

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Дендритный рост с вынужденной конвекцией: методы анализа и экспериментальные тесты

Д.В. Александров, П.К. Галенко

Проведён анализ неизотермического роста дендритного кристалла при вынужденной конвекции в бинарной системе. Для теоретического анализа используется модель свободной подвижной границы раздела кристалл–жидкость и приближение Оззена для уравнений движения жидкости. Представлен критерий устойчивого роста двумерного и трёхмерного параболического дендрита с учётом анизотропии поверхности натяжения на границе раздела кристалл–жидкость. Критерий обобщает известные ранее результаты для устойчивого роста дендрита с конвекцией в однокомпонентной жидкости и роста дендрита в неподвижной двухкомпонентной системе. Полученный в рамках гидродинамического приближения Оззена критерий обобщён для случая произвольных чисел Пекле и дендритного роста с конвекцией в неизотермической многокомпонентной системе. Модельные предсказания сопоставлены с экспериментальными данными по кинетике роста кристаллов в каплях, обрабатываемых в установках электромагнитной и электростатической левитации. Развиваемые методы теории и моделирования применяются к процессам кристаллизации в наземных условиях и при пониженной гравитации.

PACS numbers: 05.70.Fh, 05.70.Ln, **68.70.+w**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408b.0833

Содержание

1. Введение (833).
2. Конвективное течение в каплях, кристаллизующихся в левитаторах (835).
3. Модель роста кристалла (837).
 - 3.1. Аналитическое решение для параболического дендрита.
 - 3.2. Условие микроскопической разрешимости.
4. Линейный анализ устойчивости (838).
5. Критерий устойчивого роста вершины дендрита (841).
 - 5.1. Предельные случаи и роль конвекции.
 - 5.2. Оценка устойчивости роста дендрита по экспериментальным данным.
 - 5.3. Рост дендрита при конвекции в трёхмерном пространстве.
 - 5.4. Замечания. Особенности и расширение теории.
6. Количественные оценки модели (844).
 - 6.1. Модель для определения скорости роста и радиуса вершины дендрита.
 - 6.2. Поведение основных функций.

Д.В. Александров. Кафедра математической физики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, просп. Ленина 51, 620083 Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: dmitri.alexandrov@usu.ru

П.К. Галенко. Friedrich-Schiller-Universität-Jena, Physikalisch-Astronomische Fakultät, Löbdergraben Strasse 32, 07743 Jena, Germany; Institut für Materialphysik im Weltraum, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), 51170 Köln, Germany
E-mail: peter.galenko@uni-jena.de

Статья поступила 17 декабря 2013 г.,
после доработки 18 марта 2014 г.

7. Сравнение предсказаний теории с экспериментальными результатами (847).
 8. Заключение (848).
- Список литературы (849).

1. Введение

Древоподобная кристаллическая структура, имеющая основной ствол с боковыми ветвями, сформированными по направлению основных кристаллографических осей кристаллической решётки, называется дендритом [1–6]. Дендритная форма является одной из наиболее распространённых морфологий кристаллов, образующихся из переохлаждённых расплавов и пересыщенных растворов. Процессы переноса тепла и массы, а также кинетика присоединения атомов на межфазной границе определяют скорость роста и дисперсность дендритной структуры, которая в итоге формируется на мезоскопическом и макроскопическом пространственных масштабах ($\sim 10^{-6}–10^{-3}$ м) [7–9]. Рисунок 1 показывает высокоразвитую поверхность дендритного кристалла, выросшего в переохлаждённом расплаве.

Наряду с наблюдениями динамики кристаллического роста, особое значение в анализе дендритной морфологии имеют методы теоретического анализа и компьютерного моделирования [11–13]. В последнее время получены качественно новые результаты теоретического моделирования для проверки основных концепций формирования дендритных кристаллов [14]. Из рассматриваемых актуальных задач можно особо выделить задачу об устойчивом росте вершины свободно растущего дендритного кристалла и задачу о влиянии конвектив-

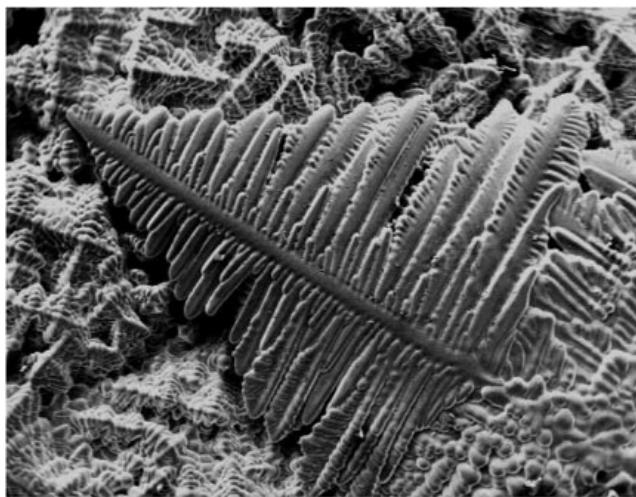


Рис. 1. Дендритный кристалл в сечении затвердевшего металлического сплавного образца, обработанного в электромагнитном левитаторе (изображение получено в электронном микроскопе) [10]. Длина основного центрального ствола дендрита 100 мкм.

ного течения на механизм отбора режима роста дендрита, которые имеют самостоятельное теоретическое и практическое значение [15–17].

Задача об отборе режима устойчивого роста дендритного кристалла возникла из анализа решения Иванцова [18–20] и экспериментальных данных по росту иглообразного кристалла параболической формы [21–27]. Этот анализ привёл к заключению, что непрерывное семейство изотропных решений Иванцова неустойчиво: параболическая форма иглообразного кристалла нестабильна в стационарном режиме его роста (см. работы [28, 29]). Как было установлено, стабилизирующее воздействие на параболоидальную форму дендрита оказывает кристаллическая анизотропия физических свойств подвижной границы раздела кристалл–жидкость. Поэтому решение Иванцова было принято в качестве нулевого приближения для поиска решения устойчивого роста в первом приближении, в котором роль малого параметра играет величина анизотропии поверхностного натяжения или анизотропии кинетики роста [29].

После установления критерия устойчивой кристаллизации вершины дендрита в однокомпонентной неподвижной среде [28, 29] задача была распространена на случай конвективного движения среды [30–32] и дендритного роста в бинарной (химически двухкомпонентной) системе без конвекции [33]. Однако во многих реальных ситуациях необходимо проводить сравнительный анализ роста дендритов в бинарной системе с учётом конвективного течения [34]. Кроме того, при неизотермическом затвердевании бинарных расплавов, как правило, появляется различие в химическом составе формирующейся твёрдой фазы с образованием неоднородных твёрдых растворов, разупорядоченных кристаллических структур и кристаллической разнозернистости. Очевидно, что это обуславливает существенное различие физических, механических, электрических и химических свойств получаемых образцов или материалов [9, 35–37].

Настоящий обзор посвящён комплексному исследованию задачи об отборе устойчивого режима роста вершины дендрита в бинарной системе при вынужденном конвективном течении жидкой фазы.

Естественная конвекция (например, термогравитационная в наземных условиях или термокапиллярная в условиях микрогравитации) и вынужденные конвективные течения жидкости играют ключевую роль в процессах переноса у межфазной границы кристалл–расплав. Конвективные потоки приводят к существенному изменению локальных градиентов температуры и концентрации примеси и тем самым к изменению эволюционных характеристик фронта затвердевания [38]. В частном случае дендритных структур скорость и форма их роста управляются температурным и концентрационным градиентами, устанавливающимися в результате как кондуктивного (молекулярного), так и конвективного тепломассопереноса около движущейся межфазной границы [38–40]. Эксперименты и простейшие оценочные расчёты [39, 40], а также моделирование по методу фазового поля [41–43] показывают значительное влияние конвекции расплава на формирование дендритной структуры, растущей в переохлаждённом потоке жидкости. Как установлено, конвекция оказывает воздействие на процессы фазового отбора [44–46], измельчение зерна [34, 47] и в целом на кристаллическое структурообразование [48, 49].

На рисунке 2 проводится сравнение микроструктур образцов из Ni-Al-сплава, кристаллизованных в наземных условиях при единичной силе тяжести ($1g$) и в условиях микрогравитации. Вынужденная конвекция, индуцированная в наземных условиях переменным электромагнитным полем, обусловливалась формирование протяжённых и цельных дендритных кристаллов (рис. 2а). При кристаллизации в неподвижном расплаве затвердевшая микроструктура представлена измельчёнными дендритными кристаллами (рис. 2б). Вследствие отсутствия конвективного теплопереноса при затвердевании в условиях микрогравитации, нахождение капли в двухфазном состоянии было более продолжительным, чем в $1g$ -условиях. В результате первичные дендриты измельчались (grain-refinement effect [50, 51]) и окончательная микроструктура оказывалась существенно плотнее для образцов, кристаллизованных в условиях микрогравитации.

В работе [16] была предложена модель дендритного роста, являющаяся расширением более ранней теории [52, 53]. Модель [16] позволяет определить зависимость скорости роста дендрита от переохлаждения при набегающем на дендрит конвективном потоке жидкости. При постановке задачи использовались гидродинамические уравнения идеальной жидкости с нулевой вязкостью, что является существенным упрощением в теоретическом описании жидкостей. Впоследствии теория, представленная в [16], была развита для описания роста дендритов в случае реальных жидкостей, обладающих вязкостными свойствами [54, 55].

Целью настоящего обзора является рассмотрение недавних экспериментальных данных, результатов численного моделирования и теоретического анализа по влиянию вынужденного течения жидкости на характеристики дендритного кристаллического роста. Для модельного описания используются аналитические результаты работы [55], определяющие решение задачи о неизотермическом росте дендрита в бинарном расплаве при наличии встречного потока жидкости. Такое модельное описание необходимо для получения количественных оценок и предсказаний свойств образцов из особо чистых мате-

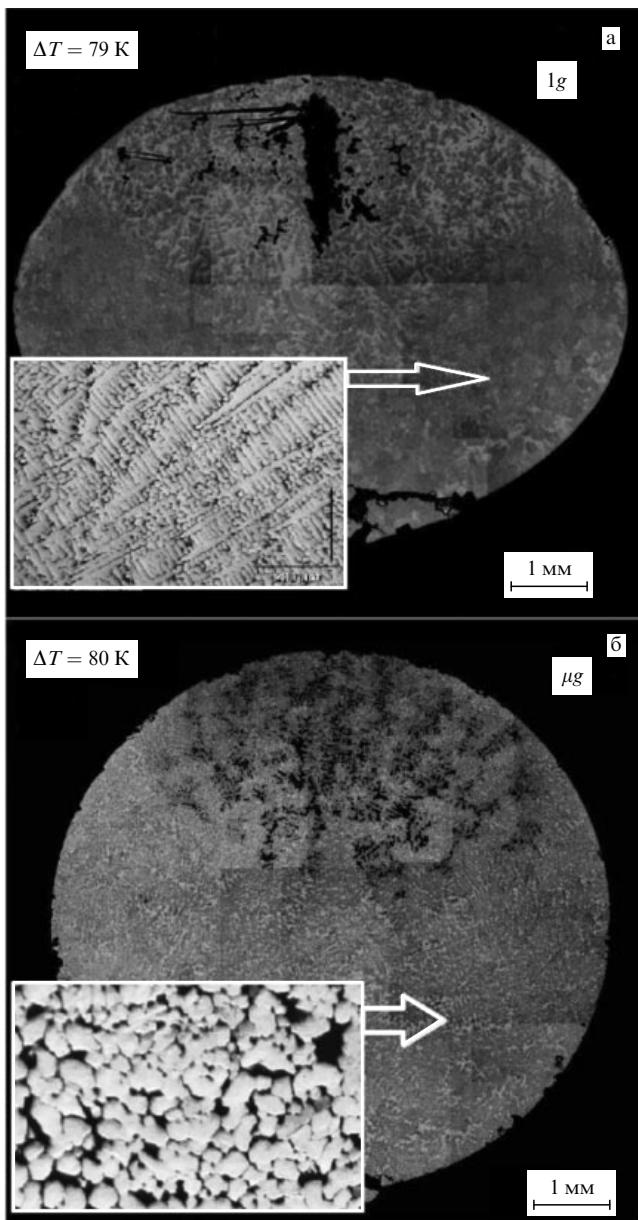


Рис. 2. Микроструктура кристаллизованной капли из сплава Ni₆₀-Al₄₀ [48] при кристаллизации (а) в наземных условиях (1g-условиях) и (б) в условиях микрогравитации. На вставках показаны фрагменты микроструктуры при увеличенном разрешении микроскопа.

риалов и систем сплавов при их обработке в бесконтейнерных установках, находящихся как в наземных условиях, так и в условиях пониженной гравитации [56]. Постановка задачи соответствует модели Стефана, включающей в себя анизотропию поверхности энергии на параболической (и параболоидальной) границе раздела кристалл – жидкость. Задача для вынужденного течения, вследствие малости числа Рейнольдса, решается в приближении Озенна. В рамках такой обобщённой модели анализ устойчивого режима позволяет получить критерий роста вершины дендритного кристалла в бинарной системе с учётом конвекции. Это даёт возможность прогнозировать данные по кинетике роста кристаллов в сопоставлении с экспериментальными результатами по измерению скорости роста и морфологиче-

ских особенностей кристаллов, зависящих от интенсивности конвективного течения.

2. Конвективное течение в каплях, кристаллизующихся в левитаторах

Бесконтейнерные и бестигельные методы, такие как методы капельных трубок, атомизации и левитации, существенно уменьшают вероятность гетерогенного зарождения устойчивых центров новой фазы на поверхностях обрабатываемого образца. В результате образец может быть переохлаждён до нескольких сотен градусов при медленном охлаждении (например, в левитаторах) или при интенсивном охлаждении (в случае высокоскоростной закалки из жидкой фазы). При этом скорость понижения температуры в образце может составлять несколько миллионов градусов в секунду (как, например, при атомизации, высокointенсивной лазерной перекристаллизации, в установках типа капельных труб или при высокоскоростном схлопывании капель) [57]. Как при медленном, так и при интенсивном охлаждении образец оказывается в метастабильном состоянии и формирование его структуры может происходить с образованием метастабильных как промежуточных, так и долгоживущих фаз [9].

