

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

О возможном механизме возникновения турбулентности в аккреционных дисках немагнитных двойных звёзд

Е.П. Курбатов, Д.В. Бисикало, П.В. Кайгородов

Одна из основных проблем современной астрофизики связана с необъяснённым наличием турбулентности в газодинамических (без магнитного поля) аккреционных дисках. Рассматриваемые аккреционные диски являются устойчивыми, поэтому с теоретической точки зрения турбулентности в них быть не должно, что, однако, противоречит наблюдениям. Поиск возможных неустойчивостей, развитие которых приводит к турбулизации вещества газодинамического диска, является одной из наиболее интригующих задач современной астрофизики. В 2004 г. авторами было показано, что в дисках двойных звёзд формируется так называемая прецессионная волна плотности, наличие которой приводит к возникновению дополнительных градиентов плотности и скорости в диске. Проведённый линейный анализ гидродинамической неустойчивости аккреционного диска в двойной звёздной системе показал, что наличие в диске прецессионной волны, возбуждаемой приливным воздействием второго компонента системы, вызывает неустойчивость радиальных мод с характерными временами роста порядка десятых и сотых долей орбитального периода двойной системы. Непосредственной причиной возникновения неустойчивости является наличие градиента радиальной скорости в прецессионной волне, причём неустойчивость развивается из возмущений, для которых изменение скорости на масштабе длины волны приблизительно равно или превышает скорость звука. Неустойчивые возмущения возникают во внутренней части диска и, распространяясь к его внешнему краю, приводят к турбулизации с характерными параметрами, соответствующими наблюдениям (параметр Шакуры – Сюняева $\alpha \lesssim 0,01$).

PACS numbers: 47.20. – k, 47.27. – i, 95.30.Lz

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408c.0851

Содержание

1. Введение (851).
 2. Прецессионная волна плотности (852).
 3. Линейный анализ возмущений в диске с прецессионной волной (854).
3.1. Метод. 3.2. Расчёт.
 4. Физический анализ результатов (858).
 5. Заключение (860).
- Приложение А (861).
Приложение Б (861).
Список литературы (862).

1. Введение

Известно, что высокий темп аккреции в аккреционных дисках двойных звёзд можно объяснить лишь турбулентной вязкостью [1–3] (см. также исторический обзор [4]). Сама турбулентность должна быть следствием развития

неустойчивости [1, 3]. Долгое время предпринимались попытки отыскать гидродинамическую неустойчивость в кеплеровском диске (см., например, ссылки в работе [5]). Однако, как можно показать, радиальные возмущения устойчивы согласно критерию Рэлея [6]. Кроме того, из результатов численного моделирования [6] следует, что и азимутальные коротковолновые моды возмущений не обнаруживают неустойчивостей. Исследование длинноволновых мод в численной модели тонкого кеплеровского диска [5] показало, что такие возмущения, развившись до нелинейной стадии, впоследствии затухают и не приводят к турбулизации диска.

Многие авторы рассматривали магниторотационную неустойчивость (МРН) [7, 8] в приложении к аккреционным дискам [9]. Однако принятие неустойчивости этого типа в качестве причины развития турбулентности в дисках сталкивается с различными трудностями: а) нет наблюдательных свидетельств наличия магнитного поля в большинстве дисков тесных двойных систем; б) для турбулизации диска при помощи МРН необходимо наличие начального магнитного поля; в) усиление магнитного поля приводит к стабилизации возмущений, т.е. к подавлению неустойчивости [8]; г) в нелинейной стадии МРН происходит насыщение и, как следствие, значительное снижение темпа переноса углового момента [10]. Кроме того, недавно было показано, что само существование МРН в тонких дисках может быть под вопросом [11].

Е.П. Курбатов, Д.В. Бисикало, П.В. Кайгородов.
Институт астрономии РАН,
Пятницкая ул. 48, 119017 Москва, Российская Федерация
E-mail: kurbatov@inasan.ru, bisikalo@inasan.ru,
pasha@inasan.ru

Статья поступила 23 сентября 2013 г.,
после доработки 18 марта 2014 г.

Продолжались работы по развитию модели гидродинамической турбулизации дисков. Например, в работе [12] в качестве причины турбулизации предлагалась неустойчивость сверхотражения. В работах [13, 14] была выдвинута идея о том, что в диске с отрицательным градиентом энтропии (при наличии радиационного охлаждения) может развиваться бароклинная неустойчивость на неосесимметричных модах. Среди последних публикаций на тему газодинамической турбулентности в астрофизических дисках можно отметить работу [15], в которой применялся статистический подход к моделированию турбулентности. В моделях этого класса поле характерных для турбулентной среды флуктуаций давления представлено в уравнении движения случайной силой. Из-за простоты и достаточной общности такой источник часто задаётся как гауссов случайный процесс, дельта-коррелированный во времени. По нашему мнению, подобный подход может помочь в изучении лишь развитой турбулентности, но не процесса её возникновения, как утверждали авторы работы [15]. Причина состоит в том, что эта случайная сила не согласована с уравнениями газовой динамики, а значит, развитие возмущений, вызванных ею, нельзя считать проявлением газодинамической неустойчивости.

Исследование неустойчивостей проводится, как правило, в рамках определённых априорных предположений о структуре и параметрах аккреционного диска. В частности, обычно предполагаются близкое к кеплеровскому распределение скоростей в диске, его однородность в экваториальной плоскости, а также круговая форма линий тока либо их слабая эллиптичность. На самом деле, подобные идеализированные представления могут быть неверны уже в рамках "чистой" газовой динамики. Так, в работе [16] было показано, что при наличии вязкости в аккреционном диске орбиты частиц неустойчивы по отношению к увеличению эксцентриситета, в результате чего эллиптичность диска возрастает. Для аккреционных дисков двойных систем физические условия также могут обладать многими особенностями, такими как ударные волны, приливное воздействие, резонансы. Эти особенности могут оказывать существенное влияние на течение газа, развитие неустойчивостей, турбулизацию и перенос углового момента. В аккреционных дисках полуразделённых двойных звёзд стационарные ударные волны вызваны приливным воздействием вторичного компонента [17–19] и взаимодействием струи из внутренней точки Лагранжа с околосистемным гало [20–33].

Численное моделирование также показало, что приливное воздействие вторичного компонента приводит к появлению в аккреционных дисках особого вида волн — прецессионных волн плотности [34]. Волны этого типа имеют спиральную форму и охватывают практически весь диск. Качественно такую волну можно представить как огибающую семейства эллиптических орбит, прецессирующих в неосесимметричном гравитационном поле [34]. Именно эллиптичность орбит может быть следствием неустойчивости эксцентриситета, которая может развиваться под действием вязких сил [16] или иметь резонансную природу [35]. В последнем случае в диске происходит возбуждение линейных мод, наибольший инкремент среди которых имеет одноразовая мода с азимутальным волновым числом $m = 1$ [35].

Устойчивость диска, в котором присутствует мода $m = 1$, изучалась ранее. Например, в работе [36] было

рассмотрено взаимодействие линейных возмущений с изначально заданной линейной модой и в приближении больших радиальных волновых чисел. В этой работе было показано, что возмущения, которые распространяются в плоскости диска, могут быть неустойчивыми, а инкремент, по оценкам автора, может превышать кеплеровскую частоту в диске.

Настоящая работа посвящена исследованию развития неустойчивости радиальных (осесимметричных) возмущений, которые формируются на фоне прецессионной волны плотности, при этом волна задаётся как результат численного решения газодинамических уравнений. То, что волна сильно закручена, позволяет нам пренебречь угловой зависимостью в распределениях всех рассматриваемых величин для каждого выбранного радиального направления. В итоге мы ограничиваемся анализом только радиальных мод возмущений. Важным свойством прецессионной волны является то, что она представляет собой гладкое решение, а это обеспечивает быструю сходимость спектральных методов, применяемых для анализа устойчивости. Наличие градиентов на волне существенным образом меняет дисперсионное соотношение для линейных возмущений и приводит к условиям, способствующим развитию неустойчивости.

В разделе 2 дан сценарий возникновения прецессионной волны плотности. В разделе 3 кратко изложен метод линейного анализа возмущений в тонком изотермическом кеплеровском диске и приведено описание расчёта в приложении к численной модели аккреционного диска с прецессионной волной. В разделе 4 выполнен физический анализ результатов. В разделе 5 приведено обсуждение результатов и основные выводы работы.

