

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Вывод уравнений аналитической механики и теории поля из закона сохранения энергии

Н.А. Винокуров

Обычный вывод уравнений движения в аналитической механике и уравнений поля в теории поля основан на использовании принципа наименьшего действия с некоторой функцией Лагранжа. Предлагается вывод уравнений Гамильтона и Лагранжа без использования вариационных принципов. Начиная с энергии системы, заданной как функция обобщённых координат и скоростей, вводятся обобщённые импульсы таким образом, что энергия сохраняется при изменении любой из степеней свободы системы. Это сразу приводит к уравнениям Гамильтона с не определённым пока гамильтонианом. Для нахождения явных зависимостей импульсов от координат и скоростей сначала по известной энергии находится функция Лагранжа. Применение описанного метода демонстрируется на примере электродинамики. Предложенный подход позволяет по-новому взглянуть на природу обобщённых импульсов и даёт способ нахождения функции Лагранжа по известной энергии системы.

PACS numbers: 03.50.De, 45.20.Jj

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201406c.0641

Содержание

1. Введение (641).
 2. Сохранение энергии и уравнения Гамильтона (641).
 3. Отыскание импульсов и функции Лагранжа (642).
 4. Классическая электродинамика (643).
 5. Заключение (643).
- Список литературы (644).

1. Введение

Уравнения движения широкого класса механических систем и полей можно вывести из вариационных принципов (см., например, учебники [1–5]). С одной стороны, можно сказать, что этот факт отражает некоторые специальные свойства соответствующих дифференциальных уравнений и может рассматриваться как более компактная запись тех же уравнений. С другой стороны, вариационные принципы и соответствующие дифференциальные уравнения являются основой для квантовой теории. При таком подходе сохранение энергии следует из отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени. Ниже мы обсуждаем другой подход. Исходя из закона сохранения энергии мы вводим обобщённые импульсы, а затем находим функцию Лагранжа и явные выражения импульсов через скорости и координаты.

Н.А. Винокуров. Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, просп. Академика Лаврентьева 14, 630090, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: vinokurov@inp.nsk.su; Korea Atomic Energy Research Institute, 1045 Daedeok-Daero, Yuseong-gu, Daejeon 305-353, Republic of Korea

Статья поступила 5 августа 2013 г.,
после доработки 29 октября 2013 г.

2. Сохранение энергии и уравнения Гамильтона

Пусть $E(q, v)$ — энергия системы, которая зависит от обобщённых координат q^i , $i = 1, \dots, N$, и обобщённых скоростей $v^i = dq^i/dt$. Состояние системы изображается точкой с координатами (q, v) в $2N$ -мерном пространстве. Сохранение энергии вдоль траектории может быть записано как

$$0 = dE(q, v) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial E}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial E}{\partial v^i} dv^i \right). \quad (1)$$

Сумма в правой части (1) равна нулю, но каждый из членов этой суммы, вообще говоря, отличен от нуля. Для того чтобы обеспечить детальное сохранение энергии, т.е. сохранение энергии при независимом изменении каждой из степеней свободы, введём вместо скоростей другие переменные p_i , такие, что $E(q, v) = H(q, p)$ и

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 = \frac{\partial H}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial H}{\partial p_2} dp_2 = \dots = \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^N} dq^N + \frac{\partial H}{\partial p_N} dp_N. \end{aligned} \quad (2)$$

Если система состоит из независимых (невозмущаемых) частей, то сохраняется энергия каждой из этих частей. Поэтому можно сказать, что мы определили $2N$ -мерное фазовое пространство (q, p) как пространство, в котором степени свободы "максимально независимы". Уравнения (2) могут быть представлены как N пропорций:

$$\frac{dq^1}{\partial H / \partial p_1} = - \frac{dp_1}{\partial H / \partial q^1} = dt_1, \dots, \frac{dq^N}{\partial H / \partial p_N} = - \frac{dp_N}{\partial H / \partial q^N} = dt_N. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) описывают N независимых перемещений dq^i . Так как при движении $dq^i = v^i dt$, можно положить $v^i = \partial H / \partial p_i$, чтобы уравнять все члены пропорций в (3), т.е. получить $dt_1 = \dots = dt_N = dt$. Таким образом приходим к уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (4)$$

Следует отметить, что, записав уравнения (2), мы предположили существование пока не определённых переменных p_i и функции H , удовлетворяющих этим уравнениям и условиям $v^i = \partial H / \partial p_i$. Другими словами, мы ищем в виде (4) дифференциальные уравнения (уравнения движения), удовлетворяющие закону сохранения энергии (1). Как будет показано ниже, искомые уравнения действительно существуют, но есть и более широкий класс уравнений, сохраняющих энергию.