Морфология и динамические особенности роста кристаллов активно изучались при непосредственном наблюдении кристаллизации оптически-прозрачных образцов [38, 58–60]. Для экспериментов с оптически-непрозрачными каплями были развиты методы акустической, электростатической и электромагнитной левитации, которые являются уникальными методами переохлаждения металлических и сплавных образцов (диаметром от нескольких микрометров до 1 см). Эти методы являются также эффективными для контроля внешнего инициирования процессов зарождения кристаллов и наблюдения за распространением фронтов кристаллизации. Обзоры методов левитации в системах бесконтейнерной обработки дробинок и капель представлены в работах [9, 36, 61].

На рисунке 3 приведён вид камер электростатического (ЭСЛ) и электромагнитного (ЭМЛ) левитаторов при проведении экспериментов по нагреву и охлаждению дробинок с инициированием кристаллизации в контролируемых условиях переохлаждения или при спонтанном лавинообразном высокоскоростном затвердевании образца. В ЭСЛ (рис. 3а) образец левитирует благодаря электростатической силе, возникающей между двумя дисками. Технические детали ЭСЛ описаны, на-



Рис. 3. Общий вид левитационных камер с образцами. (а) Левитация жидкого образца (капли) в электростатическом левитаторе в атмосфере сверхвысокого вакуума. (б) Левитация капли в электромагнитном левитаторе при наложении переменного электромагнитного поля.

пример, в работе [62]. В ЭМЛ (рис. 3б) образец левитирует в неоднородном электромагнитном поле, генерируемом коническим (иногда цилиндрическим) сердечником (катушкой).

Предварительная циклическая обработка "нагрев–охлаждение" осуществляется бесконтейнерным (бестигельным) способом, при котором отсутствует влияние стенок сосуда (объёма, формы) на гетерогенное зарождение новой фазы. Поэтому в жидкой фазе образца может быть достигнуто значительное переохлаждение (величиной до нескольких сотен градусов), в результате образец затвердевает с высокими скоростями (до 100 м с^{-1}). Регистрация высокоскоростного фронта кристаллизации производится видеокамерой со скоростью записи до 4×10^5 кадров в секунду.

Вследствие электростатичности поля при левитации образца в ЭСЛ вынужденная конвекция отсутствует [62–65]. Однако за время проведения эксперимента в ЭСЛ успевает установиться конвекция Марангони (термо-капиллярная конвекция), при которой максимальная величина скорости течения достигает нескольких сантиметров в секунду: $U \lesssim 0,05 \text{ м с}^{-1}$. Эта величина находится на пределе точности измерения скорости роста кристаллов в установке ЭСЛ. Поэтому обычно при проведении экспериментов в ЭСЛ в наземных условиях принимается, что конвективное течение Марангони может оказывать влияние на рост кристаллов только при малых или исчезающе малых величинах переохлаждения. Напротив, в ЭМЛ при плавлении дробинки и её дальнейшей циклической обработке имеет место интенсивная вынужденная конвекция в жидкой фазе капли [62–65, 67], которая может существенно повлиять на морфологию кристаллов и кинетику их роста.

На рисунке 4 приведена схема центральной части камеры в установке ЭМЛ с левитирующей каплей. Когда переменный ток протекает через сердечник (катушку), электромагнитное поле индуцирует вихревые токи в твёрдой электро проводящей дробинке. Эти токи приводят к возникновению силы отталкивания (силы Лоренца \mathbf{F}_L), направленной противоположно основному полю, и

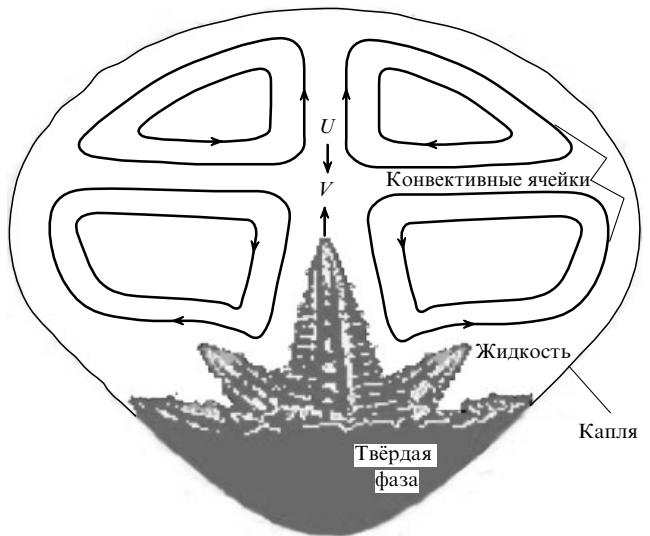


Рис. 5. Схема линий тока конвективных ячеек жидкой фазы при дендритной кристаллизации капли в электромагнитном левитаторе [17]. Двумерное сечение капли показывает ячеистую структуру жидкости, которая в трёх измерениях представлена двумя торами. V — скорость роста вершины дендрита, U — усреднённая скорость потока жидкости.

вместе с тем к тепловыделению, являющемуся причиной плавления дробинки. При установлении равенства между силами гравитации и Лоренца, т.е. при $|\mathbf{F}_L| = |\mathbf{F}_g|$, дробинка начинает левитировать и одновременно плавиться при нагреве. Расплавленная дробинка в виде капли жидкости может быть далее переохлаждена до температур ниже равновесной температуры затвердевания благодаря охлаждающему газу, проходящему через рабочий объём ЭМЛ. Процесс затвердевания может быть инициирован триггерной иглой (изготовленной из того же материала, что и исходная дробинка) или может реализоваться спонтанно. За счёт выделяющейся скрытой теплоты возникает разогретая кристаллизующаяся часть образца с фронтом рекалесценции, являющимся геометрической огибающей вершин первичных кристаллов, которые обычно имеют дендритное строение. Перенос тепла и массы во фронте рекалесценции контролирует динамику роста таких дендритных кристаллов. Компьютерные изображения, получаемые с высокоскоростной видеокамерой, позволяют регистрировать фронт рекалесценции и количественно оценивать скорость его продвижения в переохлаждённой капле [9, 17, 67].

Переменное магнитное поле индуцирует электрический ток, вызывающий такое движение расплава, при котором течение внутри капли разделяется на две части. Как показано на рис. 5, в структуре жидкости образуется два пространственных тора: с нижней стороны капли (около её южного полюса) течение в центре образца направлено вниз, а в верхней части (около северного полюса капли) — вверх. Сразу после начала затвердевания капли конвективное течение, имеющее среднюю скорость U , направлено навстречу растущим дендритным кристаллам в нижней части капли. Это приводит к увеличению скорости роста V и формированию наиболее развитых основных стволов дендритов, растущих в направлении против потока жидкой фазы, как показано на рис. 5. Результаты расчётов конвективных структур в каплях, обрабатываемых в ЭМЛ [63, 64, 68], подтверж-

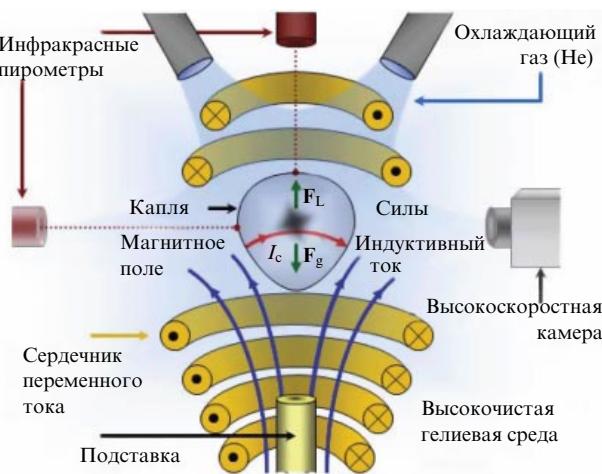


Рис. 4. Левитирующий образец (капля, дробинка) в сердечнике установки электромагнитного левитатора (схема из работы [66]). Образец левитирует благодаря установившемуся равенству между величинами силы тяжести \mathbf{F}_g и силы Лоренца \mathbf{F}_L , т.е. при $|\mathbf{F}_L| = |\mathbf{F}_g|$; I_c — ток, индуцированный в капле переменным электромагнитным полем.

дают возможную схему конвективных торов, возникающих при кристаллизации [16, 17]. Учитывая схему, приведённую на рис. 5, сформулируем теперь основные уравнения модели.

3. Модель роста кристалла

Процесс роста кристалла во встречном потоке жидкости описывается нелинейной термодиффузионной задачей типа задачи Стефана [69, 70] с подвижной свободной границей фазового перехода. Температура T_{int} межфазной границы кристалл–жидкость зависит от её локальной кривизны $1/R$, температуры кристаллизации чистого вещества T_0 , коэффициента поверхностного натяжения σ и скрытой теплоты кристаллизации Q :

$$T_{\text{int}} = T_0 - \frac{T_0 \sigma}{QR}. \quad (1)$$

Температуры твёрдой, T_s , и жидкой, T_l , фаз при учёте набегающего на кристалл потока жидкости определяются уравнениями теплопроводности

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = D_T \nabla^2 T_s, \quad \frac{\partial T_l}{\partial t} + (\mathbf{w}, \nabla) T_l = D_T \nabla^2 T_l, \quad (2)$$

где D_T — коэффициент температуропроводности, \mathbf{w} — скорость течения жидкости, t — время.

Распределение примеси в жидкой части системы описывается конвективным уравнением диффузии (диффузией примеси внутри растущего кристалла пренебрегается):

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} + (\mathbf{w}, \nabla) C_l = D_C \nabla^2 C_l, \quad (3)$$

где C_l — концентрация растворённой в жидкости примеси, D_C — коэффициент диффузии примеси.

На подвижной границе раздела фаз выполняются условия равенства температуры в фазах температуре фазового перехода, непрерывности температуры, а также условия баланса тепла и массы:

$$\begin{aligned} T_l &= T_{\text{int}} - mC_l, \quad T_s = T_l, \\ Q\mathbf{v}\mathbf{n} &= D_T c_p (\nabla T_s - \nabla T_l) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$(1 - k_0) C_l \mathbf{v}\mathbf{n} + D_C \nabla C_l \mathbf{n} = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{v}\mathbf{n}$ — нормальная скорость движения поверхности, c_p — теплоёмкость, k_0 и m — равновесные коэффициенты распределения примеси и наклона линии ликвидус. Отметим, что первое выражение в (4) задаёт связь температуры и концентрации в виде уравнения линии ликвидус на фазовой диаграмме.

Следуя работе [32], рассмотрим течение жидкости при малых числах Рейнольдса. В этом случае распределение скорости в жидкости удовлетворяет уравнениям Оззена и непрерывности [71]:

$$U \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l} \nabla p + v \nabla^2 \mathbf{w}, \quad \nabla \mathbf{w} = 0. \quad (6)$$

Здесь U — скорость набегающего потока жидкости вдали от растущего кристалла, ρ_l и v — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости соответственно. Отметим, что, хотя приближение Оззена, принятное в уравнении движения (6), даёт возможность учётить лишь важнейшие из инерционных членов, при этом могут быть получены достаточно точные результаты расчётов

(см., например, классическую задачу о движении сферы в вязкой жидкости [72]).

В постановке задачи (1)–(6) также принято, что коэффициент распределения примеси между фазами k_0 , коэффициент диффузии примеси D_C , наклон линии ликвидус m , плотность жидкой фазы ρ_l и кинематическая вязкость v — постоянные величины. Кроме того, полагается одинаковость коэффициентов температуропроводности в фазах, что позволяет непосредственно использовать развитые методы описания дендритного роста [73–75]. Такая упрощённая постановка задачи обусловлена тем, что разница в коэффициентах температуропроводности входит в "эмпирическую константу" искомого условия отбора устойчивого режима роста дендрита. Указанные упрощения, в целом, позволяют проводить аналитические расчёты для систем нелинейных уравнений с гидродинамическими вкладами.

3.1. Аналитическое решение для параболического дендрита

Примем, что двумерный дендрит параболической формы растёт с постоянной скоростью V вдоль пространственной оси z (рис. 6). Поток жидкости вдали от кристалла ориентирован параллельно оси z и противоположно направлению роста дендрита (так называемый набегающий поток). Введём параболические координаты ξ и η , связанные с декартовыми координатами x и z соотношениями

$$x = \rho \sqrt{\xi \eta}, \quad z = \frac{\rho}{2} (\eta - \xi), \quad (7)$$

где ρ — диаметр вершины дендрита, а межфазная граница находится на уровне $\eta = 1$ (обобщение для трёхмерного случая см. в разделе 5.3).

Уравнения (6) позволяют определить компоненты скорости жидкости u_η и u_ξ в параболических координатах (7). Учитывая граничные условия прилипания жидкости на поверхности дендрита и заданной скорости набегающего потока и следя работе [32], запишем результат в виде

$$u_\eta = -\frac{f(\eta)}{2\sqrt{\xi + \eta}}, \quad u_\xi = \frac{\sqrt{\xi \eta}}{\sqrt{\xi + \eta}} \frac{df}{d\eta}, \quad (8)$$

где введены функции

$$\begin{aligned} f(\eta) &= 2(U + V)\sqrt{\eta} - 2Ug(\eta), \\ g(\eta) &= \sqrt{\eta} \frac{\operatorname{erfc}\sqrt{\eta \operatorname{Re}/2}}{\operatorname{erfc}\sqrt{\operatorname{Re}/2}} + \\ &+ \frac{\sqrt{2/(\pi \operatorname{Re})}}{\operatorname{erfc}\sqrt{\operatorname{Re}/2}} \left[\exp\left(-\frac{\operatorname{Re}}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\eta \operatorname{Re}}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

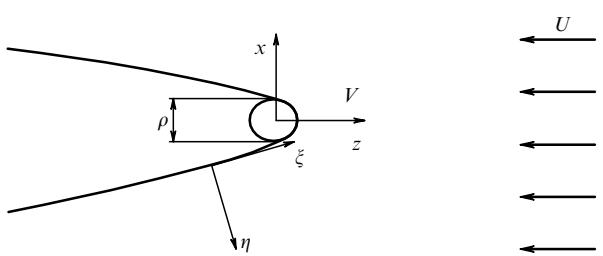


Рис. 6. Схема растущего дендрита во встречном потоке жидкости, показывающая переход к новой системе координат.