2. Прецессионная волна плотности

Аккреционные диски полуразделённых двойных звёзд имеют довольно сложную структуру — воздействие приливных сил, а также взаимодействие диска с веществом межкомпонентной оболочки и струй вещества из внутренней точки Лагранжа L_1 искажает форму диска и приводит к формированию различного рода ударных волн. Наибольшее влияние на течение оказывают приливные ударные волны и "горячая линия" — область, где струя из точки L_1 взаимодействует с веществом околосистемного гало. Как показывают результаты трёхмерного газодинамического моделирования, эти волны не проникают глубоко внутрь холодного (с температурой $\sim 10^4$ K) аккреционного диска, оставляя большую его часть слабо возмущённой, что создаёт условия для существования в нём волны третьего типа — прецессионной волны плотности [34]. Форма линий тока в аккреционном диске близка к форме соответствующих эллиптических кеплеровских орбит, содержащих звезду-аккректор в одном из фокусов. Это может быть объяснено тем, что в области, не подверженной сильным газодинамическим возмущениям от стационарных ударных волн, диск практически однороден и силы гравитации доминируют над силами, обусловленными градиентами газового давления в экваториальной плоскости системы. Наличие приливного воздействия приводит к увеличению эксцентриситета линий тока в диске, одновременно заставляя их линии апсид двигаться в направлении, противоположном направлению вращения системы. Приливные силы действуют на линии тока неодинаково

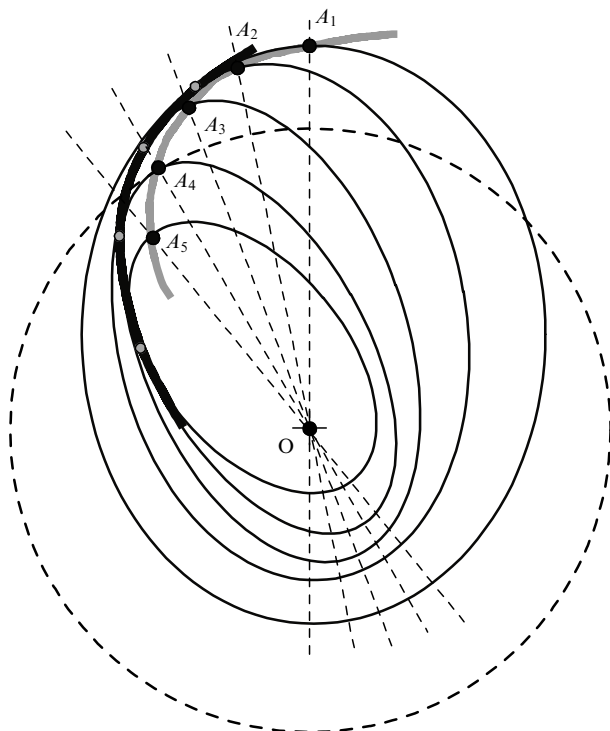


Рис. 1. Схема образования спиральных структур во внутренних газодинамически невозмущенных частях холодного диска. Буквой O обозначено положение звезды-аккректора, A_1, \dots, A_5 — апоастры линий тока.

во — внешние линии тока стремятся двигаться быстрее внутренних, однако, поскольку в газовом диске (по крайней мере, если число Кнудсена¹ много меньше единицы) пересекающихся линий тока быть не может, в диске устанавливается некоторая средняя скорость прецессии, общая для всех линий тока. Приблизительно эту скорость можно оценить по формуле [37, 38]

$$\frac{P_{\text{pr}}}{P_{\text{orb}}} \approx \frac{4}{3} \frac{(1+q)^{1/2}}{q} \left(\frac{r}{A} \right)^{-3/2}, \quad (1)$$

где P_{pr} — искомый период прецессии орбиты, P_{orb} — орбитальный период системы, q — отношение масс компонентов, r — характерный размер орбиты, A — расстояние между компонентами системы.

Сближение линий тока, которые движутся с разными скоростями, приводит к формированию спирального узора, схематически показанного на рис. 1. Скорость движения вещества по линии тока, форма которой определяется прежде всего гравитацией, будет близка к локальной кеплеровской скорости, взятой для соответствующей (эллиптической) орбиты. Соответственно в апоастре линии тока скорость движения вещества будет минимальна. Однако, поскольку величина потока вдоль всей линии должна сохраняться, плотность вещества должна также меняться вдоль линии, достигая максимума в апоастре. Соответственно спираль, образуемая апоастроми линий тока, будет выглядеть как спиральная волна плотности, что и было показано в работе [34].

¹ В качестве числа Кнудсена здесь понимается отношение длины свободного пробега частиц газа к характерному размеру задачи, в качестве которого может выступать толщина диска. Для типичной концентрации аккреционного диска порядка 10^{11} см^{-3} длина свободного пробега равна 10^{-10} а.е. при толщине диска $\lesssim 10^{-2}$ а.е.

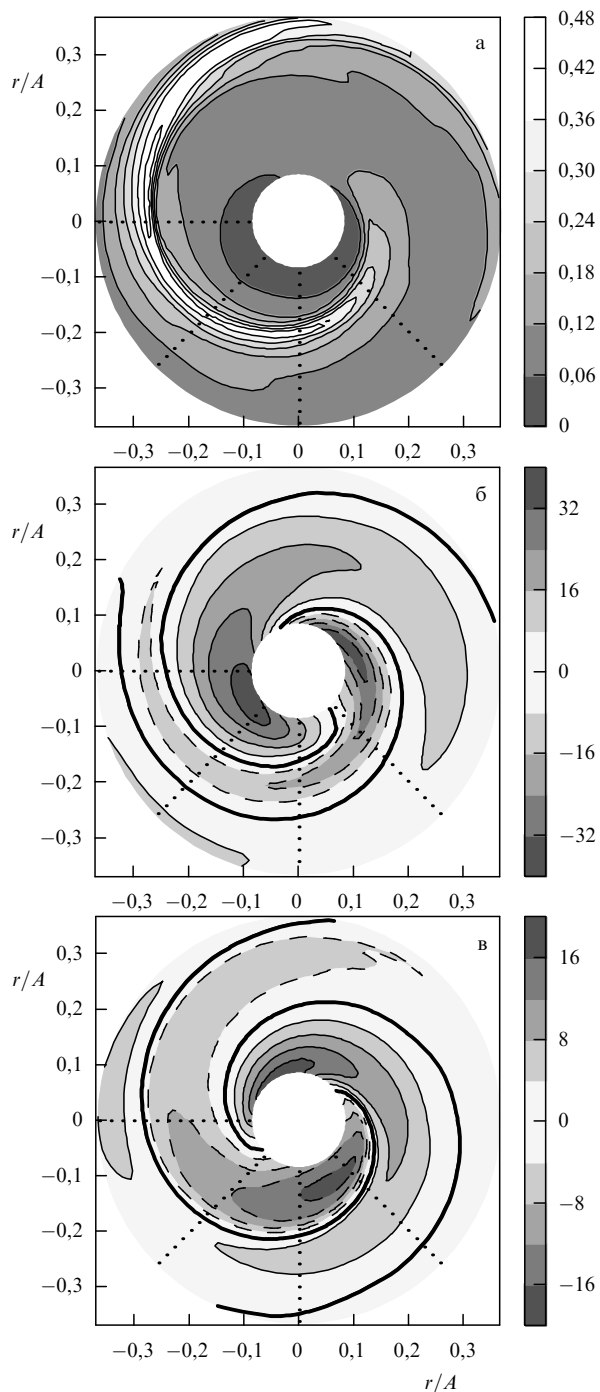


Рис. 2. Графики распределения поверхностной плотности (а), радиальной скорости (б) и отклонения угловой скорости от кеплеровского профиля (в) в аккреционном диске из численной модели [34]. Значения скоростей даны в единицах скорости звука c_T . Жирными линиями показаны уровни нулевых скоростей. Пунктирными линиями обозначены направления разрезов, вдоль которых построены распределения на рис. 3 (см. ниже).

В системе координат наблюдателя прецессионная волна практически покоится — она смещается на $1^\circ - 3^\circ$ в ретроградном направлении за один орбитальный период [34]. Таким образом, распределения плотности и скоростей в ней можно полагать стационарными на временах порядка нескольких десятков характерных периодов оборота диска.

На рисунке 2 показаны распределения поверхностной плотности, радиальной и угловой скоростей в численной

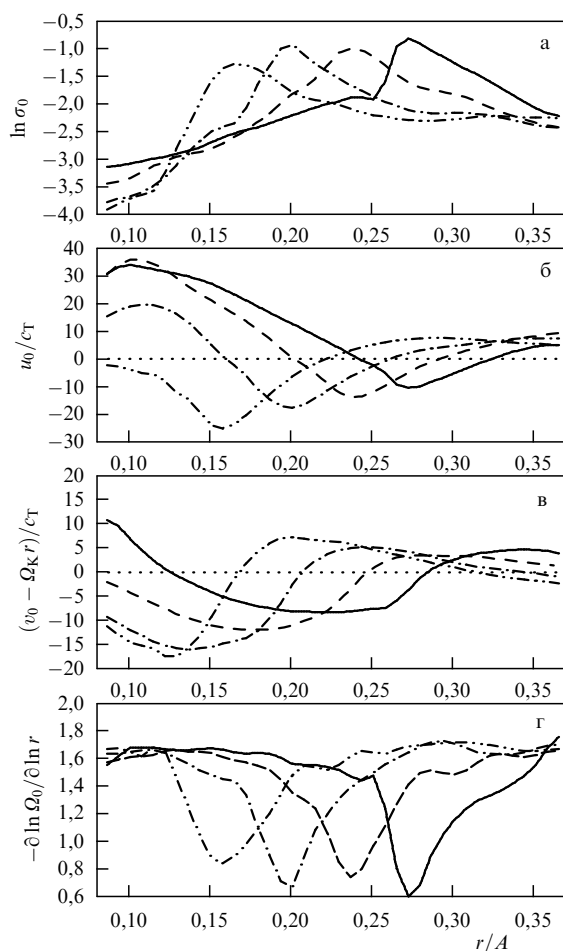


Рис. 3. Распределения поверхностной плотности (а), радиальной скорости (б), угловой скорости (в) и показателя наклона кривой вращения (г) в аккреционном диске из численной модели [34]. Графики соответствуют радиальным разрезам диска в направлениях 180° (сплошные линии), 225° (штриховые линии), 270° (штрихпунктирные линии) и 315° (двойные штрихпунктирные линии).

модели диска в тесной двойной системе [34]. Расчёты были выполнены для системы со следующими параметрами: масса аккректора $M_1 = 1M_\odot$, масса донора $M_2 = 0,05M_\odot$, межкомпонентное расстояние $A = 0,625R_\odot$, период обращения двойной системы $P_{\text{orb}} = 4830$ с. Прецессионная волна отчётливо видна как спиралевидное уплотнение на распределении поверхностной плотности. На распределении радиальной скорости область расположения волны ограничена линиями нулевой радиальной скорости. Линии нулевой тангенциальной скорости совпадают с положениями экстремумов радиальной скорости.

