координатам) движении системы в окрестности момента перехода $t_s = t_0 + i\tau_0$ (или комплексной "точки перехода" q_0). При этом необходимо уточнить смысл понятия действия $S(t)$ в квазиклассическом по времени методе, поскольку в общем случае состояния дискретного спектра 1 и 2, переход между которыми рассматривается, отнюдь не предполагаются квазиклассическими. Волновые функции состояний ввиду адиабатического характера изменения гамильтониана во времени имеют вид

$$\psi_n(q, t) \approx \tilde{\psi}_n(q, t) \exp \left(-i \int^t E_n(t') dt' \right), \quad (3.26)$$

где q — совокупность координат частиц рассматриваемой системы, а $\tilde{\psi}_n(q, t)$ и $E_n(t)$ — соответственно собственные функции и собственные значения "мгновенного" гамильтониана системы $\hat{H}(q, t)$, зависящие от времени как от параметра, — определяются из решения уравнения Шрёдингера $\hat{H}(q, t)\tilde{\psi}_n(q, t) = E_n(t)\tilde{\psi}_n(q, t)$. Функции $\tilde{\psi}_n(q, t)$ и $E_n(t)$ изменяются медленно по отношению к характерному времени финитного движения системы. В классической механике в случае независящей от времени функции Гамильтона действие $S(q, t) = W(q) - Et$, где $W(q)$ — укороченное действие [53]. При медленном изменении функции Гамильтона $H(\lambda(t), q)$ со временем для состояний финитного движения $S(q, t) \approx W(\lambda(t), q) - \int^t E(\lambda(t')) dt'$ [54], поэтому явно зависящая от времени часть действия определяется интегралом

$$S(t) = - \int^t E_n(t') dt'. \quad (3.27)$$

В задаче об ионизации в роли состояния 1 выступает не возмущённое электрическим полем связанное состояние электрона, поэтому $S_1(t) = \kappa^2 t/2$. При $t = t_s$ (т.е. при $\tau = \tau_0$) электрон переходит на новую "орбиту", соответствующую его инфинитному движению во внешнем электрическом поле $\mathcal{E}(t)$. При этом формулы (3.26), (3.27) для волновой функции и действия непосредственно не применимы, поскольку они относятся к случаю финитного движения. Тем не менее в данном

случае известна точная описывающая движение ионизованного электрона волновая функция (3.18), которая имеет такой же вид, как и (3.26), представляя собой произведение медленно изменяющейся координатной волновой функции $\exp(i\mathbf{p}(t)\mathbf{r})$ и экспоненциального временного множителя вида $\exp(iS_2(\mathbf{p}, t))$, где

$$S_2(\mathbf{p}, t) = - \int^t E_2(\mathbf{p}, t') dt', \quad E_2(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_p^2(t). \quad (3.28)$$

Таким образом, формула для вероятности ионизации, получаемая методом Ландау–Дыхне, с экспоненциальной точностью совпадает с результатом теории Келдыша в условиях, когда для вычисления интеграла по времени в (3.17) можно использовать метод перевала. Последнее возможно в многоквантовом режиме, т.е. при выполнении по крайней мере одного из условий: $K_0 \gg 1$ или $z_f \gg 1$. С другой стороны, применимость выражений (3.15) и (3.17) для амплитуды ионизации этими условиями не ограничена, что видно, в частности, из обсуждавшегося выше предельного перехода к первому порядку теории возмущений. Кроме того, в случае короткодействующего потенциала расчёт по теории Келдыша обеспечивает корректное выражение для предэкспоненциального множителя в вероятности ионизации.

Подводя итог, можно сказать, что в задаче об ионизации формула Ландау–Дыхне (3.25) применима в более узком диапазоне параметров и она обладает меньшей точностью, чем формулы, вытекающие из теории Келдыша, причём с вычислительной точки зрения расчёт по формуле Ландау–Дыхне не имеет никаких преимуществ, так как его результат полностью совпадает с результатом расчёта по теории Келдыша с использованием метода перевала. При этом, конечно, метод Ландау–Дыхне применим для рассмотрения задач, лежащих за пределами теории Келдыша, включая, например, адиабатические переходы между связанными состояниями.

3.3. Метод мнимого времени

При вычислении вероятности туннелирования частиц сквозь переменный во времени барьер удобно использовать метод мнимого времени [4, 5, 15, 55]. Здесь мы кратко изложим основные положения ММВ, отсылая за подробностями к указанным работам.

Рассмотрим ионизацию связанного уровня с энергией $E_0 = -\kappa^2/2$ в переменном однородном электрическом поле с линейной поляризацией:

$$\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{E}_0 \varphi(\theta), \quad \varphi(-\theta) = \varphi(\theta), \quad -\infty < \theta \equiv \omega t < +\infty, \quad (3.29)$$

полагая, что $\varphi(\theta)$ — чётная аналитическая функция t (θ — безразмерное время). В квазиклассическом приближении вероятность туннелирования w определяется экстремальной подбарьерной траекторией, которая является одномерной, направленной вдоль поля и минимизирует мнимую часть функции укороченного действия:

$$\dot{x} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} \int_0^\theta \varphi(\theta') d\theta' = \frac{i\kappa}{\gamma} h(\tau), \quad \tau = -i\theta, \quad (3.30)$$

где τ — мнимое время. "Начальный момент" подбарьерного движения $\tau_s(\gamma)$ определяется из условия $\dot{x}^2 + \kappa^2 = 0$

или $\dot{\chi}(\tau_s) = i\kappa$,

$$\tau_s(\gamma) = h^{-1}(\gamma), \quad h(\tau) = \int_0^\tau \varphi(i\theta) d\theta, \quad (3.31)$$

где $h^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к $h(\tau)$. Вычисляя мнимую часть функции укороченного действия W , которое набирается при движении частицы вдоль подбарьерной траектории, получаем

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_s}^0 (\dot{\chi}^2 + \kappa^2) dt = i \frac{\kappa^3}{\mathcal{E}_0} \int_0^1 \chi(\gamma u) (1 - u^2) du, \quad (3.32)$$

$$\chi(u) \equiv \tau'_s(u).$$

Для того чтобы вычислить импульсный спектр вылетающих электронов, следует рассмотреть пучок классических близких к экстремальной траекторий, которые задаются импульсами $\mathbf{p} = (p_{\parallel}, p_{\perp})$ на выходе из-под барьера, и найти квадратичную поправку $\sim \mathbf{p}^2$ к $\text{Im } W$. Эта процедура подробно описана в [15]. Опуская детали, приведём (с точностью до предэкспоненциального множителя) окончательный результат:

$$w(\mathbf{p}) \sim \exp \left\{ -\frac{\kappa^3}{\mathcal{E}_0} \left[\frac{2}{3} g(\gamma) + b_{\parallel} \frac{(p_{\parallel} - p_0)^2}{\kappa^2} + b_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\kappa^2} \right] \right\}, \quad (3.33)$$

где $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$ — продольная и поперечная (относительно направления поляризации) проекции импульса фотона, электрона,

$$g(\gamma) = \frac{3}{2} \int_0^1 \chi(\gamma u) (1 - u^2) du, \quad (3.34)$$

$$b_{\perp}(\gamma) = \gamma^{-1} \tau_s(\gamma), \quad b_{\parallel}(\gamma) = -\gamma b'_{\perp}(\gamma),$$

функция $\chi(u)$ определена в (3.32), а наиболее вероятный импульс находится из условия

$$p_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} \int_0^\infty \varphi(\theta) d\theta. \quad (3.35)$$

Формулы (3.33), (3.34), полученные с помощью ММВ, определяют вероятность ионизации чётным импульсом произвольной формы; они удобны в низкочастотной области $\gamma \ll 1$ и для перехода к пределу постоянного поля [15]. В случае $\gamma \gtrsim 1$ формулы (3.33), (3.34) целесообразно представить в несколько ином (но эквивалентном) виде:

$$w(\mathbf{p}) \sim \exp \left\{ -2K_0 \left[f(\gamma) + c_{\parallel} \frac{(p_{\parallel} - p_0)^2}{\kappa^2} + c_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\kappa^2} \right] \right\}, \quad (3.36)$$

где $K_0 = I/\omega$ (1.2),

$$f(\gamma) = \frac{2\gamma}{3} g(\gamma) = \int_0^\gamma \chi(u) \left(1 - \frac{u^2}{\gamma^2} \right) du, \quad c_{\parallel} = \gamma b_{\parallel}, \quad c_{\perp} = \gamma b_{\perp}. \quad (3.37)$$

Предполагается, что выполнены условия применимости квазиклассического приближения и в верхней полуплоскости комплексного времени существует точка перевала $t_s = i\omega^{-1} \tau_s(\gamma)$, вносящая основной вклад в амплитуду туннелирования. Вероятность ионизации и импульсный спектр электронов определяются через функцию $\chi(u)$, алгоритм вычисления которой по форме импульса

$\varphi(\omega t)$ изложен выше (см. также [15] и приложения А и Б). Довольно часто $\chi(u)$ вычисляется аналитически (см. табл. 2 в [15]), и тогда задача сводится к квадратурам.

Рассмотрим более подробно адиабатический случай, $\gamma \ll 1$, когда существенно лишь поведение электрического поля вблизи максимума. Полагая при $\theta \rightarrow 0$

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{a_2}{2!} \theta^2 + \frac{a_4}{4!} \theta^4 - \frac{a_6}{6!} \theta^6 + \dots, \quad a_2 > 0, \quad (3.38)$$

находим

$$\chi(u) = 1 - \frac{a_2}{4} u^2 + \dots, \quad \tau_s(\gamma) = \gamma - \frac{a_2}{6} \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^5),$$

$$g(\gamma) = 1 - \frac{a_2}{10} \gamma^2 - \frac{1}{280} (a_4 - 10a_2^2) \gamma^4 -$$

$$- \frac{1}{15120} (a_6 - 56a_2a_4 + 280a_2^3) \gamma^6 + \dots, \quad (3.39)$$

$$b_{\parallel}(\gamma) = \frac{a_2}{3} \gamma^2 + \dots, \quad b_{\perp}(\gamma) = 1 - \frac{a_2}{6} \gamma^2 + \dots$$

Выражения (3.39) определяют поправки к скорости ионизации в туннельном режиме.

Рассмотрение конкретных моделей импульсов вида (3.29), допускающих аналитическое решение задачи об ионизации, мы выносим в приложения А и Б. В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний.

1. В работе [56] ММВ обобщён для релятивистского случая и построена релятивистская теория туннелирования.

2. В работах [57, 58] исследована зависимость вероятности туннелирования от спина частицы ($s = 0, 1/2$) (см. также раздел 7.5).

3. Рассмотрен общий случай эллиптически поляризованной волны, при этом экстремальная подбарьерная траектория в рамках ММВ находится аналитически (при пренебрежении кулоновским взаимодействием электрона с атомным остатком) и точка перевала определяется из уравнения [4]

$$\sinh^2 \tau_s - \rho^2 (\cosh \tau_s - \tau_s^{-1} \sinh \tau_s)^2 = \gamma^2, \quad (3.40)$$

где ρ — эллиптичность света, $-1 \leq \rho \leq 1$. Уравнение (3.40) легко решается численно. С точностью до предэкспоненциального множителя имеем

$$w \approx \exp(-2K_0 f(\gamma, \rho)),$$

$$f(\gamma, \rho) = \left(1 + \frac{1 + \rho^2}{2\gamma^2} \right) \tau_s -$$

$$- \frac{1}{\gamma^2} \left(\rho^2 \frac{\sinh^2 \tau_s}{\tau_s} + \frac{1 - \rho^2}{4} \sinh(2\tau_s) \right). \quad (3.41)$$

С возрастанием эллиптичности вероятность ионизации монотонно убывает при заданных интенсивности поля и частоте.

4. Поведение вероятности ионизации $w(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow \infty$ связано с аналитическими свойствами поля в комплексной плоскости. Если $\varphi(\theta)$ имеет особенность (полнос) в точке $\theta = i\tau_*$, то $w \sim \exp(-2K_0 \tau_*)$ практически не зависит от γ при $\gamma \gg 1$.

5. Применение ММВ ограничено случаем аналитических функций от t^2 (т.е. чётных импульсов вида (3.29)). Однако при этом условии алгоритм ММВ позволяет

решить задачу об ионизации практически при любой форме импульса.

4. Ионизация в поле ультракоротких лазерных импульсов

Экспериментам, в которых исследуется нелинейное взаимодействие атомов и молекул с ультракороткими — длительностью в несколько периодов волны — импульсами интенсивного излучения инфракрасных и оптических лазеров, а также соответствующим теоретическим работам посвящён подробный обзор [17].

В этом разделе мы рассмотрим несколько модельных, более простых, чем разобранные в [17], примеров, которые позволяют получить аналитические формулы для скорости ионизации атомных уровней и спектра фотоэлектронов и качественно исследовать поведение этих величин в зависимости от формы импульса. Содержание раздела основано на результатах работ [41, 42, 59–61].

4.1. Туннельная интерференция

Ограничимся случаем потенциала нулевого радиуса действия, когда амплитуда фотоионизации с предэкспоненциальной точностью даётся формулой (3.20) с $C_k = 1/\sqrt{2}$. В многоквантовом режиме, $K_0 \gg 1$, интеграл по времени в (3.20) вычисляется методом перевала и импульсное распределение фотоэлектронов выражается в виде [10, 41]

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{2}{\pi} K_0 \left| \sum_s [\Phi''(\mathbf{q}, \theta_s)]^{-1/2} \exp(iK_0 \Phi(\mathbf{q}, \theta_s)) \right|^2 d^3 q, \quad (4.1)$$

где введены следующие обозначения:

$$S_0(\mathbf{p}, t) = K_0 \Phi(\mathbf{q}, \theta),$$

$$\Phi(\mathbf{q}, \theta) = \theta + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^\theta (\mathbf{a}(\theta') - \mathbf{a}(\infty) + \gamma \mathbf{q})^2 d\theta', \quad \theta = \omega t, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{p} = \kappa \mathbf{q}, \quad \mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}_0 \Phi(\theta) = -\mathcal{E}_0 \mathbf{a}'(\theta), \quad \mathbf{A}(t) = \frac{c}{\omega} \mathcal{E}_0 \mathbf{a}(\theta).$$

Результат (4.1) справедлив для импульса с произвольными формой и поляризацией при выполнении условия

$$\frac{|\Phi^{(IV)}(\theta_s)|}{|\Phi''(\theta_s)|^2} \ll K_0, \quad (4.3)$$

обеспечивающего применимость метода перевала (см., например, [62]). Дальнейшее рассмотрение ограничено случаем линейно поляризованного поля. Наиболее простой с вычислительной точки зрения случай чётного лазерного импульса, $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$, легко рассматривается с помощью ММВ (см. работы [59, 60], а также раздел 3.3). Полученные в [59, 60] результаты подробно обсуждаются в обзоре [15]. В коротком чётном импульсе доминирующий вклад в вероятность вносится одной стационарной точкой, поэтому интерференционного эффекта не возникает. В случае нечётного импульса, $\varphi(-\theta) = -\varphi(\theta)$, имеется по крайней мере две перевальные точки, вносящие одинаковый вклад в амплитуду ионизации, в результате чего возникают интерференционные эффекты в импульсном распределении вылетающих электронов. Осцилляции в энергетическом спектре фотоэлектронов впервые были отмечены, по-

видимому, в [3] для случая линейной поляризации монохроматического излучения, а на их существование для ультракоротких лазерных импульсов указано в [63]. Этот эффект, получивший название туннельной интерференции, наблюдался экспериментально (см., например, работы [64, 65], а также [15, раздел 4]).

Рассмотрим эффект туннельной интерференции на модельном примере нечётного импульса⁴

$$\varphi(\theta) = \theta \exp\left(\frac{1-\theta^2}{2}\right), \quad a(\theta) = \exp\left(\frac{1-\theta^2}{2}\right). \quad (4.4)$$

Электрическое поле достигает амплитудных значений при $\theta_m = \pm 1$, $|\varphi(\theta_m)| = 1$. Соответствующие точки перевала расположены симметрично относительно мнимой оси в комплексной θ -плоскости:

$$\theta_+ = \left\{ 1 - 2 \ln \left[1 - i\gamma \sqrt{1 + q_\perp^2} - \gamma(q_\parallel - q_0) \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.5)$$

$$\theta_- = -\theta_+^*.$$

Здесь $q_\parallel$ и $q_\perp$ — соответственно продольная и поперечная относительно направления поляризации компоненты безразмерного импульса, q_0 — его наиболее вероятное значение, т.е. такое, для которого мнимая часть действия (4.2) минимальна [42]:

$$\int_0^{\theta_s(q_0)} (a(\theta) - a(+\infty) + \gamma q_0) d\theta = 0. \quad (4.6)$$

В туннельном режиме приближённое решение уравнения (4.6) имеет вид [42]

$$q_0 = \frac{1}{\gamma} [a(+\infty) - a(\theta_m)], \quad (4.7)$$

где θ_m — точка максимума электрического поля. В случае импульса (4.4) для обеих точек перевала [10]

$$q_0 = -\frac{1}{\gamma}. \quad (4.8)$$

Фазы $\Phi(\theta_{s,\pm})$ даже для экстремальных значений импульса ($q_\perp = 0$ и $q_\parallel = q_0$) являются комплексными:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_\pm) &= \chi_\pm(\gamma) + i f(\gamma) = \\ &= \theta_\pm \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left[1 - 2e^{1/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\theta_\pm^2}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\theta_\pm^2\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $e = 2,718 \dots$, ${}_1F_1(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, причём функция $f(\gamma)$ — обобщение функции Келдыша для случая ультракоротких импульсов — одинакова для обеих перевальных точек $\theta_\pm$, а значения $\chi_\pm(\gamma)$ различаются только знаком.

⁴ Ионизация атомного уровня импульсом вида (4.4) рассматривалась также в работе [49]. При этом, однако, был учтён вклад в амплитуду фотоионизации лишь от одной из перевальных точек. В полученных в [49] выражениях для вероятности ионизации не только был потерян эффект туннельной интерференции, но и была занижена на много порядков полная вероятность ионизации уровня, особенно в области $\gamma \ll 1$. Так, например, формула (21) из [49] при $\omega \rightarrow 0$ принимает вид $w \sim \exp(-\text{const } K_0 / \sqrt{|\ln \gamma|})$, что противоречит хорошо известному выражению [48, 66] $w \sim \exp[-2/(3F)]$ для вероятности ионизации в постоянном электрическом поле $\mathcal{E}$.

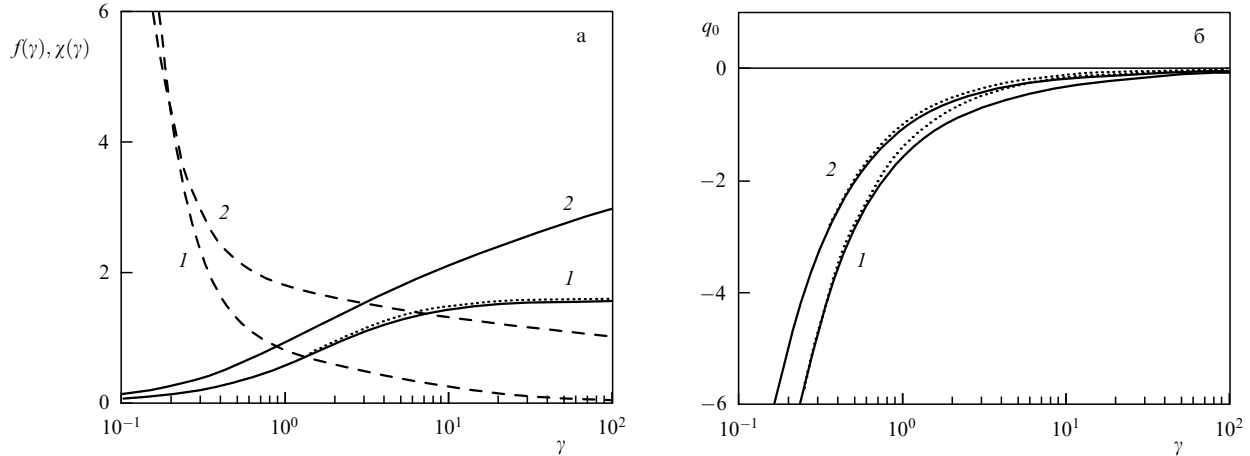


Рис. 1. (а) Функция Келдыша $f(\gamma) = \text{Im } \Phi(q_0, \theta_s)$ (сплошные кривые), штриховыми кривыми показана фаза $\chi(\gamma) = \text{Re } \Phi(q_0, \theta_s)$. (б) Наиболее вероятный импульс $q_0(\gamma)$. Вычисления проведены для импульсов (4.14) (кривые 1) и (4.4) (кривые 2). Пунктирными кривыми показаны функции $q_0(\gamma)$ и $f(\gamma)$, вычисленные с помощью приближённого выражения (4.7). (Из работы [42].)