учитывающие интенсивность течения в зависимости от величины числа Рейнольдса $Re = \rho U/v$.

Уравнения (2) и (3) могут быть проинтегрированы в параболических координатах (7). Для нахождения решения задачи, зависящего только от η , перепишем уравнения (2) и (3) с граничными условиями (4) и (5) (см. [31]) в виде

$$u_\eta \frac{dT_1}{d\eta} = \frac{2D_T}{\rho\sqrt{\xi+\eta}} \left(\sqrt{\eta} \frac{d^2T_1}{d\eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{dT_1}{d\eta} \right),$$

$$\left. \frac{dT_1}{d\eta} \right|_{\eta=1} = -\frac{Q}{c_p} \frac{\rho V}{2D_T}, \quad (10)$$

$$u_\eta \frac{dC_1}{d\eta} = \frac{2D_C}{\rho\sqrt{\xi+\eta}} \left(\sqrt{\eta} \frac{d^2C_1}{d\eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{dC_1}{d\eta} \right),$$

$$\left. \frac{dC_1}{d\eta} \right|_{\eta=1} = -(1-k_0) C_i \frac{\rho V}{2D_C}, \quad (11)$$

где C_i — концентрация примеси на межфазной границе кристалл–расплав. Решая уравнения (10) и (11), получаем распределения температуры и концентрации примеси:

$$T_1(\eta) = T_i + (T_\infty - T_i) \frac{I_T(\eta)}{I_T(\infty)},$$

$$C_1(\eta) = C_i + (C_\infty - C_i) \frac{I_C(\eta)}{I_C(\infty)}. \quad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$I_T(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[P_f \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 \eta' \right] \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta'}}, \quad (13)$$

$$I_C(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[P_f \frac{D_T}{D_C} \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 \frac{D_T}{D_C} \eta' \right] \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta'}}, \quad (14)$$

$$P_g = \frac{\rho V}{2D_T}, \quad P_f = \frac{\rho U}{2D_T}, \quad P_0 = P_f + P_g, \quad (15)$$

$$T_i = T_\infty + \frac{Q}{c_p} P_g \exp(P_0) I_T(\infty), \quad (16)$$

$$C_i = \frac{C_\infty}{1 - (1-k_0) \exp[P_0 D_T/D_C] P_g I_C(\infty) D_T/D_C}, \quad (17)$$

где P_g и P_f — ростовое и потоковое числа Пекле соответственно, определённые через скорость V роста дендрита и скорость U течения жидкости, T_∞ и C_∞ — температура и концентрация в жидкости вдали от границы раздела фаз.

3.2. Условие микроскопической разрешимости

Анизотропия поверхности энергии для различных быстрорастущих граней составляет не более 1,5–2,0 % для традиционных металлов и сплавов и до 5,0 % для сильноанизотропных кристаллических материалов. При такой относительно небольшой анизотропии поверхности натяжения принимается, что решения с постоянной скоростью роста дендрита могут быть найдены в окрестности классических решений параболического дендрита Иванцова. Математически это означает, что выполняется условие микроскопической

разрешимости, которое находится как приближённое решение осесимметричной задачи при линеаризации условий тепло- и массопереноса на поверхности параболического дендрита Иванцова [73, 74]. Это условие позволяет отобрать устойчивый режим роста кристалла по скорости V и радиусу $\rho/2$ вершины анизотропного дендрита (т.е. при наложенной симметрии кристаллической решётки, учитывающей анизотропию преимущественного направления роста кристалла) [28, 29]. Далее будем использовать условие микроскопической разрешимости вида [75]

$$\int_{-\infty}^{\infty} G[X_0(l)] Y_m(l) dl = 0, \quad Y_m(l) = \exp \left[i \int_0^l k_m(l_1) dl_1 \right]. \quad (18)$$

Выражение (18) может быть использовано для анализа подвижных границ различного вида, например "вязких пальцев" Саффмана–Тейлора [28, 76]. Для этого должны быть известны оператор кривизны G и решения $X_0(l)$, из которых могут быть найдены функции $k_m(l)$ локальной ненулевой маргинальной моды сопряжённого дисперсионного уравнения для возмущений (см., например, [76]).

Соотношение (18) выводится с помощью метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [77], который был применён для нахождения режимов распространения фронтов пламени [78] и дендритной структуры [79]. Функции $Y_m(l)$, входящие в соотношение (18), при наличии набегающего на дендрит потока вязкой бинарной жидкости определены в разделе 5.

4. Линейный анализ устойчивости

Анализ устойчивости в линейном приближении позволяет определить реакцию поверхности дендрита вблизи его вершины на малое возмущение. Нахождение областей устойчивости, нестабильности и маргинального (пограничного) состояния в зависимости от волнового числа возмущения является основной задачей анализа. Маргинальная мода (пограничный режим между устойчивостью и нестабильностью) находится по критическому значению волнового числа k_m , отвечающего кривой нейтральной устойчивости. Для нахождения критического волнового числа k_m на вершине дендрита воспользуемся результатами линейного анализа устойчивости работы [32]. В этой работе скорость роста возмущений имела длину волны, намного меньшую характерного пространственного масштаба невозмущённого решения.

Разложим стационарные компоненты скорости (8) в ряды по переменной $\eta - 1$ в окрестности параболы, задаваемой уравнением $\eta = 1$. Учитывая только основные вклады, получим

$$u_\xi = \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}} [V + a(\text{Re}) U(\eta - 1)], \quad u_\eta = -\frac{V}{\sqrt{1+\xi}}, \quad (19)$$

где

$$a(\text{Re}) = \sqrt{\frac{\text{Re}}{2\pi}} \frac{\exp(-\text{Re}/2)}{\text{erfc}(\sqrt{\text{Re}/2})}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) следует, что только касательная составляющая скорости u_ξ зависит от скорости набегающего потока жидкости в окрестности растущей параболической вершины дендрита.

Введём новые, связанные с кристаллом, локальные декартовые координаты x_c, y_c , которые соответственно обозначают тангенциальную и нормальную оси к межфазной поверхности в точке, где нормаль к поверхности образует угол θ с осью роста. Эти координаты позволяют представить выражения (19) через θ и y_c :

$$\bar{u} = -V \sin \theta - \frac{aU}{\rho} y_c \sin \theta \cos \theta, \quad \bar{v} = -V \cos \theta, \quad (21)$$

где \bar{u} и \bar{v} — тангенциальная и нормальная компоненты скорости у поверхности дендрита соответственно. Выражая производные температуры и концентрации из уравнений (4) и (5),

$$\frac{d\bar{T}_1}{dy_c} = \frac{Q\bar{v}}{D_T c_p}, \quad \frac{d\bar{C}_1}{dy_c} = \frac{C_i(1-k_0)\bar{v}}{D_C} \text{ при } y_c = 0, \quad (22)$$

находим разложение температуры и концентрации в ряды в окрестности вершины дендрита,

$$\bar{T}_1 = T_i - \frac{QV}{D_T c_p} y_c \cos \theta, \quad \bar{C}_1 = C_i - \frac{C_i(1-k_0)V}{D_C} y_c \cos \theta. \quad (23)$$

Обозначим через u' , v' и T' возмущения соответствующих величин, а через ξ' — возмущение стационарной межфазной поверхности с длиной волны λ (которая много меньше радиуса $\rho/2$ вершины дендрита). Решение уравнений для возмущений, получаемое из (2) и (6) в приближении Оззена, может быть представлено в виде (см. также работу [32])

$$\begin{aligned} u' &= (B - ieAy_c) \exp(\omega t + ikx_c - eky_c), \\ v' &= \left[A \left(y_c + \frac{\varepsilon}{k} \right) + iBe \right] \exp(\omega t + ikx_c - eky_c), \\ \xi' &= \Sigma \exp(\omega t + ikx_c - eky_c), \\ A &= -\Sigma \left(\omega k e + i \frac{akU}{\rho} \sin \theta \cos \theta \right), \\ B &= \Sigma \frac{aU}{\rho} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где учтено равенство $v' = -\partial\xi'/\partial t$, выполняющееся на межфазной поверхности. Здесь ω и k — инкремент и волновое число возмущений соответственно, параметр ε имеет тот же знак, что и вещественная часть k , поскольку возмущения не могут неограниченно возрастать при y_c стремящемся к ∞ , Σ — амплитуда возмущения поверхности дендрита.

Рассмотрим уравнение для температурных возмущений в жидкой части системы. Удерживая лишь линейные слагаемые, из (2) получим

$$\frac{\partial T'_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'_1}{\partial x_c} + \bar{v} \frac{\partial T'_1}{\partial y_c} + v' \frac{d\bar{T}_1}{dy_c} = D_T \left(\frac{\partial^2 T'_1}{\partial x_c^2} + \frac{\partial^2 T'_1}{\partial y_c^2} \right). \quad (25)$$

Если скорость набегающего на дендрит потока пренебрежимо мала, то решение имеет вид, подобный

$T'_1 = T_{10} \exp(\omega t + ikx_c - eky_c)$ при больших k , $T_{10} \equiv \text{const}$. Такое решение согласуется с известным критерием Маллинза — Секерки [24] при k , определённом в соответствии с тепловой задачей затвердевания однокомпонентной жидкости (см., например, [32]). Подставляя

$$T'_1 = g(y_c) \exp(\omega t + ikx_c - eky_c) \quad (26)$$

в уравнение (25) и учитывая соотношения (22), (23), получим следующее уравнение для амплитуды $g(y_c)$:

$$\frac{d^2 g}{dy_c^2} - 2ek \frac{dg}{dy_c} = L(g(y_c), y_c), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} L(g(y_c), y_c) &= \frac{\Sigma QV \cos \theta}{c_p D_T^2} [\omega + (\omega k e + kN) y_c] + \\ &+ \left[\frac{\omega + kV(\varepsilon \cos \theta - i \sin \theta)}{D_T} - \frac{kNy_c}{D_T} \right] g(y_c), \\ N &= \frac{iaU \sin \theta \cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для решения системы уравнений (27), (28) применим метод, предложенный в работе [32]. Поскольку g изменяется на масштабе λ , левая часть уравнения (27) доминирует над его правой частью при больших волновых числах, что позволяет решить систему (27), (28) методом разложения решения при больших k . Нулевое приближение даёт $g = T_{10}$, где T_{10} — постоянная амплитуда. Подставляя теперь её в правую часть (28), находим решение уравнения (27) в виде

$$\begin{aligned} g(y_c) &= T_{10} + T_{11}y_c + T_{12}y_c^2, \\ T_{11} &= \left[\frac{N}{4} - \frac{\omega + V k (\varepsilon \cos \theta - i \sin \theta)}{2\varepsilon} \right] \frac{T_{10}}{k D_T} - \\ &- \frac{\Sigma QV \cos \theta}{4k D_T^2 c_p} (3\omega e + N), \end{aligned} \quad (29)$$

где учтено сильное неравенство $V/D_T \ll k$ (здесь k оценивается по теории Маллинза — Секерки как $\sim 10^6 - 10^7 \text{ м}^{-1}$ [24], а V/D_T — как $\sim 10^2 \text{ м}^{-1}$ для бинарных металлических систем).

Уравнение (3), записанное для возмущений концентрационного поля C'_1 в жидкости, решается аналогичным образом. Его решение имеет вид

$$\begin{aligned} C'_1 &= (C_{10} + C_{11}y_c + C_{12}y_c^2) \exp(\omega t + ikx_c - eky_c), \\ C_{11} &= \left[\frac{N}{4} - \frac{\omega + V k (\varepsilon \cos \theta - i \sin \theta)}{2\varepsilon} \right] \frac{C_{10}}{k D_C} - \\ &- \frac{\Sigma C_i(1-k_0)V \cos \theta}{4k D_C^2} (3\omega e + N). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражения для амплитуд возмущений T_{12} и C_{12} здесь не приведены, поскольку они не требуются при дальнейшем анализе. Уравнение для температуры твёрдой фазы решается аналогично, и его решение выражается в виде (29) при $U = 0$.

Возмущая теперь граничные условия (4) и (5), получаем следующие соотношения на межфазной границе

$y_c = 0$:

$$\begin{aligned} T'_1 &= \frac{QV \cos \theta}{D_T c_p} \xi' - mC'_1 + \\ &+ \frac{mC_i(1-k_0)V \cos \theta}{D_C} \xi' - \frac{Qd}{c_p} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y_c^2}, \\ T'_s &= mC'_1 - \frac{mC_i(1-k_0)V \cos \theta}{D_C} \xi' + \frac{Qd}{c_p} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y_c^2}, \\ \frac{1-k_0}{D_C} (C_i v' - C'_1 V \cos \theta) &= \\ &= \frac{\partial C'_1}{\partial y_c} + \frac{C_i k_0 (1-k_0) V^2 \cos^2 \theta}{D_C^2} \xi', \\ \frac{Q}{c_p} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= D_T \left(\frac{\partial T'_s}{\partial y_c} - \frac{\partial T'_1}{\partial y_c} - \frac{QV^2 \cos^2 \theta}{D_T^2 c_p} \xi' \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где $d = \sigma c_p T_0 / Q^2$ — капиллярная длина.

Подстановка возмущений (24), (26) и (30) в граничные условия (31) даёт четыре уравнения для амплитуд возмущений Σ , T_{10} , T_{s0} и C_{10} (где T_{s0} — постоянная амплитуда возмущения температуры в твёрдой фазе). Равенство нулю определителя этой системы уравнений даёт в свою очередь дисперсионное соотношение $\omega(k)$.