Рассуждая более формально, для того чтобы получить сохранение энергии в новых переменных $X = (q_1, p_1, \dots, q_N, p_N)$ $0 = dH(X)/dt = (\partial H / \partial X_\alpha) dX_\alpha / dt$ ($\alpha = 1, \dots, 2N$; здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), достаточно потребовать выполнения равенства $dX_\alpha / dt = J_{\alpha\beta} \partial H / \partial X_\beta$ с любой кососимметрической матрицей $J_{\alpha\beta}$. В матричном виде эти $2N$ равенств запишутся как $\dot{X} = J \nabla H$. Любая действительная кососимметрическая матрица ортогональным преобразованием подобия приводится к клеточно-диагональному виду с N диагональными клетками

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_k \\ -\mu_k & 0 \end{pmatrix},$$

где $\pm i\mu_k$ — собственные числа матрицы [6]. Выбором масштабных множителей при переменных p все собственные числа могут быть обращены в $\pm i$, а матрица J — в единичную симплектическую матрицу с N единичными симплектическими 2×2 -клетками на диагонали:

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, мы вводим переменные p , в которых, как следует из квазидиагонального вида (5) матрицы J , степени свободы "максимально независимы" и появляется симплектическая структура (а следовательно, скобки Пуассона). Заметим, что появление такой математически богатой системы в фазовом пространстве явилось, по крайней мере частично, следствием нашего выбора очень удобных, но в некотором смысле искусственных переменных — обобщённых импульсов.

Уравнение (3) приводит к другому объяснению вывода уравнений Гамильтона (4). Пусть каждая степень свободы зависит от своего времени t_i . Потребуем сохранения $H[q^1(t_1), p_1(t_1), \dots, q^N(t_N), p_N(t_N)]$ при независимом изменении каждого из t_i : $dH/dt_i = 0$. После этого проведём "синхронизацию": $t_1 = \dots = t_N = t$. Вспомним, что в теории относительности рассматривают часы в каждой точке трёхмерного пространства и синхронизация этих часов может быть проведена по-разному (в частности, в зависимости от используемой системы отсчёта). Поэтому для системы с пространственно разнесёнными частями такое объяснение имеет простой смысл. Оно же поясняет и утверждение о "максимальной независимости" степеней свободы.

3. Отыскание импульсов и функции Лагранжа

Теперь надо найти явные выражения импульсов p через скорости v . Так как $v^i = \partial H / \partial p_i$, по теореме Донкина (см., например, [2]) существует функция скоростей $L(q, v) = p_i v^i - H(p, q)$, двойственная к функции Гамильтона, и $p_i = \partial L / \partial v^i$. Используя последнее выражение, можно получить уравнение в частных производных для функции Лагранжа L

$$v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} = L + E(q, v). \quad (6)$$

В учебниках по аналитической механике (см., например, [5]) уравнение (6) используется для определения энергии E по заданной функции Лагранжа L . Здесь нам надо найти L , решив уравнение в частных производных (6). Заметим также, что, хотя при выводе уравнения (6) было использовано преобразование Лежандра, само (6) таковым не является, так как оно связывает две функции одних и тех же переменных — скоростей.

Полное решение уравнения (6) есть сумма частного решения L_1 и полного решения соответствующего однородного уравнения,

$$L = L_1(q, v) + a_i(q) v^i. \quad (7)$$

Второй член в правой части (7), содержащий N произвольных постоянных a_i , описывает гироскопические силы, которые не дают вклада в энергию $E(q, v)$. Частное решение уравнения (6) можно найти с помощью разложения в ряд Тейлора. Если

$$E(q, v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{ik\dots l}^{(n)} v^i v^k \dots v^l, \quad (8)$$

то

$$\begin{aligned} L_1(v) &= -A^{(0)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} A_{ik\dots l}^{(n)} v^i v^k \dots v^l = \\ &= -E(q, 0) + \int_1^{\infty} \left[E\left(q, \frac{v}{x}\right) - E(q, 0) \right] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) существует только при $A_i^{(1)} = 0$. Если ряд (8) обрывается после $n = 2$, то энергия $E = A^{(0)} + A_{ik}^{(2)} v^i v^k = U(q) + T(q, v)$ есть сумма потенциальной U и кинетической T энергий и из (9) получается обычная формула: $L_1 = T - U$. Легко проверить, что для свободной релятивистской частицы (9) тоже даёт правильный результат.

Используя (7) и (9), можно найти обобщённые импульсы

$$p_i = a_i + \int_1^{\infty} \frac{\partial}{\partial v^i} E\left(\frac{v}{x}\right) dx \quad (10)$$

и функцию Гамильтона $H = E[q, v(p)]$. Вторая часть уравнений Гамильтона в (4) может быть преобразована в уравнения Лагранжа. Из (7) находим явное выражение [2] для сил, связанных с "ковекторным полем" a_i ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial v^i} = \frac{\partial L_1}{\partial q^i} + v^j \left(\frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j} \right). \quad (11)$$

Из (11) видно, что только неинтегрируемая (вихревая) часть поля a_i даёт вклад в силы. Кроме того, эти дополнительные силы не меняют энергию системы.

Следует отметить, что вместо энергии $E(q, v)$ в вышеприведённых уравнениях, в частности в уравнении (6), можно использовать любую её функцию $F[E(q, v)]$.

Тогда с помощью уравнений (7) и (9) находятся другие функции Лагранжа. Простым примером являются $E = A^{(0)} + A_{ik}^{(2)} v^i v^k = U(q) + T(q, v)$ и $F(E) = E^2$. В этом случае (9) даёт $L_1 = T^2/3 + 2UT - U^2$.

