Сентябрь 2014 г. *Том 184, № 9*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Когерентные и полуклассические состояния свободной частицы

В.Г. Багров, Д.М. Гитман, А.С. Перейра

Когерентные состояния (КС) были впервые введены и детально изучены для систем с ограниченным движением и дискретным спектром, таких как гармонический осциллятор и аналогичные системы. Однако для такой простейшей и вместе с тем физически важной системы, как свободная частица, проблема построения КС не была детально изучена. Кроме физической важности, имеет место дидактическое преимущество КС свободной частицы в преподавании квантовой механики, при рассмотрении их в качестве примеров волновых пакетов, представляющих полуклассическое движение частицы. В настоящей работе, следуя, по существу, методу Малкина – Додонова – Манько, мы строим различные семейства обобщённых КС свободной массивной нерелятивистской частицы. Нами подробно обсуждаются свойства построенных КС, в частности, соотношения полноты, минимизация соотношений неопределённости и эволюция соответствующей плотности вероятности во времени. Мы описываем физические условия, при которых КС свободной частицы могут рассматриваться как полуклассические состояния.

PACS number: **03.65.–w** DOI: 10.3367/UFNr.0184.201409c.0961

Содержание

1. **Введение (961).**
2. **Построение зависящих от времени когерентных состояний свободной частицы (962).**
   2.1. Основные уравнения. 2.2. Интегралы движения, линейные по каноническим операторам $\hat{q}$ и $\hat{p}$. 2.3. Зависящие от времени обобщённые когерентные состояния.
3. **Стандартные отклонения, соотношения неопределённости и когерентные состояния свободной частицы (964).**
4. **Полуклассические когерентные состояния свободной частицы (965).**
5. **Некоторые заключительные замечания (965).**

Список литературы (966).

В.Г. Багров. Томский государственный университет (ТГУ), физический факультет,
просп. Ленина 36, 634050 Томск, Российская Федерация
Тел./факс (3822) 52-96-51
E-mail: bagrov@phys.tsu.ru
Д.М. Гитман. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация;
Томский государственный университет (ТГУ),
просп. Ленина 36, 634050 Томск, Российская Федерация;
Universidade de São Paulo, Instituto de Física,
13560-970 São Paulo, Brazil
Тел./факс +55 (11) 38-14-05-03
E-mail: gitman@dfn.if.usp.br
А.С. Перейра. Universidade de São Paulo,
Instituto de Física,
13560-970 São Paulo, Brazil
E-mail: apereira@if.usp.br

Статья поступила 28 января 2014 г., после доработки 10 апреля 2014 г.

1. Введение

Когерентные состояния (КС) играют важную роль в современной квантовой теории, как состояния, обеспечивающие естественное соотношение между квантово-механическим и классическим описаниями. Когерентные состояния обладают рядом полезных свойств и, как следствие, имеют большой ряд приложений, например, в полуклассическом описании квантовых систем, в теории квантования, в физике конденсированных сред, в теории излучения, в квантовых вычислениях и т.д. (см., например, [1 – 7]). Несмотря на то что существует значительный ряд публикаций, посвящённых построению КС для различных систем, отсутствуют универсальное определение КС и конструктивная схема их построения для произвольных физических систем. Вместе с тем, мы полагаем, что проблема построения КС для систем с квадратичным гамильтонианом общего вида была полностью решена в работах Додонова и Манько, в рамках метода интегралов движения Малкина и Манько (см. [6 – 8]). Следует отметить, что в ряде случаев для получения конкретных наборов КС и их свойств (для заданной квадратичной системы), исходя из общих результатов, следует прибегнуть к дополнительным техническим усилиям. В настоящей работе мы обращаемся к КС свободной частицы. Кроме физической важности данной проблемы, имеет место дидактическое преимущество рассмотрения КС свободной частицы в вопросе преподавания квантовой механики, а также рассмотрения их как примера квантовых пакетов, представляющих собой полуклассическое движение частицы. В связи с этим следует отметить, что КС были исходно введены и подробно изучены для систем с ограниченным движением и дискретным спектром, подобных гармоническому осциллятору, заряженной частице в магнитном