Распределения поверхностной плотности, радиальной и тангенциальной скоростей показаны на рис. 3 вдоль четырёх радиальных направлений в диске: 180° , 225° , 270° и 315° (0° соответствует направлению от вторичного компонента вдоль оси, соединяющей компоненты двойной системы). Пики плотности, наблюдаемые при фазах 0,15–0,25, соответствуют пересечениям профилей с прецессионной волной и хорошо коррелируют с минимумами радиальной скорости. Профили радиальной и тангенциальной компонент скорости существенно различаются для разных направлений. Тем не менее, у этих профилей есть и общие черты, определяе-

мые свойствами эллиптических орбит. Например, для всех профилей тангенциальная скорость является в среднем субкеплеровской (так как диск является аккреционным), однако во внешних частях диска тангенциальная скорость значительно меньше, чем во внутренних, поскольку скорость вещества, движущегося по эллиптической орбите, уменьшается при удалении от звезды. Распределение радиальной скорости существенно зависит от направления — три профиля, представленных на рис. 3а, показывают положительную (т.е. направленную от аккректора) скорость во внутренних частях диска, в то же время радиальная скорость в четвёртом профиле отрицательна в той же области. Такое поведение объясняется тем, что при движении по эллиптической орбите вещество может как удаляться от звезды, так и приближаться к ней на разных участках траектории. Тем не менее, следует отметить, что во внешних частях диска радиальная скорость во всех профилях положительна, поскольку угловой момент диска уменьшается из-за декреции вещества во внешних его частях. Особо стоит отметить, что перепад радиальной скорости по диску довольно велик и в отдельных направлениях может достигать нескольких десятков скоростей звука.

Как следует из представленных на рис. 2 распределений, прецессионная волна сильно закручена. Это позволяет приближённо считать возмущение, вызванное волной, осесимметричным. Такое приближение может быть неоправданным в центральной части диска, где осевая симметрия существенным образом нарушается (лучше всего это заметно на распределениях скоростей). В дальнейшем мы будем проводить анализ возмущений, исключая из расчёта центральную область диска с радиусом, меньшим $0,08A$. Как следует из результатов расчётов, внешние части диска подвержены сильным газодинамическим возмущениям. На ударных волнах, расположенных на краях диска, линии тока испытывают излом, соответственно методы, применяемые в данной работе, не могут использоваться для исследования неустойчивостей в этих областях, поэтому расчётная область была также ограничена радиусом $0,37A$.

3. Линейный анализ возмущений в диске с прецессионной волной

В качестве фоновых распределений для анализа развития возмущений мы взяли распределения плотности, радиальной и тангенциальной скоростей, полученные при численном расчёте [34], основные детали которого описаны в разделе 2. Возмущения, которые распространяются в направлении, ортогональном диску, являются звуковыми, т.е. не испытывают неустойчивости. Поэтому представляется правдоподобным предположение о том, что учёт вертикальных возмущений может привести к появлению добавочных звуковых мод и лишь незначительно изменить частоты и инкременты радиальных возмущений. Эти соображения позволяют значительно упростить расчёт, исключив вертикальную степень свободы. Весь дальнейший анализ проводится в двумерной постановке. Поэтому результаты численного расчёта были сведены к двум измерениям известным образом — путём интегрирования распределений вдоль направления, перпендикулярного диску [39].

Расчёты выполнялись в инерциальной системе отсчёта, где прецессионная волна практически покоится.

Наличие в этой системе отсчёта переменного во времени гравитационного поля вторичного компонента, вообще говоря, может приводить к появлению в диске добавочного спирального узора, который сопутствует вращению [40]. Амплитуда отклонений в распределениях плотности и радиальной и тангенциальной скоростей, вызванных этим эффектом, масштабируется с величиной отношения масс компонентов [40], которое в рассматриваемом нами случае мало. Таким образом, мы полагаем, что распределение газа в инерциальной системе отсчёта является стационарным.

3.1. Метод

Будем использовать приближение изотермического тонкого диска в двумерной постановке задачи. Такое приближение вполне оправдано для аккреционных дисков в двойных системах, так как эффективная температура газа имеет величину порядка 10^4 К, а характерное отношение толщины диска к его радиусу для такой температуры составляет величину $\lesssim 0,01$. Описание двумерного диска в плоскости (r, ϕ) даётся интегрированием полной системы уравнений газовой динамики вдоль вертикальной координаты z . Параметрами такой системы служат поверхностная плотность $\sigma = \int dz \rho$, радиальная и угловая компоненты скорости u и $v = \Omega r$, а также плоское давление $p = \int dz P$, где ρ и P — объёмные плотность и давление. Для идеального газа с показателем адиабаты γ зависимость плоского давления от поверхностной плотности будет степенной с "плоским" показателем адиабаты $\gamma_s = 1 + 2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ [39, 41, 42]. Однако в изотермическом случае $\gamma_s = 1$ [39, 42] и плоское давление будет иметь тот же вид, что и объёмное давление, $p = c_T^2 \sigma$. Корректная редукция системы трёхмерных уравнений к двум измерениям, вообще говоря, приводит к появлению дополнительных членов в уравнениях по сравнению с трёхмерной их формой [39, 42]. Запишем исходную двумерную систему:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla(\sigma \mathbf{V}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \Phi_1 - \nabla \Phi_2 - c_T^2 \nabla \ln(\Omega_K \sigma). \quad (3)$$

Здесь σ — поверхностная плотность; $\mathbf{V} = \mathbf{e}_r u + \mathbf{e}_\phi v$; $\Phi_1 = -GM_1/r$, $\Phi_2 = -GM_2/|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \mathbf{r}|$ — гравитационные потенциалы аккретора и донора; c_T — скорость звука; \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 — радиус-векторы от центра масс к аккретору и донору соответственно; $\Omega_K = (GM_1/r^3)^{1/2}$ — кеплеровская угловая скорость относительно аккретора; G — гравитационная постоянная.

Поскольку принятое отношение масс M_2/M_1 мало, центр масс двойной системы находится вблизи аккретора. Полагаем, что его положение совпадает с положением аккретора: $R_1 \approx 0$, $R_2 \approx A$. Обозначим также $M \equiv M_1$, $q \equiv M_2/M_1$. В цилиндрических координатах получим:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma v)}{\partial \phi} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{GM}{r^2} - \\ - \frac{qGM(A \cos \phi + r)}{(A^2 + r^2 + 2Ar \cos \phi)^{3/2}} - c_T^2 \frac{\partial \ln(\Omega_K \sigma)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{uv}{r} = \\ = -\frac{c_T^2}{r} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \phi} + \frac{qCMA \sin \phi}{(A^2 + r^2 + 2Ar \cos \phi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ϕ — азимутальный угол в диске, $\phi = 0$ соответствует направлению от вторичного компонента вдоль оси, соединяющей компоненты двойной системы.

Наложим малые возмущения и проведём стандартную процедуру линеаризации. В качестве невозмущённого решения возьмём модель аккреционного диска с прецессионной волной (см. раздел 2). Возмущения определим следующим образом: $\sigma \rightarrow \sigma_0(1 + \delta)$, $u \rightarrow u_0 + u$, $v \rightarrow \Omega_0 r + v$, где $|\delta| \ll 1$, $|u| \ll |u_0|$ и $|v| \ll |\Omega_0 r|$; величины σ_0 , u_0 и Ω_0 соответствуют невозмущённому решению. В результате линеаризации из системы уравнений исчезнут члены, отвечающие за гравитационное воздействие со стороны донора. Уравнения для возмущений примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \delta}{\partial r} + \Omega_0 \frac{\partial \delta}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \left(\frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial \phi} v = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \Omega_0 \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial u_0}{\partial r} u + \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \phi} - 2\Omega_0 \right) v + c_T^2 \frac{\partial \delta}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \Omega_0 \frac{\partial v}{\partial \phi} + \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial \Omega_0}{\partial \phi} \right) v + \\ + \frac{\kappa_0^2}{2\Omega_0} u + \frac{c_T^2}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь κ_0^2 — квадрат эпиклической частоты,

$$\kappa_0^2 = 2\Omega_0 \left(2\Omega_0 + r \frac{d\Omega_0}{dr} \right). \quad (10)$$

Запишем возмущения в виде гармоник $f_\alpha(t, r, \phi) \rightarrow \exp(-i\omega t) f_\alpha(r, \phi)$, где $(f_\alpha) = [\delta, u, v]$, тогда систему уравнений (7)–(9) можно представить в матричной форме:

$$\sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta}(r, \phi) f_\beta(r, \phi) = i\omega f_\alpha(r, \phi). \quad (11)$$

Характерный масштаб изменения фоновых величин по радиусу составляет примерно $0,1A$ (см. рис. 3), а вдоль угловой координаты — порядка $2\pi r$. Таким образом, при $r \gg 0,016A$ угловой зависимостью фоновых величин можно пренебречь. При этом задача распадается на независимые одномерные задачи, а в качестве невозмущённых решений для каждой из них будут выступать распределения плотности и скоростей вдоль соответствующего радиального направления в диске. Если полагать, что возмущения также не зависят от угла, то получим систему уравнений для радиальных возмущений (см. приложение А):

$$\sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta}(r) f_\beta(r) = i\omega f_\alpha(r), \quad (12)$$

где матрица оператора $A_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} u_0 \frac{d}{dr} & \frac{d \ln \sigma_0}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} & 0 \\ c_T^2 \frac{d}{dr} & \frac{du_0}{dr} + u_0 \frac{d}{dr} & -2\Omega_0 \\ 0 & \frac{\kappa_0^2}{2\Omega_0} & \frac{u_0}{r} + u_0 \frac{d}{dr} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Величины $i\omega$ являются собственными значениями оператора $A_{\alpha\beta}$, а решения f_α системы — его собственными функциями. Уравнение (12) представляет собой, таким образом, задачу Штурма — Лиувилля.