4.2. Импульсные спектры фотоэлектронов

В туннельном режиме, $\gamma \ll 1$, распределение (4.1) принимает вид ($\chi_+(0) = 0,209$)

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{8}{\pi} \gamma K_0 \cos^2 \left(\chi_+(0) \frac{K_0}{\gamma^2} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{5} \gamma^2 + \frac{3}{2} q_{\perp}^2 + \gamma^2 (q_{\parallel} - q_0)^2 \right] \right\} d^2 q_{\perp} dq_{\parallel}. \quad (4.10)$$

В предэкспоненте возникают быстрые осцилляции, обусловленные интерференцией вкладов от двух экстремальных траекторий, вдоль которых одинаковы (и минимальны по величине) мнимые части функции действия (4.2). После интегрирования по импульсам для полной вероятности ионизации получаем выражение

$$w = (96\pi)^{1/2} K_0 F^{3/2} \cos^2 \left(\frac{0,209 K_0}{\gamma^2} \right) \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{5} \gamma^2 \right) \right]. \quad (4.11)$$

Если в (4.10) и (4.11) провести усреднение в предэкспоненте по быстрым осцилляциям, то получим выражения, отличающиеся лишь множителем 2 от соответствующих формул для симметричных однополярных импульсов в случае $\gamma \ll 1$ [15], как и следовало ожидать.

В многофотонном пределе, $\gamma \gg 1$, импульсное распределение даётся выражением [10]

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{8}{\pi^2} K_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi K_0}{2\sqrt{2} \ln \gamma} \right) \times \\ \times \exp \left[-2K_0 \sqrt{2 \ln \gamma} (1 + q^2) \right] d^3 q. \quad (4.12)$$

Как и в случае чётных импульсов, распределение в этом пределе становится изотропным. Интерференционные осцилляции в (4.12) не столь быстры, как в (4.10), их частота уменьшается с увеличением γ , но лишь логарифмически. Период осцилляций имеет вид

$$\Delta \gamma \approx \gamma (2 \ln \gamma)^{3/2} K_0^{-1} < \gamma \quad \text{при } \gamma < \exp \frac{K_0^{2/3}}{2}. \quad (4.13)$$

Аналитическое решение возможно также в случае импульса с

$$\varphi(\theta) = 2 \frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta}, \quad a(\theta) = \frac{2}{\cosh \theta}, \quad (4.14)$$

для которого $\theta_m = \pm \ln(1 + \sqrt{2})$ и перевальные точки $\theta_{\pm}$ при $\gamma \rightarrow \infty$ не уходят на бесконечность, а стремятся к постоянному пределу $i\pi/2$:

$$\theta_{\pm} = i \frac{\pi}{2} \pm 2\gamma^{-1} - i2^{3/2} \gamma^{-2} \mp 12\gamma^{-3} + \dots \quad (4.15)$$

В этом случае вероятность ионизации почти не зависит от γ (при фиксированном K_0) (см. [41, 42]). Зависимости функции Келдыша, разности фаз для экстремальных траекторий и величины наиболее вероятного импульса от параметра адиабатичности, вычисленные в работах [41, 42] для импульсов вида (4.4) и (4.14), показаны на рис. 1.

4.3. Результаты численных расчётов

Импульсные распределения (4.10) и (4.12) получены квадратичным разложением действия по импульсам вблизи наиболее вероятного импульса q_0 , а разность фаз взята для экстремальных траекторий. Поэтому множитель $\cos^2(\dots)$ в этих распределениях описывает интерференцию вкладов двух наиболее вероятных траекторий в зависимости от параметров K_0 и γ , но не от импульса фотоэлектрона. Для исследования интерференционной структуры импульсного распределения требуется более точный расчёт, результат которого непредставим в замкнутом аналитическом виде даже для простейших симметричных и антисимметричных форм импульса. В этом случае проще всего воспользоваться перевальным выражением для вероятности (4.1), подставив в него численное решение уравнения для точки перевала. Рассчитанные таким способом импульсные распределения фотоэлектронов вдоль направления поляризации излучения (т.е. для $q_{\perp} = 0$) показаны на рис. 2.

Приведённые на рис. 2 спектры являются существенно асимметричными и демонстрируют заметную интерференционную структуру. Степень асимметрии и число интерференционных осцилляций убывают с возрастанием параметра γ . Следует подчеркнуть, что рас-

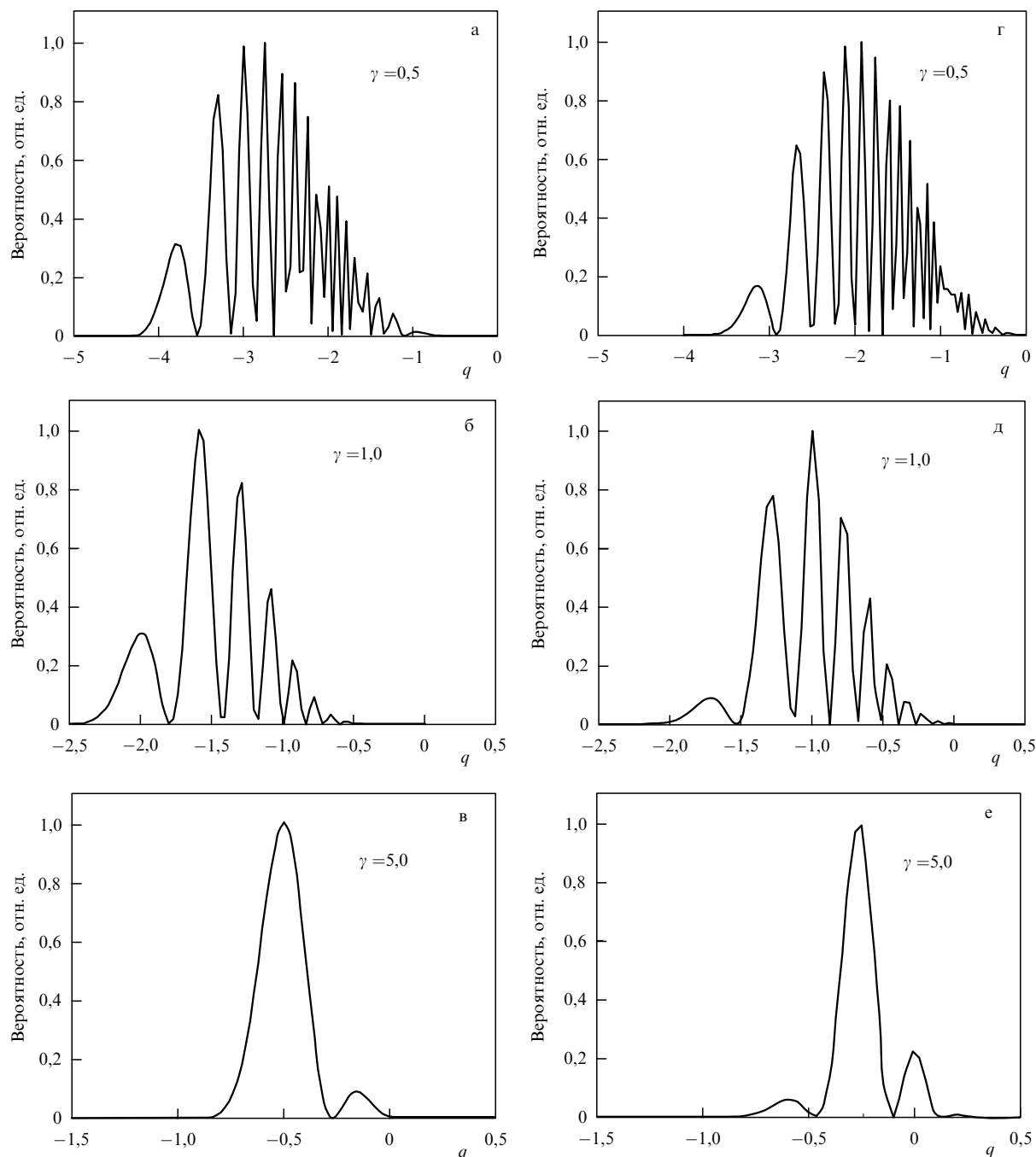


Рис. 2. Спектры фотоэлектронов вдоль направления поляризации, вычисленные из (4.1) для случая ионизации ксенона ($I = 12,1$ эВ) полем титан-сапфирового лазера ($\hbar\omega \approx 1,55$ эВ) при $K_0 \approx 7,8$ и различных значениях параметра Келдыша γ , указанных на рисунке, для (а–в) солитоноподобной (4.14) и (г–е) экспоненциальной (4.4) форм импульса. Пиковая интенсивность 4×10^{14} Вт см $^{-2}$ на рис. а, г, 1×10^{14} Вт см $^{-2}$ на рис. б, д и 4×10^{12} Вт см $^{-2}$ на рис. в, е. (Из работы [42].)

стояния между соседними интерференционными максимумами (минимумами) вовсе не равны энергии кванта, так что спектр, в отличие от такового в случае квазимонохроматического поля, не содержит отдельных пиков, каждый из которых отвечает поглощению определённого числа квантов лазерной волны. Отсутствие в спектре изолированных надпороговых пиков не удивительно, так как в импульсах, длительность которых сравнима с оптическим периодом, разброс по энергиям фотонов сопоставим с самой энергией. В целом, форма спектров заметно зависит от всех параметров задачи, включая интенсивность лазерного излучения и форму

импульса. Последнее позволяет использовать измерение импульсных распределений фотоэлектронов для контроля за формой коротких импульсов, в том числе за значением абсолютной фазы [67]. В настоящее время интерференционная структура спектров надпороговой ионизации наблюдается экспериментально, в том числе и для ультракоротких импульсов [64, 65].

5. Кулоновские эффекты в фотоионизации

Основное приближение, используемое в теории Келдыша, состоит в том, что при наличии интенсивного

лазерного поля состояние фотоэлектрона в континууме описывается плоской волновой функцией [45–47], а взаимодействием фотоэлектрона с атомным остатком можно пренебречь. Это позволяет получить аналитические выражения для импульсных распределений фотоэлектронов, а для более сложных процессов (генерация гармоник, двойная ионизация и т.д.) ограничиться численными расчётами, доступными для персональных компьютеров средней мощности. Приближение континуума волновой функцией хорошо обосновано, и оно обеспечивает количественное описание многоквантовой ионизации отрицательных ионов $H^-, F^-, \dots$, что в настоящее время установлено посредством сравнения результатов теории с экспериментальными данными [68–73], с результатами расчётов в рамках метода комплексных квазиэнергетических состояний [74, 75] и результатами численного интегрирования временного уравнения Шрёдингера [76, 77].

Для атомов и положительно заряженных ионов имеется кулоновское взаимодействие между фотоэлектроном и атомным остатком, состояния континуума существенно отличаются от плоских волн и нельзя рассчитывать на то, что амплитуда (3.17) является хорошим приближением. Пренебрежение кулоновским взаимодействием приводит к значительным расхождениям между предсказаниями теории и результатами экспериментов, а также к внутренним противоречиям в теории, таким как зависимость формы импульсного распределения и полной вероятности ионизации от выбора калибровки потенциалов электромагнитного поля (см, например, [18]).

Результаты численных расчётов указывают на то, что теория Келдыша без учёта кулоновского взаимодействия в конечном состоянии обеспечивает только качественное описание нелинейной ионизации даже в простейшем случае атома водорода. Основным фактором, ответственным за расхождения между экспериментом и теорией, является дальнедействующая кулоновская сила притяжения фотоэлектрона к ядру, не учитываемая в амплитуде (3.17).

Важность учёта кулоновского взаимодействия была осознана уже в первых работах по атомной физике сильных полей. В работе Келдыша [1] отмечается, что полученная им формула для скорости ионизации верна лишь с экспоненциальной точностью. Однако проблема включения кулоновского взаимодействия в теорию нелинейной ионизации оказалась непростой и долго не поддавалась решению. Первая попытка найти предэкспоненциальный множитель в вероятности ионизации связанного состояния была предпринята Никишовым и Ритуком [6], однако полученный ими результат не обеспечивал в случае линейной поляризации излучения перехода к пределу постоянного поля, поэтому до сих пор остаётся неясным, в какой мере он является правильным. Переломов и Попов [7] вычислили кулоновскую поправку к скорости ионизации атомов в туннельном режиме, $\gamma \ll 1$. В этом случае скорость ионизации s -состояния атома w отличается от аналогичной величины w_{sr} для уровня в короткодействующей яме [15, 48, 66] (с тем же потенциалом ионизации $I = \kappa^2/2$) множителем Q_C :

$$w = Q_C w_{sr},$$

$$Q_C(\mathcal{E}_0) = \frac{w(\mathcal{E}_0, \gamma)}{w_{sr}(\mathcal{E}_0, \gamma)} = \left(\frac{2\hbar^2 \kappa^3}{m_e e \mathcal{E}_0} \right)^{2n^*} = \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*} \gg 1. \quad (5.1)$$

Здесь $\mathcal{E}_0$ — амплитуда линейно поляризованного электрического поля волны, $F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$ — приведённое поле (1.3), $\kappa = \sqrt{2m_e I}/\hbar$ — характерный атомный импульс, $\mathcal{E}_{ch} = \hbar^2 \kappa^3/m_e e$ — характерное электрическое поле (для основного состояния атома водорода $\mathcal{E}_{ch} \equiv \mathcal{E}_a = m_e e^5/\hbar^4 = 5,14 \times 10^9$ В см $^{-1}$), $n^* = Z e^2 m_e/\hbar^2 \kappa$ — эффективное главное квантовое число уровня, Z — заряд атомного остатка ($Z = 1$ для нейтральных атомов, $Z = 0$ для однозарядных отрицательных ионов),

$$w_{sr}(\mathcal{E}_0, \gamma) = C_\kappa^2 \frac{\kappa^2 \hbar}{m_e} \sqrt{\frac{3F^3}{\pi}} \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{\gamma^2}{10} \right) \right], \quad (5.2)$$

где C_κ — безразмерный асимптотический коэффициент атомной волновой функции на расстояниях $r \gg \hbar \kappa^{-1}$ от ядра, обычно не сильно отличающийся от единицы [15]. Подчёркнём, что в (5.2) потенциал ионизации I и асимптотический коэффициент C_κ относятся к атомному состоянию, вероятность ионизации которого вычисляется, а не к состоянию в короткодействующем потенциале.

Поправка (5.1) увеличивает вероятность туннельной ионизации на несколько порядков — эффект, твёрдо установленный экспериментально [78]. В настоящее время выражения для скорости туннельной ионизации с учётом кулоновской поправки [7] широко используются для калибровки интенсивности лазерных импульсов⁵.

Формула (5.1) не даёт, однако, полного решения задачи, оставляя открытыми два вопроса.

- Каков вид кулоновской поправки $Q_C(\mathcal{E}_0, \omega)$ во всём диапазоне частот, включая многофотонную область $\gamma \gg 1$?

- Кулоновское взаимодействие влияет не только на полную вероятность ионизации, но и на импульсное распределение фотоэлектронов. Можно ли это влияние описать в рамках того же подхода, который использовался для получения поправки (5.1)?

Эти вопросы были решены в работах [8, 9, 82–87]. Основная идея заключается в использовании квазиклассической теории возмущений для действия [7]. Эта теория была обобщена для того, чтобы вычислить кулоновскую поправку к действию для произвольного значения конечного импульса фотоэлектрона и произвольной частоты лазерного поля. В расчётах используется ММВ [55], изложенный в разделе 3.3. Продemonстрировано применение ММВ для описания нескольких эффектов, возникающих при фотоионизации атомов и положительно заряженных ионов в интенсивном лазерном поле. Результаты существенно отличаются от получаемых в приближении Келдыша без учёта кулоновского взаимодействия и хорошо согласуются с результатами численного интегрирования временного уравнения Шрёдингера. В тех случаях, когда возможно сравнение с экспериментальными данными, обнаружено удовлетворительное согласие.

⁵ Аналитические формулы [2–7] для вероятностей ионизации атомов и импульсных спектров фотоэлектронов в низкочастотном электромагнитном поле известны также в литературе как формулы Аммосова – Делоне – Крайнова (АДК) [79]. Формулы АДК являются частным случаем (при $\gamma \ll 1$) выражений, полученных ранее в работах [2–7]. Следует отметить, что в [79, 80] и других работах этих авторов игнорируется вклад ранних исследований, не потерявших значения до сего дня (см. замечания относительно так называемой теории АДК в работах [15, 81]).

При учёте кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным остатком возникают поправки двух типов. Во-первых, кулоновский потенциал $U_C = -Z/r$ порождает добавку к укороченному действию [7–9]

$$W_C^{(1)} = - \int_{t_s}^{+\infty} U_C(\mathbf{r}_0(t)) dt = Z \int_{t_s}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\mathbf{r}_0^2(t)}}, \quad (5.3)$$

которая явно содержит "малое" кулоновское взаимодействие, поэтому интеграл можно вычислять вдоль траектории $\mathbf{r}_0(t)$, не возмущённой кулоновским полем.

Во-вторых, кулоновское поле искажает траекторию электрона. Если поправка к траектории $\mathbf{r}_1(t)$ найдена из решения уравнения Ньютона

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = - \frac{Z(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1|^3}, \quad (5.4)$$

то соответствующая поправка к действию имеет вид [8, 9]

$$W_C^{(2)} = \int_{t_s}^{+\infty} \left(\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1^2 - \mathcal{E}(t) \mathbf{r}_1 \right) dt - \left(\mathbf{v}_0 \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1 \right) \Big|_{t=t_s}^{t \rightarrow +\infty}. \quad (5.5)$$

Кроме того, момент начала подбарьерного движения в минимом времени $t_s(\mathbf{p})$ также может содержать кулоновскую поправку.

Если эти поправки малы по сравнению с действием (3.16) в лазерном поле, то их подстановка в показатель экспоненты даёт амплитуду нелинейной ионизации с учётом кулоновского взаимодействия. Соответственно, кулоновская поправка к вероятности ионизации определяется формулой

$$Q_C = \exp \left[-2 \operatorname{Im} (W_C^{(1)} + W_C^{(2)}) \right]. \quad (5.6)$$

По абсолютной величине поправки (5.3) и (5.5) могут быть велики по сравнению с единицей, при этом изменение импульсного распределения фотоэлектронов и полной вероятности ионизации будет значительным.

В разделах 5.1–5.4 мы приведём примеры вычисления кулоновских поправок в спектрах многоквантовой ионизации атомов в интенсивном лазерном поле. Результаты расчётов сравниваются с данными, полученными численным решением временного одноэлектронного уравнения Шрёдингера с использованием двух существенно различных методов [88] и [89]. В случае ионизации в поле эллиптически поляризованного излучения приводится также сравнение с доступными экспериментальными данными.

5.1. Угловые распределения в эллиптически поляризованном поле

Интересно рассмотреть эффекты, имеющие *качественный* характер, само существование которых представляет собой следствие кулоновского взаимодействия. Таким эффектом является, например, нарушение четырёхкратной симметрии угловых распределений фотоэлектронов в поле с эллиптической поляризацией. Для достаточно длинных лазерных импульсов, в которых эффекты абсолютной фазы несущественны, приближение Келдыша приводит к угловым распределениям, симметричным относительно большой и малой осей эллипса поляриза-

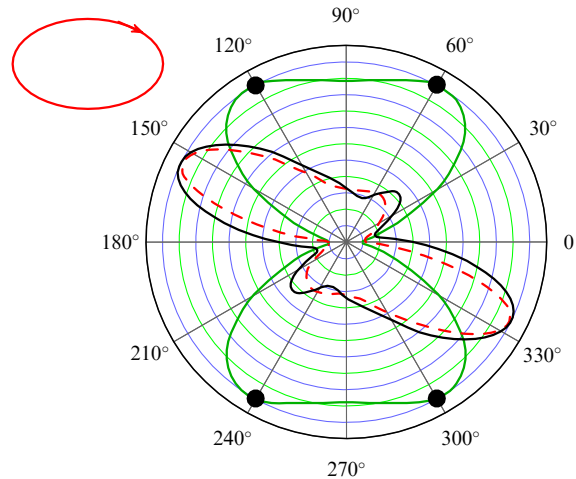


Рис. 3. Угловые распределения фотоэлектронов с энергией $\epsilon = 7,9$ эВ при ионизации основного состояния атома водорода полем титан-сапфирового лазера ($\hbar\omega = 1,55$ эВ, $J \simeq 10^{14}$ Вт см $^{-2}$, эллиптичность $\rho = 0,5$). Результаты расчёта в рамках модели Келдыша показаны сплошной серой кривой, угловое распределение, найденное ММВ с учётом кулоновских поправок, — штриховой кривой. Сплошная чёрная кривая — численное решение временного уравнения Шрёдингера. Кружками обозначены направления вылета фотоэлектронов, для которых модель Келдыша даёт одинаковые значения вероятности ионизации. В верхней левой части рисунка показана ориентация эллипса поляризации со стрелкой в направлении вращения вектора электрического поля.

ции. В то же время экспериментальные данные ясно показывают, что в поле с эллиптической поляризацией такой симметрии нет даже приблизительно [90, 91]. При промежуточных значениях эллиптичности ρ , $0,2 < \rho < 0,8$, наиболее вероятный импульс фотоэлектрона направлен вдоль малой оси эллипса поляризации [4]. Это очевидно, если учесть, что электрон рождается на выходе из-под барьера, имея нулевую скорость (для простоты ограничимся туннельным режимом, $\gamma \ll 1$). Вероятность туннелирования максимальна в тот момент, когда электрическое поле достигает максимума. При этом векторный потенциал минимален по величине и направлен вдоль малой оси эллипса поляризации. Так же направлен и импульс $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{A}/c$, измеряемый в детекторе.