© В.Г. Багров, Д.М. Гитман, А.С. Перейра 2014

поле и т.д. Однако для такой простейшей и физически важной системы, как свободная частица, проблема построения КС на тот момент не была решена. На наш взгляд, это объясняется тем, что свободная частица совершает неограниченное движение с непрерывным энергетическим спектром, и обобщение исходной схемы (Глаубера) построения КС для гармонического осциллятора было в данном случае неочевидным. Несмотря на то что КС для свободной частицы в принципе могут быть получены из упомянутых общих результатов Додонова и Манько, многие авторы либо игнорируют эти результаты, либо не знают о их существовании, пытаясь получить КС для свободной частицы собственными методами. В описании подобных попыток сошлёмся на работы [9–12], посвящённые данной проблеме. На наш взгляд, ни одна из указанных работ не решает полностью рассматриваемую проблему. Авторы работы [10] значительно приблизились к решению данной проблемы, выбрав в качестве КС частный случай начальных состояний. Однако даже для этих начальных состояний они не смогли получить явного вида зависящих от времени КС свободной частицы и изучить их свойства. По существу, программа авторов была реализована в работе [9], однако автор не отождествил состояния с какими-либо КС. В своей работе [11] авторы рассматривают предел нулевой частоты в КС для гармонического осциллятора, получив нечто подобное КС для свободной частицы. КС, рассматриваемые авторами, выражены в терминах полиномов Эрмита, а сложный вид КС затрудняет их интерпретацию, изучение и приложения. В другой своей работе [12] авторы рассматривают КС свободной частицы в рамках своего общего подхода к построению КС для системы с непрерывным спектром. Этот подход основан на использовании ненормированных состояний и использует достаточно сложную технику. Авторы не предъявляют КС свободной частицы, хорошо определённых для любого момента времени.

В настоящей работе, по существу следуя методу Додонова и Манько, мы строим различные семейства обобщённых КС свободной массивной нерелятивистской частицы. Нами подробно обсуждаются свойства построенных КС, в частности, соотношения полноты, минимизация соотношений неопределённости и эволюция соответствующей плотности вероятности во времени. Описываются физические условия, при которых КС свободной частицы могут рассматриваться как полуклассические состояния.

2. Построение зависящих от времени когерентных состояний свободной частицы

2.1. Основные уравнения

Рассмотрим для простоты одномерное квантовое движение свободной нерелятивистской частицы массы m на вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Оно описывается уравнением Шрёдингера

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi(x,t) = \hat{H}_x \Psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где гамильтониан $\hat{H}_x$ и оператор импульса $\hat{p}_x$,

$$\hat{H}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}\,,\ \hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\partial_x\,, \tag{2}$$

являются самосопряжёнными в своих естественных областях определения [13].

Полезно ввести безразмерные переменные

$$q = xl^{-1}, \quad \tau = \frac{\hbar}{ml^2}\,t\,. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\hat{S}\psi(q,\tau) = 0\,, \quad \hat{S} = \mathrm{i}\partial_\tau - \hat{H}, \quad \hat{H}_x = \frac{\hbar^2}{ml^2}\,\hat{H}\,,$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2}\,, \quad \hat{p} = -\mathrm{i}\partial_q\,, \quad \psi(q,\tau) = \sqrt{l}\,\Psi\left(lq, \frac{ml^2}{\hbar}\,\tau\right), \tag{4}$$

так что $|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = |\psi(q,\tau)|^2\,\mathrm{d}q$. Назовём оператор $\hat{S}$ оператором уравнения.

В терминах операторов рождения и уничтожения $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$,

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + \mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}\,, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1\,,$$

гамильтониан $\hat{H}$ является квадратичной формой данных операторов

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2\right]. \tag{5}$$

Этот гамильтониан не сводится к первой канонической форме для квадратичной комбинации операторов рождения и уничтожения, являющейся осцилляторной, путём применения какого-либо канонического преобразования; это указывает на то, что спектр оператора $\hat{H}$ непрерывен (см., например, [14]).

2.2. Интегралы движения, линейные по каноническим операторам $\hat{q}$ и $\hat{p}$

Построим интеграл движения $\hat{A}(\tau)$, линейный по $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Данный интеграл имеет общий вид

$$\hat{A}(\tau) = f(\tau)\,\hat{q} + \mathrm{i}g(\tau)\,\hat{p} + \varphi(\tau)\,, \tag{6}$$

где $f(\tau)$, $g(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — некоторые комплексные функции времени τ. Для того чтобы оператор $\hat{A}(\tau)$ был интегралом движения, он должен коммутировать с оператором уравнения (4),

$$\left[\hat{S}, \hat{A}(\tau)\right] = 0\,. \tag{7}$$

Если гамильтониан самосопряжён, то сопряжённый оператор $\hat{A}^\dagger(\tau)$ также является интегралом движения, $[\hat{S}, \hat{A}^\dagger(\tau)] = 0$.