Рассмотрим систему координат, начало которой движется в направлении нормали к межфазной границе со скоростью $V \cos \theta$. Вследствие вращательной симметрии системы возмущение с волновым числом k возвращает со скоростью $\omega(k)$. Если начало системы координат будет двигаться в направлении оси z с постоянной скоростью V , то скорость роста возмущения примет вид $\omega(k) - iVk \sin \theta$ вследствие наличия тангенциальной скорости в новой системе координат $V \sin \theta$ [33]. Поэтому, делая замену $\omega(k) \rightarrow -iVk \sin \theta$ на кривой нейтральной устойчивости (где $\omega = 0$), исключая амплитуды возмущений, полагая $\varepsilon = -1$ и подставляя $-i$ вместо i , согласно работе [32], получим уравнение для маргинальной моды волнового числа $k = k_m$:

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{V}{2dD_T} + \frac{mC_i(1-k_0)Vc_p}{dD_C Q} \right) \exp(i\theta) + \\ &+ i \frac{aU \sin \theta \cos \theta}{8\rho D_T} + i \frac{aU \sin \theta \cos \theta}{4\rho D_C}. \end{aligned} \quad (32)$$

При записи выражения (32) учтены следующие оценки: $k \sim 10^6 - 10^7 \text{ м}^{-1}$, $V/D_T \sim 10^2 \text{ м}^{-1}$, $V/D_C \sim 10^6 \text{ м}^{-1}$, $d \sim 10^{-9} - 10^{-10} \text{ м}$, $\rho \sim 10^{-5} \text{ м}$. Выражение (32) определяет критическое значение k_m , которое разделяет области неустойчивой и устойчивой мод волнового числа.

Представим капиллярную длину как $d(\theta) = d_0[1 - \beta \cos(4\theta)]$ (где $\beta = 15\varepsilon_c \ll 1$ — фактор анизотропии, ε_c — параметр анизотропии поверхностной энергии на межфазной границе, d_0 — капиллярная константа) и введём волновое число

$$k_{TC} = - \left(\frac{VP}{2d_0 D_T} \right)^{1/2}, \quad P = 1 + \frac{2mC_i(1-k_0)D_T}{D_C Q/c_p}, \quad (33)$$

соответствующее решению термоконцентрационной задачи в отсутствие течения (см., например, [33]). Решение уравнения (32) запишем в виде

$$k = k_{TC} \left(\frac{\exp(i\theta) + i\alpha[1 - \beta \cos(4\theta)] \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta \cos(4\theta)} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

где

$$\alpha = \frac{ad_0 U}{4\rho VP} + \frac{ad_0 U D_T}{2\rho V P D_C}, \quad (35)$$

P дано выражением (33).

Покажем, что выражения (32) и (34) содержат предельные переходы к ранее развитым теориям дендритного роста с анизотропией поверхностной энергии [24, 32, 33, 75, 76]. Полагая сначала $U = 0$ и $C_i = 0$ в (32) или в (34), получим волновое число k_{MS} Маллинза–Секерки для однокомпонентной неподвижной жидкости [24, 32, 75, 76],

$$k_{MS} = - \sqrt{\frac{V \exp(i\theta)}{2dD_T}}. \quad (36)$$

Далее, при $U = 0$ решение (32) (и, соответственно, решение (34)) приводят к волновому числу k_{BP} , полученному Бен Амар и Пелсе для бинарной неподвижной жидкости [33],

$$k_{BP} = k_{MS} \sqrt{P}. \quad (37)$$

Теперь, считая, что $D_C \rightarrow \infty$, находим решение k_{BP} , полученное Буиссу и Пелсе для однокомпонентной системы при наличии встречного потока жидкости [32]:

$$k_{BP} = k_{MS} \sqrt{1 + \frac{iadU \sin \theta \cos \theta \exp(-i\theta)}{4\rho V}}. \quad (38)$$

Выражения (37) и (38) распространяют результаты работы [54] на случай концентрированных бинарных жидкостей при наличии встречного потока жидкости.

Особо отметим, что соотношения (32) и (34) приводят также к новому результату, описывающему рост дендрита в изотермической бинарной системе при наличии встречного потока жидкости, что определяет рост так называемого химического дендрита. Полагая $D_T \rightarrow \infty$ в выражении (32) или (34), находим волновое число k_{CD} для химического дендрита:

$$\begin{aligned} k_{CD} &= - \sqrt{K_{chem}}, \\ K_{chem} &= \frac{V}{d_0 D_C} \left\{ \frac{mC_i(1-k_0)c_p}{Q[1 - \beta \cos(4\theta)]} \exp(i\theta) + \right. \\ &\left. + \frac{iaUd_0 \sin \theta \cos \theta}{4\rho V} \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая, что $d = d_0[1 - \beta \cos(4\theta)] = \sigma c_p T_0 / Q^2$, представим (39) в виде

$$k_{CD} = k_d \left[1 + \frac{iad_{CD} U \sin \theta \cos \theta \exp(-i\theta)}{2\rho V} \right]^{1/2}, \quad (40)$$

где волновое число k_d , характеризующее решение диффузионной задачи для химического дендрита без течения, и химическая капиллярная длина d_{CD} определяются соотношениями

$$k_d = - \sqrt{\frac{V \exp(i\theta)}{2d_{CD} D_C}}, \quad d_{CD} = \frac{\sigma T_0}{2QmC_i(1-k_0)}. \quad (41)$$

Волновое число k_{CD} , даваемое выражением (40) для изотермического дендрита в бинарной системе с течением, и волновое число k_{BP} , определённое выражением

(38) для термического дендрита в однокомпонентной системе с течением, качественно имеют одинаковый вид (который непосредственно следует из анализа членов более общего уравнения (32)). Количественная разница между k_{BP} (38) и k_{CD} (40) обусловлена тем, что чисто концентрационная задача, в отличие от температурной, решается только в области жидкой фазы (авторами статьи [33] этот случай назван "односторонней моделью"). Такая несимметричность решений двух постановок задачи уже отражена в формуле (32) и переходит в выражения для волновых чисел k_{CD} и k_{BP} в виде множителя 2.

Таким образом, обобщённое решение (34) даёт критическое волновое число для возмущений на вершине дендрита в рамках задачи тепломассопереноса с учётом встречного потока жидкости, натекающего на дендрит.

5. Критерий устойчивого роста вершины дендрита

При получении критерия устойчивого роста дендрита воспользуемся теорией отбора, развитой в работах [32, 75, 76]. Принимая во внимание, что переменная интегрирования l в условии микроскопической разрешимости (18) связана с углом θ как

$$l = -\frac{\rho}{2} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) \right]$$

(см., например, [75]), условие разрешимости (18), по аналогии с работой [32], запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} G[(\chi)] \exp [\sqrt{C} \Psi_{\alpha}(\chi)] d\chi = 0, \quad \chi = \tan \theta, \quad (42)$$

где показано, что оператор кривизны $G[(\chi)]$ действует на функцию χ ,

$$\Psi_{\alpha}(\chi) = \frac{i}{2} \int_0^{\chi} \frac{[(1+i\chi')(1+\chi'^2)^{5/2} + i\alpha\chi'B(\chi')]}{\sqrt{B(\chi')}} d\chi',$$

$$B(\chi) = (1+\chi^2)^2(1-\beta) + 8\beta\chi^2, \quad (43)$$

а константа C нормирована на безразмерный множитель $V P \rho^2 / (2d_0 D_T)$.

Оценим интеграл (43) в пределе малой анизотропии с помощью метода, развитого в [32]. Числитель подынтегральной функции обращается в нуль при $\chi = i$ (стационарная фазовая точка), а знаменатель — при $\chi = i(1 - \sqrt{2\beta})$ (точка сингулярности). Поскольку главный вклад в интеграл даётся окрестностью точки $\chi = i$, функция $\Psi_{\alpha}(\chi)$ может быть аппроксимирована выражением

$$\Psi_{\tau}(\varphi) = 2^{9/8} \beta^{7/8} \int_{1/\sqrt{2\beta}}^{\varphi} \frac{[\varphi'^{7/2} - \tau(\varphi'^2 - 1)]^{1/2}}{\sqrt{\varphi'^2 - 1}} d\varphi', \quad (44)$$

где учтено, что

$$\chi = i(1 - \sqrt{2\beta}\varphi), \quad \tau = 2^{-5/4} \beta^{-3/4} \alpha.$$

Интеграл (44) можно вычислить с помощью приближённых методов, развитых в работе [32] при анализе подобной задачи для роста дендрита в однокомпонентной системе с конвективным течением. Следуя [32],

определим величину C как

$$C = \frac{n^2}{\beta^{7/4}} \left[1 + b(\beta^{-3/4} \alpha)^{11/14} \right], \quad (45)$$

где n — целое число, а b — константа, определяемая численно. Теперь учёт нормировки в интеграле (44) приводит к выражению для масштабного фактора σ^* задачи тепломассопереноса с течением,

$$\sigma^* \equiv \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 V} = \sigma_0 \beta^{7/4} P \left[1 + b(\beta^{-3/4} \alpha)^{11/14} \right]^{-1}. \quad (46)$$

Здесь σ_0 — численная постоянная, определяемая с помощью асимптотических методов [29] или с помощью подгонки модельных результатов к экспериментальным данным [80, 81]. Масштабный фактор σ^* определяет соотношение между скоростью V и радиусом $\rho/2$ вершины при устойчивом режиме роста параболического ствола дендрита. Выражение (46) совместно с балансом переохлаждений на фазовой границе определяют V и ρ количественно (см. раздел 6.2.2).

5.1. Предельные случаи и роль конвекции

В случае дендритного роста в однокомпонентной системе с конвекцией из (46) следует масштабный фактор Буиссу и Пелсе [32] (который получается из (46) как предел при $D_C \rightarrow \infty$, когда $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{BP}} \equiv ad_0 U / (4\rho V)$, а $P \rightarrow 1$):

$$\sigma_{\text{BP}}^* = \sigma_0 \beta^{7/4} \left[1 + b(\beta^{-3/4} \alpha_{\text{BP}})^{11/14} \right]^{-1}. \quad (47)$$

Из выражения (46) легко определить масштабный фактор "концентрационного" дендрита (т.е. "химического" или "примесного" кристалла, растущего в изотермической жидкости):

$$\sigma_{\text{CD}}^* \equiv \frac{2d_0 D_C D_C}{\rho^2 V} = \sigma_0 \beta^{7/4} \left[1 + b(\beta^{-3/4} \alpha_{\text{CD}})^{11/14} \right]^{-1}, \quad (48)$$

где

$$\alpha_{\text{CD}} = \frac{ad_0 D_C U}{2\rho V}, \quad d_0 D_C = \frac{Q d_0}{2m C_i (1 - k_0) c_p}. \quad (49)$$

Связь между капиллярными константами $d_0 D_C$ и d_0 , входящими в выражения (46), (48) и (49), следует из соотношений

$$d_{\text{CD}} = \frac{\sigma T_0}{2Q m C_i (1 - k_0)} = d_0 D_C [1 - \beta \cos(4\theta)],$$

$$d = \frac{\sigma T_0 c_p}{Q^2} = d_0 [1 - \beta \cos(4\theta)]. \quad (50)$$

Отметим одинаковый вид выражений для масштабных факторов σ_{CD}^* (см. фактор (48) для изотермического дендрита в бинарной системе с течением) и σ_{BP}^* (см. фактор (47) для термического дендрита в однокомпонентной системе с течением). По структуре эти выражения полностью соответствуют друг другу, как и соотношения для волновых чисел k_{CD} и k_{BP} , обсуждавшиеся в разделе 4.

Выражения (46) и (47) определяют критерии для устойчивой моды роста вершины дендрита с учётом

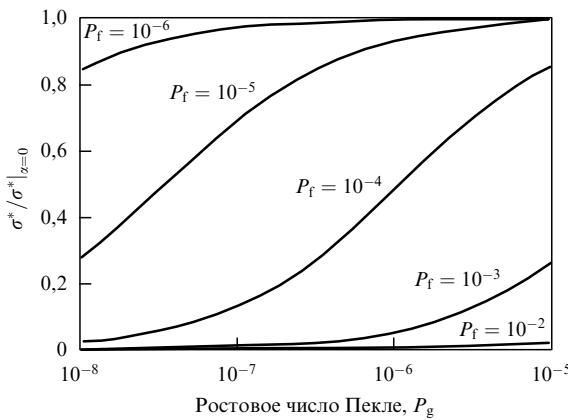


Рис. 7. Отношение $\sigma^*/\sigma^*|_{x=0}$, определённое по выражениям (51) и (52), в зависимости от ростового числа Пекле $P_g = V\rho/(2D_T)$ при различных значениях числа Пекле $P_f = U\rho/(2D_T)$ и параметрах: $D_T/v = 10$, $d_0/\rho = 10^{-5}$, $\beta = 0,195$, $D_T/D_C = 5 \times 10^3$, $k_0 = 0,5$, $C_\infty = 0,01$ ат.%, $m = 10$ К (ат.%) $^{-1}$, $Q/c_p = 300$, $b = 10$.

анизотропии поверхностной энергии (параметр β), неизотермичности бинарной системы и набегающего потока жидкости. Критерий (46) объединяет ранее полученные результаты: модель из работы [32] для неизотермической однокомпонентной системы с набегающим потоком жидкости и модель из работы [33] для изотермической бинарной системы без учёта встречного потока жидкости. Таким образом, соотношение (46) является обобщением ранее полученных критериев для отбора режимов устойчивого роста дендрита.

Определим влияние конвекции на критерий отбора устойчивого режима роста дендрита. Для этого оценим критерий устойчивости (46) по отношению к критерию без конвекции:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma^*|_{x=0}} = \left[1 + b(\beta^{-3/4}\alpha)^{11/14} \right]^{-1}, \quad (51)$$

где α приведено в выражении (35), $\sigma^*|_{x=0}$ определено для дендритного роста без течения,

$$\sigma^*|_{x=0} = \sigma_0 \beta^{7/4} P, \quad (52)$$

а P дано в (33). Рисунок 7 показывает зависимость критерия устойчивости вершины дендрита от ростового числа Пекле при различной интенсивности конвективного потока, задаваемой потоковым числом Пекле P_f . Видно, что при уменьшении P_f , соответствующего течению жидкости, и при увеличении числа Пекле P_g , соответствующего дендритному росту, вклад конвекции в устойчивость вершины дендрита уменьшается.