В силу того, что невозмущённое решение является достаточно гладким, а также для того, чтобы избавиться от дифференцирования по радиусу, будем решать уравнение (12) методом Галёркина в представлении некоторого функционального базиса. Из геометрии задачи следует, что в качестве нового функционального базиса уместно будет выбрать цилиндрические функции Бесселя первого рода нулевого порядка. В данной работе невозмущённое состояние диска задано на дискретной пространственной сетке в результате численного расчёта, поэтому будем использовать дискретное преобразование Ханкеля для бесселевых функций вида [43]

$$\hat{f}_\alpha(k_p) = \sum_{q=1}^N \frac{2J_0(k_p r_q)}{\mu_{N+1}^2 J_1^2(\mu_q)} f_\alpha(r_q), \quad (14)$$

$$f_\alpha(r_q) = \sum_{p=1}^N \frac{2J_0(k_p r_q)}{\mu_{N+1}^2 J_1^2(\mu_p)} \hat{f}_\alpha(k_p), \quad (15)$$

где μ_q — q -й корень функции J_0 , N — размерность пространственной сетки. В этом преобразовании подразумевается, что функция $f(r)$ задана на конечном интервале $0 \leq r \leq R$, причём она обращается в нуль на границах интервала, а её значения должны вычисляться в точках $r_q = R\mu_q/\mu_{N+1}$. Значения образа $\hat{f}(k_p)$ должны вычисляться в точках $k_p = \mu_p/R$.

Уравнение (12) можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \hat{A}_{\alpha\beta}(k_p, k_s) \hat{f}_\beta(k_s) = i\omega \hat{f}_\alpha(k_p), \quad (16)$$

где

$$\hat{A}_{\alpha\beta}(k_p, k_s) = \frac{4}{\mu_{N+1}^4} \sum_{q=1}^N \frac{J_0(k_p r_q)}{J_1^2(\mu_q)} A_{\alpha\beta}(r_q) \frac{J_0(k_s r_q)}{J_1^2(\mu_q)}. \quad (17)$$

Отметим, что дифференциальный оператор вида $g(r) d/dr$ для произвольной функции $g(r)$ должен преобразовываться как

$$g(r) \frac{d}{dr} \rightarrow \frac{4}{\mu_{N+1}^4} \sum_{q=1}^N \frac{J_0(k_p r_q)}{J_1^2(\mu_q)} \frac{k_s}{2} \frac{J_{-1}(k_s r_q) - J_1(k_s r_q)}{J_1^2(\mu_q)} g(r_q). \quad (18)$$

Наконец, для того чтобы свести систему алгебраических уравнений (16) к виду, пригодному для применения известных методов решения задачи на собственные значения и собственные векторы, скомпонуем элементы вектора $\hat{f}_\alpha(k_p)$ линейно следующим образом:

$$(\hat{f}) = [\hat{f}_1(k_1), \hat{f}_2(k_1), \hat{f}_3(k_1), \hat{f}_1(k_2), \hat{f}_2(k_2), \hat{f}_3(k_2), \dots]. \quad (19)$$

Соответствующим образом скомпонуем матрицу \hat{A}_{IJ} и получим окончательное уравнение:

$$\sum_{J=1}^{3N} \hat{A}_{IJ} \hat{f}_J = i\omega \hat{f}_I. \quad (20)$$

Собственные числа матрицы \hat{A}_{IJ} дают спектр угловых частот всевозможных решений, а набор собственных векторов даёт сами эти решения в представлении функций Бесселя. Для данной размерности пространственной сетки N будем иметь $3N$ комплексных собственных частот и по N собственных решений для каждого поля (δ , u и v).

3.2. Расчёт

Метод, описанный в разделе 3.1, может быть использован для расчёта линейных возмущений на фоне распределения, обладающего осевой симметрией. В рамках численной модели аккреционного диска, рассмотренной в разделе 2, это, строго говоря, не выполняется. Однако можно утверждать, что для каждого радиального направления зависимость всех величин от угла мала, а значит, каждое радиальное распределение приближённо можно считать осесимметричным. В нашей задаче этот метод был применён независимо к каждому радиальному разрезу диска. Параметры метода: размер расчётной области $0,08A \leq r \leq R = 0,37A$, размерность сетки $N = 439$. Решение уравнения (20) осуществлялось с использованием библиотеки LAPACK [44].

Карты распределения комплексных частот для всех мод возмущений представлены на диаграммах рис. 4. Наибольшие по модулю значения угловых частот при расчётах достигают $1500\Omega_{\text{orb}}$, а значения инкрементов лежат в интервале от $-70 P_{\text{orb}}$ до $50 P_{\text{orb}}$. Минимальная длина волны возмущения для данной размерности сетки N составляет величину порядка $\lambda_N \equiv 2R/N \approx 3 \times 10^{-3} A$. Этой длине волны можно сопоставить кеплеровскую угловую частоту $(GM/\lambda_N^3)^{1/2} \approx 6 \times 10^3 \Omega_{\text{orb}}$, в то время как соответствующая звуковая частота $2\pi c_T/\lambda_N \approx 40\Omega_{\text{orb}}$.

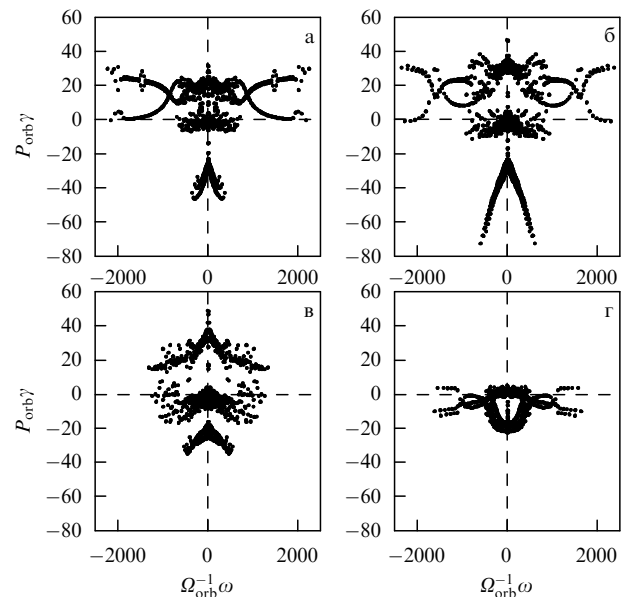


Рис. 4. Карты комплексных частот собственных решений на разрезах диска, соответствующих рис. 3.

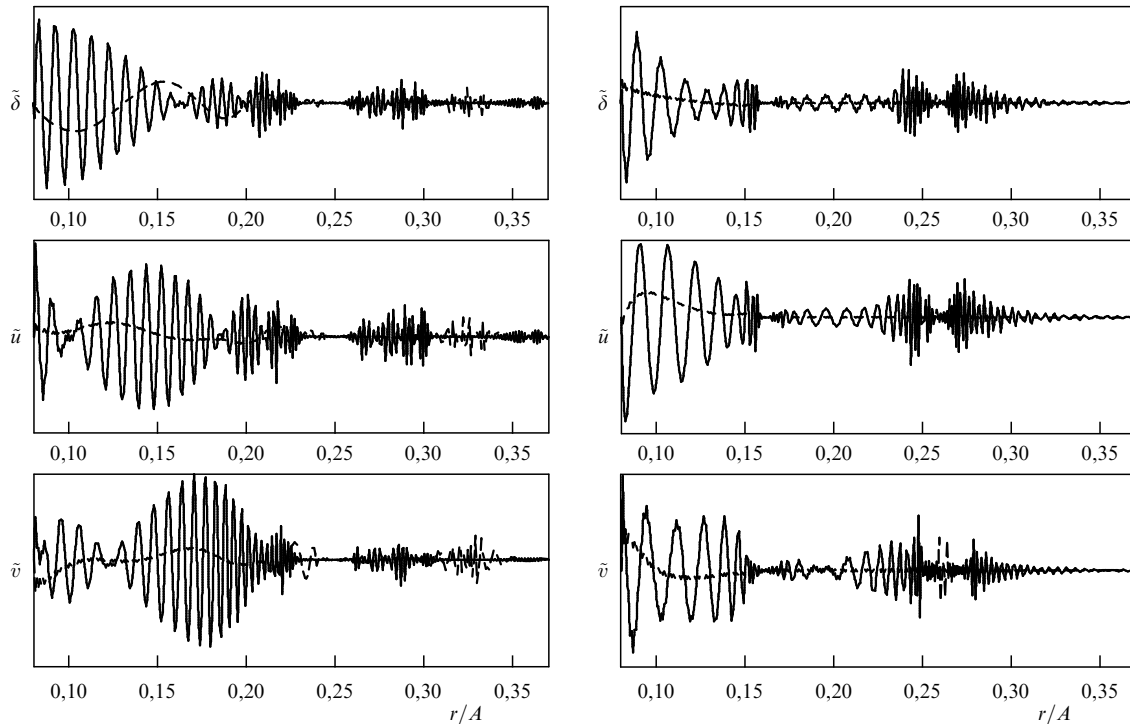


Рис. 5. Вещественные части собственных решений для возмущений плотности, радиальной и угловой скоростей для некоторых мод на разрезах (см. рис. 3), соответствующих направлениям 180° (левые рисунки) и 270° (правые рисунки). Графики на левых рисунках соответствуют $\omega = 379,6\Omega_{\text{orb}}$, $\gamma = 22,3/P_{\text{orb}}$ (сплошные линии) и $\omega = 35,2\Omega_{\text{orb}}$, $\gamma = 22,6/P_{\text{orb}}$ (штриховые линии). Графики на правых рисунках соответствуют $\omega = 158,0\Omega_{\text{orb}}$, $\gamma = 25,7/P_{\text{orb}}$ (сплошные линии) и $\omega = 10,4\Omega_{\text{orb}}$, $\gamma = 48,8/P_{\text{orb}}$ (штриховые линии).