Подставляя в (7) представление (6), получим следующие уравнения для функций $f(\tau)$, $g(\tau)$ и $\varphi(\tau)$:

$$\dot{f}(\tau) = 0, \quad \dot{g}(\tau) - \mathrm{i}f(\tau) = 0\,, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0\,, \tag{8}$$

где производные по τ обозначены точками над символами. Общее решение уравнений (8) имеет вид

$$f(\tau) = c_1\,, \quad g(\tau) = c_2 + \mathrm{i}c_1\tau\,, \quad \varphi(\tau) = \mathrm{const}\,, \tag{9}$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы. Без ограничения общности можно положить $\varphi(\tau) = 0$. Таким образом,

$$\hat{A}(\tau) = c_1\hat{q} + \mathrm{i}g(\tau)\,\hat{p}\,, \quad g(\tau) = c_2 + \mathrm{i}c_1\tau\,. \tag{10}$$

Коммутатор $\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)\right]$ имеет вид

$$\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)\right] = 2\mathrm{Re}\left(g^*(\tau)\, f(\tau)\right) = 2\mathrm{Re}\,(c_1^* c_2) = \delta\,. \quad (11)$$

Из уравнений (9) следует, что δ является вещественным интегралом движения, $\delta = \mathrm{const}$. В дальнейшем мы полагаем $\delta = 1$,

$$\delta = 2\mathrm{Re}\,(c_1^* c_2) = 1\,. \quad (12)$$

Пусть $c_1 = |c_1| \exp{(\mathrm{i}\mu_1)}$ и $c_2 = |c_2| \exp{(\mathrm{i}\mu_2)}$. Тогда из условия (12) следует

$$|c_2||c_1| \cos{(\mu_2 - \mu_1)} = \frac{1}{2}\,. \quad (13)$$

Выбирая $\delta = 1$, полагаем $\hat{A}(\tau)$ и $\hat{A}^\dagger(\tau)$ операторами рождения и уничтожения,

$$\left[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)\right] = 1\,. \quad (14)$$

Из (10) и (12) вытекает

$$\hat{q} = g^*(\tau)\,\hat{A}(\tau) + g(\tau)\,\hat{A}^\dagger(\tau)\,, \quad g(\tau) = c_2 + \mathrm{i}c_1\tau\,,$$

$$\mathrm{i}\hat{p} = c_1^* \hat{A}(\tau) - c_1 \hat{A}^\dagger(\tau)\,. \quad (15)$$

Следует отметить, что операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ не могут иметь зависимости от постоянных c_1, c_2 и времени τ. Действительно, с помощью уравнений (6) и (12) можно убедиться в справедливости соотношений $\partial_\tau \hat{q} = \partial_\tau \hat{p} = \partial_{c_1}\hat{p} = \partial_{c_1}\hat{q} = \partial_{c_2}\hat{p} = \partial_{c_2}\hat{q} = 0$.

2.3. Зависящие от времени обобщённые когерентные состояния

Рассмотрим собственные векторы $|z, \tau\rangle$ оператора уничтожения $\hat{A}(\tau)$, отвечающие собственному значению z

$$\hat{A}(\tau)|z, \tau\rangle = z|z, \tau\rangle\,. \quad (16)$$

В общем случае z является комплексным числом.

Из уравнений (15) и (16) следует

$$q(\tau) \equiv \left\langle z, \tau|\hat{q}|\, z, \tau\right\rangle = q_0 + p\tau\,, \quad q_0 = c_2^* z + c_2 z^*\,,$$

$$p(\tau) \equiv \left\langle z, \tau|\hat{p}|\, z, \tau\right\rangle = \mathrm{i}(c_1 z^* - c_1^* z) = p\,,$$

$$z = c_1 q(\tau) + \mathrm{i}g(\tau)\,p = c_1 q_0 + \mathrm{i}c_2 p\,. \quad (17)$$

В терминах q-представления уравнение (16) имеет вид

$$\left[c_1 q + g(\tau)\,\partial_q\right] \Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = z\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau)\,,$$

$$\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) \equiv \left\langle q|z, \tau\right\rangle. \quad (18)$$

Общее решение этого уравнения гласит

$$\left\langle q|z, \tau\right\rangle = \Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = \exp\left[-\frac{c_1}{g(\tau)}\frac{q^2}{2} + \frac{zq}{g(\tau)} + \chi(\tau, z)\right], \quad (19)$$

где $\chi(\tau, z)$ является произвольной функцией τ и z.