Характерный пример представлен на рис. 3, где приведены также результаты, полученные посредством точного решения временного уравнения Шрёдингера и рассчитанные с помощью ММВ с учётом кулоновских поправок [84]. Видно, что в последнем случае распределение не обладает четырёхкратной симметрией эллипса поляризации и является практически идентичным точному результату. Сравнение результатов расчёта с экспериментальными данными [91] демонстрирует количественное согласие [84].

5.2. Интерференционная структура спектра

В линейно поляризованном поле на каждом оптическом периоде имеются две траектории, вклады которых в амплитуду ионизации сравнимы по абсолютной величине (а в случае строго монохроматического поля одинаковы). Наличие нескольких траекторий, входящих в амплитуду с близкими весами, приводит к эффекту интерференции в импульсных распределениях, впервые рассмотренному в задаче о многоквантовой ионизации в [3]. В ультракоротких импульсах характер интерферен-

ции зависит от *абсолютной фазы* импульса, что может быть использовано для её измерения [64]. Как правило, наблюдение интерференции в спектрах многоквантовой ионизации затруднено из-за того, что неизбежно происходящее в эксперименте усреднение по распределению интенсивности лазерной волны в фокусе частично или полностью смазывает интерференционную структуру. Только в последнее время научились обходить эту трудность и измерять спектры, на которых видны тонкие детали интерференционной картины [64, 65].

В спектрах, полученных с помощью численного интегрирования уравнения Шрёдингера, интерференция хорошо видна, и такие результаты находятся в количественном согласии с данными эксперимента [64, 65]. В то же время интерференционная картина спектра, вычисленного в рамках модели Келдыша, согласуется с экспериментальными данными и результатами численных расчётов лишь качественно. Таким образом, вклад кулоновского поля атомного остатка в разность фаз, набегавших вдоль различных траекторий, приводящих в одно и то же конечное состояние, значителен, и он должен учитываться при расчёте интерференционной структуры спектра. При этом наиболее существенная часть кулоновской поправки к разности фаз обусловлена действием (5.3), которое логарифмически расходится на верхнем пределе интегрирования, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}t + \mathcal{O}(1)$, $W_C^{(1)} \sim (\mathcal{Z}/p) \ln t$. Поскольку различные траектории отвечают одному и тому же значению импульса электрона на бесконечности, логарифмически расходящиеся части поправки выделяются в виде общего фазового множителя (несущественного), а конечные вклады образуют поправку к разности фаз [85, 92].

5.3. Многоквантовая ионизация атомов в поле произвольной частоты

В работах [8, 9] получена кулоновская поправка $Q_C(\mathcal{E}, \omega)$ для поля высокой частоты, $\gamma \gg 1$, когда формулы для вероятности туннельной ионизации неприменимы даже для качественных оценок. В многофотонном режиме поправка (5.3) имеет тот же вид, что и в туннельном [7], но становится существенной поправка (5.5), связанная с искажением траектории кулоновским полем. Для её вычисления нужно учесть (с помощью ММВ) связь между импульсом $p_{||}$ на выходе из-под барьера и импульсом электрона $\mathbf{p}$ на бесконечности: $p_{||} = \sqrt{p^2 + 2\mathcal{Z}/b}$, где b — ширина барьера ($b = \kappa/\omega$ при $\gamma \gg 1$). Наиболее вероятной траектории отвечает $p = 0$ и ненулевой продольный импульс на выходе из-под барьера [8, 9, 83]:

$$p_{||} = \sqrt{\frac{2\mathcal{Z}}{b}} = \sqrt{2n^*\omega} = \kappa\sqrt{2\mu}, \quad \mu = \frac{n^*}{2K_0}. \quad (5.7)$$

Малый параметр μ определяет вклад кулоновского поля в искажение траектории электрона.

Кулоновскую поправку можно записать в виде [8, 9]

$$Q_C(\mathcal{E}_0, \omega) = Q_0 Q_1 \approx \left(\frac{2}{F}\right)^{2n^*} (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*}, \quad (5.8)$$

где e — основание натурального логарифма, пригодном для произвольных значений параметра адиабатичности γ .

В пределе низких частот $Q_1 \rightarrow 1$ и (5.8) переходит в формулу (5.1) для скорости туннельной ионизации s -уровня в низкочастотном поле. В обратном пределе,

$\gamma \gg 1$, поправка (5.8) не зависит от интенсивности и она численно велика. Выражение для скорости ионизации принимает вид

$$w \simeq \frac{I}{\hbar} A(K_0, n^*) F^{2N_{\min}}, \quad (5.9)$$

$$A(K_0, n^*) \simeq 2^{2n^*} C_\kappa^2 \exp(N_{\min} + 2n^*) K_0^{2N_{\min} + 2n^* - 3/2},$$

где $N_{\min} = [K_0] + 1$ — минимальное число квантов, необходимое для ионизации. Таким образом, воспроизводится степенной закон, характерный для теории возмущений высокого порядка $N_{\min}$, чего естественно было ожидать в многофотонном режиме [1, 15].

Для оценки точности формулы (5.8) сравним найденную с её помощью скорость ионизации с результатами численного расчёта [8, 9]. Логарифмы скорости ионизации для атома водорода в $1s$ -состоянии в поле второй гармоники титан-сапфирового лазера с энергией фотона $\hbar\omega = 3,10$ эВ и в поле с несколько более низкой частотой $\hbar\omega = 2,94$ эВ приведены соответственно на рис. 4а и б. Значения параметра μ из (5.7) составляют при этом около 0,11. Скорость ионизации, рассчитанная методом комплексных квазиэнергий (метод Флоке), показана кружками. Результаты численного решения временного уравнения Шрёдингера в поле короткого импульса длительностью в 10 периодов представлены треугольниками. Совпадение результатов независимых численных расчётов свидетельствует о их надёжности.

На рисунке 5 приведена скорость ионизации состояния $4p_0$ иона Xe^{17+} , рассчитанная по формулам (5.8), (5.2) и (5.1) и найденная численным интегрированием одночастичного временного уравнения Шрёдингера для электрона в эффективном потенциале при наличии электрического поля волны. В этом случае кулоновская поправка увеличивает вероятность ионизации на много порядков: $Q_C \approx 9 \times 10^8$. Сопоставление аналитических результатов с численными демонстрирует хорошее количественное согласие даже в случае ксенона, хотя здесь параметр $\mu = 0,34$ не очень мал, а связанное состояние обладает угловым моментом 1, в то время как аналитические результаты получены для s -состояний. Отклонение аналитических результатов от численно найденных скоростей ионизации связано в основном с резонансами, не учитываемыми в данной теории. То, что именно резонансы ответственны за эти расхождения, подтверждается сравнением кривых на рис. 4а и б. В первом случае в области интенсивностей $\mathcal{I} \simeq (2-3) \times 10^{13}$ Вт см⁻² наблюдается четырёхфотонный резонанс с одним из ридберговских уровней, положение которого зависит от интенсивности из-за динамического штарковского сдвига. На рисунке 4б длина волны подобрана так, чтобы этот резонанс отсутствовал, и тогда совпадение аналитических и численных результатов оказывается практически идеальным.

5.4. Другие приложения метода кулоновской поправки

Метод мнимого времени и основанное на нём вычисление амплитуды фотоионизации с учётом кулоновского взаимодействия в последнее время достаточно широко используются в физике сильных лазерных полей. В работах [86, 87] был развит (независимо от [8, 9, 83–85]) подход к вычислению кулоновской поправки к действию фотоэлектрона в сильном лазерном поле, основанный на использовании приближения эйконала и методе R -мат-

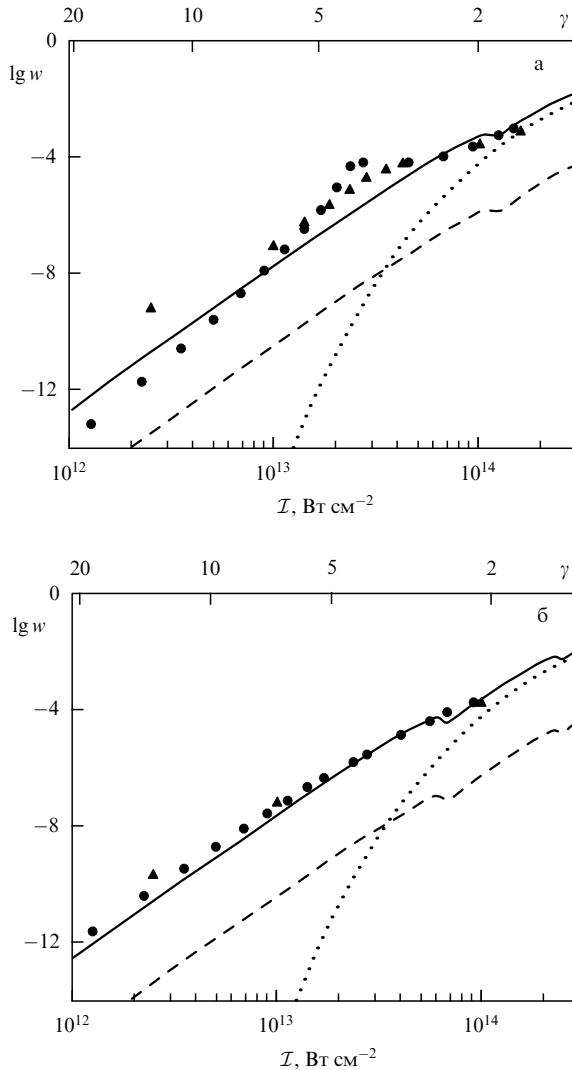


Рис. 4. Скорость ионизации (в единицах $1 \text{ а.е.} = 4,13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$), вычисленная по формуле (5.8) (сплошная кривая), по (5.2) (штриховая кривая) и по туннельной формуле (5.1) (пунктирная кривая), а также найденная численно методом Флоке (кружки) и решением временного уравнения Шрёдингера (треугольники), в зависимости от интенсивности для $1s$ -состояния атома водорода в поле линейно поляризованной волны с длиной волны 400 нм (а) и 422 нм (б). Параметры K_0 равны соответственно 4,39 и 4,63. Интенсивности $I = 10^{14} \text{ Вт см}^{-2}$ соответствует амплитуда поля $E_0 = 0,053 E_a$, $I = 10^{13} \text{ Вт см}^{-2}$ — амплитуда $E_0 = 0,0169 E_a$. Кулоновская поправка $Q_C \approx 6 \times 10^2$.

рицы. Для наиболее вероятной траектории фотоэлектрона полученные в [86, 87] выражения для кулоновской поправки воспроизводят результат (5.1) [7]. Вычисление поправки для траекторий, близких к экстремальной, которое также выполняется аналитически, позволяет найти угловые распределения фотоэлектронов в эллиптически поляризованном поле с учётом кулоновской асимметрии (см. раздел 5.1) [94, 95]. Разработанный в [86, 87] метод допускает также обобщение для случая многоэлектронных атомов [96].

В работах [97, 98] был предложен и экспериментально реализован метод фотоэлектронной голографии. Идея метода заключается в том, чтобы использовать интерференционную структуру для восстановления вида потенциала электрон-ионного взаимодействия. В случае ато-

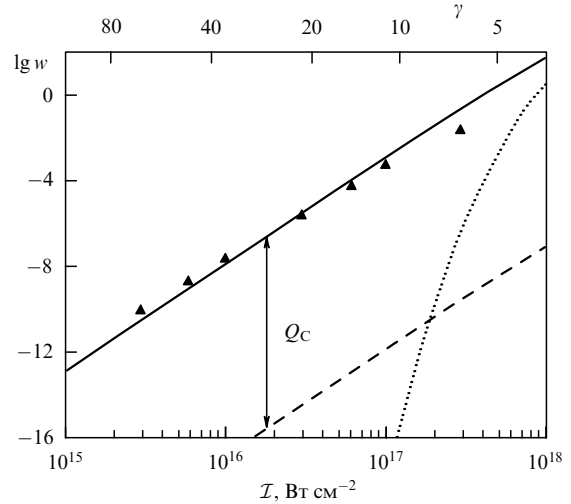


Рис. 5. То же, что на рис. 4, для иона Xe^{17+} ($I = 434 \text{ эВ}$, оболочка $4p_0$) в поле рентгеновского лазера с длиной волны $\lambda = 13,3 \text{ нм}$ ($\hbar\omega \approx 93 \text{ эВ}$) [93]. Параметры K_0 , n^* и μ равны соответственно 4,67, 3,19 и 0,34, кулоновская поправка $Q_C \approx 9 \times 10^8$.

мов такая задача представляет лишь методический интерес, так как на больших расстояниях потенциал взаимодействия является чисто кулоновским. Важный результат работ [97, 98] заключается в том, что в них было показано, что интерференционная картина действительно определяется кулоновским взаимодействием — без его учёта воспроизвести результаты эксперимента нельзя даже на качественном уровне. Измеренные импульсные распределения фотоэлектронов, образующихся при многоквантовой ионизации ксенона полем инфракрасного лазера, сопоставлялись с результатами, полученными численным интегрированием временного уравнения Шрёдингера, и с результатами приближённого расчёта, основанного на ММВ.

В работе [99] ММВ был использован для решения задачи о распаде квазистационарного состояния в присутствии сильного лазерного поля. При возмущении квазистационарного уровня влияние лазерного поля на подбарьерное движение, как правило, можно учитывать по теории возмущений (в отличие от этого при ионизации роль возмущения играет кулоновское поле). После выхода из-под барьера лазерное поле доминирует, и в случае системы, связанной кулоновскими силами, остаточное кулоновское взаимодействие можно учесть методом, изложенным выше. Также было показано, что возможны два режима взаимодействия: в относительно слабом и относительно сильном поле. В относительно слабом поле, не совершающем на длине барьера значительной работы над частицей, полная скорость распада уровня не изменяется, но если частота поля при этом низка, так что выполняется условие

$$eE_0 \sqrt{\frac{E_0}{m}} \gg \omega^2, \quad (5.10)$$

где E_0 — положение квазистационарного уровня, m и e — масса и заряд частицы (не обязательно электрона), то спектр вылетающих частиц становится широким и состоит из многих пиков, отвечающих поглощению или излучению определённого числа лазерных фотонов. В

таком режиме лазерное поле влияет только на кинематику частицы после распада. В более сильном поле возможно значительное изменение подбарьерного действия и, следовательно, увеличение скорости распада. Критерий сильного поля зависит от конкретной системы. В случае короткодействующего барьера шириной b режим сильного поля реализуется при условии

$$\frac{e\mathcal{E}_0 b^2}{\sqrt{E_0/m}} \geq 1. \quad (5.11)$$

Вывод о существовании двух режимов распада квазистационарного уровня в присутствии лазерного поля совпадает с результатом более ранних работ, в которых рассматривалась возможность влияния лазерного поля на β -распад.

Влиянию сильного лазерного поля на β -распад посвящено большое число работ (см., например, обзор [38] и приведённые там ссылки). Существенное влияние на скорость распада может оказать только очень сильное поле, причём получение значительно более слабых электромагнитных полей, близких к критическому полю квантовой электродинамики, по-видимому, в принципе невозможно [100]. Поэтому практический интерес представляет рассмотрение влияния лазерного поля на распад квазистационарных состояний в атомных системах или в наносистемах. Так, в недавнем эксперименте [101] было исследовано влияние лазерного поля на ток, возникающий при приложении разности потенциалов между электродом нанометрового размера и металлической поверхностью. Результаты, полученные в [99], можно использовать при описании экспериментов такого типа.

6. Влияние магнитного поля на скорость ионизации атомов. Лоренцева ионизация

6.1. Метод мнимого времени при наличии магнитного поля

В магнитном поле на электрон действует сила Лоренца, вследствие чего экстремальная подбарьерная траектория "закручивается" и уже не является одномерной. Для применения ММВ надо решить уравнение движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{E} - \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}] - \frac{Z\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.1)$$

с комплексным "временем" t (в атомной системе единиц $c = \alpha^{-1} = 137$), что можно сделать аналитически только при $Z = 0$. Учитывая граничные условия ММВ для короткодействующего потенциала [4, 5]

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}^2(t_0) = -\kappa^2 = -2I, \quad \text{Im } \mathbf{r}(t = 0) = 0, \quad (6.2)$$

находим (в случае постоянных полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$) эту траекторию:

$$\begin{aligned} x &= i \frac{\mathcal{E}}{\omega_c^2} \left(\tau - \tau_0 \frac{\sinh \tau}{\sinh \tau_0} \right) \sin \theta, \\ y &= \frac{\mathcal{E}}{\omega_c^2} \frac{\tau_0}{\sinh \tau_0} (\cosh \tau - \cosh \tau_0) \sin \theta, \\ z &= \frac{\mathcal{E}}{2\omega_c^2} (\tau_0^2 - \tau^2) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь $I = \kappa^2/2$ — потенциал ионизации атомного уровня, $\tau = i\omega_c t$, где ω_c — циклотронная, или ларморовская, частота,

$$\omega_c = \frac{\mathcal{H}}{c}, \quad (6.4)$$

ось y направлена вдоль $\mathcal{E}$, ось x перпендикулярна плоскости $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$, θ — угол между этими полями. Начальный (чисто мнимый) момент подбарьерного движения $t_0 = i\omega_c^{-1}\tau_0$ определяется из уравнения [15, 102]

$$\tau_0^2 \left[1 - \sin^2 \theta \left(\coth \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right] = \gamma_c^2, \quad (6.5)$$

вытекающего из условия $\text{Im } \mathbf{r}(0) = 0$ на выходе электрона из-под барьера. Здесь γ_c — аналог параметра адиабатичности Келдыша (1.1),

$$\gamma_c = \frac{\kappa \mathcal{H}}{c\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} \frac{\mathcal{E}_{\text{ch}}}{\mathcal{E}} = \frac{\omega_c}{\omega_t}, \quad (6.6)$$

где $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ — характерное электрическое поле (1.3), $\mathcal{H}_0 = c\kappa^2$, $\omega_t = \mathcal{E}/\kappa$ — время туннелирования в постоянном поле. Физический смысл параметра γ_c виден из равенства $\gamma_c = 2b/R_L$, где $b = \kappa^2/(2\mathcal{E})$ — ширина барьера в постоянном электрическом поле, $R_L = \kappa/\mathcal{H}$ — ларморовский радиус. Для атома водорода в основном состоянии $\kappa = 1$ и величина $\mathcal{H}_0 = m^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,35 \times 10^9$ Гс, причём $\mathcal{E}_{\text{ch}}/\mathcal{H}_0 = \alpha = 1/137$. Скорость ионизации уровня зависит от параметра $\gamma_c > 1$, т.е. определяется величиной отношения ларморовской частоты к частоте туннелирования. Значения $\gamma_c > 1$ могут быть достигнуты, например, при $\mathcal{E} \sim 10^5$ В см $^{-1}$ и $\mathcal{H} \sim 10^5$ Гс, что реально для полупроводников.

С экспоненциальной точностью вероятность ионизации

$$w \propto \exp(-2 \text{Im } W), \quad (6.7)$$

где W — укороченное действие,

$$W = \int_{t_0}^0 \left[\mathcal{L} + E_0 - \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}) \right] dt, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{c}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}) + \varphi, \quad (6.8)$$

а потенциалы $\mathbf{A} = (1/2)[\mathcal{H}\mathbf{r}]$ и $\varphi = -\mathcal{E}\mathbf{r}$. Вычисляя действие (6.8) вдоль траектории (6.3), получим [15, 104]

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \propto \exp \left(-\frac{2}{3F} g(\gamma_c, \theta) \right), \quad (6.9)$$

$F = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\text{ch}}$ — приведённое электрическое поле (1.3),

$$g(\gamma_c, \theta) = \frac{3\tau_0}{2\gamma_c} \left(1 - \frac{\sqrt{\tau_0^2 - \gamma_c^2}}{\gamma_c^2} \sin \theta - \frac{\tau_0^2}{3\gamma_c^2} \cos^2 \theta \right). \quad (6.10)$$

Приведём асимптотические разложения функции (6.10): в области $\gamma_c \ll 1$ ("слабое" магнитное поле)

$$\tau_0(\gamma_c, \theta) = \gamma_c + \frac{1}{18} \gamma_c^3 \sin^2 \theta + \dots, \quad (6.11)$$

$$g(\gamma_c, \theta) = 1 + \frac{1}{30} \gamma_c^2 \sin^2 \theta + \dots,$$

⁶ Можно ввести $\mathcal{H}_{\text{cr}} = m_e^2 c^3 / (e\hbar) = 4,41 \times 10^{13}$ Гс (ср. с (2.1)). Заметим, что $\mathcal{E}$ [В см $^{-1}$] = $\mathcal{H}$ [Гс].