Отметим, что приведённые оценки зависят от масштаба пространственной дискретизации. С этим масштабом могут быть связаны наибольшие и наименьшие значения угловых частот, полученные при расчётах.

В силу того что исходное невозмущённое решение является неоднородным, амплитуда возмущений в разных точках диска также различна. Скорость роста или затухания возмущений определяется как мнимой частью собственной частоты данного решения, так и его локальной амплитудой. На рисунке 5 показаны вещественные части собственных решений для некоторых мод на двух разрезах диска, которые соответствуют направлениям 180° и 270° (мнимые части решений отличаются от вещественных лишь пространственной фазой).

Собственные решения могут обладать и неоднородным спектральным составом — локальная длина волны, если её определить как расстояние между максимумами, в разных частях диска может различаться во много раз (см. рис. 4). При анализе спектрального состава решений в разных областях диска может помочь вейвлет-анализ. Вычислим для каждой моды свёртку²

$$w(r, \lambda) = \int dr' |W(r - r', \lambda) \delta(r')|, \quad (21)$$

где W — вейвлет Морле [46] порядка 5,

$$W(r, \lambda) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{5} \frac{r}{\lambda} - 2\pi \right)^2 \right] \exp \left(i 2\pi \frac{r}{\lambda} \right). \quad (22)$$

² В цилиндрических координатах вейвлет Морле и преобразование такого вида, строго говоря, неприменимы [45], но для приближённых оценок точности этого преобразования оказывается достаточно.

Распределение $w(r, \lambda)$ по длинам волн показывает характерные масштабы изменения λ , которые доминируют в окрестности данного r .

Общепринятой характеристикой интенсивности переноса углового момента в аккреционных дисках служит коэффициент турбулентной вязкости ν_{turb} или связанный с ним коэффициент Шакуры–Сюняева $\alpha = \nu_{\text{turb}} / (c_T h)$, где $h = c_T / \Omega_K$ — полутолщина изотермического кеплеровского диска [2]. Хотя ν_{turb} описывает состояние развитой турбулентности, в работе [47] была получена связь его с характеристиками неустойчивых линейных возмущений:

$$\nu_{\text{turb}} = \frac{\gamma \lambda^2}{4\pi^2}, \quad (23)$$

где λ и γ — соответственно наибольшая длина волны и наибольший инкремент по всем растущим модам для данного типа (данной ветви) возмущений. Аналогичный подход к оценке коэффициента турбулентной вязкости был предложен в работе [12] и основывался на результатах теории плазмы [48, с. 299], где неустойчивость рассматривалась как следствие лишь неоднородности фонового распределения.

На картах распределения собственных частот (см. рис. 4) трудно однозначным образом выделить ветви возмущений. Использование для оценки ν_{turb} значений инкрементов, максимальных по всем модам, представляется бессмысленным по причине того, что моды с экстремальными значениями инкрементов и частот могут отражать эффекты пространственной дискретизации и граничные эффекты. Поэтому значения коэффициента ν_{turb} , определяемые по формуле (23), должны характеризовать не всю совокупность собственных решений, а отдельно каждую моду в каждой точке диска. Этот

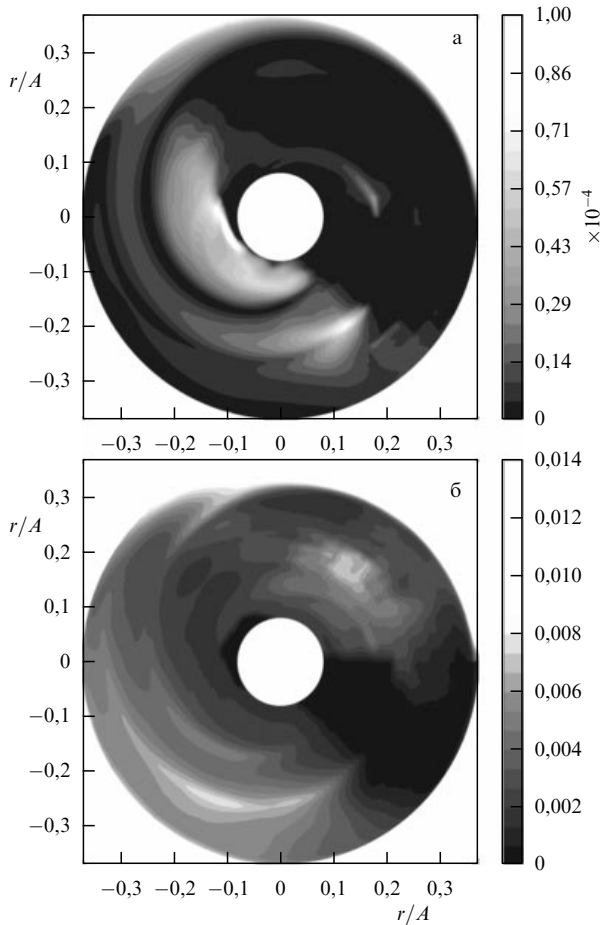


Рис. 6. Распределения амплитуды возмущений (а) и параметра Шафуры – Сюняева α (б).

подход соответствует общему уравнению (7) из работы [47]. В нашей постановке задачи для моды с инкрементом γ и локальной длиной волны λ имеем

$$\alpha = 0,21 P_{\text{orb}} \gamma \frac{(\lambda/A)^2}{h/A}. \quad (24)$$

Чтобы описать более или менее реалистичный аккреционный диск, следует задать спектр мощности семейства мод и провести расчёт коэффициента Шафуры – Сюняева как средней величины по ансамблю мод. Так, в работе [6] в качестве начальных условий к задаче об исследовании эволюции плоских волн во внешней части аккреционного диска был применён степенной спектр мощности (квадратичный по волновому числу), экспоненциально убывающий в коротковолновой части спектра. В рассматриваемой нами задаче приближение плоских волн несправедливо по причине того, что для одной и той же моды длина волны является локальной величиной. Статистический вес в ансамбле мод можно задать из следующих соображений. Выражение (23) применимо к аккреционным дискам с учётом двух физических условий: а) может возбуждаться только трёхмерная турбулентность; б) характерное время роста возмущения не должно превышать одного оборота диска. Перечисленные условия приводят к двум локальным ограничениям — длины волны и инкремента нарастания:

$$\lambda \leq h, \quad \gamma \geq \frac{\Omega_0}{2\pi}. \quad (25)$$

Окончательные выражения для параметра Шафуры – Сюняева запишем в виде

$$\alpha_k(r) = \frac{\int' d\lambda w_k(r, \lambda) \alpha_k(r, \lambda)}{\int' d\lambda w_k(r, \lambda)} \quad (26)$$

для моды с номером k в точке r и

$$\alpha(r) = \frac{\sum_k' w_k(r) \alpha_k(r)}{\sum_k' w_k(r)} \quad (27)$$

для всех мод в точке r . Также запишем локальное значение амплитуды возмущений по всем модам:

$$w(r) = \sum_k' \int' d\lambda w_k(r, \lambda). \quad (28)$$

Штрихи над интегралом и суммой означают, что суммирование проводится по тем модам и длинам волн, для которых выполняются условия (25). Результаты расчёта этих величин приведены на рис. 6.

4. Физический анализ результатов

Сравнение невозмущённых распределений (см. рис. 2 и 3) с профилями возмущений (см. рис. 4) обнаруживает несколько особенностей. Во-первых, вблизи нулей функции u_0 уменьшается локальная длина волны возмущений. Во-вторых, в непосредственной окрестности этих точек стремится к нулю и локальная амплитуда возмущений. Первый эффект легко объяснить из следующих соображений. Максимально упростим задачу и рассмотрим адвекционную часть линеаризованного уравнения (7):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \delta}{\partial r} = 0. \quad (29)$$

Прямой подстановкой легко показать, что в окрестности корня r_* функции u_0 решения будут иметь вид

$$\delta = \exp \left(i\omega \int \frac{dr}{u_0} - i\omega t \right). \quad (30)$$

Задавая закон изменения скорости как $u_0 \propto r - r_*$, получим, что локальная длина волны возмущений (определяемая как λ в выражении $\omega \int_r^{r+\lambda} dr/u_0 = 2\pi$) в окрестности точки r_* ведёт себя как $O(r - r_*)$.

В непосредственной окрестности нуля функции u_0 в уравнении (7) становится важен дивергентный член. Запишем уравнения (7) и (8), пренебрегая геометрическими членами и тангенциальной скоростью:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial r} u + c_T^2 \frac{\partial \delta}{\partial r} = 0. \quad (32)$$

Для закона изменения фоновой скорости $u_0 \propto r - r_*$ в пределе $u_0 \ll c_T$ легко показать (дифференцируя уравнение Эйлера по радиусу и исключая возмущения скорости), что решения предстают в виде $\delta \propto \exp(-i\omega t)(r - r_*)$ и $u \propto \exp(-i\omega t)(r - r_*)^2$. Таким образом, видно, что в непосредственной окрестности точки r_* амплитуда возмущений уменьшается, а пространственные осцилляции "замораживаются".