Можно заметить, что функции $\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau)$ представимы в терминах средних значений $q(\tau)$ и $p(\tau)$,

$$\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = \exp\left\{\mathrm{i}pq - \frac{c_1}{2g(\tau)}\left[q - q(\tau)\right]^2 + \phi(\tau, z)\right\}. \quad (20)$$

где $\phi(\tau, z)$ также является произвольной функцией τ и z.

Функции Φ_z удовлетворяют следующему уравнению:

$$\hat{S}\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = \lambda(\tau, z)\, \Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau)\,, \quad (21)$$

где

$$\lambda(\tau, z) = \mathrm{i}\dot{\phi}(\tau, z) - \frac{1}{2}\left[p^2 + \frac{c_1}{g(\tau)}\right]. \quad (22)$$

Для того чтобы функции (20) удовлетворяли уравнению Шрёдингера (4), необходимо зафиксировать $\phi(\tau, z)$ исходя из условия $\lambda(\tau, z) = 0$. Таким образом, функция $\phi(\tau, z)$ принимает вид

$$\phi(\tau, z) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\, p^2\tau - \frac{1}{2}\ln g(\tau) + \ln N\,, \quad (23)$$

а N является константой нормировки, которую мы полагаем вещественной.

Плотность вероятности, генерируемая функцией (20), имеет вид

$$\rho(q, \tau) = \left|\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau)\right|^2 = \frac{N^2}{\left|g(\tau)\right|}\exp\left\{-\frac{\left[q - q(\tau)\right]^2}{2\left|g(\tau)\right|^2}\right\}. \quad (24)$$

Рассматривая интеграл нормировки, находим константу N,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(q, \tau)\,\mathrm{d}q = 1 \Rightarrow N = (2\pi)^{-1/4}\,. \quad (25)$$

Таким образом, нормированные решения уравнения Шрёдингера, являющиеся собственными функциями оператора уничтожения $\hat{A}(\tau)$, имеют вид

$$\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}g(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\left(pq - \frac{1}{2}\,p^2\tau\right) - \frac{c_1}{g(\tau)}\,\frac{\left[q - q(\tau)\right]^2}{2}\right\}, \quad (26)$$

а соответствующая плотность вероятности представима как

$$\rho_z^{c_{1,2}}(q, \tau) = \left|\Phi_z^{c_{1,2}}(q, \tau)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left|g(\tau)\right|}\exp\left\{-\frac{\left[q - q(\tau)\right]^2}{2\left|g(\tau)\right|^2}\right\}. \quad (27)$$

В дальнейшем мы будем именовать решения (26) как КС, зависящие от времени. Следует отметить, что, по существу, мы располагаем семейством состояний, параметризованных двумя комплексными постоянными c_1 и c_2, удовлетворяющими ограничению (12). Из дальнейшего рассмотрения будет видно, что каждое семейство обобщённых КС представляет собой так называемые сжатые состояния. Дополнительные ограничения на константы c_1 и c_2 преобразуют эти состояния в КС свободной частицы (см. ниже).

Можно заметить, что обобщённые КС могут быть построены по методу Глаубера действием оператора смещения $\mathcal{D}(z, \tau) = \exp\left[z\hat{A}^\dagger(\tau) - z^*\hat{A}(\tau)\right]$ на вакуумный вектор $|0, \tau\rangle$, определённый в виде $\hat{A}(\tau)|0, \tau\rangle = 0$,

$$\langle q|z,\tau\rangle=\mathcal{D}(z,\tau)\,\langle q|0,\tau\rangle=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,\langle q|n,\tau\rangle\,,$$
$$|n,\tau\rangle=\frac{\left[\hat{A}^{\dagger}(\tau)\right]^n}{\sqrt{n!}}\,|0,\ \tau\rangle,$$
$$|0,\tau\rangle=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}g(\tau)}}\exp\left(-\frac{c_1}{g(\tau)}\frac{q^2}{2}\right). \qquad (28)$$

Функции (28) отличаются от набора (26) лишь постоянным фазовым фактором.