а при $\gamma_c \gg 1$ и $\theta = \pi/2$

$$g(\gamma_c) = \frac{3}{8} \gamma_c (1 + 2\gamma_c^{-2} + \dots). \quad (6.12)$$

При $\theta = 0$, т.е. для параллельных полей, $\tau_0 = \gamma_c$, $g(\gamma_c, 0) \equiv 1$ и экспонента в (6.9) та же, что и в случае чисто электрического поля. С увеличением γ_c функция g монотонно возрастает, а вероятность ионизации убывает. Таким образом, включение магнитного поля стабилизирует атомный уровень. Это объясняется тем, что под влиянием силы Лоренца подбарьерная траектория в ММВ искривляется, ширина барьера и мнимая часть действия (6.8) увеличиваются.

Дальнейшие подробности, в том числе вычисление кулоновской поправки и предэкспоненты в формуле (6.9) (что возможно аналитически, но приводит к весьма громоздким выражениям), можно найти в [102–104]. Отметим, что при $\gamma_c > 1$ вероятность ионизации является экспоненциально малой, но не обращается в нуль тождественно.

6.2. Лоренцева ионизация атомов и ионов

Если атом или ион влетают в постоянное магнитное поле $\mathcal{H}$, то в их системах покоя вследствие преобразования Лоренца появляется электрическое поле $\mathcal{E}_0$, которое может привести к ионизации. Такой процесс называется лоренцевой ионизацией. Ограничимся случаем, в котором скорость атома $\mathbf{v}$ перпендикулярна полю $\mathcal{H}$. Тогда поля, действующие в системе покоя атома, имеют вид⁷

$$\mathcal{E}_0 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \mathcal{H}, \quad \mathcal{E}_0 \perp \mathcal{H}_0, \quad (6.13)$$

а параметр адиабатичности (6.6) равен

$$\gamma_L = \frac{\kappa \mathcal{H}_0}{c \mathcal{E}_0} = \frac{\kappa}{v}, \quad (6.14)$$

где скорость v выражена в атомных единицах ($1 \text{ а.е.} = e^2/\hbar = 2,19 \times 10^8 \text{ см с}^{-1} \approx 0,007c$). Для основных состояний нейтральных атомов параметр κ близок к единице (см., например, табл. 1 в [15]). Функция $g(\gamma_c)$, стоящая в показателе экспоненты, получается непосредственно из (6.10) при $\gamma_c = \gamma_L$ и $\theta = \pi/2$. В этом случае были вычислены также все функции, входящие в предэкспоненту [105, 106].

Скорость лоренцевой ионизации удобно представить в виде

$$w_L = (1 - v^2)^{1/2} S w(\mathcal{E}_0), \quad (6.15)$$

где $w(\mathcal{E}_0)$ — скорость ионизации атома под действием только электрического поля $\mathcal{E}_0$, S — фактор стабилизации, учитывающий подавление распада атомного уровня магнитным полем. Для быстрых ($v \gtrsim 10\kappa$) частиц $S \rightarrow 1$, т.е. ионизация атомного уровня происходит практически с той же скоростью, что и в чисто электрическом поле $\mathcal{E}_0$ (множитель $\sqrt{1-v^2}$ в (6.15) учитывает эффект замедления времени для движущегося атома). Если $v \ll \kappa$, то фактор стабилизации S становится экспоненциально малым.

Приведём некоторые оценки. При $\mathcal{H} \lesssim 1 \text{ МГс}$ атом, по существу, стабилен, поскольку электрическое поле $\mathcal{E}_0$ слишком мало. В области $\mathcal{H} \sim 10 \text{ МГс}$ лоренцева иони-

Таблица 1. Вероятность лоренцевой ионизации атома водорода*

v , а.е.	$\mathcal{E}_0$, а.е.	S	w_L , с ⁻¹
0,5	5,32(−3)	3,7(−9)	0
1,0	1,06(−2)	0,119	1,03(−9)
1,25	1,33(−2)	0,345	6,41(−4)
1,67	1,77(−2)	0,645	2,40
2,0	2,13(−2)	0,779	1,55(5)
2,5	2,66(−2)	0,882	5,56(7)
5,0	5,32(−2)	0,984	6,24(12)
10	0,107	0,998	7,73(14)

* $v = 1$ а.е. отвечает скорости атома $2,19 \times 10^8 \text{ см с}^{-1} \approx 0,007c$. Принято значение $\mathcal{H} = 25 \text{ МГс}$ — максимальное магнитное поле, достигнутое в опытах Сахарова [108], $\mathcal{E}_0$ — напряжённость электрического поля, действующего в системе покоя атома.

зация уже может наблюдаться, если скорость атома не очень мала. Так, при $\mathcal{H} = 25 \text{ МГс}$ (см. табл. 1) в интервале скоростей от $v = 0,5$ а.е. до $v = 10$ а.е. ситуация меняется от практически полной стабильности атома до ионизации его за время, сравнимое с атомным временем $\tau_a = \hbar^3/(me^4)$ ($w_a = 1/\tau_a = 4,13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$).

В случае отрицательных ионов с малой энергией связи⁸, $\kappa \ll 1$, зависимость вероятности ионизации от v и $\mathcal{H}$ имеет качественно тот же вид, что и для нейтральных атомов, но переходная область между значениями $w_L \approx 0$ и $w_L \approx w(\mathcal{E}_0)$ лежит при меньших значениях параметров v и $\mathcal{H}$. При этом фактор стабилизации меньше единицы:

$$S = 1 - \frac{1}{6} \gamma_L^2 + O(\gamma_L^3), \quad \gamma_L \ll 1, \quad (6.16)$$

и S экспоненциально мал при $\gamma_L \gg 1$. Слабо связанные состояния известны не только в атомной физике, но и в физике твёрдого тела (например, экситоны Ванье–Мотта с $\kappa \sim 0,01$ для кристалла германия [107]). В этих случаях ионизация будет происходить при значительно меньших полях, чем для нейтрального атома водорода.

6.3. Магнитная кумуляция

Постоянные магнитные поля, полученные в лаборатории, не превышают 1 МГс. А.Д. Сахаров предложил [108–110] метод магнитной кумуляции: обжатие магнитного поля, заключённого в оболочку (цилиндрическую трубку из металла с высокой проводимостью, например меди), с помощью ударной волны, возникающей при взрыве вещества, окружающего оболочку. Из сохранения магнитного потока $\Phi = \pi R^2 \mathcal{H}$ следует, что $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \approx (R_0/R)^2 \gg 1$, где $R(t)$ — радиус оболочки. Уже достигнуты [108] рекордно сильные поля $\mathcal{H} \sim 25 \text{ МГс}$ (с длительностью $\sim 10^{-5} \text{ с}$), и можно ожидать дальнейшего прогресса в этом направлении [111].

Описание динамики процесса магнитной кумуляции, являющееся некоторым развитием оценок, данных Сахаровым, получено на основе уравнения⁹

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{K \xi^3} \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{-\xi \dot{\xi}}} \right)^2, \quad 0 < \tau < \tau_m, \quad (6.17)$$

⁸ Например, ион H^- с энергией связи $I = 0,754 \text{ эВ}$ ($\kappa = 0,236$), Na^- с $I = 0,548 \text{ эВ}$ ($\kappa = 0,201$), Sr^- ($I = 0,11 \text{ эВ}$, $\kappa = 0,09$).

⁹ См. формулы (24) и (31) в [106] для плоской и цилиндрической геометрии соответственно. Следует отметить, что уравнение (6.17) справедливо только на стадии сжатия оболочки ($\dot{\xi} < 0$) и неприменимо на стадии её разлёта.

⁷ В общем случае произвольного угла между $\mathbf{v}$ и $\mathcal{H}$ формулы для электрического и магнитного полей приведены в [105, 106].

с начальными условиями $\xi(0) = -\dot{\xi}(0) = 1$, причём $\xi(\tau)$ имеет в конечной точке слабую особенность вида $\xi(\tau) = \xi_m + \text{const} (\tau_m - \tau)^{5/3}$. Здесь $\xi = R/R_0$, $\tau = v_0 t/R_0$, точка означает производную по безразмерному времени τ , $K = 4Mv_0^2/\mathcal{H}_0^2 R_0^2$ — отношение кинетической энергии оболочки к заключённой внутри неё в начальный момент $t = 0$ магнитной энергии $\mathcal{H}_0^2 R_0^2/8$, M — масса оболочки, $\mu = c/\sqrt{2\pi\sigma R_0 v_0}$ — коэффициент омических потерь в веществе оболочки. В идеальном случае ($\mu = 0$, $\sigma = \infty$, сверхпроводник) уравнение (6.17) имеет интеграл энергии и оно может быть решено аналитически:

$$\xi = \xi^{(0)}(t) = \sqrt{\xi_m^2 + (1 + K^{-1})(\tau - \tau_m)^2}. \quad (6.18)$$

В момент наибольшего сжатия оболочки и максимума магнитного поля $\dot{\xi}(\tau_m) = 0$,

$$\xi_m^{(0)} = (K + 1)^{-1/2} \approx K^{-1/2}, \quad (6.19)$$

$$\tau_m^{(0)} = \frac{K}{K + 1} \rightarrow 1, \quad \frac{\mathcal{H}_m^{(0)}}{\mathcal{H}_0} = K + 1$$

(в реальных экспериментах параметр $K \gg 1$). Используя уравнения Максвелла¹⁰ для хорошо проводящей среды [114]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathcal{H}, \quad \mathcal{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathcal{H},$$

можно вычислить поток электромагнитной энергии, втекающей в оболочку, $J = (1/2)cR\mathcal{E}_\varphi \mathcal{H}_z|_{r=R}$ и мощность выделяемого в ней джоулева тепла, что позволяет оценить потери магнитного потока Φ в процессе кумуляции из-за конечной проводимости оболочки. С учётом потерь получаем вместо (6.19)

$$\xi_m = \frac{R(\tau_m)}{R_0} = (K + 1)^{-1/2} \times \left[1 - \frac{2}{K + 1} \int_0^{\tau_m} \left(\mu^2 + 2\mu \sqrt{-\xi \dot{\xi}} \right) \xi^{-4} d\tau \right]^{-1/2}, \quad (6.20)$$

$$\frac{\mathcal{H}_m}{\mathcal{H}_0} = (K + 1) \left[1 + 2\mu \int_0^{\tau_m} \left(1 + \frac{2}{K\xi^2} \right) \sqrt{-\frac{\dot{\xi}}{\xi^3}} d\tau \right]^{-1}. \quad (6.21)$$

Численный расчёт по уравнениям (6.17), (6.21) даёт кривые, показанные на рис. 6 [106]. Отсылая за подробностями к [108, 109], приведём некоторые оценки: $\mu = 0,01$ и $0,037$ соответственно для $\sigma = 6 \times 10^5 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ (проводимость меди при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$) и $\sigma = 4 \times 10^4 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ($T = 1500^\circ \text{С}$, металл находится в жидком состоянии). Таким образом, параметр $\mu \ll 1$, однако уравнение (6.17) необходимо решать точно ввиду его сильной нелинейности. Вследствие потерь (на токи Фуко) максимальное магнитное поле уменьшается в 2–3 раза по сравнению с таковым в идеальном случае (6.18), (6.19). Эта оценка соответствует кратким замечаниям, содержащимся в [108, 109].

Таким образом, метод магнитной кумуляции позволяет повысить по крайней мере на два порядка предельные значения $\mathcal{H}$, полученные в стационарных условиях в лаборатории. К сожалению, этот метод является

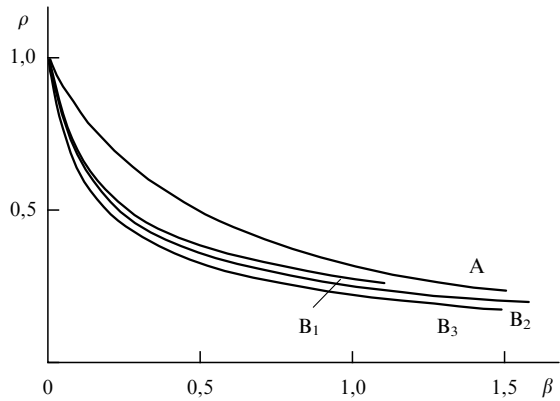


Рис. 6. Потери максимального магнитного поля в процессе магнитной кумуляции: $\rho = \mathcal{H}_m/\mathcal{H}_m^{(0)}$, $\beta = K^{1/4}\mu$ — характерный параметр процесса. Кривая A отвечает сохранению магнитного потока Φ (т.е. $\mu = 0$), кривые B₁, B₂ и B₃ рассчитаны по (6.21) для $K = 100, 10^3$ и 10^8 соответственно. Последнее значение K соответствует использованию для сжатия оболочки уже не заряда обычного взрывчатого вещества, а подземного ядерного взрыва относительно небольшой мощности (см. [110, с. 85]). (Из работы [106].)

импульсным и время существования максимального поля очень мало: $\Delta t \sim 2R_0(\sqrt{K}v_0)^{-1} \lesssim 10^{-6} \text{ с}$, что усложняет постановку физических экспериментов, в том числе по лоренцевой ионизации. Ещё более сильные — напряжённостью в несколько сотен МГс — магнитные поля генерируются при взаимодействии плотной плазмы с мощными лазерными импульсами (см., например, работы [115, 116] и приведённые там ссылки). Длительность таких импульсных полей ещё меньше — не более чем порядка 10^{-11} с .

6.4. Сверхсильные магнитные поля

Сверхсильные магнитные поля встречаются в астрофизике: в магнитных белых карликах (вплоть до $\mathcal{H} \sim 350 \text{ МГс}$ на поверхности звезды), в нейтронных звёздах ($\mathcal{H} \sim 10^{11} - 10^{14} \text{ Гс}$) и магнетарах ($\mathcal{H} \sim 10^{15} \text{ Гс}$). Преимуществом белых карликов является возможность исследования оптических спектров, что позволяет изучать влияние полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ на атомные уровни, в первую очередь, атомов водорода и гелия, находящихся у поверхности звезды. Лоренцева ионизация атомов может происходить, когда звезда пролетает сквозь облако межзвёздного газа (нейтральный водород). Вероятность w_L при $\mathcal{H} = 350 \text{ МГс}$ достигает заметной величины, если скорость звезды $v \gtrsim 1000 \text{ км с}^{-1}$, причём зависимость w_L от v — чрезвычайно резкая (см. табл. 1). Однако ионизация возможна даже при меньшей скорости движения звезды относительно облака межзвёздного газа, поскольку атомы падают на поверхность звезды в гравитационном поле со скоростью $v = \sqrt{2GM/R}$. Полагая массу белого карлика $M \sim M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ г}$ и его радиус $R \sim 10^4 \text{ км}$, получаем $v \sim 4 \times 10^3 \text{ км с}^{-1}$. Поскольку вне звезды магнитные поля убывают с увеличением расстояния r как $(r/R)^{-3}$, лоренцева ионизация атомов водорода может происходить на расстояниях порядка нескольких радиусов R .

Более подробные сведения об экстремальных магнитных полях, получаемых в земных лабораториях и встречающихся в космосе, а также о свойствах атома водорода в сильных ($\mathcal{H} \simeq 10^{11} \text{ Гс}$) и сверхсильных ($\mathcal{H} \simeq 10^{14} \text{ Гс}$) полях приведены в обзоре [117].

¹⁰ Непростая история открытия уравнений Максвелла изложена в книге Терентьева [112], то же для уравнения Дирака — самим Дираком [113].

7. Релятивистская теория ионизации

Достигнутые в настоящее время рекордно высокие интенсивности лазерного излучения составляют $\mathcal{I} = c\mathcal{E}_0^2/(8\pi) \sim 2 \times 10^{22}$ Вт см $^{-2}$ [30] (при этом напряжённость поля $\mathcal{E}_0 \sim 10^3 \mathcal{E}_a \sim 10^{12}$ В см $^{-1}$), и они могут быть увеличены. Хотя "критическое" поле квантовой электродинамики (2.1) [36] вряд ли достижимо в экспериментах [100], увеличение интенсивности лазерных импульсов до уровня $10^{24} - 10^{25}$ Вт см $^{-2}$ представляется возможным [31]. Столь интенсивные поля, намного превосходящие характерное атомное поле $\mathcal{E}_a$, способны "ободраить" электронную оболочку тяжёлого атома и образовать многозарядные ионы с $Z \gtrsim 40 - 60$, для которых потенциал ионизации основного уровня сравним с энергией покоя электрона. В этом случае для описания ионизации необходимо использовать релятивистское обобщение теории ионизации Келдыша, которое было развито в работах [57, 58, 118–121]. Основные результаты, полученные в этих работах, обсуждаются в обзоре [15] и последующих публикациях [58, 122].

В этом разделе мы рассмотрим приложение предложенного Фоком [123] метода решения уравнений движения и релятивистского волнового уравнения к ковариантному описанию эффекта туннелирования частиц в сильном электромагнитном поле.

Далее используется релятивистская система единиц $\hbar = m = c = 1$, $\alpha = e^2 = 1/137$. В уравнении Дирака и некоторых других формулах масса электрона m сохранена в явном виде.

7.1. Общее выражение для вероятности ионизации в релятивистском случае

Рассмотрим ионизацию атомного уровня с энергией ε_0 в потенциале с кулоновским "хвостом", $U_C = -Z\alpha/r$. На больших расстояниях от ядра волновая функция, отвечающая квантовым числам j, l, M , имеет вид [47]

$$\psi_{jlm}^{(0)}(\mathbf{r}, t; \varepsilon_0) = C_{jlm} \lambda_0^{3/2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon_0} \\ i\sqrt{1 - \varepsilon_0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \end{pmatrix} \times \\ \times R_0(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \exp(-i\varepsilon_0 t). \quad (7.1)$$

Здесь $\lambda_0 = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$ — шаровой спинор, C_{jlm} — безразмерный асимптотический коэффициент,

$$R_0(r) = (\lambda_0 r)^{\nu-1} \exp(-\lambda_0 r), \quad r \gg \frac{1}{\lambda_0},$$

где $\nu = Ze^2\varepsilon_0/\lambda_0$ — релятивистский аналог эффективного главного квантового числа. Для основного состояния водородоподобного иона с зарядом ядра Z имеем $j = M = 1/2, l = 0$ и

$$\varepsilon_0 = \nu = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}, \quad \lambda_0 = \alpha Z, \quad C_{1/2,0,1/2}^2 = \frac{2^{2\varepsilon_0}}{\Gamma(2\varepsilon_0 + 1)}, \quad (7.2)$$

$\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера. Известным в настоящее время атомам соответствуют значения $Z < 137$ и $\varepsilon_0 > 0$ — в этом случае применимо приближение точечного заряда ядра.

Как и в нерелятивистской задаче, вероятность ионизации определяется мнимой частью укороченного дей-

ствия W , вычисленного вдоль экстремальной подбарьерной траектории:

$$w_R(\varepsilon_0; jlm) = w_0 |C_{jlm}|^2 P_{jlm} Q \exp(-2 \operatorname{Im} W). \quad (7.3)$$

Здесь Q — кулоновский фактор, предэкспонента P_{jlm} включает в себя спиновый фактор [57] (см. раздел 7.5),

$$W = \int (L - \varepsilon_0) dt = S - \varepsilon_0 t, \quad (7.4)$$

$$w_0 = \frac{mc^2}{\hbar} = 0,776 \times 10^{21} \text{ с}^{-1}. \quad (7.5)$$

Используя метод Фока (см. приложение Г), можно записать интеграл действия в виде

$$S = \int_{s_0}^s L ds', \quad L = -\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m + e A_\mu(x) \dot{x}^\mu, \quad (7.6)$$

где точкой обозначена производная по параметру η , $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/ds$. Действие (7.6) рассматривается как функция конечных, $x = x^\mu(s)$, и начальных, $x_0 = x^\mu(s_0)$, координат электрона. Тогда уравнения ММВ из раздела 3.3 могут быть записаны через s : экстремальная траектория, которая соответствует изменению собственного времени от $s = s_0$ до $s = 0$ в момент выхода из-под барьера, определяется из уравнений

$$i(s_0) - \frac{e}{m} A_0(s_0) = \varepsilon_0, \quad t(s_0) = t_0, \quad \mathbf{r}(s_0) = 0, \quad (7.7)$$

$$\operatorname{Im} x^\mu(0) = \operatorname{Im} \dot{x}^\mu(0) = 0,$$

а укороченное действие в (7.4) имеет вид

$$W = S(\varepsilon_0, s_0) - \varepsilon_0 m t_0, \quad (7.8)$$

$$S(\varepsilon_0, s_0) = \int_0^{s_0} ds \{ m - e \dot{x}^\mu(s) A_\mu[x(s)] \},$$

где s_0 — полное мнимое собственное время подбарьерного движения электрона.