5.2. Оценка устойчивости роста дендрита по экспериментальным данным

Значения параметров b и σ_0 в обобщённом критерии (46) устойчивого дендритного роста можно определить из натурных экспериментов. Действительно, из экспериментов [82] по росту дендритов в триметилуксусной кислоте при наличии конвекции известно, что произведение $\rho^2 V$ является постоянной величиной, зависящей лишь от скорости встречного течения расплава. Экспериментально определённое значение этого произведения запишем в

виде [82]

$$(\rho^2 V)_{\text{exp}} = 2\sigma_{\text{exp}}^{-1} d_0 D_C \left(1 + \chi_{\text{exp}} \frac{Ud_0}{D_C} \right), \quad (53)$$

где $\sigma_{\text{exp}} \approx 0,032$, $\chi_{\text{exp}} \approx 5300$. Показатель степени 11/14 в выражениях (46) и (48) достаточно близок к единице, и, используя современные экспериментальные методы, заметить разницу между этими числами затруднительно [32]. Поэтому представим произведение $\rho^2 V$ из формулы (48) приближённо как

$$\rho^2 V = \frac{2d_0 D_C}{\beta^{7/4} \sigma_{\text{CD}}} (1 + b\beta^{-3/4}\alpha_{\text{CD}}), \quad (54)$$

$$\alpha_{\text{CD}} = 2mC_i(1 - k_0) c_p \frac{\sigma_0}{Q}.$$

Сравнивая теперь выражения (53) и (54), находим неизвестные коэффициенты:

$$\alpha_{\text{CD}} \approx \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\beta^{7/4}}, \quad b \approx \frac{4\rho V m C_i (1 - k_0) \chi_{\text{exp}} \beta^{3/4} c_p}{a(\text{Re}) D_C Q}, \quad (55)$$

где функция $a(\text{Re})$ задана выражением (20).

Отметим, что параметры σ_0 и b из (55) определены при всех прочих фиксированных параметрах дендритного роста в триметилуксусной кислоте, как описано в работе [82]. Таким образом, параметры, входящие в критерий устойчивости, могут быть оценены из эксперимента.

5.3. Рост дендрита при конвекции в трёхмерном пространстве

Проведённый выше анализ остаётся качественно справедливым и для трёхмерного дендритного роста. Введём координаты параболоида вращения (ось z которого совпадает с осью z для плоского случая), описываемого соотношениями (7),

$$z = \frac{\rho(\eta - \xi)}{2}, \quad x = \rho\sqrt{\xi\eta} \cos\varphi, \quad y = \rho\sqrt{\xi\eta} \sin\varphi, \quad (56)$$

где по-прежнему поверхность дендрита $\eta = 1$ имеет радиус вершины $\rho/2$, φ — полярный угол, плоскость которого перпендикулярна набегающему вдоль оси z потоку жидкости. Компоненты скорости жидкости в этом случае примут аналогичный выражениям (8) вид:

$$u_\eta = -\frac{f(\eta)}{\sqrt{\xi + \eta}}, \quad u_\xi = \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \eta}} \frac{d}{d\eta} (\sqrt{\eta} f(\eta)), \quad u_\varphi = 0, \quad (57)$$

где введены функции

$$f(\eta) = (U + V)\sqrt{\eta} - 2Ug(\eta),$$

$$g(\eta) = \frac{\sqrt{\eta} E_1(\text{Re} \eta/2)}{2E_1(\text{Re}/2)} + \frac{\exp(-\text{Re}/2) - \exp(-\text{Re} \eta/2)}{\sqrt{\eta} \text{Re} E_1(\text{Re}/2)},$$

$$E_1(q) = \int_q^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du. \quad (58)$$

Поля температуры и концентрации описываются, как и ранее, выражениями (12), в которых интегралы (13) и

(14) теперь принимают следующий вид:

$$I_T(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[2P_f \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 \eta' \right] \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (59)$$

$$I_C(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[2P_f \frac{D_T}{D_C} \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 \frac{D_T}{D_C} \eta' \right] \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (60)$$

где P_0 определяется формулой (15).

Компоненты скорости (19) для трёхмерного пространства также остаются в силе, изменяется лишь зависящий от числа Рейнольдса коэффициент $a(Re)$. Действительно, для трёхмерного случая вместо соотношения (20) имеем

$$a(Re) = \frac{\exp(-Re/2)}{E_1(Re/2)}. \quad (61)$$

Во всех остальных выражениях линейной теории устойчивости (см. раздел 4) присутствует лишь зависимость от коэффициента $\alpha(Re)$. Поэтому выражения (34), (46) и (48), составляющие основной результат проведённого нами анализа, сохраняются в трёхмерном случае при замене коэффициента $a(Re)$ зависимостью (61).

5.4. Замечания. Особенности и расширение теории

Уравнения Оззена (6) для приближённого описания гидродинамического переноса справедливы, вообще говоря, при малых значениях числа Рейнольдса (а значит, и потокового числа Пекле P_f). Это приближение используется с целью получения аналитического решения задачи об обтекании дендрита вязкой жидкостью. Из теории известно другое аналитическое решение задачи для параболического дендрита, получаемое при использовании модели идеальной жидкости [31]. Это решение, справедливое при $Re \gg 1$, в двумерном случае, согласно работе [31], имеет следующий вид:

$$u_\eta = -\frac{(U+V)\sqrt{\eta}-U}{\sqrt{\xi+\eta}}, \quad u_\xi = \sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}(U+V). \quad (62)$$

Таким образом, известно решение для двух асимптотических случаев: выражения (8) справедливы при $Re = \rho U/v \ll 1$, а выражения (62) — при $Re \gg 1$. Возникает естественный вопрос о виде решения рассматриваемой задачи в случае всех остальных чисел Рейнольдса.

Для установления пределов применимости найденных решений отметим, прежде всего, что выражения (8), полученные для вязкой жидкости, переходят в выражения (62), найденные для идеальной жидкости, при $g = 1$. Функция g , формально зависящая и от числа Рейнольдса, $g = g(\eta, Re)$, стремится к единице при его увеличении (при $Re \rightarrow \infty$) для фиксированных значений координаты $\eta > 1$. Отсюда следует, что решения (8), найденные для малых чисел Рейнольдса, переходят в решения (62), полученные для больших чисел Рейнольдса. Поскольку приближение Оззена (а значит, и формулы (8)) хорошо согласуется с численным решением уравнений Навье–Стокса при числах Рейнольдса до значений $Re \sim 1$ [30], можно считать, что выражения (8) адекватно описывают процесс в широком диапазоне значений Re — от малых величин до больших. Это подтверждено в работе [83], где показано, что теоретическое описание течения в прибли-

жении Оззена согласуется с экспериментальными данными при больших числах Рейнольдса. Аналогичные рассуждения справедливы и для трёхмерной постановки задачи. Поэтому формальные ограничения, сужающие рамки применимости рассматриваемой теории по потоковым числам Рейнольдса $Re = \rho U/v$ и Пекле $P_f = \rho U/(2D_T)$, с учётом вышесказанного снимаются для набегающего ламинарного потока жидкости.

Сделаем два существенных замечания относительно рассматриваемой теории.

Во-первых, критерии (46) и (48) устойчивого роста дендрита в бинарной системе с конвекцией могут быть протестированы на соответствие результатам компьютерного моделирования. Такое тестирование может быть проведено, например, с помощью метода фазового поля, развитого для свободного дендритного роста с конвекцией в однокомпонентной системе [42, 84]. Найденные критерии устойчивости могут быть, кроме того, протестированы экспериментально, так же как в случае дендритного роста с вынужденным течением прозрачной жидкости [60].

Во-вторых, применение критериев (46) и (48) ограничено относительно малыми значениями ростового числа Пекле $P_g = \rho V/(2D_T)$. Иными словами, результаты проведённого анализа дендритного роста справедливы лишь при малых градиентах или переохлаждениях жидкости, обеспечивающих малые скорости роста V дендритного кристалла. Для расширенного анализа при повышенных скоростях роста и произвольных числах Пекле P_g требуется специально рассмотреть устойчивость высокоскоростных режимов дендритного затвердевания. Получение и анализ условия микроскопической разрешимости для высокоскоростного режима роста могут быть, например, проведены аналогично выполненным в рамках гипотезы маргинальной устойчивости [85, 86]. В частности, критерий отбора для роста дендрита в постановке задачи тепломассопереноса с конвекцией и анизотропией поверхности натяжения при произвольных числах Пекле определён в [87]:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \beta^{7/4}}{1 + b(\alpha \beta^{-3/4})^{11/14}} \left[\frac{1}{(1 + a_1 \sqrt{\beta} P_g)^2} + \frac{1}{(1 + a_2 \sqrt{\beta} P_g D_T / D_C)^2} \frac{2mC_i(1 - k_0) D_T}{(Q/c_p) D_C} \right], \quad (63)$$

где постоянные a_1 и a_2 имеют вид

$$a_1 \approx 0,381\sigma_0^{1/2}, \quad a_2 \approx 0,505\sigma_0^{1/2},$$

а параметры P и α заданы выражениями (33) и (35) соответственно. Постоянные σ_0 и b , входящие в критерий устойчивости (63), могут быть получены из асимптотического анализа, результатов моделирования по методу фазового поля [42, 84] или по данным экспериментальных исследований [82] (см. раздел 5.2). Обобщённый критерий устойчивости (63) отличается от критерия (46) наличием дополнительной квадратичной зависимости от ростового числа Пекле во вкладах от тепломассопереноса и переноса вещества (см. знаменатели в круглых скобках в правой части (63)). Эта зависимость качественно и количественно изменяет поведение радиуса вершины и скорости роста дендрита при повышенных значениях ростового числа Пекле [87].

Рассматриваемая теория может быть использована для нахождения скорости устойчивого роста дендритов в многокомпонентных системах. В качестве примера приведём критерий σ^* , полученный в работе [88] в отсутствие конвекции:

$$\sigma^* = \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 V} = \sigma_0 \beta^{7/4} \left[1 + 2 \frac{D_T c_p}{Q} \sum_{j=1}^N \frac{m_j C_{ij}(1 - k_{0j})}{D_{Cj}} \right], \quad (64)$$

где N — число примесных компонентов, m_j , C_{ij} , k_{0j} и D_{Cj} — соответственно коэффициент наклона линии ликвидус, поверхностная концентрация, коэффициент распределения примеси и коэффициент диффузии примеси j -го компонента.

С помощью методов, развитых в работе [87], критерии устойчивости (63) и (64) могут быть сведены к единому критерию. Этот критерий, который определяет условия устойчивого роста вершины дендрита в неизотермической многокомпонентной системе с конвекцией при произвольном числе Рейнольдса (в ламинарной области течения) и произвольном числе Пекле, имеет вид

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \beta^{7/4}}{1 + b(\alpha \beta^{-3/4})^{11/14}} \left[\frac{1}{(1 + a_1 \sqrt{\beta} P_g)^2} + 2 \frac{D_T c_p}{Q} \sum_{j=1}^N \frac{m_j C_{ij}(1 - k_{0j})}{D_{Cj}(1 + a_2 \sqrt{\beta} P_g D_T / D_{Cj})^2} \right]. \quad (65)$$

В качестве расширения рассматриваемой теории отметим её распространение на описание процессов роста кристаллоподобных образований дендритного типа на поверхности твёрдого ядра Земли. В этом случае при анализе микроскопической разрешимости учитывается влияние давления и малость чисел Пекле [89]. Найденный в [89] критерий устойчивого кристаллического роста устанавливает связь между теплофизическими свойствами границы раздела жидкой и твёрдой частей земного ядра и позволяет количественно оценить коэффициент динамической вязкости жидкого ядра Земли.

6. Количественные оценки модели

6.1 Модель для определения скорости роста и радиуса вершины дендрита

Следуя теории, описанной в разделах 3–5, сформулируем модель для определения основных параметров роста дендрита: скорости и радиуса его вершины. Для этого рассмотрим дендрит, растущий со скоростью V в направлении, противоположном натекающему на него потоку вязкой жидкости с однородной скоростью U , при заданном переохлаждении ΔT (рис. 8). Радиус и скорость роста вершины дендрита, являющиеся главными параметрами роста первичных кристаллов, находятся из стационарной модели осесимметричного дендритного роста в переохлаждённом расплаве [9]. Выражение для полного переохлаждения $\Delta T = T_0 - mC_\infty - T_\infty$, представляющее собой первое уравнение модели, содержит вклады, показанные на рис. 8. Здесь C_∞ и T_∞ — соответственно начальные концентрация и температура, сохраняющиеся постоянными вдали от вершины

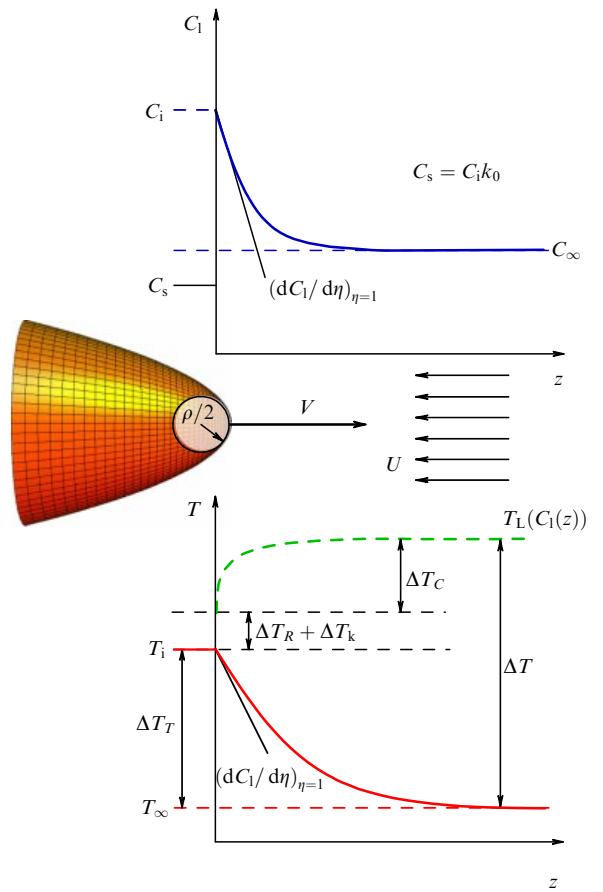


Рис. 8. Профили концентрации $C(z)$ и температуры $T(z)$ перед параболоидальной вершиной дендрита. Вершина с радиусом $\rho/2$ растёт со скоростью V против встречного потока жидкости, имеющего скорость U . Полное переохлаждение $\Delta T = T_L - T_\infty$ является экспериментально измеряемой величиной (T_L — температура линии ликвидуса, T_∞ — температура вдали от вершины дендрита), $dC_l/d\eta$ и $dT_l/d\eta$ — градиенты концентрации и температуры на поверхности дендрита ($\eta = 1$), определяемые выражениями (10) и (11).