Используя свойство полноты для состояний $|n,\tau\rangle$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n,\tau\rangle\langle n,\tau|=1\,,\quad\forall\,\tau\,, \qquad (29)$$

можно найти перекрытие и доказать соотношения полноты для обобщённых КС свободной частицы:

$$\langle z',\tau|z,\tau\rangle=\exp\left(z'^{*}z-\frac{|z'|^2+|z|^2}{2}\right),\quad\forall\,\tau;$$
$$\iint\langle q|z,\tau\rangle\langle z,\tau|q'\rangle\,\mathrm{d}^2z=\pi\delta(q-q')\,,$$
$$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,z\,,\quad\forall\,\tau\,. \qquad (30)$$

3. Стандарные отклонения, соотношения неопределённости и когерентные состояния свободной частицы

Вычисляя стандартные отклонения $\sigma_q(\tau)$, σ_p и величину $\sigma_{qp}(\tau)$ на обобщённых КС, находим

$$\sigma_q(\tau)=\sqrt{\left\langle(\hat{q}-\langle q\rangle)^2\right\rangle}=\sqrt{\langle\hat{q}^2\rangle-\langle q\rangle^2}=\left|g(\tau)\right|,$$
$$\sigma_p(\tau)=\sqrt{\left\langle(\hat{p}-\langle p\rangle)^2\right\rangle}=\sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\left|f(\tau)\right|=|c_1|\,,$$
$$\sigma_{qp}(\tau)=\frac{1}{2}\big\langle(\hat{q}-\langle q\rangle)(\hat{p}-\langle p\rangle)+(\hat{p}-\langle p\rangle)(\hat{q}-\langle q\rangle)\big\rangle=$$
$$=\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-g(\tau)f^{*}(\tau)\right]. \qquad (31)$$

Нетрудно видеть, что обобщённые КС минимизируют соотношение неопределённости Робертсона – Шрёдингера [15, 16],

$$\sigma_q^2(\tau)\,\sigma_p^2-\sigma_{qp}^2(\tau)=\frac{1}{4}\,. \qquad (32)$$

Это означает, что данные состояния являются сжатыми для любого момента времени.

Выполним оценку соотношения неопределённости Гейзенберга на обобщённых КС с учётом ограничения (12):

$$\sigma_q(\tau)\,\sigma_p(\tau)\big|_{2\mathrm{Re}\,(c_1^{*}c_2)=1}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[|c_2||c_1|\sin(\mu_2-\mu_1)+|c_1|^2\tau\right]^2}\geqslant\frac{1}{2}\,. \qquad (33)$$

Затем, пользуясь (31), найдём $\sigma_q(0)=\sigma_q=|c_2|$ и $\sigma_p(0)==\sigma_p=|c_1|$, так что при $\tau=0$ данное соотношение имеет вид

$$\sigma_q\sigma_p\big|_{2\mathrm{Re}\,(c_1^{*}c_2)=1}=|c_2||c_1|=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[|c_2||c_1|\sin(\mu_2-\mu_1)\right]^2}. \qquad (34)$$

Таким образом, мы видим, что $|c_i|\neq 0$, $i=1,2$, и левая часть соотношения (34) минимальна при $\mu_1=\mu_2=\mu$, что обеспечивает минимизацию соотношения неопределённости Гейзенберга на КС в любой момент времени,

$$\sigma_q\sigma_p=\frac{1}{2}\,. \qquad (35)$$

В дальнейшем мы рассмотрим обобщённые КС свободной частицы с ограничением $\mu_1=\mu_2$. А именно, мы будем именовать такие состояния просто как КС свободной частицы.

Теперь ограничение (12), $2\mathrm{Re}\,(c_1^{*}c_2)=1$ принимает вид

$$|c_2||c_1|=\frac{1}{2}\Longrightarrow c_2^{*}=\frac{c_1^{-1}}{2}\,. \qquad (36)$$

Можно заметить, что постоянная μ не входит в КС (26). Таким образом, в дальнейшем полагаем $\mu=0$. Тогда

$$c_2=|c_2|=\sigma_q\,,\quad c_1=|c_1|=\sigma_p=\frac{1}{2\sigma_q}\,,$$
$$g(\tau)=\left(\sigma_q+\frac{\mathrm{i}\tau}{2\sigma_q}\right),\ \sigma_q(\tau)=\left|g(\tau)\right|=\sqrt{\sigma_q^2+\frac{\tau^2}{4\sigma_q^2}}. \qquad (37)$$

С учётом (37) получим, что для любого τ соотношение неопределённости Гейзенберга на КС гласит

$$\sigma_q(\tau)\,\sigma_p=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\tau^2}{4\sigma_q^4}}\geqslant\frac{1}{2} \qquad (38)$$