В случае слабого поля, $\mathcal{E} \ll \lambda_0^3 \mathcal{E}_{\text{cr}}$, существует широкая область расстояний, в которой кулоновское поле мало по сравнению с внешним. Поэтому кулоновский вклад в классический интеграл действия можно найти по теории возмущений, так же как это сделано в разделе 5 для нерелятивистского случая. Выражая вклад в функцию Лагранжа, отвечающий кулоновскому взаимодействию электрона с атомным остатком, через собственное время, $L_C = -Ze^2 i(\tau)/r(\tau)$, получаем кулоновский фактор в волновой функции в виде

$$\psi \propto \exp \left\{ \nu \left[\ln(\lambda_0 m r) + \ln \left(\frac{s_0 - \tilde{s}}{s_0 - s} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + i \lim_{s \rightarrow s_0} \int_s^{\tilde{s}} \left(\frac{\lambda_0 i(s')}{\varepsilon_0 r(s')} - \frac{i}{s_0 - s'} \right) ds' \right] \right\}, \quad (7.9)$$

где $\tilde{s}$ — произвольная точка на вещественной оси собственного времени, положение которой не влияет на величину кулоновского фактора. Делая подстановку $s = i\tau$ и $s_0 = i\tau_0$ и учитывая, что на малых расстояниях от ядра $s_0 - s = i\tau/\lambda_0$, получаем кулоновский фактор,

не зависящий от r :

$$Q = \exp \left\{ 2\nu \left[\ln(\lambda_0^2 m \tau_0) + \int_0^{\tau_0} d\tau \left(\frac{\lambda_0 i(\tau)}{\varepsilon_0 r(\tau)} - \frac{1}{\tau_0 - \tau} \right) \right] \right\}. \quad (7.10)$$

Формулы (7.3)–(7.10) являются основными уравнениями квазиклассической теории релятивистской ионизации, построенной в [57, 58, 118, 120, 121], записанными в представлении собственного времени. В разделах 7.2–7.4 мы проиллюстрируем использование этих уравнений на нескольких примерах.

7.2. Ионизация полем плоской волны

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси x . Выбирая калибровку

$$A_\mu(x, t) = \frac{\mathcal{E}}{\omega} \{0, 0, a(\theta), -\rho b(\theta)\}, \quad \theta = \omega(t - x), \quad (7.11)$$

где θ — переменная светового фронта, ω — частота, ρ — эллиптичность волны, $-1 \leq \rho \leq 1$, для электрического и магнитного полей имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}\{0, a'(\theta), -\rho b'(\theta)\}, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}\{0, \rho b'(\theta), a'(\theta)\}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В силу теоремы Нётер интегралами движения являются обобщённые импульсы p_y и p_z , а также градиентно-инвариантный интеграл

$$J = \frac{p^0 - p^1}{m} = \frac{E_{\text{kin}} - p_x}{m} = \frac{\dot{\theta}}{\omega}, \quad \theta = J\omega s, \quad (7.13)$$

где E_{kin} — кинетическая энергия электрона. Переменная светового фронта линейна по собственному времени s . Поэтому классические уравнения движения легко интегрируются. Чтобы найти экстремальную траекторию, необходимо в силу условий (7.7) выделить мнимую и вещественную части решения. Это можно сделать в явном виде, если для формы импульса справедливы равенства

$$a(i\eta) = i\alpha(\eta), \quad b(i\eta) = i\beta(\eta), \quad \theta = i\eta, \quad (7.14)$$

где $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ — вещественные аналитические функции η . Не выписывая громоздкие выражения для подбарьерной траектории электрона, приведём окончательный результат для экспоненциального фактора [57, 58]:

$$w_R \sim \exp(-2 \operatorname{Im} W) = \exp \left[-\frac{2m}{\omega} \eta_0 (J - \varepsilon_0) \right], \quad (7.15)$$

где $\eta_0 = -i\theta_0$, θ_0 — полное мнимое "фазовое" время подбарьерного движения электрона, величины η_0 и J определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^2(\eta_0) - \rho^2(\beta(\eta_0) - I_\beta(\eta_0))^2 &= \gamma_r^2(1 - 2\varepsilon_0 J + J^2), \\ I_{\alpha^2}(\eta_0) - \rho^2(I_{\beta^2}(\eta_0) - I_\beta^2(\eta_0)) &= \gamma_r(1 - J^2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Здесь γ_r — релятивистский аналог параметра Келдыша,

$$\gamma_r = \frac{m\omega}{e\mathcal{E}} = \frac{\omega}{m} \frac{\mathcal{E}_{\text{cr}}}{\mathcal{E}}, \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha^2}(\eta_0) &= \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \alpha^2(\eta) d\eta, & I_\beta(\eta_0) &= \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \beta(\eta) d\eta, \\ I_{\beta^2}(\eta_0) &= \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \beta^2(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Для монохроматической волны с эллиптической поляризацией имеем $a = \sin \theta$, $b = \cos \theta$, $\alpha(\eta) = \sinh \eta$, $\beta(\eta) = \cosh \eta$, тогда

$$\begin{aligned} I_{\alpha^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(2\eta_0)}{2\eta_0} - 1 \right), & I_\beta &= \frac{\sinh \eta_0}{\eta_0}, \\ I_{\beta^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(2\eta_0)}{2\eta_0} + 1 \right) \end{aligned}$$

и система (7.16) переходит в уравнения из работы [58, раздел 4], которые легко решаются численно (см. табл. 1 и 2 в [58]).

Уравнения существенно упрощаются при $\omega \rightarrow 0$, т.е. при переходе к низкочастотному скрещённому полю, при этом в аналитическом виде вычисляется не только основной экспоненциальный фактор в вероятности, но и кулоновский (7.10):

$$w_R \propto Q_0 \exp \left(-\frac{2}{3F} \right), \quad (7.19)$$

$$Q_0 = \left[\frac{2}{F} \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) \right]^{2\nu} \exp \left(6\xi Z \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right).$$

Здесь F — релятивистское обобщение приведённого поля (1.3),

$$F = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{ch}}}, \quad (7.20)$$

$$\mathcal{E}_{\text{ch}} = (\sqrt{3}\xi_0)^3 (1 + \xi_0^2)^{-1} \mathcal{E}_{\text{cr}} = \begin{cases} \kappa^3 \mathcal{E}_a, & \varepsilon_0 = 1 - \frac{\kappa^2}{2}, \\ 2,60 \mathcal{E}_{\text{cr}}, & \varepsilon_0 = 0, \end{cases}$$

ξ_0 — введённая в [120] удобная переменная, связанная с энергией уровня,

$$\xi_0 = \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + 8} - \varepsilon_0 \right) \right]^{1/2}, \quad 0 < \xi_0 \leq 1. \quad (7.21)$$

В нерелятивистском пределе

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\kappa^2}{2m}, \quad \xi_0 = \frac{\kappa}{\sqrt{3}m}$$

и $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ совпадает с (1.3). В постоянном скрещённом поле $J = (1 + \xi_0^2)^{-1/2}$, а полное мнимое собственное время подбарьерного движения электрона пропорционально переменной ξ_0 :

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{3}\xi_0}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}\xi_0 m}{e\mathcal{E}}, \quad t_0 = Js_0 = \frac{s_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (7.22)$$

— полное лабораторное время подбарьерного движения.

Как показано в [58], при релятивистском обобщении параметра Келдыша $\gamma_R = \omega T_t$ в качестве характерного времени туннелирования T_t естественно взять абсолютную величину лабораторного времени $|t_0|$, так что

$$\gamma_R = \omega |t_0| = \sqrt{\frac{3\xi_0^2}{1 + \xi_0^2}} \gamma_r. \quad (7.23)$$

Тогда экспоненциальный множитель в скорости ионизации (7.15) можно представить в виде

$$w_R \propto \exp \left(-\frac{2\sqrt{3}\xi_0^2}{1+\xi_0^2} \frac{\mathcal{E}_{\text{cr}}}{\mathcal{E}_0} \right) = \exp \left(-\frac{2}{3F} g(\gamma_R, \varepsilon_0, \rho) \right), \quad (7.24)$$

$$g(\gamma, \varepsilon, \rho) = 1 - \frac{1}{10} \frac{1 - \rho^2/3}{1 - \xi_0^2/3} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^4). \quad (7.25)$$

Результаты численных расчётов функции $g(\gamma_R, \varepsilon_0, \rho)$ в зависимости от параметра адиабатичности γ_R , энергии уровня ε_0 , заряда Z и эллиптичности ρ приведены в работах [58, 122].

Для оптических и инфракрасных лазеров $\omega/m \leq 10^{-5}$, поэтому ионизация многозарядных ионов происходит в туннельном режиме, $\gamma_R \ll 1$ и $\xi_0 \rightarrow 0$. Тогда

$$w_R \propto Q \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right) \gamma_R^2 \right] \right\},$$

$$Q = Q_0 \exp \left(\frac{\alpha Z}{\sqrt{3}\xi_0} q(\xi_0, \rho) \gamma_R^2 \right), \quad (7.26)$$

$$q(\xi_0, \rho) = q_l(\xi_0) - \rho^2 q_\rho(\xi_0).$$

Функции $q_l(\xi_0)$ и $q_\rho(\xi_0)$ определены в [58]. Для линейно поляризованной волны, $\rho = 0$, квазиклассическая экспонента в (7.26) получена Никишовым и Ритусом [6], а при произвольных ρ — в работах [4, 58].

Таким образом, для плоской волны общего вида в приближении слабого поля известны в аналитическом виде квазиклассическая экспонента и кулоновский фактор в скорости ионизации релятивистского атомного уровня. В постоянном однородном скрещённом поле, пренебрегая кулоновским взаимодействием, можно получить замкнутое уравнение для комплексной энергии, определяющее положение уровня, его ширину и спиновый фактор, не считая поле слабым (см. раздел 7.4).

7.3. Рождение пар в постоянном скрещённом поле

Рассмотрим рождение электрон-позитронной пары из вакуума перпендикулярными постоянными и однородными (электрическим и магнитным) полями. Считая, что электрическое поле направлено вдоль оси y , а магнитное — вдоль оси z , выбираем 4-потенциал в виде

$$A_\mu = \{-\mathcal{E}y, \mathcal{H}y, 0, 0\}. \quad (7.27)$$

Пусть s_0 — момент собственного времени, отвечающий началу рождения электрона из вакуума, когда его полная энергия равна нулю, $m\varepsilon_0 = 0$. Поскольку энергия реального электрона $\geq m$, процесс рождения носит характер туннелирования. Будем считать, что электрон выходит из-под эффективного барьера при $s = 0$. Вероятность рождения электрона из вакуума максимальна, если в классически запрещённой области он движется по экстремальной траектории, минимизирующей мнимую часть функции действия. Решая уравнения движения в собственном времени с начальным условием

$$i(s_0) \equiv \varepsilon_0(s_0) = 0, \quad \mathbf{p}(s_0) = 0, \quad \text{Im } x^\mu(0) = 0, \quad (7.28)$$

получим (см. приложение Г)

$$s = i \frac{\omega_0}{\Omega^2} \sin \eta, \quad x = i \frac{\omega_0}{\Omega^2} \beta \sin \eta = \beta s, \quad (7.29)$$

$$y = -\frac{1}{\Omega} \cos \eta, \quad z = z_0, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Здесь ω_0 — собственное ускорение электрона в постоянном электрическом поле, а β имеет смысл скорости системы отсчёта, в которой магнитное поле равно нулю,

$$\omega_0 = e\mathcal{E}, \quad \beta = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}}, \quad \Omega = \sqrt{1 - \beta^2} \omega_0. \quad (7.30)$$

Условие (7.28) даёт

$$\cos \eta_0 = 0, \quad \eta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad s_0 = \frac{i\pi}{2\Omega},$$

где s_0 — полное мнимое собственное время подбарьерного движения электрона.

Действие (7.6), вычисленное вдоль экстремальной траектории (7.29), имеет вид

$$S = \frac{1}{2} m s_0 = i \frac{\pi}{4} \frac{m}{\Omega} = i \frac{\pi}{4} \frac{m^2}{e\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2}}. \quad (7.31)$$

Тогда для вероятности рождения электрона из вакуума получаем с экспоненциальной точностью

$$w_{e^-} \propto \exp(-2 \text{Im } S) = \exp \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathcal{E}_{\text{cr}}}{\mathcal{E}} \right). \quad (7.32)$$

В силу закона сохранения электрического заряда вероятность рождения позитрона из вакуума равна вероятности рождения электрона, $w_{e^+} = w_{e^-}$, так что для вероятности рождения e^+e^- -пары из вакуума имеем [125]

$$w_{e^+e^-} = w_{e^+} w_{e^-} \propto \exp \left(-\frac{\pi \mathcal{E}_{\text{cr}}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2}} \right). \quad (7.33)$$

Более точная формула, включающая в себя предэкспоненциальный фактор, получена в работе Швингера [37]. Как и следовало ожидать, эта вероятность выражается только через инвариант поля $\mathcal{F} = \mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2$, поскольку в данном случае второй инвариант $\mathcal{G} = \mathcal{E}\mathcal{H} = 0$.

Как видно из (7.33), магнитное поле уменьшает вероятность рождения пары. В скрещённом поле $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, вероятность рождения пары обращается в нуль, поскольку собственное (мнимое) время туннелирования обращается в бесконечность. При $\mathcal{H} > \mathcal{E}$ действие (7.31) становится вещественным и вероятность рождения пары из вакуума равна нулю. Для этой конфигурации поля можно найти такую систему отсчёта, в которой электрическое поле равно нулю, а чисто магнитное поле e^+e^- -пары не рождает.

7.4. Ионизация из состояния в короткодействующем потенциале постоянным скрещённым полем

Пренебрегая кулоновским взаимодействием, можно получить уравнение, определяющее вероятность ионизации с большей, чем в теории Келдыша, точностью, не требуя, в частности, чтобы внешнее поле было малым по сравнению с атомным. Уравнения для квазиэнергии¹¹ уровня нерелятивистской системы, связанной короткодействующими силами, впервые были получены в работах Манакова и Рапопорта [131] и Берсона [132]. В настоящее время метод квазистационарных квазиэнерге-

¹¹ Понятие квазиэнергии квантовой системы в периодическом внешнем поле введено Зельдовичем и Ритусом [129, 130].

тических состояний широко используется в атомной физике сильных полей (см. обзоры [75, 133] и приведённые там ссылки). Здесь мы рассмотрим релятивистское обобщение уравнения для квазиэнергии в случае постоянных скрещённых полей, т.е. для квазистационарных состояний.

Решение уравнения Дирака $D_- \psi = 0$ во внешнем поле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ может быть представлено в виде

$$\psi = D_+ \Psi, \quad D_\pm = \gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) \pm m, \quad (7.34)$$

где Ψ — решение квадрированного уравнения

$$D_- D_+ \Psi \equiv \mathcal{K} + ie(\alpha \mathcal{E} + \sigma \mathcal{H}) \Psi = 0. \quad (7.35)$$

Здесь $\mathcal{K}$ — дифференциальный оператор уравнения Клейна–Фока–Гордона¹² [126–128],

$$\mathcal{K} = (i\partial + eA)^2 - m^2, \quad A^2 = A^\mu A_\mu = A_0^2 - \mathbf{A}^2, \quad (7.36)$$

α и σ — введённые Дираком четырёхрядные матрицы.

В слабом внешнем поле, $\mathcal{E} \ll \lambda_0^3 \mathcal{E}_{\text{cr}}$, ионизация носит характер просачивания электрона через малопроницаемый барьер и для вычисления тока на больших расстояниях от атома можно воспользоваться процедурой сшивания решения уравнения Дирака ψ с асимптотикой атомной функции (7.1) в подбарьерной области

$$\frac{1}{\lambda_0} \ll r \ll (1 - \varepsilon_0) \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{cr}}}. \quad (7.37)$$

Здесь мы ввели безразмерное поле f по аналогии с приведённым полем (1.3).

Используя метод Фока, можно записать решение уравнения (7.34) в виде контурного интеграла по переменной s . В квазиклассическом приближении

$$\Psi^{(S)}(x, x_0) = \int_C ds \Delta(x, x_0; s - s_0) \times \exp[iS(x, x_0; s - s_0)] f_{jIM}^{(S)}. \quad (7.38)$$

Здесь интеграл действия даётся (7.6),

$$\Delta = \frac{1}{m^2} \left[\det \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} \right) \right]^{1/2},$$

а биспинор $f^{(S)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{df_{jIM}^{(S)}}{ds} + \frac{e}{2m} (\alpha \mathcal{E} + \sigma \mathcal{H}) f_{jIM}^{(S)} = 0, \quad \frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (7.39)$$

причём при выключении поля

$$f_{jIM}^{(S)} \rightarrow f_{jIM}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Omega_{jIM}(\mathbf{n}).$$

Формулы (7.38), (7.39) определяют решение уравнения Дирака для электрона в электромагнитном поле с квазиклассической точностью. В частном случае постоянного и однородного электромагнитного поля это решение является точным.

Получим замкнутое уравнение для комплексной энергии $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\Gamma/2$ (где Γ — ширина уровня) квазистационарных состояний в короткодействующем потенциале. В случае слабого поля это уравнение позволяет найти в аналитическом виде как положение квазистационарного уровня, так и его ширину, т.е. скорость ионизации уровня. В соответствии с работой Швингера [37] в качестве контура интегрирования C в (7.38) выбираем положительную полуось в комплексной плоскости τ , и для функции Грина уравнения Дирака имеем

$$G(x, x_0) = \frac{1}{m} D_+ \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[1 - \frac{1}{2} \omega_0 s (\alpha_y + i\sigma_z) \right] \times \exp[iS_\perp(x, x_0; s - s_0)], \quad (7.40)$$

где действие

$$S_\perp(x, x_0; s - s_0) = S^{(0)}(x, x_0; s - s_0) - \frac{1}{24} m(\theta - \theta_0)^2 (s - s_0) - \frac{1}{2} m(\theta - \theta_0)(y + y_0), \quad (7.41)$$

$\theta = \omega_0(t - x)$, $S^{(0)}$ — действие свободной частицы,

$$S^{(0)}(x, x_0; s - s_0) = -\frac{1}{2} m \left[\frac{(x - x_0)^2}{s - s_0} + s - s_0 \right], \quad (7.42)$$

$$\{x^\mu\} = \{t, \mathbf{r}\}.$$

Переходя к смешанному представлению

$$G(\mathbf{r}, t; \varepsilon) = \exp(-i\varepsilon mt) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt_0}{2\pi} \exp[-i\varepsilon m(t_0 - t)] G(\mathbf{r}, t; 0, t_0) \quad (7.43)$$

и вычисляя интеграл по разности $t_0 - t$, получаем для s -состояния при $r \rightarrow 0$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} (1 \ 0) \chi_\sigma^+ G(\mathbf{r}, 0; \varepsilon) \chi_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv g_\sigma(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{1}{mr} - \lambda + g_\sigma(\varepsilon) + \mathcal{O}(r). \quad (7.44)$$

Здесь χ_σ — собственная функция оператора проекции спина на направление магнитного поля, $\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $\sigma = 2M = \pm 1$ ($j = 1/2$, $l = 0$), а функция $g_\sigma(\varepsilon)$ после замены $\omega_0 \tau \rightarrow 2\sqrt{3}u$ принимает вид

$$g_\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{f}{4\pi i \sqrt{3}}} \int_0^\infty \frac{du}{u^{3/2}} \left\{ \frac{k_\sigma(u)}{\sqrt{1 + u^2}} \times \exp \left[-i \frac{\sqrt{3}u}{f} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{1 + u^2} \right) \right] - \exp \left[-i \frac{\sqrt{3}u}{f} (1 - \varepsilon^2) \right] \right\}, \quad (7.45)$$

где

$$k_\sigma(u) = 1 - i\sigma\sqrt{3}u - \frac{(3 - i\sigma\sqrt{3}u)\varepsilon u^2}{(1 + \varepsilon)(1 + u^2)}. \quad (7.46)$$

Как и в нерелятивистском пределе, значение квазиэнергии ε определяется из граничного условия¹³ при $r \rightarrow 0$

$$g_\sigma(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{1}{mr} - \lambda_0 + \mathcal{O}(r), \quad \lambda_0 = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}. \quad (7.47)$$

¹² Об истории открытия Фоком калибровочной симметрии и связанного с ней уравнения Клейна–Фока–Гордона см. работу Окуня [134].

¹³ Учёт эффективного радиуса в случае уравнения Дирака можно провести стандартным образом [135, 136].

Сопоставление (7.44) и (7.47) приводит к уравнению

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} - g_\sigma(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}, \quad (7.48)$$

определяющему комплексную энергию $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\Gamma/2$ квазистационарного s-уровня в сильном поле и представляющему собой релятивистское (для случая постоянного поля) обобщение уравнения для квазиэнергии в короткодействующем потенциале [131, 132].

В пределе слабого поля, $f \ll 1$, решая уравнение (7.48) приближённо по теории возмущений, для сдвига уровня $\Delta\varepsilon_0$ получим

$$\Delta\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \sigma f} - \varepsilon_0, \quad \sigma = \pm 1, \quad \varepsilon_0^{1/2} > f. \quad (7.49)$$

Здесь учтено, что

$$\operatorname{Re} g_\sigma(\varepsilon_0) = -i \frac{1}{2} \frac{\sigma f}{\sqrt{\pi} \lambda_0} \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1/2}} \exp(-iv) = -\frac{\sigma f}{2\lambda_0}. \quad (7.50)$$

В то же время мнимую часть функции $g_\sigma(\varepsilon_0)$ нельзя получить из (7.45) разложением в ряд. Вычисляя её методом перевала и учитывая, что седловая точка

$$u_s = -i\xi, \quad \xi = \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon (\sqrt{\varepsilon^2 + 8} - \varepsilon)\right]^{1/2}, \quad \xi = \xi_0 + \Delta\xi, \quad (7.51)$$

получаем скорость ионизации s-уровня

$$w_R \equiv \Gamma = \frac{fk_\sigma(\xi_0)}{\sqrt{3}(1 - \xi_0^2)} \sqrt{\frac{(1 + \xi_0^2)(3 - \xi_0^2)}{\xi_0^2(3 + \xi_0^2)}} \times \\ \times \exp \left[\frac{2\sqrt{3}\xi_0(1 - \xi_0^2)}{(1 + \xi_0^2)f} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma f}{\varepsilon_0^2}} - 1 \right) \right] \exp \left[-\frac{2\sqrt{3}\xi_0^3}{(1 + \xi_0^2)f} \right], \quad (7.52)$$

где $k_\sigma(\xi_0) = k_\sigma(u = -i\xi_0)$ в (7.46).