На рисунке 6 видно, что распределение амплитуды возмущений имеет максимум во внутренней части диска, ограниченной прецессионной волной, в то время как турбулентность (будем понимать под этим большие значения α) наиболее сильна во внешней части диска. Наиболее отчётливо это заметно во второй и третьей четвертях диска, где положение максимума амплитуды совпадает с положением максимума радиальной скорости (см. рис. 2). С уменьшением скорости уменьшается и амплитуда возмущений. В области, ограниченной нулевыми значениями радиальной скорости, также наблюдается некоторый рост амплитуды, причём ближе к внешнему краю прецессионной волны. В четвёртой четверти, где радиальная скорость во внутренней части диска отрицательна (см. также рис. 3), возмущения и турбулентность практически отсутствуют, но при этом имеется пик амплитуды на внешнем крае волны.

Такое поведение амплитуды можно объяснить следующим образом. Воспользуемся уравнениями (7)–(9) в приближении расчётного бокса, размеры которого много меньше расстояния от бокса до центра, как в работе [6]. Представим возмущения в виде $\exp(-i\omega t + ikr)$ и положим, что длина волны возмущения достаточно мала для того, чтобы считать невозмущённые величины постоянными, а также чтобы пренебречь геометрическими членами. Получим уравнения в виде

$$(-i\omega + iku_0)\delta + \left(\frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial r} + ik\right)u = 0, \quad (33)$$

$$ic_T^2 k \delta + \left(-i\omega + iku_0 + \frac{\partial u_0}{\partial r}\right)u - 2\Omega_0 v = 0, \quad (34)$$

$$(2 - q)\Omega_0 u + (-i\omega + iku_0)v = 0. \quad (35)$$

Эпициклический член в законе сохранения углового момента представлен как $\kappa_0^2/(2\Omega_0) \approx (2 - q)\Omega_0$, где $q \equiv -\partial \ln \Omega_0 / \partial \ln r$ [6]. Дисперсионное соотношение для этой системы будет иметь вид

$$\omega_{\pm} = u_0 k - \frac{i}{2} \frac{\partial u_0}{\partial r} \pm \left[c_T^2 k^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 + 2(2 - q)\Omega_0^2 - ic_T^2 \frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial r} k \right]^{1/2}. \quad (36)$$

Второе слагаемое в правой части (36) представляет собой дивергентный член, который стабилизирует или дестабилизирует возмущения в зависимости от того, является течение соответственно расходящимся ($\partial u_0 / \partial r > 0$), как во внешней части диска, или сходящимся ($\partial u_0 / \partial r < 0$), как во внутренней его части. Второе слагаемое в подкоренном выражении способствует дестабилизации течения — при достаточно сильном градиенте радиальной скорости фазы возмущения на интервале одной длины волны начинают обгонять друг друга. Третье слагаемое в подкоренном выражении в случае нулевых градиентов соответствовало бы критерию устойчивости Рэлея [6] — течение, в котором профиль кривой вращения где-либо имеет наклон $q > 2$, является неустойчивым. Наконец, последнее слагаемое даёт вклад в инкремент нарастания для любого волнового числа.

Оценим роль каждого члена в дисперсионном уравнении (36) из условий (25) и рис. 3. Наименьшее локаль-

ное волновое число на данном радиусе должно определяться полутолщиной диска: $|Ak_{\min}|^2 \equiv (2\pi A\Omega_K/c_T)^2 \approx \approx 10^5 (A/r)^3$, при этом везде, за исключением окрестностей корней радиальной скорости, $|c_T k_{\min}| \ll |u_0 k_{\min}|$. Слагаемое с градиентом скорости оказывается величиной того же порядка: $|\partial(u_0/c_T)/\partial(r/A)|^2 \lesssim 10^5$. Член, отвечающий за критерий Рэлея, можно оценить следующим образом. Наклон кривой вращения можно считать всюду приблизительно кеплеровским (см. рис. 3), $q = 3/2$, тогда $2(2 - q)(A\Omega_0/c_T)^2 \approx 10^3 (A/r)^3$. Как видно, этот член даёт лишь небольшой стабилизирующий эффект. Градиент плотности можно оценить как $|A^2 k_{\min} \partial \ln \sigma_0 / \partial r| \approx 5 \times 10^3 (A/r)^{3/2}$. Таким образом, неустойчивость, по крайней мере в приближении расчётного бокса, может быть вызвана только наличием градиента радиальной скорости. Дисперсионное уравнение (36) в результате должно иметь вид

$$\omega_{\pm} = u_0 k \pm \left[c_T^2 k^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 + 2(2 - q)\Omega_0^2 \right]^{1/2}. \quad (37)$$

Из оценок, сделанных выше, напрашивается вывод о том, что диск находится в пограничном состоянии между устойчивостью и неустойчивостью. Для того чтобы прояснить этот вопрос, воспользуемся общим интегральным методом для анализа устойчивости, описанным в работе [49]. В этом методе уравнения газовой динамики формулируются через вектор смещения элемента газа и последующий анализ проводится в предположении о том, что величина смещения мала. В результате такого анализа необходимое и достаточное условие развития неустойчивости для нашей задачи можно представить в виде (см. приложение Б)

$$\left(\int dE \right)^{-1} \left[\int \frac{dE}{\lambda} \frac{u_0}{c_T} \right]^2 + \int \frac{dE}{\lambda^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_T^2} + \frac{\lambda^2}{h^2} \right) < 0, \quad (38)$$

где $dE = dr r \sigma_0 |\xi|^2$; ξ — радиальное смещение лагранжева элемента газа; λ — характерный пространственный масштаб изменения возмущений. Для выполнения неравенства (38) необходимо, чтобы первое слагаемое, дающее положительный вклад, было достаточно малым, а второе — отрицательным. Второе условие выполняется, если масштаб изменения возмущений меньше толщины диска (это одно из используемых нами условий развития турбулентности) и если радиальная скорость в достаточно большой области диска превышает скорость звука. Первое условие выполняется, если радиальное движение в диске отсутствует или среднее значение радиальной скорости по диску близко к нулю, т.е. скорость меняет знак. Другими словами, скорость должна принимать большие значения и должна иметь большой градиент на достаточно протяжённом участке диска. Оба эти условия выполняются в рассматриваемой задаче (см. приложение Б).

Знания свойств мод вблизи точек нулевой радиальной скорости и дисперсионного соотношения (37) в принципе достаточно для того, чтобы объяснить многие свойства неустойчивых возмущений, представленных на рис. 6. Если во внутренней части диска, ограниченной прецессионной волной, радиальная скорость имеет большой градиент, это обеспечивает появление неустойчивых локальных мод. В четвёртой четверти диска градиент скорости не слишком велик, кроме того, знакоперемен-

ность скорости выражена слабее и образование неустойчивых мод подавлено. Стабилизирующий эффект в этой области оказывает также субкеплеровское вращение газа (см. рис. 3). На границах прецессионной волны, как было показано выше, амплитуда возмущений снижается до нуля. Возрастание амплитуды во внешней части диска, в первой и второй четвертях, может быть вызвано граничными эффектами³.

Физический смысл этой неустойчивости можно объяснить из следующих соображений. В радиальном уравнении Эйлера член с градиентом фоновой скорости действует на элемент газа в качестве внешней силы наряду с силой давления и центробежной силой. В нашей постановке задачи невозмущённое вращательное течение носит стабилизирующий характер и вместе с давлением препятствует развитию неустойчивости (оба соответствующих члена вносят положительный вклад в подкоренное выражение (37)). Однако, если градиент скорости достаточно велик, поток импульса, передаваемый возмущению этим членом, может превышать вклад со стороны стабилизирующих членов. Согласно (37), такое условие наступает, когда изменение фоновой радиальной скорости на масштабе длины волны возмущения приблизительно равно или превышает скорость звука. Можно утверждать в этом случае, что за один период временных колебаний волны задняя фаза возмущения догоняет переднюю. При этом в силу закона сохранения массы возрастает амплитуда максимумов возмущения. В терминах дисперсионного соотношения это означает появление ненулевых значений инкремента нарастания.

Необходимо отметить ещё раз, что в нашем методе анализа развития неустойчивости мы полагаем возмущения осесимметричными, при том что фоновое распределение плотности и скоростей, хотя и слабо зависит от угла, всё же осевой симметрией не обладает, а имеет масштаб угловой зависимости, равный 2π (см. рис. 2). В реальном диске возмущения с подобным или меньшим масштабом угловой зависимости будут сдвигаться в тангенциальном направлении вследствие фонового вращения. Это могло бы ослабить рост возмущений, который вызван градиентом радиальной скорости. Однако в качестве одного из условий развития турбулентности (25) мы требуем, чтобы характерное время роста возмущений не превышало кепплеровского времени. Таким образом, возмущения за время своего роста не успевают покинуть область прецессионной волны в тангенциальном направлении и, следовательно, мы видим развитие неустойчивости.

В разделе 3 мы применили к неустойчивым модам необходимые условия развития трёхмерной турбулентности (25). Во внутренней части диска, где полутолщина диска мала, а частота углового движения газа велика, условия развития турбулентности более жёсткие. Благоприятными они становятся лишь во внешней части диска и вблизи линий нулевой радиальной скорости, где уменьшается локальная длина волны возмущений.