и КС свободной частицы имеет вид

$$\Phi_z^{\sigma_q}(q,\tau)=$$
$$=\frac{\exp\left\{\mathrm{i}[pq-(p^2/2)\,\tau]-[q-q(\tau)]^2/[4(\sigma_q^2+\mathrm{i}\tau/2)]\right\}}{\sqrt{[\sigma_q+\mathrm{i}\tau/(2\sigma_q)]\sqrt{2\pi}}}\,. \qquad (39)$$

По существу, мы располагаем семейством КС, параметризованным одним вещественным параметром σ_q. Каждый набор КС в семействе имеет свои конкретные исходные стандартные отклонения $\sigma_q>0$. КС из семейства с данным σ_q помечаются квантовыми числами z,

$$z=\frac{q_0}{2\sigma_q}+\mathrm{i}\sigma_q p\,, \qquad (40)$$

которые находятся в однозначном соответствии с начальными данными q_0 и p_0 соответствующей классической траектории

$$q_0=2\sigma_q\,\mathrm{Re}\,z\,,\quad p=\frac{\mathrm{Im}\,z}{\sigma_q}\,. \qquad (41)$$

Плотности вероятности, соответствующие КС, имеют вид

$$\rho_z^{\sigma_q}(q,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\left[\sigma_q^2+\tau^2/(4\sigma_q^2)\right]2\pi}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[q-q(\tau)\right]^2}{\sigma_q^2+\tau^2/(4\sigma_q^2)}\right\}. \qquad (42)$$

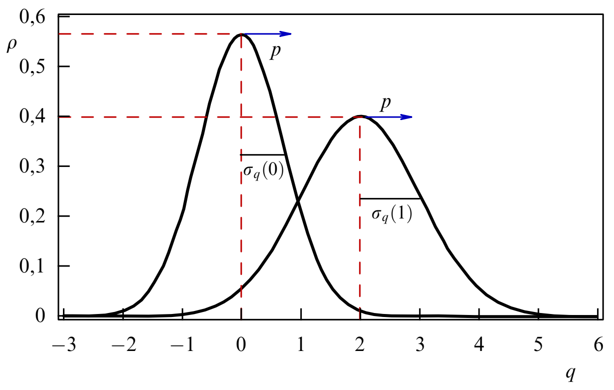

Рисунок. Эволюция плотности вероятности.

Можно заметить, что в любой момент времени τ плотности вероятности (42) задаются гауссовыми распределениями со стандартными отклонениями $\sigma_q(\tau)$. Средние значения $\langle q\rangle = q(\tau) = q_0 + p\tau$ движутся по классической траектории со скоростью частицы p. С той же скоростью движутся максимумы плотностей вероятности (42).

На рисунке указаны графики функции (42) с $\sigma = 2^{-1/2}$, $p = 2$, $q_0 = 0$ для двух моментов времени, $\tau = 0$ и $\tau = 1$.

Полезно сравнить КС (39) с плоской волной, описывающей движение свободной частицы,

$$\Phi_p(q,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\mathrm{i}\left(pq - \frac{p^2}{2}\,\tau\right)\right]. \qquad (43)$$

Оба набора функций являются решениями уравнения Шрёдингера для свободной частицы. КС действительно принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$, тогда как плоские волны не принадлежат. Плоская волна распространяется с фазовой скоростью $p/2$. Набор КС генерирует плотность вероятности, которая распространяется в точности со скоростью частицы p. Можно отметить, что КС (39) представляет собой волновые пакеты, позволяющие установить естественную связь между классическим и квантовым описаниями свободных частиц. В зависимости от параметров КС, некоторые из них можно рассматривать в качестве полуклассических состояний свободных частиц, а некоторые нельзя, ввиду того что они описывают чисто квантовые состояния (см. ниже).

4. Полуклассические когерентные состояния свободной частицы

Для решения вопроса о том, какие КС могут рассматриваться как представляющие полуклассическое движение частицы, следует вернуться к исходным безразмерным переменным x и t (3), а также к исходной волновой функции $\Psi(x,t)$, записанной через эти переменные (4). Принимая во внимание

$$x(t) = lq(\tau) = x_0 + \frac{p_x}{m}\,t\,, \quad p = \frac{l}{\hbar}\,p_x\,,$$

$$\sigma_x(0) = l\sigma_q(0) = l\sigma = \sigma_x\,, \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_x^2}\,t^2\,, \qquad (44)$$