дендрита во время его стационарного роста. Далее, запишем уравнение баланса на вершине дендрита (см. рис. 8):

$$\Delta T = \Delta T_T + \Delta T_C + \Delta T_R + \Delta T_k. \quad (66)$$

Термическое переохлаждение ΔT_T в уравнении (66) представляется в виде

$$\Delta T_T \equiv T_i - T_\infty = \frac{Q}{c_p} \text{Iv}(P_g, P_f), \quad (67)$$

где модифицированная функция Иванцова $\text{Iv}(P_g, P_f)$, определяемая выражением (16), имеет вид

$$\text{Iv}(P_g, P_f) = P_g \exp(P_g + P_f) I_T(\infty). \quad (68)$$

Интеграл I_T описывает кондуктивный и конвективный механизмы теплопереноса: для роста параболической пластины (в двумерном пространстве) он определяется выражением (13), а для роста параболоида вращения (в трёхмерном пространстве) — выражением (59). Тепловые числа Пекле P_g и P_f соответственно для растущей вершины дендрита и конвективного течения жидкости определены выражениями (15).

Вклад ΔT_C в переохлаждение (66), обусловленный смещением температуры на границе раздела из-за наличия примеси, выражается как

$$\Delta T_C = m \frac{C_\infty(1 - k_0) \text{Iv}(P_{\text{cg}}, P_{\text{cf}})}{1 - (1 - k_0) \text{Iv}(P_{\text{cg}}, P_{\text{cf}})}, \quad (69)$$

где модифицированная функция Иванцова имеет вид

$$\text{Iv}(P_{\text{cg}}, P_{\text{cf}}) = P_{\text{cg}} \exp(P_{\text{cg}} + P_{\text{cf}}) I_C(\infty). \quad (70)$$

Здесь интеграл I_C для роста параболической пластины в двумерном пространстве даётся выражением (14), а для роста параболоида вращения в трёхмерном пространстве — выражением (60). Концентрационные (химические) числа Пекле имеют вид

$$P_{\text{cg}} = P_g \frac{D_T}{D_C} \equiv \frac{\rho V}{2D_C}, \quad P_{\text{cf}} = P_f \frac{D_T}{D_C} \equiv \frac{\rho U}{2D_C} \quad (71)$$

соответственно для растущей вершины дендрита и набегающего на него конвективного потока жидкости. Функция $g(\eta)$ в выражениях для течения вязкой жидкости определена для параболической пластины выражением (9) (в двумерном пространстве), а для роста параболоида вращения — выражением (58) (в трёхмерном пространстве).

Последние вклады в баланс (66) находятся следующим образом. Вклад ΔT_R , возникающий на вершине дендрита из-за искривления межфазной границы (эффект Гиббса – Томсона), выражается как

$$\Delta T_R = \frac{2d_0 Q}{c_p \rho}. \quad (72)$$

Вклад, определяющий интенсивность атомной кинетики вследствие кинетического переохлаждения ΔT_k , имеет вид

$$\Delta T_k = \frac{V}{\mu_k}, \quad (73)$$

где кинетический коэффициент μ_k характеризует механизм присоединения атомов к границе раздела фаз.

Баланс переохлаждений (66) является первым уравнением для нахождения двух параметров роста: скорости V и радиуса $\rho/2$ вершины дендрита. Вторым соотношением для определения V и ρ является условие отбора (46) для устойчивой моды стационарного роста вершины дендрита в вязкой жидкости, которое представим в следующем виде:

$$\sigma^* \equiv \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 V} = \sigma_0^*(\beta) \left[\frac{1}{2} - m C_i (1 - k_0) \frac{D_T c_p}{Q D_C} \right]. \quad (74)$$

Здесь C_i — концентрация примеси в жидкости на вершине дендрита (см. рис. 8),

$$C_i = \frac{C_\infty}{1 - (1 - k_0) \text{Iv}(P_{\text{cg}}, P_{\text{cf}})}, \quad (75)$$

$\sigma_0^*(\beta)$ — параметр анизотропии, зависящий от величины $\beta = 15 \epsilon_c$, где ϵ_c — анизотропия межфазной границы,

$$\sigma_0^*(\beta) = \frac{2\sigma_0 \beta^{7/4}}{1 + b(\beta^{-3/4} \alpha_0(\text{Re}))^{11/14}}, \quad (76)$$

Таблица. Параметры сплава TiAl (по материалам работы [91])

Параметр	Величина
T_0 — температура затвердевания, К	1748
C_∞ — концентрация примеси, ат. %	55
k_0 — коэффициент распределения	0,8
m — наклон линии ликвидус, К (ат. %) $^{-1}$	8,8
D_C — коэффициент диффузии в жидкости, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$	$8,27 \times 10^{-9}$
D_T — температуропроводность, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$	$7,5 \times 10^{-6}$
v — кинематическая вязкость жидкости, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$	$0,5 \times 10^{-7}$
U — скорость течения, м с^{-1}	0,6
Q — скрытая теплота затвердевания, Дж моль $^{-1}$	12268,8
c_p — теплёмкость, Дж (моль К) $^{-1}$	45
d_0 — капиллярная постоянная, м	$7,8 \times 10^{-10}$
μ_k — кинетический коэффициент на межфазной поверхности, м (с К) $^{-1}$	0,209
ϵ_c — анизотропия поверхностной энергии	0,01
σ_0 — постоянная анизотропии	10,0
b — параметр устойчивости	0,1

где σ_0 и b — численные постоянные. Для набегающего потока справедливо выражение

$$\alpha_0(\text{Re}) = \frac{d_0 U a(\text{Re}) [1 + D_C / (2D_T)]}{4\rho V [D_C / (2D_T) + m C_i (1 - k_0) c_p / Q]}, \quad (77)$$

включающее в себя параметр $a(\text{Re})$, определённый для двумерного случая выражением (20), а для трёхмерного — выражением (61).

6.2. Поведение основных функций

Дадим количественную оценку параметров дендритного роста и сравним их с данными, полученными при численном моделировании методом фазового поля [90]. Параметры системы, принятые при расчётах, приведены в таблице.

6.2.1. Модифицированная функция Иванцова. Рисунок 9 иллюстрирует решение уравнения (68) с учётом функций (9), (13) и (15) для модифицированной функции Иванцова. Видно, что вклад термического переохлаждения, $\Delta T_T \propto \text{Iv}(P_g, P_f)$, становится меньше в системе с конвективным и кондуктивным переносом (по сравнению с аналогичным вкладом в системе, в которой доминирует чисто кондуктивный теплоперенос). Это обусловлено тем, что набегающий на кристалл поток жидкости усиливает теплопередачу и уменьшает требуемый тепловой вклад ΔT_T для заданной скорости роста вершины V . Подобная тенденция существует также при использовании решения задачи о натекании на дендрит идеальной жидкости [67]. Понижение вязкости приводит к уменьшению функции Иванцова при фиксированном ростовом числе Пекле (см. рис. 9). Это свидетельствует о возрастающем влиянии конвекции на рост дендрита при понижении вязкости жидкости. Кроме того, рис. 9 подтверждает ранее обсуждавшуюся значимость [15, 17, 47] эффекта конвективного теплопереноса в случае, когда скорость набегающего потока жидкости сравнима со скоростью роста вершины дендрита или меньше её.

Модифицированная функция Иванцова (68) определяет неограниченное семейство решений, устанавливающих связь между переохлаждением ΔT , ростовым и потоковым числами Пекле, задаваемыми соотношениями (15). Для нахождения влияния конвекции отдельно на скорость роста V вершины дендрита и отдельно на

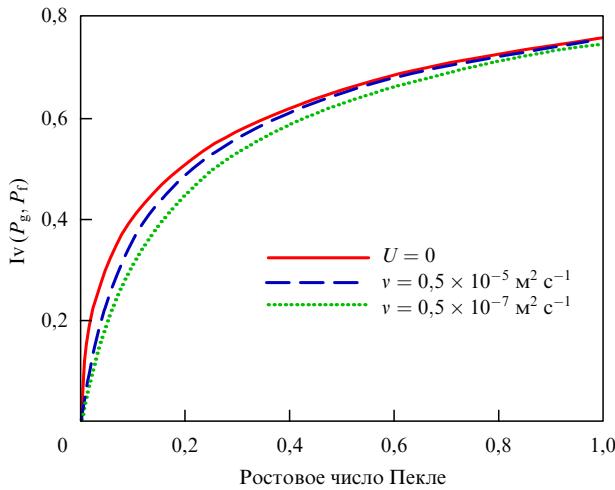


Рис. 9. Модифицированная функция Иванцова $Iv(P_g, P_f)$ в зависимости от ростового числа Пекле P_g при наличии вынужденного конвективного течения жидкости с разной кинематической вязкостью v . Кривые даны для значений потокового числа Пекле $P_f = v \operatorname{Re}/(2D_T)$. Вычисления для функции Iv выполнены для двумерного роста по уравнениям (68) с учётом функций (9), (13) и (15), а также в сопоставлении со стандартной функцией Иванцова $Iv(P_g, P_f = 0)$ для неподвижной жидкости при $U = 0$.

радиус $\rho/2$ его вершины необходимо дополнительно использовать критерий отбора (74)–(77).

6.2.2. Скорость роста и радиус вершины дендрита. Решение полной модели (66)–(77) позволяет определить два главных параметра: скорость роста V и радиус вершины $\rho/2$ дендрита, стационарные значения которых определяют первичную кристаллическую структуру. В этом разделе приведены результаты тестирования параметров V и $\rho/2$, найденных из решения задачи для двумерного дендрита.

Рисунок 10 показывает действие потока расплава, натекающего на дендрит. Конвективное течение жидкости (сплошная кривая) увеличивает скорость роста вершины дендрита по сравнению с таковой в случае

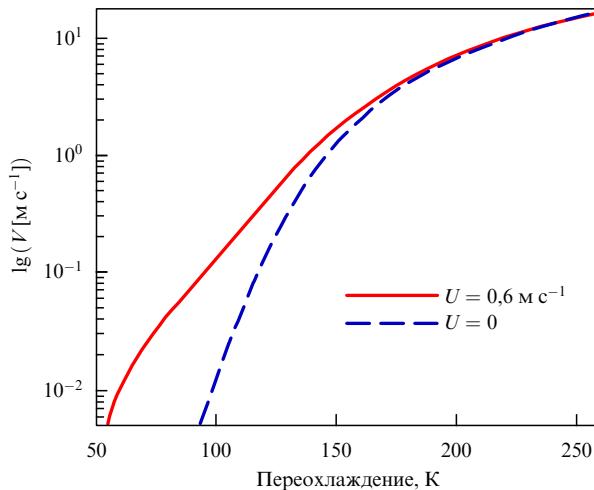


Рис. 10. Логарифм скорости роста $lg(V [\text{м} \text{с}^{-1}])$ дендрита как функция переохлаждения ΔT для роста двумерной параболической пластины в неподвижной среде ($U = 0$) и во встречном конвективном потоке, имеющем скорость $U = 0,6 \text{ м} \text{с}^{-1}$.

неподвижного расплава (штриховая кривая). Общая тенденция такова, что влияние течения становится наиболее значимым при небольших скоростях роста и переохлаждениях, когда скорость потока сравнима со скоростью роста дендрита или превосходит её, $U \gtrsim V$. Из данных, приведённых на рис. 10, можно оценить, что при скорости потока $U = 0,6 \text{ м} \text{с}^{-1}$ скорость роста вершины увеличивается приблизительно на порядок при переохлаждении $\Delta T = 100 \text{ K}$: от 0,015 до $0,15 \text{ м} \text{с}^{-1}$.

Отметим, что результаты расчётов, представленные на рис. 10, непосредственно относятся к набегающему на дендрит течению, показанному на рис. 8. Аналогично можно рассмотреть вершину дендрита, находящуюся во встречном потоке течения, как это было ранее сделано методом фазового поля [41, 42]. Влияние течения на рост дендритов показано на рис. 11, где приведены результаты трёхмерного моделирования дендрита, растущего в переохлаждённом расплаве никеля. В случае неподвижного расплава дендрит имеет геометрически равноразвитые ветви (рис. 11a), тогда как течение с верхней плоскости расчётной области приводит к увеличению скорости роста и длины ветви дендрита, расположенной вдоль потока (рис. 11b). Наличие течения приводит к сжатию теплового пограничного слоя перед выступающей ветвью дендрита и, соответственно, к большему температурному градиенту и более быстрому теплоотводу по сравнению с таковыми в нижней части дендрита. Действительно, вокруг нижней ветви дендрита формируется протяжённый тепловой слой в зоне неподвижного расплава под дендритом (в нижней части расчётной области на рис. 11b).

Расчётный радиус параболического дендрита приведён на рис. 12. Видно, что этот радиус уменьшается при учёте конвекции, которая утоньшает дендрит. Качественным следствием является то, что растущие против потока ветви дендрита становятся тоньше ветвей, растущих в неподвижной переохлаждённой жидкости. Поэтому "тонкие" дендриты растут быстрее "широких" в диапазоне переохлаждений, где скорость потока жидкости сравнима со скоростью роста вершины, $U \gtrsim V$. Из результатов, представленных на рис. 12, можно получить

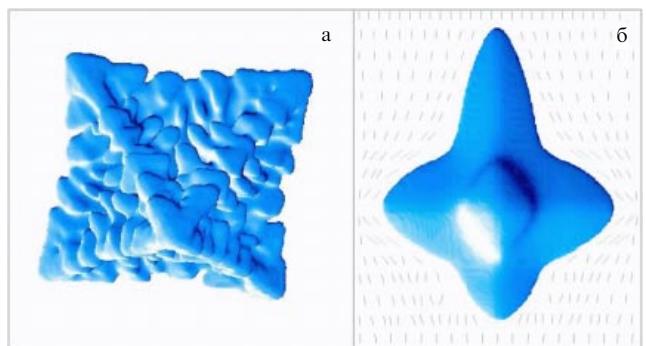


Рис. 11. Результаты моделирования дендритного кристалла, растущего в переохлаждённом расплаве никеля. Расчёты сделаны методом фазового поля в трёх пространственных измерениях [43]. (а) Дендритная структура без конвективного потока. Ветвление обусловлено наличием стохастического шума в кинетике границы раздела фаз. (б) Структура дендрита, растущего во встречном конвективном потоке (скорость потока $0,3 \text{ м} \text{с}^{-1}$), направленном от верхней поверхности расчётной области к нижней. Стохастический шум на границе раздела фаз отсутствует.