Таким образом, процесс турбулизации диска можно описать следующим образом. Возмущения, которые

успевают развиваться до нелинейной стадии менее чем за один оборот диска и длина волны которых не превышает полутолщины диска, служат источником трёхмерной турбулентности. Турбулентность возникает преимущественно вдоль границ прецессионной волны и за её внешним краем, затем вместе с вращением газа и аккреционным течением распространяется на весь диск.

5. Заключение

Известно, что тонкие кепплеровские диски устойчивы по отношению к гидродинамическим возмущениям [5, 6]. Для появления возможности развития неустойчивости такого типа необходимо, чтобы распределения плотности и скорости в диске существенно отличались от кепплеровского [6]. Один из очевидных примеров такой конфигурации — аккреционный диск в неосесимметричном гравитационном поле двойной звёздной системы. В работе [34] показано, что гравитационное поле второго компонента двойной системы возбуждает в диске прецессионную волну плотности. Волна существенным образом изменяет течение в диске, вызывая появление областей с большими градиентами плотности и скорости. В представленном решении перепад радиальной скорости по радиусу в волне может достигать 40 чисел Маха.

В настоящей работе проведено исследование устойчивости изотермического аккреционного диска с прецессионной волной методом линейного анализа возмущений. В качестве невозмущённого фонового решения использовался результат численного моделирования аккреционного диска в двойной звёздной системе [34]. Задача о развитии линейных возмущений сформулирована в двумерной постановке, в инерциальной системе отсчёта, где прецессионную волну можно считать стационарной. Возмущения течения газа, вызванные нестационарным гравитационным полем вторичного компонента, можно считать малыми. То, что прецессионная волна обладает сильной закруткой, позволило ограничиться анализом только радиальных возмущений независимо для каждого радиального разреза диска.

Было показано, что наличие прецессионной волны обуславливает появление неустойчивых радиальных мод с инкрементами до $\sim 50/P_{\text{orb}}$. Однако для развития турбулентности существенным оказалось наличие в фоновом распределении областей с большими градиентами радиальной скорости. Неустойчивость развивается, если изменение радиальной скорости невозмущённого течения на масштабе длины волны возмущения порядка скорости звука или превышает её. При этом физической причиной развития неустойчивости является то, что задняя фаза возмущения начинает догонять переднюю, а это вызывает, вследствие сохранения массы, рост амплитуды максимумов возмущений. Необходимые условия для турбулизации (длина волны меньше толщины диска, инкремент превышает частоту обращения газа) выполняются только на границах прецессионной волны и во внешней части диска.

Из результатов представленного анализа следует, что наличие прецессионной волны в диске приводит к развитию турбулентности с характерным значением коэффициента Шакуры–Сюнчева α , достигающим значения 0,01.

Авторы выражают благодарность Ю.М. Торгашину и Е.В. Поляченко за ряд ценных замечаний в про-

³ Возмущения обращаются в нуль на границе расчётной области, но в то же время собственные решения задачи (20) имеют фиксированную норму, поэтому в узких областях, где имеются благоприятные условия для развития неустойчивости, амплитуда возмущений может быть относительно высока.

пессе подготовки статьи. Благодарим также рецензента П. Иванова за важные замечания и комментарии, которые позволили улучшить работу.

Работа выполнена при поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН П-21 и П-22, Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-02-00047, 12-07-00528-а, 13-02-00077) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ.

Приложение А

Подход к решению линеаризованных уравнений, который мы использовали в данной работе, основан на том, что мы пренебрегаем угловой зависимостью фоновых величин. Такой подход отличается от обычно применяемого спектрального метода (см., например, [36]) и его формулировка не является вполне строгой. Чтобы показать это, проведём разложение системы (11) по базису некоторых функций угловой координаты. Определим функциональные преобразования условно в виде

$$\tilde{f}(m) = \sum_{\phi} \Phi(\phi, m) f(\phi), \quad (39)$$

$$f(\phi) = \sum_m \Psi(\phi, m) \tilde{f}(m), \quad (40)$$

где $\{\Phi(\phi, m)\}$ и $\{\Psi(\phi, m)\}$ — взаимно дуальные наборы функций, зависящие от угла ϕ и параметра m . В результате разложения система (11) предстанет в виде

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\phi', m'} \Phi(\phi', m) A_{\alpha\beta}(r, \phi') \Psi(\phi', m') \tilde{f}_{\beta}(r, m') = i\omega \sum_{\phi', m'} \Phi(\phi', m) \Psi(\phi', m') \tilde{f}_{\alpha}(r, m'). \quad (41)$$

В "стандартном" подходе разложение выполняется по ортогональному набору функций,

$$\int d\phi' \Phi(\phi', m) \Psi(\phi', m') = 0$$

для $m \neq m'$. В частности, это справедливо для $\Phi(\phi', m) \propto \exp(-im\phi')$ и $\Psi(\phi', m') \propto \exp(im'\phi')$. Подход, который предложен в данной работе, основан на том, что разложение выполняется фактически только по двум гармоникам, которые мы обозначим как $m \equiv M$ и $m' \equiv 0$, при этом подразумевается отказ от свойства ортогональности функций. Буквально выражение (12) получается, если определить

$$\Phi(\phi', M) = \delta_D(\phi' - \phi), \quad (42)$$

$$\Psi(\phi', 0) \equiv 1, \quad (43)$$

где δ_D — дельта-функция Дирака. В этом случае выражения (39) и (40) принимают вид $\tilde{f}(0) = f(\phi)$.

Как видно, $\Psi(\phi', 0)$ представляет собой осесимметричную гармонику, а оператор $\int d\phi' \Phi(\phi', M)$ "вырезает" заданное направление в диске. Одно из допущений этого подхода заключается в следующем. Хотя разложение системы (11) по неортогональному набору функций вполне допустимо, нельзя быть уверенным в том, что функции (42) и (43) могут принадлежать дуальным

наборам в смысле определений (39) и (40) для *всех* ϕ от 0 до 2π . Несмотря на это, мы отдаём предпочтение именно такому методу, поскольку он позволяет проводить более ясную физическую интерпретацию для зависимости роста возмущений от распределения фоновых величин из-за того, что обеспечивает локальность по угловой координате. Другое допущение состоит в том, что предлагаемый подход подразумевает использование осесимметричных мод, в то время как фоновое решение всё-таки зависит от угла. Распределения на рис. 2 показывают, что основной масштаб угловых изменений равен 2π . Следовательно, этот масштаб может давать основной отклик в возмущении, и в стандартном подходе этот масштаб соответствовал бы азимутальному числу $m = 1$. Однако для простоты мы полагаем, что возмущение имеет осевую симметрию. Таким образом, задача может быть сформулирована независимо для каждого радиального направления в диске.

Приложение Б

Ниже приведено краткое описание анализа неустойчивости в диске, выполненного по методу Линден-Белла и Острайкера. Детальное изложение метода и примеры для случая осесимметричного невозмущённого течения даны в работе [49].

Уравнения газовой динамики можно записать через вектор смещения элемента газа ξ относительно его равновесного положения (обозначаемого индексом "0"):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \nabla \right)^2 \xi = -\Delta (c_s^2 \nabla \ln \sigma + \nabla \Phi), \quad (44)$$

где Δ — оператор лагранжевой разности, который определяется как

$$\Delta f = f(t, \mathbf{r} + \xi(t, \mathbf{r})) - f_0(t, \mathbf{r}) = \quad (45)$$

$$= f(t, \mathbf{r}) - f_0(t, \mathbf{r}) + \xi(t, \mathbf{r}) \nabla f_0(t, \mathbf{r}) + \mathcal{O}(|\xi|^2). \quad (46)$$

Уравнение (44) необходимо дополнить уравнением непрерывности:

$$\Delta \sigma + \sigma_0 \nabla \xi = 0. \quad (47)$$

Последующий анализ проводится в предположении о том, что величина смещения мала, а невозмущённое состояние диска является стационарным. Определим вектор смещения как $\xi \rightarrow \exp(i\omega t) \xi$. После линеаризации уравнения динамики предстанут в виде

$$-\omega^2 \mathbf{A} \xi + \omega \mathbf{B} \xi + \mathbf{C} \xi = 0, \quad (48)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} — матрицы, состоящие из невозмущённых величин и их производных. Домножим это уравнение слева на вектор ξ^+ и проинтегрируем по объёму, в итоге получим квадратное уравнение относительно ω :

$$-\omega^2 \int d^2 r \xi^+ \mathbf{A} \xi + \omega \int d^2 r \xi^+ \mathbf{B} \xi + \int d^2 r \xi^+ \mathbf{C} \xi = 0 \quad (49)$$

или

$$-\omega^2 a + \omega b + c = 0. \quad (50)$$

Необходимым и достаточным условием развития неустойчивости линейных возмущений при этом будет усло-