получим

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\left[\sigma_x + \mathrm{i}\hbar t/(2m\sigma_x)\right]\sqrt{2\pi}}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m}\,t\right) - \frac{\left[x - x(t)\right]^2}{4\left[\sigma_x^2 + \mathrm{i}\hbar t/(2m)\right]}\right\},$$

$$\rho(x,t) = \left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\left[\sigma_x^2 + \hbar^2 t^2/(4m^2\sigma_x^2)\right]2\pi}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{\left[x - x(t)\right]^2}{\sigma_x^2 + \hbar^2 t^2/(4m^2\sigma_x^2)}\right\}. \qquad (45)$$

Полуклассическое движение подразумевает, что в некотором смысле форма распределения (45) меняется со временем t медленно. Эта форма меняется в силу изменения со временем величины $\hbar^2 t^2/(4m^2\sigma_x^2)$, отвечающей за изменение $\sigma_x^2(t)$ (см. (44)). Мы полагаем, что в случае полуклассического движения эта величина значительно меньше квадрата расстояния, пройденного частицей за тот же промежуток времени. Таким образом, мы имеем следующее неравенство:

$$\frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_x^2}\,t^2 \ll \left(\frac{p_x}{m}\,t\right)^2 \Longrightarrow p_x \gg \frac{\hbar}{2\sigma_x} \sim v \gg \frac{\hbar}{2m\sigma_x}\,, \qquad (46)$$

которое представимо в виде

$$\lambda \ll 4\pi\sigma_x\,, \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p_x}\,, \qquad (47)$$

где λ является комптоновской длиной волны частицы. Тем самым, КС свободной частицы можно рассматривать как полуклассические состояния, если комптоновская длина волны частицы значительно меньше, чем стандартное отклонение координаты σ_x в начальный момент времени. Известно, что нерелятивистские электроны в циклотроне движутся со скоростями $v \simeq 10^3$ м с$^{-1}$. Таким образом, согласно (46), КС таких электронов с $2\sigma_x \simeq 10^{-7}$ могут рассматриваться как полуклассические состояния.

Следует отметить, что аналогичные критерии полуклассичности использовались в теории рассеяния на потенциале [17], а также для классификации КС в магнитном поле соленоида [18].

5. Некоторые заключительные замечания

В настоящей работе мы изучили различные типы обобщённых КС свободной массивной нерелятивистской частицы и установили такие их свойства, как соотношения полноты, минимизация соотношений неопределённости и поведение соответствующих им плотностей вероятности во времени. Из всех этих типов обобщённых КС естественным образом выделяются семейства состояний, которые мы предлагаем отождествлять с КС свободной массивной нерелятивистской частицы. Эти семейства КС параметризованы одним вещественным параметром — стандартным отклонением σ_q координаты в начальный момент времени. КС из одного семейства с данным σ_q образуют полную систему функций, они помечаются комплексным квантовым числом z, которое находится в однозначном соответствии с начальными данными соответствующей траектории среднего значения координаты. КС минимизируют соотношение неопределённости Робертсона – Шрёдингера во все моменты времени и соотношение неопределённости Гейзенберга в начальный момент времени. Стандартное отклонение $\sigma_q(\tau)$ координаты в произвольный момент времени τ растёт со временем тем быстрее, чем меньше оно было в начальный момент времени. В любой момент времени τ плотность вероятности, соответствующая КС свободной частицы, задаётся гауссовыми распределениями со стандартными отклонениями $\sigma_q(\tau)$. Среднее значение координаты движется по классической траектории со средней скоростью частицы. С той же скоростью движется максимум плотности вероятности. Построенные КС представляют собой волновые пакеты, являющиеся решениями уравнения Шрёдингера для свободной частицы. Они принадлежат Гильбертовому пространству $L^2(\mathbb{R})$, тогда как плоские волны не принадлежат этому пространству. КС позволяют установить естественную связь между классическим и квантовым описаниями свободных частиц. В зависимости от параметров КС, некоторые из них можно рассматривать в качестве полуклассических состояний свободных частиц, а некоторые нельзя, ввиду того что они представляют чисто квантовые состояния. Мы приводим аргументы в пользу того, что КС свободной частицы можно рассматривать как полуклассические состояния, если комптоновская длина волны частицы значительно меньше, чем стандартное отклонение координаты в начальный момент времени. По-видимому, введённые КС могут быть отождествлены с асимптотическими свободными состояниями в нерелятивистской квантовой теории рассеяния.

Мы полагаем, что в курсе квантовой механики, при описании квантового движения свободной частицы, весьма полезно приводить обсуждаемые КС свободной частицы как пример точно описанных волновых пакетов, которые в определённых условиях дают полуклассическое описание такой частицы и с помощью которых возможна иллюстрация многих общих положений квантовой механики, например, минимизация соотношений неопределённости и т.д. Знание слушателями КС свободной частицы естественно подготовит их к более лёгкому восприятию КС осциллятора и других квантовых систем.