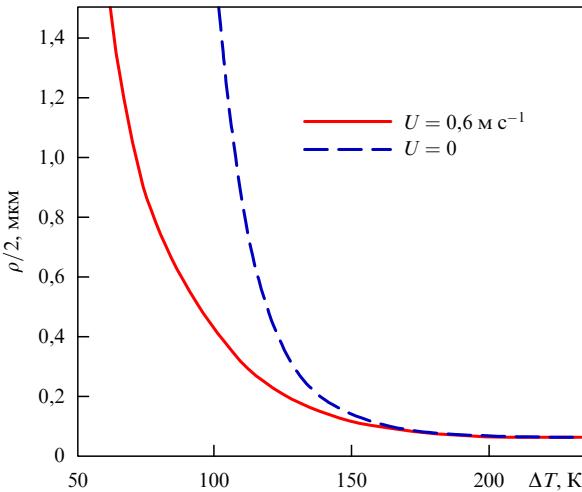


Рис. 12. Радиус $\rho/2$ вершины дендрита для растущей параболической двумерной пластины как функция переохлаждения ΔT в неподвижной среде ($U = 0$) и при наличии конвективного потока, набегающего на дендрит со скоростью $U = 0,6 \text{ м с}^{-1}$.

следующую оценку скоростей: при переохлаждении $\Delta T = 100 \text{ К}$ и скорости потока жидкости $U = 0,6 \text{ м с}^{-1}$ скорость роста вершины параболического кристалла увеличивается от $3,8 \times 10^{-7}$ до $1,3 \times 10^{-6} \text{ м с}^{-1}$, т.е. скорость роста дендрита увеличивается приблизительно на порядок величины. Как видно из рис. 10 и 12, при больших переохлаждениях, $\Delta T > 175 \text{ К}$, встречный поток не оказывает влияния на оба параметра дендритного роста, V и ρ (при использовании параметров сплава Ti-Al, приведённых в таблице). Течение влияет на кинетику кристаллизации и форму кристалла только в диапазоне скоростей роста, сопоставимых по величине со скоростью набегающего потока.

7. Сравнение предсказаний теории с экспериментальными результатами

Кондуктивный (молекулярный) и конвективный перенос тепла и массы во фронте затвердевания контролирует динамику кристаллического роста. Поэтому уменьшение или полное подавление конвективного переноса в условиях пониженной гравитации может существенно влиять на кристаллическую микроструктуру затвердевающих образцов. В связи с этим экспериментальные данные по кинетике роста кристаллов являются тестом для теоретических моделей при определении влияния вынужденной конвекции на формирование микроструктуры в наземных условиях и условиях микрогравитации [34, 44–46, 48, 49, 56, 67].

При электромагнитной левитации возникающая сила Лоренца поднимает образец, расплавляет его и индуцирует перемешивание в нём расплава (см. раздел 2). Однако устанавливающаяся в условиях микрогравитации сила Лоренца должна быть существенно меньше, чем в наземных экспериментах, что уменьшает интенсивность конвекции в каплях, обрабатываемых в электромагнитном левитаторе. Как показали эксперименты и расчёты [48], рост дендритов в каплях Ni-Al замедляется в экспериментах на ЭМЛ в условиях пониженной гравитации в диапазоне переохлаждения $\Delta T < 100 \text{ К}$. При этом кристаллическая структура становится более одно-

родной и содержит измельчённые зёрна. При большем переохлаждении, $\Delta T > 100 \text{ К}$, скорость дендритного роста в каплях Ni-Al существенно превышает скорость конвективных потоков как при микрогравитации, так и в наземных условиях. Поэтому скорость кристаллического роста (измеряемая по прохождению фронта рекалесценции (см. методику в работах [9, 17, 67])) и структура затвердевших образцов оказываются одинаковыми в экспериментах обоих типов.

Количественная проверка описанной теоретической модели (см. раздел 6.1) может быть проведена посредством сопоставления её результатов с данными по кинетике кристаллизации и морфологии роста дендритов в металл-металлоидной системе Ni_2B [67]. Известно, что кристаллы Ni_2B занимают промежуточное положение между кристаллами, растущими по механизму нормального роста с атомно-шероховатыми гранями, и кристаллами, растущими по механизму тангенциального или ступенчатого роста с атомно-гладкими гранями. Поэтому изменение управляющих параметров роста или внешних условий роста кристаллов Ni_2B может привести или к атомно-шероховатой поверхности роста с макроскопически округлыми формами ветвей дендритов, или к атомно-гладкой поверхности роста с макроскопически огранённой формой ветвей дендритов.

На рисунке 13 представлены экспериментальные данные по скорости дендритного роста как функции переохлаждения, полученные на кристаллизующихся каплях в электростатическом левитаторе (тёмные кружки) и электромагнитном левитаторе (светлые квадраты) [92]. Целью этих экспериментов являлось определение влияния вынужденной конвекции на скорость роста и морфологический переход в форме роста кристаллов Ni_2B . Как видно из рис. 13, скорости роста дендритов, определённые на обеих установках, ЭСЛ и ЭМЛ, почти совпадают как при самых малых, так и при больших значениях переохлаждения. Этот результат соответствует предельным случаям, в которых влияние конвекции затухает, а именно: 1) скорости роста убывают, стремясь к нулю (при $\Delta T \rightarrow 0$); 2) скорости роста дендритов в несколько раз превышают скорость жидкости ($V \gg U$).

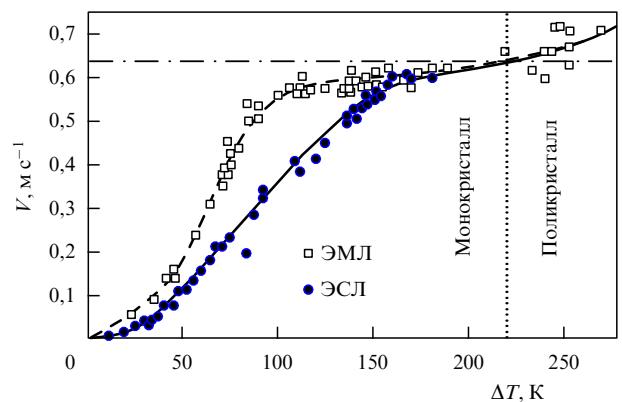


Рис. 13. Экспериментальные данные (показаны различными символами) по скорости роста V дендритных кристаллов Ni_2B в зависимости от начального переохлаждения ΔT [92]. Измерения выполнены для различной интенсивности вынужденной конвекции: в электростатическом левитаторе в отсутствие конвекции, $U \approx 0$, и в электромагнитном левитаторе при конвективном потоке со средней скоростью $U \approx 0,25 \text{ м с}^{-1}$. Кривые соответствуют результатам расчётов по уравнениям (66)–(77).

Однако в промежуточном диапазоне переохлаждения, $30 \leq \Delta T \leq 180$ К, скорости роста существенно различаются. Как отмечено в разделе 2, скорости конвективного течения в образцах, обрабатываемых в ЭСЛ, существенно меньше, чем в аналогичных капельных образцах, обрабатываемых в ЭМЛ, где скорости течения сопоставимы со скоростью роста кристаллов. Это приводит к увеличению скорости роста в ЭМЛ-образцах, если основное направление конвективного потока жидкой фазы противоположно основному направлению роста кристаллов.

Примем схему роста дендрита во встречном конвективном потоке, показанную на рис. 5 и 8. С использованием основных уравнений модели (66)–(77), а также кристаллографических и теплофизических параметров фазы Ni₂B (см. данные работы [92]) были рассчитаны скорости дендритного роста как функции переохлаждения. В дополнение к этой системе уравнений были учтены особенности кинетической фазовой диаграммы, определяемые наклоном линии ликвидус и коэффициентом сегregation в функциях скорости роста кристаллов Ni₂B [92, 93]. Результаты расчётов представлены на рис. 13 сплошной кривой для экспериментов в ЭСЛ (вынужденная конвекция отсутствует, $U = 0$) и штриховой кривой для экспериментов в ЭМЛ. Для расчётов кристаллизации образцов, затвердевавших в ЭМЛ, принималось значение скорости вынужденной конвекции $U \approx 0,25$ м с⁻¹ (определенное в работах [65, 67]). Из рисунка 13 видно, что модель дендритного роста с конвекцией (см. раздел 6) описывает экспериментальные данные по кинетике роста образцов, обработанных и кристаллизованных в ЭСЛ и ЭМЛ, с хорошей точностью. Этого удалось достичь благодаря введению в модель вынужденного конвективного течения. Например, параметр устойчивости (74), который существенно влияет на кинетику роста в указанном диапазоне переохлаждения и скорость роста дендритов, изменяется от $\sigma^* = 5,0 \times 10^{-5}$ для ЭМЛ до $\sigma^* = 1,0 \times 10^{-4}$ в случае ЭСЛ при уменьшении скорости течения от $U = 0,25$ м с⁻¹ в ЭМЛ до практически нулевой скорости в ЭСЛ.

Конвекция влияет не только на кинетику роста, но и на форму роста и даже на морфологию кристаллов сплава Ni₂B. Как показано в работе [92], капельные образцы, кристаллизованные в ЭСЛ, имеют регулярную структуру с макроскопически округлыми вершинами дендритов (что является признаком растущих атомно-шероховатых граней кристалла). Напротив, образцы сплава Ni₂B, кристаллизованные в ЭМЛ, обладают огранённой структурой монокристалла (что является признаком растущих атомно-гладких кристаллических граней). Этот монокристалл Ni₂B имеет скелетную морфологию (согласно терминологии из монографии [94]), аналогичную известной морфологии кристаллов висмута. Структура скелетного кристалла Ni₂B является неупорядоченной, иррегулярной, и растёт в конвективном потоке при переохлаждении $\Delta T \lesssim 225$ К (т.е. в области ΔT , расположенной слева от вертикальной пунктирной прямой на рис. 13). При больших переохлаждениях, $\Delta T \gtrsim 225$ К, когда влияние конвекции вырождается вследствие высокой скорости роста кристаллов, скелетная морфология и огранённая форма сменяются поликристаллическим ансамблем дендритов (в области ΔT , расположенной справа от вертикальной пунктирной прямой на рис. 13).

Таким образом, установлено, что вынужденная конвекция увеличивает скорость роста кристаллов Ni₂B, стабилизирует рост атомно-гладких граней и приводит к изменению макроскопической формы роста: меняется габитус кристалла — скелетный монокристалл приобретает дендритное строение с увеличением скорости роста. Теоретические предсказания, основанные на расчётах по уравнениям модели (66)–(77), количественно соответствуют данным экспериментов по скорости роста кристаллов с конвекцией и без неё (см. рис. 13, а также детали расчётов в работе [92]). Применимость теории подтверждена согласием её предсказаний с экспериментальными данными, полученными в наземных условиях и условиях пониженной гравитации на установках ЭМЛ, ЭСЛ и капельного флюксования (melt fluxing technique) [93]. Для дальнейшего развития исследований и независимой проверки адекватности моделей данным экспериментов по изменению морфологии растущих кристаллов необходимо проведение численного моделирования затвердевания с учётом анизотропных свойств подвижной поверхности жидкость — кристалл и конвективного течения.

8. Заключение

На основании рассмотренной теории и экспериментальных данных в настоящем обзоре сформулирован подход к исследованию проблемы дендритного роста кристаллов с конвекцией жидкой фазы. Приведено аналитическое решение задачи об отборе устойчивого режима вершины дендрита, растущего в бинарной системе при вынужденном конвективном течении жидкости.

Анализ устойчивого режима приводит к критерию роста вершины дендритного кристалла в бинарной системе с учётом конвекции и анизотропии поверхности натяжения на границе кристалл — расплав. Критерий устойчивого роста может быть расширен для произвольных чисел Пекле P_g [87], а также для описания роста дендритных кристаллов на поверхности твёрдого ядра Земли, соприкасающейся с её жидким ядром [89].

С учётом критерия роста вершины дендрита приведена модель для качественного анализа и количественного расчёта влияния течения жидкости на параметры дендритного роста (см. выражения (66)–(77)). Модель описывает рост кристаллов в вязкой и слабовязкой жидкости, поэтому её результаты применимы к реальным растворам и расплавам. В частности, при уменьшении вязкости жидкой фазы влияние конвекции на скорость роста дендрита становится более значительным для широкого диапазона переохлаждений (см. рис. 9).

Модель роста дендритного кристалла включает в себя следующие предельные случаи:

- уравнения для дендритного роста в идеальной жидкости, т.е. при нулевой вязкости, $\nu \rightarrow 0$ (соответствующие решениям работы [31]);

- уравнения для дендритного роста в однокомпонентной переохлаждённой системе при нулевой концентрации второго компонента, т.е. при $C_\infty = 0$ (соответствующие решениям работы [32]);

- уравнения для дендритного роста в неподвижной бинарной системе, т.е. при $U = 0$ (соответствующие решениям работы [33]).

Особым предельным случаем модели является расчёт "концентрационного дендрита" (т.е. "химического" или

"примесного" кристалла), растущего в бинарной (из двух химических компонентов) системе при постоянной температуре. Обобщением развивающейся теории является критерий (65), который определяет устойчивый рост вершины дендрита в химически многокомпонентной системе с конвекцией при произвольном ростовом числе Пекле и анизотропии поверхностного натяжения на границе раздела фаз.