вие, налагаемое на дискриминант уравнения,

$$b^2 + 4ac < 0. \quad (51)$$

В нашей задаче вектор смещений ξ содержит только радиальный компонент, а величины a , b и c имеют вид [49]

$$a = \int dr r \sigma_0 |\xi|^2, \quad (52)$$

$$b = i \int dr r \sigma_0 \left(\xi^* \frac{d\xi}{dr} - \xi \frac{d\xi^*}{dr} \right) u_0, \quad (53)$$

$$c = t + v + p,$$

$$t = \int dr r \sigma_0 \left(-u_0^2 \left| \frac{d\xi}{dr} \right|^2 + 3\Omega_0 |\xi|^2 \right), \quad (54)$$

$$v = \int dr r \sigma_0 |\xi|^2 \frac{d(r\Omega_K^2)}{dr}, \quad (55)$$

$$p = c_T^2 \int dr r \sigma_0 \left| \frac{d\xi}{dr} \right|^2. \quad (56)$$

Используя уравнение равновесного течения

$$c_T^2 \frac{d \ln \sigma_0}{dr} + r\Omega_K^2 - r\Omega_0^2 = 0 \quad (57)$$

и выражение для полутолщины диска $h = c_T/\Omega_K$, условие развития неустойчивости можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\int dr r \sigma_0 |\xi|^2 \right)^{-1} \left[\int dr r \sigma_0 \operatorname{Im} \left(\xi \frac{d\xi^*}{dr} \right) \frac{u_0}{c_T} \right]^2 + \\ & + \int dr r \sigma_0 \left| \frac{d\xi}{dr} \right|^2 \left(1 - \frac{u_0^2}{c_T^2} \right) + \\ & + \int dr r \sigma_0 |\xi|^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r} \frac{d \ln \sigma_0}{dr} \right) < 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Легко показать с помощью (57), что в частном случае — в отсутствие радиального течения и при выполнении условия несжимаемости — выражение (58) превращается в классический критерий неустойчивости Рэлея [6]:

$$\int dr r \sigma_0 |\xi|^2 \kappa_0^2 < 0. \quad (59)$$

Подынтегральное выражение в первом слагаемом неравенства (58) представляет собой произведение радиальной скорости и функции, масштаб изменений которой соответствует масштабу изменений данной моды. Действительно, уравнение (47) для величины смещения ξ можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{dr} + \frac{d \ln(r\sigma_0)}{dr} \xi + \delta = 0, \quad (60)$$

откуда следует, что $\operatorname{Im}(\xi d\xi^*/dr) = -\operatorname{Im}(\xi \delta^*)$. График этой функции для двух мод приведён на рис. 7. Сравнивая с графиками тех же мод на рис. 5, видим, что характерные масштабы изменений этих функций совпадают, хотя функции $\operatorname{Im}(\xi d\xi^*/dr)$, по-видимому, не меняют своего знака. Распределение радиальной скорости, напротив, является знакопеременным. Определим локальный масштаб изменений возмущений λ как $\operatorname{Im}(\xi d\xi^*/dr) \equiv \lambda^{-1} |\xi|^2$. Поскольку масштаб изменений

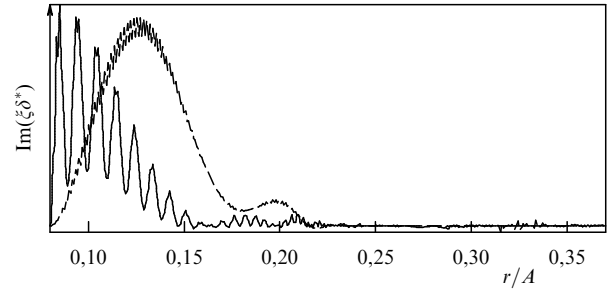


Рис. 7. Распределение величины $\operatorname{Im}(\xi \delta^*)$ для двух мод, изображённых на левой панели рис. 5 (см. приложение Б).

фонового распределения больше масштаба интересующих нас возмущений, также приблизительно будет иметь место оценка $|d\xi/dr|^2 \simeq \lambda^{-2} |\xi|^2$. По этой же причине можем пренебречь градиентом плотности в последнем слагаемом левой части (58). Неравенство тогда представит в виде

$$\left(\int dE \right)^{-1} \left[\int \frac{dE}{\lambda} \frac{u_0}{c_T} \right]^2 + \int \frac{dE}{\lambda^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_T^2} + \frac{\lambda^2}{h^2} \right) < 0, \quad (61)$$

где $dE = dr r \sigma_0 |\xi|^2$. Численная проверка неравенства (61), выполненная нами, также подтверждает наличие неустойчивости. Так, для мод, изображённых на рис. 5, типичное значение выражения $1 + 4ac/b^2$ составляет величину порядка -1 .

Список литературы

1. Шакура Н И *Астрон. журн.* **49** 921 (1972); Shakura N I *Sov. Astron.* **16** 756 (1973)
2. Shakura N I, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **24** 337 (1973)
3. Lynden-Bell D, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **168** 603 (1974)
4. Шакура Н И *УФН* **184** 445 (2014); Shakura N I *Phys. Usp.* **57** 407 (2014)
5. Godon P, Livio M *Astrophys. J.* **521** 319 (1999)
6. Balbus S A, Hawley J F, Stone J M *Astrophys. J.* **467** 76 (1996)
7. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1398 (1959); Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **9** 995 (1959)
8. Chandrasekhar S *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **46** 253 (1960)
9. Balbus S A, Hawley J F *Astrophys. J.* **376** 214 (1991)
10. Regev O, in *EAS Publ. Ser.* **38** 165 (2009)
11. Liverts E et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 224501 (2012)
12. Фридман А М, Бисикало Д В *УФН* **178** 577 (2008); Fridman A M, Bisikalo D V *Phys. Usp.* **51** 551 (2008)
13. Cabot W *Astrophys. J.* **277** 806 (1984)
14. Klahr H H, Bodenheimer P *Astrophys. J.* **582** 869 (2003)
15. Mukhopadhyay B, Chattopadhyay A K *J. Phys. A Math. Theor.* **46** 035501 (2013)
16. Lyubarskij Y E, Postnov K A, Prokhorov M E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **266** 583 (1994)
17. Sawada K, Matsuda T, Hachisu I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **219** 75 (1986)
18. Sawada K, Matsuda T, Hachisu I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **221** 679 (1986)
19. Sawada K et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **224** 307 (1987)
20. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **74** 880 (1997); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **41** 786 (1997)
21. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **74** 889 (1997); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **41** 794 (1997)
22. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **75** 706 (1998); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **42** 621 (1998)
23. Bisikalo D V et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **300** 39 (1998)
24. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **76** 270 (1999); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **43** 229 (1999)

25. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **76** 672 (1999); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **43** 587 (1999)
26. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **76** 905 (1999); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **43** 797 (1999)
27. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **77** 31 (2000); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **44** 26 (2000)
28. Bisikalo D V et al. *Astron. Astrophys.* **353** 1009 (2000)
29. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **78** 707 (2001); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **45** 611 (2001)
30. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **78** 780 (2001); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **45** 676 (2001)
31. Molteni D et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** 1103 (2001)
32. Boyarchuk A A et al. *Mass Transfer in Close Binary Stars* (Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol. 6) (London: Taylor & Francis, 2002)
33. Fridman A M et al. *Phys. Lett. A* **317** 181 (2003)
34. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **81** 494 (2004); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **48** 449 (2004)
35. Lubow S H *Astrophys. J.* **381** 259 (1991)
36. Kato S *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **60** 111 (2008)
37. Kumar S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **223** 225 (1986)
38. Warner B *Cataclysmic Variable Stars* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
39. Горькавый Н Н, Фридман А М *Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды* (М.: Наука, 1994)
40. Kley W, Papaloizou J C B, Ogilvie G I *Astron. Astrophys.* **487** 671 (2008)
41. Чурилов С М, Шухман И Г *Астрон. цирку.* (1157) 1 (1981)
42. Fridman A, Gor'kavyi N *Physics of Planetary Rings: Celestial Mechanics of Continuous Media* (New York: Springer, 1999)
43. Fisk Jonhson H *Comput. Phys. Commun.* **43** 181 (1987)
44. Anderson E et al. *LAPACK Users' Guide* 3rd ed. (Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999)
45. Kurbatov E P, <http://math.stackexchange.com/questions/373453>
46. Астафьева Н М *УФН* **166** 1145 (1996); Astaf'eva N M *Phys. Usp.* **39** 1085 (1996)
47. Canuto V M, Goldman I, Hubickyj O *Astrophys. J. Lett.* **280** L55 (1984)
48. Кадомцев Б Б, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1964) с. 188; Kadomtsev B B, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 4 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966)
49. Lynden-Bell D, Ostriker J P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **136** 293 (1967)

On the possible turbulence mechanism in accretion disks in nonmagnetic binary stars

E.P. Kurbatov, D.V. Bisikalo, P.V. Kaygorodov

Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences,

Pyatnitskaya ul. 48, 119017 Moscow, Russian Federation

E-mail: kurbatov@inasan.ru, bisikalo@inasan.ru, pasha@inasan.ru

One of the major challenges in modern astrophysics is the unexplained turbulence of gas-dynamical (nonmagnetic) accretion disks. Such disks, being as they are stable, should not theoretically be turbulent — but observations show they are. The search for instabilities that can develop into turbulence is one of the most intriguing problems in modern astrophysics. In 2004 the presented authors pointed to the formation in accretion disks of binary stars of the so-called ‘precessional’ density wave, which produces additional density and velocity gradients in the disc. Linear hydrodynamics stability analysis of an accretion disk in a binary shows that the presence in the disk of a precessional wave produced by the tidal influence of the second binary component gives rise to the instability of radial modes whose characteristic growth times are about one tenth or one hundredth of the binary’s orbital period. The immediate reason for the instability is the radial velocity gradient in the precessional wave, the destabilizing perturbations being those in which the radial velocity variation on the wavelength scale is of order or greater than the sound speed. Unstable perturbations occur in the interior of the disk and make the gas turbulent as they propagates outward. The characteristic turbulence parameters are in agreement with observations (the Shakura–Sunyaev parameter $\alpha \lesssim 0.01$).

PACS numbers: **47.20. – k**, **47.27. – i**, 95.30.Lz

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408c.0851

Bibliography — 49 references

Received 23 September 2013, revised 18 March 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (8) 851 – 863 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (8) (2014)