7.5. Спиновая поправка в релятивистской теории туннелирования

Скорость ионизации релятивистского s-уровня низкочастотным линейно поляризованным полем ($\mathcal{E} = \mathcal{H}$, $\mathcal{EH} = 0$, $\gamma \ll 1$) даётся формулой (7.24) с точностью до предэкспоненты. Это выражение не зависит от спина, и оно может быть получено из решения уравнения Клейна–Фока–Гордона в постоянном скрещённом поле [2, 120, 121] либо с помощью релятивистской версии ММВ. Хотя спиновая поправка к (7.24) численно невелика (точнее, имеет вид множителя с величиной, близкой к единице), она приводит к различию между процессами туннелирования бозонов и фермионов и поэтому представляет интерес. Мы вычислили эту поправку двумя независимыми способами.

1. В формуле (7.52), полученной с помощью метода решения релятивистских уравнений движения, предложенного Фоком, можно выделить множитель, содержащий проекцию спина σ , — так называемый спиновый фактор, определяющий зависимость вероятности туннелирования от спина частицы:

$$S_\sigma = \frac{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} - \sigma\sqrt{3}\xi_0}{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} + \sigma\sqrt{3}\xi_0} \times$$

$$\times \exp \left[\frac{2\sqrt{3}\xi_0}{(1 - \xi_0^2)f} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma f}{\varepsilon_0^2}} - 1 \right) \right], \quad \sigma = \pm 1. \quad (7.53)$$

Существенно, что формулы (7.50), (7.52) и (7.53) для сдвига уровня, его ширины и спинowego фактора получены приближённым решением уравнения (7.48) при дополнительном условии (7.49). Если же

$$\sqrt{f} \ll \varepsilon_0, \quad (7.54)$$

то выражение для спинowego фактора (7.53) упрощается:

$$S_+ = \frac{1}{S_-} = \frac{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} - \sqrt{3}\xi_0}{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} + \sqrt{3}\xi_0} \exp \left(\frac{\sqrt{3}\xi_0}{1 - \xi_0^2} \right). \quad (7.55)$$

2. Иной способ получения спин-фактора был развит в работах [57, 58, 122, 137]. Исходя из волновой функции начального состояния $\Psi_{jlm}^{(0)}$ (7.1) и применяя квазиклассическое приближение, находим расходящуюся на бесконечности волну $\Psi^{(+)}(r)$, отвечающую квазистационарному состоянию вылетающего электрона. Сшивая эти решения в области перекрытия (7.37), вычисляя поток частиц $\int \Psi^{(+)*} \alpha \Psi^{(+)} dS$ и учитывая расщепление атомного уровня в сильном магнитном поле, находим вероятность вылета электрона в единицу времени, т.е. скорость ионизации уровня (см. формулы (3.19) и (3.20) в [58]). Для спин-фактора, который мы обозначим теперь как $\tilde{S}$, получим¹⁴

$$\tilde{S}_+ = \frac{1}{\tilde{S}_-} = \frac{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} + \sqrt{3}\xi_0}{1 + \sqrt{1 + \xi_0^2} - \sqrt{3}\xi_0} \exp \left(-\frac{\mu}{\mu_B} \frac{\sqrt{3}\xi_0}{\sqrt{1 + \xi_0^2}} \right). \quad (7.56)$$

В (7.53), (7.55) и (7.56) значения $S_\pm$ и $\tilde{S}_\pm$ относятся к состояниям с проекцией спина $s_z = \pm\hbar/2$ на направление магнитного поля $\mathcal{H}$, величина ξ_0 определена в (7.21), μ — магнитный момент электрона на расстояниях $r \ll a_B/Z$ от ядра, который отличается от магнетона Бора μ_B (для свободного электрона), если $Z\alpha \simeq 1$. Мы воспользуемся моделью водородоподобного атома (иона), в которой для $1s_{1/2}$ -состояния

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad 0 < Z\alpha < 1, \quad (7.57)$$

$$\frac{\mu}{\mu_B} = \frac{1 + 2\varepsilon_0}{3} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}(Z\alpha)^2, & Z \ll 137, \\ \frac{1}{3}[1 - 2^{3/2}(1 - Z\alpha)], & Z \rightarrow 137. \end{cases}$$

3. Из (7.55) и (7.56) следует, что при $Z \ll 137$ спиновая поправка пренебрежимо мала:

$$\tilde{S}_\pm = 1 \pm \frac{1}{3}(Z\alpha)^3 + O((Z\alpha)^5). \quad (7.58)$$

Это объясняется тем, что в гамильтониане Паули для электрона в однородном магнитном поле пространственные и спинные переменные разделяются, спин не зацепляется за орбитальное движение электрона и члены порядка $Z\alpha$ и $(Z\alpha)^2$ в разложении (7.58) отсутствуют.

¹⁴ Подробности вычислений приведены в [57, 58].

Таблица 2. Спиновый фактор для уровня $1s_{1/2}$ водородоподобного атома*

Z	ε_0	ξ_0	$\mathcal{E}_{\text{ch}}, \text{В см}^{-1}$	$\mathcal{E}_{\text{ch}}/\mathcal{E}_{\text{cr}}$	$\tilde{S}_+$	S_+
20	0,989	8,47(−2)	4,13(13)	3,13(−3)	1,00104	1,00106
40	0,956	0,172	3,38(14)	2,56(−2)	1,008564	1,00909
60	0,899	0,265	1,19(15)	9,0(−2)	1,0155	1,0350
80	0,812	0,368	3,00(15)	0,227	1,078	1,104
92	0,741	0,437	4,82(15)	0,365	1,127	1,195
100	0,684	0,489	6,47(15)	0,490	1,174	1,302
118	0,508	0,631	1,23(16)	0,936	1,354	—
137	0	1,0	3,42(16)	2,598	1,768	—

* Значения ε_0 , ξ_0 и $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ рассчитаны по формулам (7.2), (7.20), (7.21). Приведены значения спиновой поправки, рассчитанные по формулам (7.56) и (7.55), — это означает, что условие (7.54) не выполняется.

Численные значения спин-факторов для уровня $1s_{1/2}$ водородоподобного атома с $Z \leq 137$ приведены в табл. 2. Хотя формулы (7.55) и (7.56) различаются между собой, численно это различие незначительно даже для $Z = 92$ (уран), при этом сами значения S_+ и $\tilde{S}_+$ не превосходят 1,2. Столь слабая зависимость вероятности туннелирования от спина, особенно с учётом резкой зависимости туннельной экспоненты (7.24) от напряжённости лазерного поля, оставляет мало надежд на возможность извлечения величины спин-фактора из экспериментальных данных. Различие выражений (7.55) и (7.56) связано с тем, что при выводе (7.56) энергия уровня ε считалась заданной величиной, в то время как в (7.55) учтён зависящий от проекции спина сдвиг энергии (7.49) во внешнем магнитном поле.

4. В квантовой механике физическим величинам ("наблюдаемым" [138]) соответствуют самосопряжённые операторы¹⁵. Рассмотрим в качестве примера модель водородоподобного атома с зарядом (точечным) ядра Z :

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad 0 < r < \infty, \quad (7.59)$$

Следуя [140], перейдём от потенциала в уравнении Дирака $V(r)$ к эффективному потенциалу $U(r, j, \varepsilon)$, который удовлетворяет уравнению Шрёдингера и выражается через $V(r)$, хотя и довольно сложным образом. Нетрудно показать [140], что для (7.59) член в потенциале U , наиболее сингулярный на малых расстояниях от центра, имеет вид

$$U(r, j, \varepsilon) = \frac{j(j+1) - (Z\alpha)^2}{2r^2} - \frac{Z\alpha\varepsilon}{r} + \dots, \quad r \rightarrow 0, \quad (7.60)$$

где $j = 1/2, 3/2, \dots$ — угловой момент электрона, $\varepsilon = E/m_e$ — энергия уровня, нормированная на энергию покоя электрона. До тех пор пока $Z < Z_s = \sqrt{j(j+1)}\alpha^{-1}$, потенциал $U(r, j, \varepsilon) > 0$ при $r \rightarrow 0$ и дираковский гамильтониан

$$H_D = \gamma^0(-i\gamma\nabla + m) - \frac{Z\alpha}{r} \quad (7.61)$$

определяет спектр энергий $\varepsilon_{nj}(Z)$ однозначным образом, но при $Z > Z_s$ это не так. Можно показать [141, 142], что однозначность спектра восстанавливается при самосопряжённом расширении оператора H_D , для чего необходимо ввести дополнительные, не содержащиеся в исходном потенциале $V(r)$, параметры, без которых, однако, задача не определена. В случае кулоновского потенциала (7.59) такая ситуация имеет место уже при

$$Z > Z_s \left(j = \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\alpha} = 118,7. \quad (7.62)$$

Напомним, что при $Z > \alpha^{-1} = 137$ в уравнении Дирака с точечным кулоновским потенциалом возникает известное "падение на центр" [47]. В интервале $119 < Z < 137$ потенциал не является самосопряжённым оператором. Как впервые показали Померанчук и Смородинский [143], указанные математические тонкости¹⁶ исчезают при учёте конечных размеров ядра (подробнее об этом см. в работах [140, 145–148]).

8. Область применимости нерелятивистской теории Келдыша

Выясним, при каких условиях нерелятивистское описание туннелирования становится неприменимым и для расчёта вероятности ионизации нужно использовать формулы из раздела 7. Максимальные интенсивности достигнуты сейчас для лазеров ИК-диапазона в туннельном режиме $\gamma \ll 1$ (см. разделы 1 и 2). Сравним значения вероятности ионизации в нерелятивистской (w_{NR}) и релятивистской (w_{R}) теории. В случае линейной поляризации излучения имеем с точностью до предэкспоненты:

$$w_{\text{NR}} \propto \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2 \right) \right], \quad (8.1)$$

$$w_{\text{R}} \propto \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{3\xi^2}{10(1+\xi^2)} \right) \gamma_r^2 \right]. \quad (8.2)$$

Здесь F — приведённое поле (1.3), γ и γ_r — параметры адиабатичности¹⁷ (1.1) и (7.17). Безразмерный импульс связанного состояния κ выражается через энергию уровня E_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{E_0}{mc^2} = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \kappa^2 + \dots, \quad (8.3)$$

а характерное электрическое поле $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ выражается через критическое поле квантовой электродинамики:

$$\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3^{3/2} \xi^3 (1 + \xi^2)^{-1} \mathcal{E}_{\text{cr}}, \quad (8.4)$$

где переменная $\xi = \xi(\varepsilon_0)$ определена в (7.21). Энергиям уровня $\varepsilon > 0$ соответствуют значения $0 < \xi < 1$.

В частности, для модели водородоподобного атома с потенциалом $V(r) = -Z\alpha/r$, $0 < r < \infty$, уравнение Дирака решается аналитически и для энергии основного

¹⁵ О различии между самосопряжённым и эрмитовым операторами в гильбертовом пространстве см., например, [139].

¹⁶ "... И теперь мне внушает большое уважение математика, тонкости которой раньше я по своей ограниченности считал роскошью". Из письма А. Эйнштейна А. Зоммерфельду, Цюрих, 29 октября 1912 г. [144].

¹⁷ При этом $\gamma_r = \gamma/\alpha\kappa$. В нерелятивистском пределе $\varepsilon \rightarrow 1$, $3\xi^2(1+\xi^2)^{-1}\gamma_r^2 \rightarrow \gamma^2$ и формулы (8.1) и (8.2) совпадают.

состояния имеем [47]

$$\varepsilon_{1s_{1/2}} = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad \kappa = Z, \quad Z < \alpha^{-1} = 137. \quad (8.5)$$

При этом $\mathcal{E}_{ch} = Z^3 \mathcal{E}_a = (Z\alpha)^3 \mathcal{E}_{cr}$ для $Z \ll 137$, $\mathcal{E}_{ch} = 0,365 \mathcal{E}_{cr}$ при $Z = 92$, $\mathcal{E}_{ch} = \mathcal{E}_{cr}$ при $\varepsilon_0 = 0,485$, $Z = 120$ и $\mathcal{E}_{ch} = 2,6 \mathcal{E}_{cr}$ при $Z = 137$, $\varepsilon_0 = 0$.

Из формул (8.1), (8.2) следует, что отношение

$$R \equiv \frac{w_{NR}}{w_R} \approx \exp \left[-\frac{1}{36} (Z\alpha)^5 \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \right], \quad Z \ll 137. \quad (8.6)$$

Различие между нерелятивистской и релятивистской формулами для вероятности w становится заметным только при $Z \gtrsim Z_*$,

$$Z_* = \alpha^{-1} \left(36 \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{cr}} \right)^{1/5} \approx 45 \left(\frac{\mathcal{I}}{10^{22} \text{ Вт см}^{-2}} \right)^{1/10}, \quad (8.7)$$

где $\mathcal{I}$ — интенсивность излучения. Эта простая оценка даёт: $Z_* = 35, 45, 60$ и 75 при $\mathcal{I} = 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}$ и $10^{24} \text{ Вт см}^{-2}$ соответственно [15].

Таким образом, для ионов с большим значением Z формула (8.1) значительно занижает вероятность ионизации атома. Так, при $Z = 40, 60$ и 80 для $\mathcal{I} = 10^{23} \text{ Вт см}^{-2}$ значения w_{NR} и w_R различаются в 1,15, 3 и 65 раз соответственно. Следовательно, хотя область применимости нерелятивистской теории Келдыша "растягивается" вплоть до довольно больших Z , в случае тяжёлых ионов с $Z \gtrsim 40$ уже необходимо использовать релятивистскую теорию туннелирования. Отметим, что из (7.21) следуют соотношения (для основного состояния)

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[Z\alpha + \frac{2}{9} (Z\alpha)^3 + \mathcal{O}((Z\alpha)^5) \right],$$

$$1 - \xi_0^2 = \sqrt{2} \varepsilon_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 + \dots \quad \text{при } \varepsilon_0 \rightarrow 0, \quad (8.8)$$

которые мы использовали в разделе 7.

9. Заключение

В настоящее время область применения теории Келдыша является чрезвычайно обширной и не ограничивается описанием нелинейной ионизации атомов и ионов. Перечислим кратко направления исследований в физике сильных полей, в которых использование метода, предложенного в работе [1], является сейчас повсеместным и которые остались за пределами настоящей статьи по причине её ограниченного объёма.

1. Теория Келдыша широко используется для описания ионизации не только атомов, но и более сложных систем — молекул, кластеров, фуллеренов, диэлектриков и др. Для ознакомления с этой областью исследований мы отсылаем читателя к книге [149], обзорам [150, 151], статьям [152–157] и указанной в них литературе.

2. Амплитуда нелинейной ионизации (3.17) входит в составной матричный элемент, описывающий более сложные процессы, индуцируемые в атомных и молекулярных системах интенсивным лазерным полем. К таким процессам относятся: перерассеяние, приводящее к формированию высокоэнергетического плато в спектрах фотоэлектронов; генерация высоких гармоник лазерного излучения; некаскадная многократная ионизация и др. Эти эффекты, обнаруженные экспериментально около 20 лет назад, в настоящее время интенсивно

изучаются. Особенно большой интерес вызывает явление генерации высоких гармоник, которое используется для получения когерентных, в частности аттосекундных, импульсов излучения в ультрафиолетовом и мягком рентгеновском диапазонах длин волн. Обзор современного состояния этой области исследований можно найти в работах [14, 16, 19, 22, 23].

3. В туннельном режиме параметр Келдыша (1.1) допускает наглядную физическую интерпретацию: величина $t_K = \gamma/\omega$, которая представляет собой время, затрачиваемое электроном на пролёт под потенциальным барьером, известна в литературе как время туннелирования Келдыша (Keldysh tunneling time). В настоящее время активно дискутируется вопрос о возможности экспериментального измерения этого времени с использованием аттосекундной техники. Несмотря на большое число теоретических и экспериментальных работ по этой тематике, опубликованных в последние годы [94, 95, 158–165], вопрос о времени туннелирования в контексте нелинейной ионизации пока остаётся дискуссионным.

4. В недавних экспериментах по туннельной ионизации атомов лазерными импульсами ИК-диапазона длин волн были обнаружены явление "туннелирования без ионизации" [166], в котором фотоэлектрон захватывается кулоновским полем атома на ридберговский уровень, и, по-видимому, близко связанное с этим эффектом образование пиков в спектре фотоэлектронов при очень низких энергиях [167–170]. Эти новые свойства туннельной ионизации оказались довольно неожиданными для исследователей [171], и в настоящее время предпринимаются попытки их теоретического описания (см., например, работы [92, 172–174] и приведённые там ссылки), в том числе с использованием теории Келдыша и её модификаций.

5. Для систем с большим значением поляризуемости (например, для больших молекул) не только кулоновское, но и дипольное взаимодействие фотоэлектрона с остовом, поляризованным полем лазерной волны, существенно влияют на спектры [175]. Учёт поляризационного взаимодействия, по видимому, может быть выполнен с помощью ММВ, так же как это было сделано для случая чисто кулоновского потенциала.

Перечисленные выше и многие другие приложения теории Келдыша обсуждаются в специальном выпуске *Journal of Physics B* [176], посвящённом 50-летию выхода в свет работы [1].

В целом, значение работы Келдыша [1] трудно переоценить. Наряду с методом Ландау – Дыхне и ММВ, она послужила основой многочисленных исследований, теоретических и экспериментальных, в области атомной и лазерной физики интенсивных полей и сохраняет актуальность вплоть до сего дня. Достаточно сказать, что на работу [1] имеется более 2500 ссылок, причём большая часть цитирований приходится на последние 10–15 лет. Нет сомнения, что высказанные в [1] идеи ещё долго будут оказывать влияние на развитие физики интенсивных лазерных полей.

10. Приложения

А. Аналитические модели лазерных импульсов

1. Монохроматическому свету с линейной поляризацией отвечают $\varphi(\theta) = \cos \theta$ и функция $\chi(u) = (1 + u^2)^{-1/2}$.

Вычисляя элементарный интеграл (3.34), находим

$$f(\gamma) = \frac{2\gamma}{3} g(\gamma) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \operatorname{arsinh} \gamma - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma}, \quad (\text{A.1})$$

$$b_{\parallel}(\gamma) = \frac{\operatorname{arsinh} \gamma}{\gamma} - (1+\gamma^2)^{-1/2}, \quad b_{\perp}(\gamma) = \frac{\operatorname{arsinh} \gamma}{\gamma}.$$

Здесь $f(\gamma)$ — функция Келдыша [1], определяющая экспоненциальный множитель в вероятности ионизации, $b_{\parallel}$ и $b_{\perp}$ — коэффициенты импульсного спектра [3, 15]. Как следует из формул (3.33) и (3.34), после нахождения функции $\chi(u)$ по форме лазерного импульса $\varphi(\theta)$ задача сводится к квадратурам. Явные выражения для $\chi(u)$ приведены в [15]. Отметим разложения

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10} \gamma^2 + \frac{9}{280} \gamma^4 + \frac{5}{336} \gamma^6 + \dots, \quad \gamma \ll 1,$$

$$f(\gamma) = \ln 2\gamma - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \gamma}{\gamma^2}\right), \quad \gamma \gg 1. \quad (\text{A.2})$$

Формулы ММВ позволяют определить эффективную ширину барьера $b(\mathcal{E}_0, \omega)$ в лазерном поле. Для экстремальной подбарьерной траектории электрона

$$z(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} (\cosh \tau_s - \cosh \tau), \quad \mathbf{r}_{\perp} = 0, \quad \tau = -i\omega t,$$

$$0 < \tau < \tau_s = \ln(\gamma + \sqrt{1+\gamma^2}),$$

$$\dot{z}(\tau_s) = i\kappa, \quad \sinh \tau_s = \frac{\omega\kappa}{\mathcal{E}_0} = \gamma,$$

откуда

$$b = z(0) = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}_0} l(\gamma), \quad l(\gamma) = \frac{2}{1 + \sqrt{1+\gamma^2}}. \quad (\text{A.3})$$

При $\gamma \gg 1$ ширина барьера b уменьшается (по сравнению с таковой в случае постоянного электрического поля, когда $b = \kappa^2/2\mathcal{E}_0$), что наглядно объясняет [3, 7] быстрое возрастание скорости ионизации при переходе из адиабатической области в область многофотонной ионизации $\gamma \gg 1$. При этом $b \sim \kappa^2/\gamma\mathcal{E}_0 \sim K_0\kappa^{-1} \gg \kappa^{-1}$, т.е. ширина барьера значительно превосходит радиус атома, что обеспечивает применимость ММВ при $K_0 \gg 1$ (см. формулу (Б.3) в приложении Б).