Как показано в настоящем обзоре, теория дендритного роста с вынужденной конвекцией применима для:

— проверки результатов численного моделирования дендритного роста;

— интерпретации экспериментальных данных по росту кристаллов в условиях микрогравитации (когда конвективное течение является существенно замедленным) и в наземных условиях проведения натурных исследований (когда существенно возрастает роль конвекции в кинетике кристаллического роста).

Действительно, как показано на примере роста кристаллов из расплава Ni_2B , описанный подход позволяет прогнозировать экспериментальные данные по кинетике кристаллизации, а также морфологические особенности строения кристаллов, зависящие от интенсивности конвективного течения.

Благодарности. Авторы благодарят Дитера Херлаха (Dieter Herlach) за многолетнее сотрудничество по экспериментальному исследованию и моделированию новых материалов, С. Биндера (S. Binder), М. Колбе (M. Kolbe), Х. Мёллера (H. Möller), С. Ройцеля (S. Reutzel), Т. Фолькманна (Th. Volkmann) и Д. Холланда-Морица (D. Holland-Moritz) за экспериментальное тестирование теории и полезные обсуждения результатов тестов. Авторы также выражают благодарность В.С. Юфереву за прочтение рукописи обзора и сделанные им ценные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке лаборатории многомасштабного математического моделирования Уральского федерального университета, Германской службы академических обменов (DAAD), Министерства образования и науки РФ (проект 11.9139.2014), Российского научного фонда, Европейского космического агентства (проект MULTIPHAS, ESA-ELIPS AO-2004-144) и Немецкого аэрокосмического центра (контракт 50WM1140).

Список литературы

1. Чернов А А, в кн. *Современная кристаллография* Т. 3 (Гл. ред. Б К Вайнштейн) (М.: Наука, 1980) с. 3; Chernov A A, in *Modern Crystallography III: Crystal Growth* (Ed.-in-Chief B K Vainshtein) (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
2. Борисов В Т *Теория двухфазной зоны металлического слитка* (М.: Металлургия, 1987)
3. Trivedi R, Kurz W *Int. Mater. Rev.* **39** 49 (1994)
4. Овсиенко Д Е *Зарождение и рост кристаллов из расплава* (Киев: Наукова думка, 1994)
5. Galenko P K, Zhuravlev V A *Physics of Dendrites* (Singapore: World Scientific, 1994)
6. Федоров О П *Процессы роста кристаллов: кинетика, формообразование, неоднородности* (Киев: Наукова думка, 2010)
7. Kurz W, Fisher D J *Fundamentals of Solidification* 3rd ed. (Aedermannsdorf: Trans Tech Publ., 1989)
8. Журавлев В А *Затвердевание и кристаллизация сплавов с гетеропереходами* (М.: Ин-т. компьют. исслед.; РХД, 2006)
9. Herlach D, Galenko P, Holland-Moritz D *Metastable Solids from Undercooled Melts* (Amsterdam: Elsevier, 2007)
10. Herlach D M, Galenko P K, Hartmann H *Rubin Wissenschaftsmag. Ruhr Univ. Bochum* (3–5) 30 (2008)
11. Langer J S *Rev. Mod. Phys.* **52** 1 (1980)
12. Уманцев А Р, Виноградов В В, Борисов В Т *Кристаллография* **31** 1002 (1986); Umantsev A R, Vinogradov V V, Borisov V T *Sov. Phys. Crystallogr.* **31** 596 (1986)
13. Boettinger W J et al. *Annu. Rev. Mater. Res.* **32** 163 (2002)
14. Asta M et al. *Acta Mater.* **57** 941 (2009)
15. Eckler K, Herlach D M *Mater. Sci. Eng. A* **178** 159 (1994)
16. Galenko P K et al. *Mater. Sci. Eng. A* **375–377** 488 (2004)
17. Funke O et al. *J. Cryst. Growth* **297** 211 (2006)
18. Иванцов Г П *ДАН СССР* **58** 567 (1947)
19. Иванцов Г П *ДАН СССР* **83** 573 (1952)
20. Иванцов Г П, в сб. *Рост кристаллов. Материалы Второго совещания по росту кристаллов, Москва, 23 марта–1 апреля 1959 г.* Т. 3 (Отв. ред. А В Шубников, Н Н Шефтель) (М.: Изд-во АН СССР, 1961) с. 75
21. Темкин Д Е *ДАН СССР* **132** 1307 (1960)
22. Темкин Д Е *Кристаллография* **7** 446 (1962)
23. Horvay G, Cahn J W *Acta Metallurg.* **9** 695 (1961)
24. Mullins W W, Sekera R F *J. Appl. Phys.* **35** 444 (1964)
25. Nash G E, Glicksman M E *Acta Metallurg.* **22** 1283 (1974)
26. Langer J S, Müller-Krumbhaar H *Acta Metallurg.* **26** 1681 (1978)
27. Willnecker R, Herlach D M, Feuerbacher B *Phys. Rev. Lett.* **62** 2707 (1989)
28. Kessler D A, Koplik J, Levine H *Adv. Phys.* **37** 255 (1988)
29. Brener E, Melnikov V I *Adv. Phys.* **40** 53 (1991)
30. Dash S K, Gill W N *Int. J. Heat Mass Trans.* **27** 1345 (1984)
31. Benamar M, Bouissou Ph, Pelcé P *J. Cryst. Growth* **92** 97 (1988)
32. Bouissou Ph, Pelcé P *Phys. Rev. A* **40** 6673 (1989)
33. Ben Amar M, Pelcé P *Phys. Rev. A* **39** 4263 (1989)
34. Galenko P K, Herlach D M, in *Phase Transformations in Multicomponent Melts* (Ed. D M Herlach) (Weinheim: Wiley-VCH, 2008) p. 353
35. Herlach D M *Annu. Rev. Mater. Sci.* **21** 23 (1991)
36. Herlach D M et al. *Int. Mater. Rev.* **38** 273 (1993)
37. Herlach D M *Mater. Sci. Eng. R* **12** 177 (1994)
38. Glicksman M E, Koss M B, Winsa E A *Phys. Rev. Lett.* **73** 573 (1994)
39. Mathiesen R H et al. *Metallurg. Mater. Trans. A* **37** 2515 (2006)
40. Ruvalcaba D et al. *Acta Mater.* **55** 4287 (2007)
41. Ramirez J C, Beckermann C *Acta Mater.* **53** 1721 (2005)
42. Jeong J-H, Goldenfeld N, Dantzig J A *Phys. Rev. E* **64** 041602 (2001)
43. Galenko P K et al., in *Computational Modeling and Simulation of Materials III. Proc. of the 3rd Intern. Conf., Acireale, Sicily, Italy, May 30–June 4, 2004* Pt. B (Eds P Vincenzini, A Lami, F Zerbetto) (Faenza: Techna, 2004) p. 565
44. Hyers R W et al. *Ann. New York Acad. Sci.* **1027** 474 (2004)
45. Volkmann Th et al., in *Phase Transformations in Multicomponent Melts* (Ed. D M Herlach) (Weinheim: Wiley-VCH, 2008) p. 227
46. Matson D M et al. *J. Jpn. Soc. Microgr. Appl.* **27** 238 (2010)
47. Herlach D M, Galenko P K *Mater. Sci. Eng. A* **449–451** 34 (2007)
48. Reutzel S et al. *Appl. Phys. Lett.* **91** 041913 (2007)
49. Reutzel S et al., in *Proc. of the 59th Intern. Astronautical Congress, IAC 2008, Glasgow, Scotland, 29 September–3 October 2008* Vol. 1 (Red Hook, NY: Curran Associates, Inc., 2008) p. 593
50. Schwarz M et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 1380 (1994)
51. Karma A *Int. J. Non-Equilibrium Process* **11** 201 (1998)
52. Lipton J, Glicksman M E, Kurz W *Metallurg. Trans. A* **18** 341 (1987)
53. Lipton J, Kurz W, Trivedi R *Acta Metallurg.* **35** 957 (1987)
54. Alexandrov D V, Galenko P K, Herlach D M *J. Cryst. Growth* **312** 2122 (2010)
55. Alexandrov D V, Malygin A P, Galenko P K, in *Proc. 8th Intern. Conf. on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Mauritius, 11–13 July 2011*, p. 299
56. Herlach D M, Galenko P K *J. Jpn. Soc. Microgr. Appl.* **27** 245 (2010)
57. Davidoff E et al. *Acta Mater.* **61** 1078 (2013)
58. Chan S-K, Reimer H H, Kahlweit M J. *J. Cryst. Growth* **32** 303 (1976)
59. Huang S-C, Glicksman M E *Acta Metallurg.* **29** 701 (1981)
60. Emsellem V, Tabeling P *J. Cryst. Growth* **156** 285 (1995)

61. Herlach D M, Matson D M (Eds) *Solidification of Containerless Undercooled Melts* (Weinheim: Wiley-VCH, 2012)
62. Meister T et al. *Control Eng. Practice* **11** (2) 117 (2003)
63. Flemings M C et al. "Levitation observation of dendrite evolution in steel ternary alloy rapid solidification (LODESTARS)", NASA Science Requirement Document LODESTARS-RQMT-0001 (Washington, DC: NASA, 2003)
64. Matson D M, Hyers R W, Volkmann Th J. *Jpn. Soc. Microgr. Appl.* **27** (4) 238 (2010)
65. Hyers R W, in *Solidification of Containerless Undercooled Melts* (Eds D M Herlach, D M Matson) (Weinheim: Wiley-VCH, 2012) p. 31
66. Tourret D et al. *Acta Mater.* **59** 4665 (2011)
67. Binder S, PhD Thesis (Bochum: Ruhr Univ., 2010)
68. Bojarevich V, Kao A, Pericleous K, in *Solidification of Containerless Undercooled Melts* (Eds D M Herlach, D M Matson) (Weinheim: Wiley-VCH, 2012) p. 321
69. Meirmanov A M *The Stefan Problem* (Berlin: Walter de Gruyter, 1992)
70. Gupta S C *Classical Stefan Problem* (Amsterdam: Elsevier, 2003)
71. Lamb H (Sir) *Hydrodynamics* (New York: Dover Publ., 1945); Ламб Г *Гидродинамика* (М.-Л.: Гостехиздат, 1947)
72. Kochin N E, Кибелль И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Ч. 2 (Л.-М.: Гостехиздат, 1948); Kochin N E, Kibel' I A, Roze N V *Theoretical Hydromechanics* (New York: Interscience Publ., 1964)
73. Kessler D A, Koplik J, Levine H *Phys. Rev. A* **33** 3352 (1986)
74. Barbieri A, Langer J S *Phys. Rev. A* **39** 5314 (1989)
75. Pelce P, Bensimon D *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **2** 259 (1987)
76. Pelcé P (Ed.) *Dynamics of Curved Fronts* (Boston: Academic Press, 1988)
77. Fröman N, Fröman P O *JWKB Approximation: Contributions to the Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1965); Фрёман Н, Фрёман П У *ВКБ-приближение* (М.: Мир, 1967)
78. Zel'dovich Ya B et al. *Combust. Sci. Technol.* **24** 1 (1980)
79. Caroli B et al. *Phys. Rev. A* **33** 442 (1986)
80. Galenko P et al. *Acta Mater.* **55** 6834 (2007)
81. Galenko P et al. *Acta Mater.* **57** 6166 (2009)
82. Bouissou P, Perrin B, Tabeling P *Phys. Rev. A* **40** 509(R) (1989)
83. Kurnatowski M, Grillenbeck Th, Kassner K *Phys. Rev. E* **87** 042405 (2013)
84. Tong X et al. *Phys. Rev. E* **63** 061601 (2001)
85. Trivedi R, Kurz W *Acta Metallurg.* **34** 1663 (1986)
86. Galenko P K, Danilov D A *Phys. Rev. E* **69** 051608 (2004)
87. Alexandrov D V, Galenko P K *Phys. Rev. E* **87** 062403 (2013)
88. Александров Д В, Пингин Д А *ЖТФ* **83** (3) 1 (2013); Alexandrov D V, Pinigin D A *Tech. Phys.* **58** 309 (2013)
89. Alexandrov D V, Galenko P K *J. Phys. A Math. Theor.* **46** 195101 (2013)
90. Galenko P K, Binder S, Ehlen G J, in *Solidification of Containerless Undercooled Melts* (Eds D M Herlach, D M Matson) (Weinheim: Wiley-VCH, 2012) p. 349
91. Hartmann H et al. *J. Appl. Phys.* **103** 073509 (2008)
92. Binder S, Galenko P K, Herlach D M *Phil. Mag. Lett.* **93** 608 (2013)
93. Binder S, Galenko P K, Herlach D M *J. Appl. Phys.* **115** 053511 (2014)
94. Шубников А В, Парвов В Ф *Зарождение и рост кристаллов* (М.: Наука, 1969)

Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests

D.V. Alexandrov

Department of Mathematical Physics, Ural Federal University,
prosp. Lenina 51, 620083 Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: dmitri.alexandrov@usu.ru

P.K. Galenko

Friedrich-Schiller-Universität-Jena, Physikalisch-Astronomische Fakultät,
Löbdergraben Strasse 32, 07743 Jena, Germany;
Institut für Materialphysik im Weltraum, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR),
51170 Köln, Germany
E-mail: peter.galenko@uni-jena.de

An analysis is given of the nonisothermal growth of a dendrite under forced fluid flow in a binary system. The theoretical model used employs a free moving crystal–liquid interface and makes use of the Oseen approximation for the equation of motion of the liquid. A criterion for the stable growth of a two-dimensional and a three-dimensional parabolic dendrite is derived under the assumption of an anisotropic surface tension at the crystal–liquid interface, which generalizes the previous known results for the stable growth of a dendrite with convection in a one-component liquid and for the growth of a dendrite in a two-component system at rest. The criterion obtained within the Oseen hydrodynamic approximation is extended to arbitrary Peclet numbers and dendrite growth with convection in a nonisothermal multicomponent system. Model predictions are compared with experimental data on crystal growth kinetics in droplets processed in electromagnetic and electrostatic levitation facilities. Theoretical and simulation methods currently being developed are applied to crystallization processes under Earth and reduced gravity conditions.

PACS numbers: 05.70.Fh, 05.70.Ln, **68.70.+w**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408b.0833

Bibliography — 94 references

Received 17 December 2013, revised 18 March 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (8) 833–850 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (8) (2014)