Благодарности. Д. Гитман выражает благодарность фондам CNPq и FAPESP за постоянную поддержку. А.С. Перейра благодарен фонду FAPESP за поддержку. Авторы выражают благодарность И. Тютину и В. Манько за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Klauder J R, Sudarshan E C G *Fundamentals of Quantum Optics* (New York: W.A. Benjamin, 1968)
2. Klauder J R, Skagerstam B-S *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics* (Singapore: World Scientific, 1985)
3. Perelomov A *Generalized Coherent States and Their Applications* (Berlin: Springer-Verlag, 1986); Переломов А М *Обобщенные когерентные состояния и их применения* (М.: Наука, 1987)
4. Gazeau J-P *Coherent States in Quantum Physics* (Weinheim: Wiley-VCH, 2009)
5. Nielsen M A, Chuang I L *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
6. Малкин И А, Манько В И *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем* (М.: Наука, 1979)
7. Додонов В В, Манько В И "Инварианты и коррелированные состояния нестационарных квантовых систем", в сб. *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем* (Труды ФИАН, Т. 183, Под ред. М А Маркова) (М.: ФИАН, 1987) с. 71; Dodonov V V, Man'ko V I "Invariants and correlated states of nonstationary quantum systems", in *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems* (Proc. of the Lebedev Physics Institute, Vol. 183, Ed. M A Markov) (Commack, NY: Nova Science, 1989) p. 103
8. Dodonov V V, Man'ko V I (Eds) *Theory of Nonclassical States of Light* (London: Taylor & Francis, 2003)
9. Littlejohn R G *Phys. Rep.* **138** 193 (1986)
10. de la Torre A C, Goyeneche D M, arXiv:1004.2620
11. Guerrero J et al. *J. Phys. A Math. Theor.* **44** 445307 (2011)
12. Geloun J B, Hnybida J, Klauder J R *J. Phys. A Math. Theor.* **45** 085301 (2012)
13. Gitman D M, Tyutin I V, Voronov B L *Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials* (Progress in Mathematical Physics, Vol. 62) (New York: Birkhäuser, 2012)
14. Bagrov V G, Gitman D M *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations* (Mathematics and Its Applications (Soviet Series), 39) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
15. Schrödinger E *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin Math. Phys.* **19** 296 (1930); Translated into English: *Bulg. J. Phys.* **26** 193 (1999); quant-ph/9903100
16. Robertson H P *Phys. Rev.* **35** 667 (1930)
17. De Alfaro V, Regge T *Potential Scattering* (Amsterdam: North-Holland Publ., 1965)
18. Bagrov V G et al. *J. Phys. A Math. Theor.* **44** 055301 (2011)

Coherent and semiclassical states of a free particle

V.G. Bagrov. *Department of Physics, Tomsk State University, prosp. Lenina 36, 634050 Tomsk, Russian Federation Tel./fax +7 (3822) 52-96-51. E-mail: bagrov@phys.tsu.ru*
D.M. Gitman. *P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation; Department of Physics, Tomsk State University, prosp. Lenina 36, 634050 Tomsk, Russian Federation; Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 13560-970 São Paulo, Brazil. Tel./fax +55 (11) 38-14-05-03. E-mail: gitman@dfn.if.usp.br*
A.S. Pereira. *Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 13560-970 São Paulo, Brazil. E-mail: apereira@if.usp.br*

Coherent states (CS) were first introduced and studied in detail for bound motion, discrete spectrum system like the harmonic oscillator and similar systems with a quadratic Hamiltonian. However, the problem of constructing CS has not yet received detailed investigation for the simplest and physically important case of a free particle for which, besides being physically important, the CS problem is of didactic value in teaching quantum mechanics where CSs can be considered as examples of wave packets representing semiclassical motion. In this paper we follow essentially the Malkin–Dodonov–Man'ko method to construct the CS of a free nonrelativistic particle. We give a detailed discussion of the properties of the CSs obtained, in particular, the completeness relations, the minimization of uncertainty relations and the evolution of the corresponding probability density. We describe the physical conditions under which free particle CSs can be considered as semiclassical states.

PACS number: **03.65.–w**
Bibliography — 18 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (9) 961 – 966 (2014)
DOI: 10.3367/UFNr.0184.201409c.0961
Received 28 January 2014, revised 10 April 2014
Physics – Uspekhi **57** (9) (2014)