2. "Солитоноподобный" импульс [63]: $\varphi(\theta) = 1/\cosh^2 \theta$, $\chi(u) = 1/(1+u^2)$. В этом случае

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{5} \gamma^2 + \frac{3}{35} \gamma^4 - \dots, \quad \gamma \ll 1,$$

$$f(\gamma) = (1+\gamma^{-2}) \arctan \gamma - \gamma^{-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\pi}{2\gamma^2} - \dots, \quad \gamma \gg 1, \quad (\text{A.4})$$

$$b_{\parallel}(\gamma) = \frac{\arctan \gamma}{\gamma} - (1+\gamma^2)^{-1}, \quad b_{\perp} = \frac{\arctan \gamma}{\gamma},$$

$$z(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} \ln \frac{\cos \tau}{\cos \tau_s}, \quad \cos \tau_s = (1+\gamma^2)^{-1/2},$$

$$l(\gamma) = \frac{\ln(1+\gamma^2)}{\gamma^2}. \quad (\text{A.5})$$

3. Следующий пример,

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \frac{(1-\alpha)^2 \cos \theta}{1+\alpha^2-2\alpha \cos(2\theta)} = \\ &= (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cos[(2k+1)\theta], \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

может служить иллюстрацией влияния высших гармоник лазерного излучения на вероятность ионизации. В этом случае

$$\begin{aligned} \tau_s &= \operatorname{arsinh} \left(\frac{\tanh \beta \gamma}{\beta} \right), \quad \beta = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}, \\ f(\gamma, \alpha) &= \int_0^{\tau_s} \left\{ 1 - \left[\frac{\operatorname{arsinh}(\beta \sinh \tau)}{\beta \gamma} \right]^2 \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Из-за присутствия в спектре высших гармоник вероятность ионизации в таком поле всегда превышает вероятность ионизации в монохроматической волне с той же амплитудой. При $\gamma \rightarrow \infty$ функция $f(\gamma)$ выходит на константу.

4. Чётный импульс,

$$\begin{aligned} \varphi_e(\theta) &= (1-\theta^2)(1+\alpha^{-1}\theta^2)^{-(\alpha+3)/2} \equiv \\ &\equiv \frac{d}{d\theta} \left[\theta(1+\alpha^{-1}\theta^2)^{-(\alpha+1)/2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

может служить примером ультракороткого лазерного излучения длительностью менее полупериода поля (рис. 7). В таком импульсе поле достигает максимума в точках $\theta_m = \pm\sqrt{3}$:

$$\varphi_m = -2 \left(\frac{\alpha}{\alpha+3} \right)^{(\alpha+3)/2} = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -0,305, -0,446$$

при $\alpha = 1, 3, 5$ и ∞ соответственно. Экстремальной является только одна траектория, соответствующая перевальной точке $\theta_s = i\tau_s$ на мнимой оси времени; τ_s определяется из уравнения

$$\tau_s(1-\alpha^{-1}\tau_s^2)^{-(\alpha+1)/2} = \gamma. \quad (\text{A.9})$$

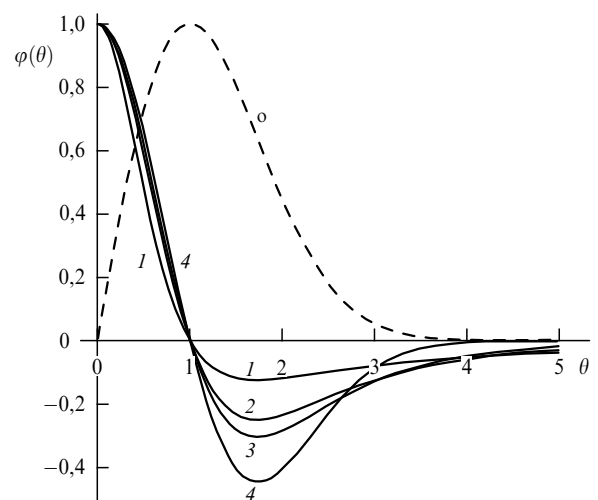


Рис. 7. Форма импульсов (A.8). Кривые отвечают следующим значениям параметра α : $\alpha = 1$ (кривая 1), $\alpha = 3$ (кривая 2), $\alpha = 5$ (кривая 3) и $\alpha = \infty$ (кривая 4). Штриховая кривая о отвечает нечётному импульсу (A.18).

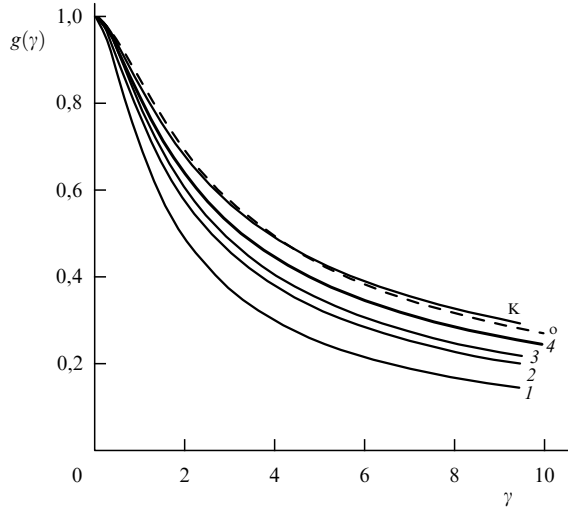


Рис. 8. Функция $g(\gamma)$ для тех же импульсов, что и на рис. 7, а также для монохроматического поля $\varphi(\theta) = \cos \theta$ (кривая К), рассмотренного в работе Келдыша [1].

Функции $g(\gamma)$ для нескольких импульсов вида (А.8) показаны на рис. 8. Отметим, что близость кривых К и о объясняется тем, что нечётный импульс близок к $\varphi = \cos \theta$ в пределах одного полупериода. Поскольку $g_e(\gamma) < g_o(\gamma)$, вероятность ионизации атома чётным импульсом больше, чем нечётным, при одних и тех же значениях $\mathcal{E}_0$ и γ (см. также рис. 1 в [41]).

5. В предельном случае $\alpha \rightarrow \infty$ формула (А.8) принимает вид

$$\varphi(\theta) = (1 - \theta^2) \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{d}{d\theta} \left[\theta \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) \right] \quad (\text{А.10})$$

и для точки перевала получаем

$$\begin{aligned} \tau_s \exp \frac{\tau_s^2}{2} &= \gamma, \\ \tau_s(\gamma) &= \begin{cases} \gamma - \frac{1}{2} \gamma^3 + \frac{5}{8} \gamma^5 - \dots, & \gamma \ll 1, \\ \sqrt{2 \ln \gamma} \left[1 - \frac{\ln(2 \ln \gamma)}{4 \ln \gamma} + \dots \right], & \gamma \gg 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{А.11})$$

а функция $f(\gamma)$ имеет вид

$$f_e(\gamma) = \tau_s \left[1 - \frac{1}{3} {}_1F_1 \left(1, \frac{5}{2}; -\tau_s^2 \right) \right],$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Используя асимптотики

$$f_e(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma g(\gamma) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\tau_s + \frac{1}{5} \tau_s^3 - \frac{6}{35} \tau_s^5 + \dots \right), & \gamma \ll 1, \\ \tau_s - \frac{1}{2\tau_s} + \frac{1}{4\tau_s^3} + \dots, & \gamma \gg 1, \end{cases}$$

получаем разложения

$$g_e(\gamma) = 1 - \frac{3}{10} \gamma^2 + \frac{15}{56} \gamma^4 - \frac{49}{144} \gamma^6 + \dots, \quad \gamma \rightarrow 0, \quad (\text{А.12})$$

$$f_e(\gamma) = \sqrt{2 \ln \gamma} \left(1 - \frac{\ln \ln \gamma + c_1}{4 \ln \gamma} + \dots \right), \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad (\text{А.13})$$

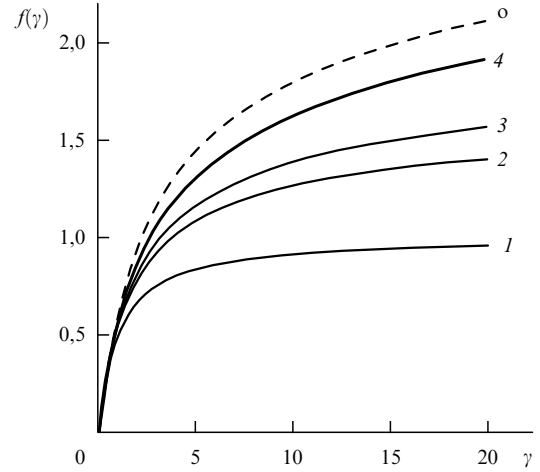


Рис. 9. Функция $f(\gamma)$. Обозначения те же, что и на рис. 7, 8.

$c_1 = \ln 2 + 1/2$. В более общем случае (А.8) имеем

$$g(\gamma) = 1 - \frac{3}{10} (1 + \alpha^{-1}) \gamma^2 + \frac{15}{56} \left(1 + \frac{8}{5} \alpha^{-1} + \frac{3}{5} \alpha^{-2} \right) \gamma^4 + \dots \quad (\text{А.14})$$

На рисунках 8 и 9 представлены функции $g(\gamma)$ и $f(\gamma)$ для различных импульсов вида (А.8). Отметим, что при $\gamma \gg 1$ вероятность ионизации нечётным импульсом меньше, чем чётным (при одних и тех же значениях параметров $\mathcal{E}_0$ и γ).

6. Аналогом (А.8) является нечётный импульс

$$\varphi(\theta) = \theta \left(\frac{1 + \alpha}{\theta^2 + \alpha} \right)^{(\alpha+1)/2}. \quad (\text{А.15})$$

Электрическое поле достигает экстремумов $\pm \mathcal{E}_0$ в точках $\theta_m = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \pm \left[1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\Delta\theta)^2 + \mathcal{O}((\Delta\theta)^3) \right], \\ \Delta\theta &= \theta - \theta_m \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{А.16})$$

Сопоставляя с (3.38), находим

$$w(\gamma) \sim \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{\alpha}{5(1 + \alpha)} \gamma^2 + \dots \right) \right], \quad \gamma \ll 1. \quad (\text{А.17})$$

Следующие члены этого разложения не могут быть вычислены с помощью (3.39), поскольку в (А.15), (А.16) присутствует кубический член, которого нет в (3.38). В пределе $\alpha \rightarrow \infty$ (А.15) переходит в

$$\varphi(\theta) = \theta \exp \frac{1 - \theta^2}{2} = 1 - (\Delta\theta)^2 + \frac{1}{3} (\Delta\theta)^3 + \dots, \quad \Delta\theta \rightarrow 0. \quad (\text{А.18})$$

7. Для гауссиана $\varphi(\theta) = \exp(-\theta^2/2)$ мы ограничимся разложением в низкочастотной области:

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10} \gamma^2 + \frac{1}{40} \gamma^4 - 0,0084 \gamma^6 + \dots \quad (\text{А.19})$$

8. Функция $\chi(u)$ иногда вычисляются аналитически [15]. В любом случае её нетрудно найти численно, после чего формулы (3.33)–(3.35) определяют в компактном виде частотную зависимость процессов ионизации атомов и

рождения пар, не требуя предварительного вычисления функции Грина для временного уравнения Шрёдингера.

9. Отметим, что для полей, рассмотренных в пунктах 1 и 4–6, выполняется известное в лазерной физике [43] соотношение

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega t) dt = 0, \quad (\text{A.20})$$

которое означает, что импульс за полное время своего действия не совершает работы над частицей: $\mathbf{p}(-\infty) = \mathbf{p}(\infty)$. Остальные примеры соответствуют однополярным импульсам, для которых $J \neq 0$. На этом мы закончим обсуждение ММВ (см. также обзоры [15, 55] и книгу [177, гл. V]).

Б. Подбарьерное движение в переменном поле

Для модели переменного и однородного линейно поляризованного поля $\mathcal{E}(t)$ экстремальная подбарьерная траектория электрона является одномерной и выражается в квадратурах. Так, в случае ионизации нерелятивистского атомного уровня, интегрируя уравнение движения $d^2x/dt^2 = \mathcal{E}_0\varphi(\omega t)$ в поле (3.29) с учётом граничных условий ММВ

$$E_0 = -I = -\frac{\kappa^2}{2}, \quad p(t_s) = i\kappa, \quad p(t=0) = 0, \quad \text{Im } x(0) = 0, \quad (\text{Б.1})$$

и переходя к безразмерному мнимому времени $\tau = -i\omega t$, находим эту траекторию,

$$x(\tau) = x(\tau_s) + \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} \int_{\tau}^{\tau_s} h(\tau') d\tau', \quad (\text{Б.2})$$

$$\tau_s = h^{-1}(\gamma), \quad h(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(it) dt,$$

и ширину барьера

$$b = x(0) - x(\tau_s) = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}_0} l(\gamma), \quad (\text{Б.3})$$

$$l(\gamma) = 2\gamma^{-2} \int_0^{\tau_s} h(\tau) d\tau, \quad l(0) = 1.$$

Начальный момент подбарьерного движения лежит на мнимой оси времени:

$$t_s = i\omega^{-1}\tau_s(\gamma), \quad h(\tau_s) = \gamma, \quad (\text{Б.4})$$

причём t_s является особой точкой для функции действия $S(t)$; при $t = 0$ электрон выходит из-под барьера и его дальнейшая траектория является вещественной.

Вычисляя мнимую часть действия вдоль подбарьерной траектории, приходим к формулам (3.32) и (3.37). Заметим, что эти формулы относятся к случаю чётных импульсов, $\varphi(-t) = \varphi(t)$, когда "время" в процессе туннелирования изменяется вдоль мнимой оси и множитель $i = \sqrt{-1}$ можно исключить из формул, — это простейший вариант ММВ. Кроме того, для удобства было выбрано условие нормировки

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) < 0, \quad (\text{Б.5})$$

означающее, что электрическое поле имеет максимум при $t = 0$, т.е. в момент выхода электрона из-под барьера (в окончательном результате положение максимума несущественно). В простейших случаях монохроматического поля и солитоноподобного импульса, рассмотренных в приложении А, получаем (А.3) и (А.4). Для чётного импульса (А.10) находим

$$x(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} \left(\exp \frac{\tau_s^2}{2} - \exp \frac{\tau^2}{2} \right), \quad 0 < \tau < \tau_s, \\ l(\gamma) = \frac{2}{\gamma^2} \left(\exp \frac{\tau_s^2}{2} - 1 \right) = \begin{cases} 1 - \frac{3\gamma^2}{4}, & \gamma \ll 1, \\ \gamma^{-1} \sqrt{\frac{2}{\ln \gamma}}, & \gamma \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

причём $\tau_s = \tau_s(\gamma)$ определяется из уравнения (А.11).

При $\gamma \rightarrow 0$ из (Б.3) имеем

$$l(\gamma) = 1 - \frac{1}{4} a_2 \gamma^2 + \dots, \quad a_2 > 0, \quad (\text{Б.7})$$

и для волны с эллиптической поляризацией

$$l(\gamma, \rho) = 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho^2}{9} \right) \gamma^2 + \dots, \quad -1 \leq \rho \leq 1, \quad (\text{Б.8})$$

откуда видно, что с возрастанием параметра Келдыша барьер начинает сокращаться. Асимптотики функций $\chi(u)$, $f(\gamma)$ и $l(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow \infty$ приведены в табл. 3.

В. Функция $\chi(u)$ и адиабатические разложения

В рамках ММВ вычисление вероятности ионизации сводится к квадратурам (3.33)–(3.37). В эти формулы

Таблица 3. Асимптотики функций $\chi(u)$, $f(\gamma)$ и $l(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow \infty$ *

Номер	$\varphi(\theta)$	$\chi(u)$	$f(\gamma)$	$l(\gamma)$
1	$\cos \theta$	$(1 + u^2)^{-1/2}$	$\ln(2\gamma) - 1/2$	$2/\gamma$
2	$(1 - \theta^2) \exp(-\theta^2/2)$	$\chi = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} u^2, & u \rightarrow 0 \\ (u\sqrt{2 \ln u})^{-1}, & u \gg 1 \end{cases}$	$\sqrt{2 \ln \gamma}$	$(\gamma \sqrt{\ln \gamma})^{-1}$
3	$\exp(-\theta^2)$	—	$\sqrt{\ln \gamma}$	$\sim (\gamma \sqrt{\ln \gamma})^{-1}$
4	$1/\cosh^2 \theta$	$(1 + u^2)^{-1}$	$\pi/2 - 2\gamma^{-1}$	$2 \ln \gamma / \gamma^2$
5	$1/\cosh \theta$	$1/\cosh u$	$\pi/2$	$3,66\gamma^{-2}$
6	$(1 + \theta^2)^{-3/2}$	$(1 + u^2)^{-3/2}$	$1 - \ln \gamma / \gamma^2$	$2\gamma^{-2}$
7	$(1 + \theta^2)^{-1}$	$1/\cosh^2 u$	$1 - \pi^2/12\gamma^2$	$2\gamma^{-2} \ln 2$
8	$(1 - \theta^2)(1 + \theta^2)^{-2}$	$2/v(1 + v)$	$1 + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$	—

* Функция $\varphi(\theta)$ задаёт форму импульса, $v = \sqrt{1 + 4u^2}$.

входит функция $\chi(u)$, которая определяется формой лазерного импульса $\varphi(\theta)$. Связь между φ и χ удобно задавать в параметрическом виде:

$$\chi(u) = \frac{1}{\varphi(i\tau)}, \quad u(\tau) = \int_0^\tau \varphi(i\theta) d\theta, \quad \theta = \omega t, \quad (\text{B.1})$$

где τ — вспомогательная переменная. Рассмотрим несколько примеров.

1. Монохроматическое излучение: $\varphi = \cos \theta$,

$$u = \sinh \theta, \quad \chi(u) = \frac{1}{\cosh \tau} = (1 + u^2)^{-1/2}, \quad (\text{B.2})$$

и вычисление интеграла (3.37) даёт функцию Келдыша (A.1).

2. Импульс вида $\varphi = 1/\cosh^2 \theta$ ("солитон"):

$$u = \tan \theta, \quad \chi(u) = \cos^2 \tau = (1 + u^2)^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

и (3.37) приводит к $f(\gamma)$ из (A.4).

3. Если $\varphi = 1/\cosh \theta$, то

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \tau}{1 - \sin \tau}, \quad \tanh u = \sin \tau, \quad \chi(u) = \cos \tau = \frac{1}{\cosh u}, \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \gamma \int_0^1 \frac{1 - u^2}{\cosh(\gamma u)} du = \\ &= \frac{2\gamma}{3} \begin{cases} 1 - \frac{1}{5} \gamma^2 + \frac{3}{35} \gamma^4 - \dots, & \gamma \rightarrow 0, \\ \frac{3\pi}{4\gamma}, & \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

4. Для $\varphi(\theta) = (1 + \theta^2)^{-\alpha}$ (лоренцевский импульс при $\alpha = 1$) условия (B.1) принимают вид

$$\chi = (1 - \tau^2)^\alpha, \quad u = \tau {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \alpha; \frac{3}{2}; \tau^2\right), \quad (\text{B.6})$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция. Для $\alpha = 1/2, 1$ и $3/2$ результат выражается через элементарные функции. Например, при $\alpha = 3/2$ величина $u = \tau(1 - \tau^2)^{-1/2}$,

$$\chi(u) = (1 + u^2)^{-3/2}, \quad (\text{B.7})$$

$$f(\gamma) = \sqrt{1 + \gamma^2} - \gamma^2 \ln(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2}).$$

5. Обобщая выражения для $\chi(u)$ из 1-й, 4-й и 6-й строк табл. 3, положим

$$\chi(u) = (1 + u^2)^{-\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad (\text{B.8})$$

при этом

$$\begin{aligned} g(\gamma) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \sigma; \frac{5}{2}; -\gamma^2\right) = \\ &= 1 - \frac{\sigma}{5} \gamma^2 + \frac{3}{70} \sigma(\sigma + 1) \gamma^4 - \dots, \quad \gamma \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

В частности, $g(\gamma) = (1 + \gamma^2)^{-1/2}$ при $\sigma = 5/2$.

6. Адиабатическое разложение: для произвольного чётного импульса $\chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^{2n}$

$$f(\gamma) = \frac{2\gamma}{3} g(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)} \gamma^{2n+1}, \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (\text{B.10})$$

Сопоставляя (B.10) с (3.39), получим

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2} a_2, \quad c_2 = \frac{1}{24} (10a_2^2 - a_4), \dots, \quad (\text{B.11})$$

где a_k — коэффициенты в (3.38).

Г. О методе Фока в релятивистской механике

Релятивистски ковариантные уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, задаваемом тензором

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{Г.1})$$

где $A^\mu(x)$ — 4-потенциал поля, имеют вид (здесь мы восстанавливаем размерные константы m_e , e и c)

$$m\ddot{x}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu, \quad (\text{Г.2})$$

где $x \equiv x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ — координаты в 4-мерном псевдо-евклидовом пространстве, точкой обозначена производная по собственному времени,

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt. \quad (\text{Г.3})$$

Согласно Фоку [123] можно ввести интеграл действия

$$S = \int_{s_0}^s L ds', \quad L = -\frac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{e}{c} A^\mu(x) \dot{x}_\mu - \frac{1}{2} mc^2, \quad (\text{Г.4})$$

условие экстремальности которого приводит к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (\text{Г.5})$$

причём s рассматривается как независимая переменная, не обязательно совпадающая с собственным временем.

Так как функция Лагранжа в (Г.4) не зависит явно от параметра s , имеется интеграл движения

$$H = \dot{x}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - L = \frac{1}{2} m(c^2 - \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu) = \text{const}. \quad (\text{Г.6})$$

Полагая значение постоянной в (Г.6) равным нулю, получим условие

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = c^2, \quad (\text{Г.7})$$

в силу которого независимая переменная s совпадает с собственным временем, а уравнения Лагранжа (Г.5) совпадают с уравнениями движения (Г.2).

Приведённые выше уравнения позволяют найти траекторию заряженной частицы в параметрическом виде. Если конфигурация электромагнитного поля обладает определённой симметрией, то решение удастся получить в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим движение электрона в перпендикулярных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Считая, что электрическое поле направлено вдоль оси y , а магнитное — вдоль оси z , выбираем 4-потенциал в виде (7.27), тогда для функции Лагранжа (Г.4) получим

$$L = -\frac{1}{2} mc^2 + \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{r}}^2 - c^2 \dot{t}^2) - m\omega_0(ct - \beta \dot{x})y, \quad (\text{Г.8})$$

где ω_0 и β определены в (7.30). Инвариантности относительно трансляций по пространственным и временным координатам отвечают четыре интеграла движения:

$$\begin{aligned} c\dot{t} + \omega_0 y &= cq_t, \quad \dot{x} + \beta\omega_0 y = cq_x, \\ \dot{z} &= cq_z, \quad \dot{y} + \omega_0(ct - \beta x) = cq_y, \end{aligned} \quad (\text{Г.9})$$

причём обобщённые импульсы $p_t = mcq_t$, $p_x = -mcq_x$, $p_z = mcq_z$ соответствуют циклическим координатам t, x, z , а сохранение величины mcq_y следует из теоремы Нётер. Интегрирование этих уравнений даёт траекторию (7.29).

Список литературы

1. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1945 (1964); Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1307 (1965)
2. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **50** 255 (1966); Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **23** 168 (1966)
3. Переломов А М, Попов В С, Терентьев М В *ЖЭТФ* **50** 1393 (1966); Perelomov A M, Popov V S, Terent'ev M V *Sov. Phys. JETP* **23** 924 (1966)
4. Переломов А М, Попов В С, Терентьев М В *ЖЭТФ* **51** 309 (1966); Perelomov A M, Popov V S, Terent'ev M V *Sov. Phys. JETP* **24** 207 (1967)
5. Попов В С, Кузнецов В П, Переломов А М *ЖЭТФ* **53** 331 (1967); Popov V S, Kuznetsov V P, Perelomov A M *Sov. Phys. JETP* **26** 222 (1968)
6. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **52** 223 (1967); Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **25** 145 (1967)
7. Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **52** 514 (1967); Perelomov A M, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **25** 336 (1967)
8. Popruzhenko S V, Mur V D, Popov V S, Bauer D *Phys. Rev. Lett.* **101** 193003 (2008)
9. Попруженко С В, Мур В Д, Попов В С, Бауэр Д *ЖЭТФ* **135** 1092 (2009); Popruzhenko S V, Mur V D, Popov V S, Bauer D *JETP* **108** 947 (2009)
10. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С, Попруженко С В *Письма в ЖЭТФ* **93** 256 (2011); Karnakov B M, Mur V D, Popov V S, Popruzhenko S V *JETP Lett.* **93** 238 (2011)
11. Faisal F H M *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **6** L89 (1973)
12. Reiss H R *Phys. Rev. A* **22** 1786 (1980)
13. Делоне Н Б, Крайнов В П *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением* (М.: Физматлит, 2001)
14. Becker W et al. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48** 35 (2002)
15. Попов В С *УФН* **174** 921 (2004); Popov V S *Phys. Usp.* **47** 855 (2004)
16. Becker A, Faisal F H M *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **38** R1 (2005)
17. Milošević D B et al. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **39** R203 (2006)
18. Popruzhenko S V *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** 204001 (2014)
19. Agostini P, DiMauro L F *Rep. Prog. Phys.* **67** 813 (2004)
20. Mourou G A, Tajima T, Bulanov S V *Rev. Mod. Phys.* **78** 309 (2006)
21. Щелев М Я *УФН* **182** 649 (2012); Schelev M Ya *Phys. Usp.* **55** 607 (2012)
22. Agostini P, DiMauro L F *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **61** 117 (2012)
23. Krausz F, Ivanov M *Rev. Mod. Phys.* **81** 163 (2009)
24. Andruszkow J et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 3825 (2000)
25. Shintake T et al. *Nature Photon.* **2** 555 (2008)
26. Emma P et al. *Nature Photon.* **4** 641 (2010)
27. Young L et al. *Nature* **466** 56 (2010)
28. Ионин А А *УФН* **182** 773 (2012); Ionin A A *Phys. Usp.* **55** 721 (2012)
29. Free-electron laser FLASH, <http://flash.desy.de>
30. Yanovsky V et al. *Opt. Express* **16** 2109 (2008)
31. <http://www.extreme-light-infrastructure.eu>
32. XCELS, <http://www.xcels.iapras.ru>
33. IZEST Project, <http://www.izest.polytechnique.edu>
34. Dunne G V *Eur. Phys. J. Special Topics* **223** 1055 (2014)
35. Sauter F Z. *Phys.* **69** 742 (1931); *Z. Phys.* **73** 547 (1932)
36. Heisenberg W, Euler H Z. *Phys.* **98** 714 (1936)
37. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
38. Di Piazza A et al. *Rev. Mod. Phys.* **84** 1177 (2012)
39. Narozhny N B, Fedotov A M *Eur. Phys. J. Special Topics* **223** 1083 (2014)
40. Paulus G G et al. *Nature* **414** 182 (2001)
41. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **88** 495 (2008); Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *JETP Lett.* **88** 423 (2008)
42. Karnakov B M, Mur V D, Popov V S, Popruzhenko S V *Phys. Lett. A* **374** 386 (2009)
43. Алексеев А И *Сборник задач по классической электродинамике* (М.: Наука, 1977) задача 409
44. Fuji T, Nomura Y *Appl. Sci.* **3** 122 (2013)
45. Wolkow D M Z. *Phys.* **94** 250 (1935)
46. Волков Д М *ЖЭТФ* **7** 1286 (1937)
47. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989); Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1982)
48. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
49. Rastunkov V S, Krainov V P *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **40** 2277 (2007)
50. Krainov V P, Sofronov V S *Phys. Rev. A* **77** 063418 (2008)
51. Дыхне А М *ЖЭТФ* **41** 1324 (1961); Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **14** 941 (1962)
52. Дыхне А М, Юдин Г Л *УФН* **125** 377 (1978); Dykhne A M, Yudin G L *Sov. Phys. Usp.* **21** 549 (1978)
53. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988); Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)
54. Goldstein H *Classical Mechanics* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, 1950); Голдстейн Г *Классическая механика* (М.: Гостехиздат, 1957)
55. Попов В С *ЯФ* **68** 717 (2005); Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **68** 686 (2005)
56. Попов В С, Мур В Д, Карнаков Б М *Письма в ЖЭТФ* **66** 213 (1997); Popov V S, Mur V D, Karnakov B M *JETP Lett.* **66** 229 (1997)
57. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *Письма в ЖЭТФ* **79** 320 (2004); Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *JETP Lett.* **79** 262 (2004)
58. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д, Поздняков С Г *ЖЭТФ* **129** 871 (2006); Popov V S, Karnakov B M, Mur V D, Pozdnyakov S G *JETP* **102** 760 (2006); Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д, Поздняков С Г, Препринт № 22-05 (М.: ИТЭФ, 2005)
59. Popov V S *Laser Phys.* **10** 1033 (2000)
60. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **73** 3 (2001); Popov V S *JETP Lett.* **73** 1 (2001)
61. Попов В С *ЖЭТФ* **120** 315 (2001); Popov V S *JETP* **93** 278 (2001)
62. Мигдал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975) Гл. 1; Migdal A B *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1977)
63. Келдыш Л В, частное сообщение (2001)
64. Lindner F et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 040401 (2005)
65. Gopal R et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 053001 (2009)
66. Демков Ю Н, Друкарев Г Ф *ЖЭТФ* **47** 918 (1964); Demkov Yu N, Drukarev G F *Sov. Phys. JETP* **20** 614 (1965)
67. Paulus G G et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 253004 (2003)
68. Reichle R, Helm H, Kiyan I Yu *Phys. Rev. Lett.* **87** 243001 (2001); *Phys. Rev. A* **68** 063404 (2003)
69. Kiyan I Yu, Helm H *Phys. Rev. Lett.* **90** 183001 (2003)

70. Bergues B et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 263002 (2005)
71. Bergues B et al. *Phys. Rev. A* **75** 063415 (2007)
72. Gazibegović-Busuladžić A, Milošević D B, Becker W *Opt. Commun.* **275** 116 (2007)
73. Gazibegović-Busuladžić A et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 103004 (2010)
74. Manakov N L et al. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **36** R49 (2003)
75. Frolov M V et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 053003 (2003)
76. Bauer D, Milošević D B, Becker W *Phys. Rev. A* **72** 023415 (2005)
77. Korneev Ph A et al. *New J. Phys.* **14** 055019 (2012)
78. Chin S L et al. *Phys. Rev. Lett.* **61** 153 (1988)
79. Аммосов М В, Делоне Н Б, Крайнов В П *ЖЭТФ* **91** 2008 (1986); Ammosov M V, Delone N B, Krainov V P *Sov. Phys. JETP* **64** 11918 (1986)
80. Делоне Н Б, Крайнов В П *УФН* **168** 531 (1998); Delone N B, Krainov V P *Phys. Usp.* **41** 469 (1998)
81. Попов В С *УФН* **169** 819 (1999); Popov V S *Phys. Usp.* **42** 733 (1999)
82. Goreslavski S P, Paulus G G, Popruzhenko S V, Shvetsov-Shilovskii N I *Phys. Rev. Lett.* **93** 233002 (2004)
83. Попов В С, Мур В Д, Попруженко С В *Письма в ЖЭТФ* **85** 275 (2007); Popov V S, Mur V D, Popruzhenko S V *JETP Lett.* **85** 223 (2007)
84. Popruzhenko S V, Paulus G G, Bauer D *Phys. Rev. A* **77** 053409 (2008)
85. Popruzhenko S V, Bauer D *J. Mod. Opt.* **55** 2573 (2008)
86. Smirnova O, Spanner M, Ivanov M *Phys. Rev. A* **77** 033407 (2008)
87. Torlina L, Smirnova O *Phys. Rev. A* **86** 043408 (2012)
88. Potvliege R M *Comp. Phys. Commun.* **114** 42 (1998)
89. Bauer D, Koval P *Comp. Phys. Commun.* **174** 396 (2006)
90. Bashkansky M, Bucksbaum P H, Schumacher D W *Phys. Rev. Lett.* **60** 2458 (1988)
91. Paulus G G et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 3791 (2000)
92. Yan T-M, Popruzhenko S V, Vrakking M J J, Bauer D *Phys. Rev. Lett.* **105** 253002 (2010)
93. Sorokin A A et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 213002 (2007)
94. Torlina L et al., arXiv:1402.5620
95. Torlina L et al. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** 204021 (2014)
96. Torlina L et al. *Phys. Rev. A* **86** 043409 (2012)
97. Huismans Y et al. *Science* **331** 61 (2011)
98. Marchenko T et al. *Phys. Rev. A* **84** 053427 (2011)
99. Castañeda Cortés H M, Popruzhenko S V, Bauer D, Pálffy A *New J. Phys.* **13** 063007 (2011)
100. Fedotov A M et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 080402 (2010)
101. Schenk M, Küger M, Hommelhoff P *Phys. Rev. Lett.* **105** 257601 (2010)
102. Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *Phys. Lett. A* **229** 306 (1997)
103. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **113** 1579 (1998); Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *JETP* **86** 860 (1998)
104. Попов В С, Сергеев А В *Письма в ЖЭТФ* **63** 398 (1996); Popov V S, Sergeev A V *JETP Lett.* **63** 417 (1996)
105. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **65** 391 (1997); Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *JETP Lett.* **65** 405 (1997)
106. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **115** 1642 (1999); Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *JETP* **88** 902 (1999)
107. Давыдов А С *Теория твердого тела* (М.: Наука, 1976)
108. Сахаров А Д и др. *ДАН СССР* **165** 65 (1965); Sakharov A D *Sov. Phys. Dokl.* **10** 1045 (1966)
109. Сахаров А Д *УФН* **88** 725 (1966); Sakharov A D *Sov. Phys. Usp.* **9** 294 (1966)
110. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995)
111. Павловский А И, в сб. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995) с. 85
112. Терентьев М В *История эфира* (М.: ФАЗИС, 1982)
113. Дирак П А М *Природа* **3** 68 (1972)
114. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
115. Sarri G et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 205002 (2012)
116. Wagner U et al. *Phys. Rev. E* **70** 026401 (2004)
117. Попов В С, Карнаков Б М *УФН* **184** 273 (2014); Popov V S, Karnakov B M *Phys. Usp.* **57** 257 (2014)
118. Попов В С, Мур В Д, Карнаков Б М *Письма в ЖЭТФ* **66** 213 (1997); Popov V S, Mur V D, Karnakov B M *JETP Lett.* **66** 229 (1997)
119. Popov V S, Mur V D, Karnakov B M *Phys. Lett. A* **250** 20 (1998)
120. Мур В Д, Карнаков Б М, Попов В С *ЖЭТФ* **114** 798 (1998); Mur V D, Karnakov B M, Popov V S *JETP* **87** 433 (1998)
121. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **62** 1444 (1999); Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **62** 1363 (1999)
122. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ЖЭТФ* **132** 331 (2007); Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *JETP* **105** 292 (2007)
123. Фок В А *Изв. АН СССР* (4–5) 551 (1937); Fock V A *Phys. Z. Sowjetunion* **12** 404 (1937)
124. Фок В А *Работы по квантовой теории поля* (Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957) с. 141
125. Попов В С, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (М.: ИТЭФ, 1974) с. 219
126. Klein O Z. *Phys.* **37** 895 (1926)
127. Fock V Z. *Phys.* **38** 242 (1926); *Z. Phys.* **39** 226 (1926)
128. Gordon W Z. *Phys.* **40** 117 (1926)
129. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **51** 1492 (1966); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **24** 1006 (1967); Зельдович Я Б *УФН* **110** 139 (1973); Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **16** 427 (1973)
130. Ритус В И *ЖЭТФ* **51** 1544 (1966); Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **24** 1041 (1967)
131. Манаков Н Л, Рапопорт Л П *ЖЭТФ* **69** 842 (1975); Manakov N L, Rapoport L P *Sov. Phys. JETP* **42** 430 (1975)
132. Berson I J J. *Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **8** 3078 (1975)
133. Manakov N L, Ovsiannikov V D, Rapoport L P *Phys. Rep.* **141** 320 (1986)
134. Окунь Л Б *УФН* **180** 871 (2010); Okun L B *Phys. Usp.* **53** 835 (2010)
135. Мур В Д, Попов В С *ТМФ* **27** 204 (1976); Mur V D, Popov V S *Theor. Math. Phys.* **27** 429 (1976)
136. Попов В С, Елецкий В Л, Мур В Д *ЖЭТФ* **71** 856 (1976); Popov V S, Eletsii V L, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **44** 451 (1976)
137. Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *Laser Phys.* **15** 1556 (2005)
138. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press, 1958); Дирак П *Принципы квантовой механики* (М.: Наука, 1979) с. 71
139. Wightman A S *Introduction to Some Aspects of Relativistic Dynamics of Quantized Fields* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1964)
140. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971); Zeldovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)
141. Richtmyer R D *Principles of Advanced Mathematical Physics* (New York: Springer-Verlag, 1978); Рихтмайер Р *Принципы современной математической физики* (М.: Мир, 1982) Гл. 5
142. Воронов Б Л, Гитман Д М, Тютин И В *ТМФ* **150** 41 (2007); Voronov B L, Gitman D M, Tyutin I V *Theor. Math. Phys.* **150** 34 (2007)
143. Pomeranchuk I Ya, Smorodinsky Ya A *J. Phys. USSR* **9** 97 (1945)
144. Зоммерфельд А *Пути познания в физике* (М.: Наука, 1973) с. 191
145. Герштейн С С, Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **57** 654 (1969); Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **30** 358 (1970)
146. Зельдович Я Б и др. *УФН* **105** 780 (1971); Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Usp.* **14** 811 (1972)
147. Brodsky S *Comm. At. Mol. Phys.* **4** 109 (1973)
148. Okun L B *Comm. Nucl. Part. Phys.* **6** 25 (1974)
149. Bandrauk A *Molecules in Laser Fields* (New York: Dekker, 1994)
150. Posthumus J H *Rep. Prog. Phys.* **67** 623 (2004)

151. Stapelfeldt H, Seideman T *Rev. Mod. Phys.* **75** 543 (2003)
152. Becker W et al. *Phys. Rev. A* **76** 033403 (2007)
153. Busuladžić M, Milošević D B *Phys. Rev. A* **82** 015401 (2010)
154. Borzunov S V et al. *Phys. Rev. A* **88** 033410 (2013)
155. Gertszov M et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 243001 (2008)
156. Rajeev P P et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 083001 (2009)
157. Ghimire S et al. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** 204030 (2014)
158. Eckle P et al. *Science* **322** 1525 (2008)
159. Eckle P et al. *Nature Phys.* **4** 565 (2008)
160. Pfeiffer A N et al. *Nature Phys.* **8** 76 (2011)
161. Pfeiffer A N et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 083002 (2012)
162. Pfeiffer A N et al. *Chem. Phys.* **414** 84 (2013)
163. McDonald C R et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 090405 (2013)
164. Kheifets A S, Ivanov I A *Phys. Rev. Lett.* **105** 233002 (2010)
165. Dahlström J M, L'Huillier A, Maquet A J. *Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **45** 183001 (2012)
166. Nubbemeyer T et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 233001 (2008)
167. Blaga C I et al. *Nature Phys.* **5** 335 (2009)
168. Quan W et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 093001 (2009)
169. Wu C Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 043001 (2012)
170. Dura J, Camus N, Thai A *Sci. Rep.* **3** 2675 (2013)
171. Faisal F H M *Nature Phys.* **5** 319 (2009)
172. Liu C, Hatsagortsyan K Z *Phys. Rev. Lett.* **105** 113003 (2010)
173. Kästner A, Saalman U, Rost J M *Phys. Rev. Lett.* **108** 033201 (2012)
174. Becker W et al. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** 204022 (2014)
175. Dimitrovski D et al. *Phys. Rev. Lett.* **113** 103005 (2014)
176. "Special issue on 50 years of optical tunneling" *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** (20) (2014)
177. Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (М.: Наука, 1971) Гл. IX; Baz' A I, Zel'dovich Ya B, Perelomov A M *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)

Current progress in developing the nonlinear ionization theory of atoms and ions

B.M. Karnakov, V.D. Mur, S.V. Popruzenko

National Research Nuclear University "MEPhI",

Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation

E-mail: karnak@theor.mephi.ru, sergey.popruzenko@gmail.com

V.S. Popov

Russian Federation State Scientific Center "Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics",

ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation

This paper reviews the status of the theory of ionization of atoms and ions by intense laser radiation (Keldysh's theory). It discusses the applicability of the theory, its relation to the Landau–Dykhne method and its application to the ionization of atoms by ultrashort nonmonochromatic laser pulses of arbitrary shape. The semiclassical Imaginary Time Method is applied to describe electron sub-barrier motion using classical equations of motion with imaginary time $t \rightarrow it$ for an electron in the field of an electromagnetic wave. The paper discusses tunneling interference of transition amplitudes, a phenomenon generating fast oscillations in the momentum distribution of photoelectrons. A nonperturbative account of the Coulomb interaction between the outgoing electron and the atomic residual causes significant changes in the photoelectron momentum distribution and in the level ionization rates, the latter usually increasing by orders of magnitude both for tunneling and multiphoton ionization. The effect of a static magnetic field on the ionization rate and the magnetic cumulation process is examined. The theory of relativistic tunneling is discussed, relativistic and spin corrections to the ionization rate are calculated, and the applicability limits of the nonrelativistic Keldysh theory are determined. Finally, the application of the Fock method to the covariant description of nonlinear ionization in the relativistic regime is discussed.

Keywords: tunnel and multiphoton ionization, relativistic ionization, intense laser radiation, superstrong magnetic field, Keldysh theory, imaginary time method

PACS numbers: 03.65.Sq, 32.80.Fb, 32.80.Rm, 32.80.Wr, 34.80.Qb

DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501b.0003

Bibliography — 177 references

Received 11 July 2014, revised 4 October 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **185** (1) 3–34 (2015)

Physics – Uspekhi **58** (1) (2015)