Итак, из постоянства известной функции $E(q, v)$ обобщённых координат и скоростей можно вывести (с некоторой неоднозначностью, связанной с наличием гироскопических сил) уравнения Лагранжа и Гамильтона. Для этого вывода было использовано предположение о детальном сохранении энергии, выраженное уравнениями (2)–(4). Если воспользоваться только законом сохранения энергии, то, определив функцию Лагранжа как решение уравнения (6), легко получить обобщение уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = G_{ij}(q, v) v^j, \quad (11a)$$

где $G_{ij} = -G_{ji}$ — произвольный антисимметричный тензор. В специальном случае (11) последний может быть обращён в нуль добавлением в функцию Лагранжа линейного по скоростям слагаемого $a_i(q) v^i$ в соответствии с формулой (7).

4. Классическая электродинамика

Описанный в разделе 3 метод можно применить к полю. В кулоновской калибровке ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) энергия заряженных частиц и электромагнитного поля может быть записана как [7, 8]

$$E = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d^3 \mathbf{r} + \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} + \sum_{\alpha < \beta} \frac{Q_{\alpha} Q_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|}, \quad (12)$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, m_{α} , Q_{α} , $\mathbf{r}_{\alpha}$ и $\mathbf{v}_{\alpha}$ — масса, заряд, координата и скорость частицы с номером α соответственно, c — скорость света. Для поля номер степени свободы i заменяется координатой $\mathbf{r}$ точки наблюдения. Поэтому производные по $\mathbf{A}$ и $\partial \mathbf{A} / \partial t$ должны быть вариационными. С помощью (7), (9) и (12) получим

$$L = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d^3 \mathbf{r} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_{\alpha}^2}{c^2}} - \sum_{\alpha < \beta} \frac{Q_{\alpha} Q_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|} + \sum_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \iiint \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d^3 \mathbf{r}. \quad (13)$$

Тогда

$$p_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta L}{\delta(\partial A_i / \partial t)} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial A_i}{\partial t} + a_i(\{\mathbf{A}\}, \{\mathbf{r}_{\alpha}\}, \mathbf{r}), \quad (14)$$

где $i = 1, 2, 3$,

$$\mathbf{p}_{\alpha}(t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} = \frac{m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} + \mathbf{a}_{\alpha}(\{\mathbf{A}\}, \{\mathbf{r}_{\beta}\}). \quad (15)$$

Фигурные скобки в (14) указывают на то, что пока не определённые векторное поле $\mathbf{a}$ и векторы $\mathbf{a}_{\alpha}$ могут зависеть от векторного потенциала во всех точках трёхмерного пространства и от координат всех частиц (т.е. они являются функционалами от $\mathbf{A}$ и функциями от координат всех частиц). Легко увидеть, что при $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\alpha} = 0$ функция Лагранжа (13) приводит к уравнениям без взаимодействия поперечной части поля и частиц.

Поэтому естественно выбрать подходящие $\mathbf{a}$, чтобы связать их. А именно, векторное поле $\mathbf{a}$ должно зависеть от координат частиц $\mathbf{r}_{\alpha}$, а векторы $\mathbf{a}_{\alpha}$ — от векторного потенциала $\mathbf{A}$. Простейшим выбором для $\mathbf{a}$ будет продольное электрическое поле с некоторым коэффициентом $-\kappa$: $\mathbf{a} = \kappa \text{grad } \varphi$, $\varphi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|$. Простейший выбор для $\mathbf{a}_{\alpha}$ — векторный потенциал в точке, где находится частица, $\mathbf{a}_{\alpha} = \kappa_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}, t)$. При таких предположениях из (13) следуют уравнения Лагранжа:

$$\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \kappa \sum_{\alpha} v_{\alpha j} \partial_j \partial_i \varphi_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \Delta A_i + \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} v_{\alpha i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}), \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} + \kappa_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v}_{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{A} \right) = Q_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{Q_{\beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta})}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^3}. \quad (17)$$

Для выполнения условия кулоновской калибровки необходима нулевая дивергенция поперечного тока в (16):

$$\partial_i \sum_{\alpha} (\kappa_{\alpha} v_{\alpha i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) + \kappa v_{\alpha j} \partial_j \partial_i \varphi_{\alpha}) = 0. \quad (18)$$

Следовательно, $\kappa_{\alpha} / \kappa = 4\pi Q_{\alpha}$. При $1/\kappa = 4\pi c$ (16) и (17) принимают обычный вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) - \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} = Q_{\alpha} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{Q_{\beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta})}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] + \frac{Q_{\alpha}}{c} \mathbf{v}_{\alpha} \times \text{rot } \mathbf{A}. \quad (20)$$

Такой выбор постоянной κ не может быть обоснован в рамках данного подхода. Причина этого — различие в описании поперечной и продольной частей электромагнитного поля. Первая описывается соответствующими степенями свободы, а вторая — нет. Поэтому связь поперечного и продольного полей не может быть определена до тех пор, пока мы не потребуем релятивистской инвариантности уравнений.

5. Заключение

Уравнения Гамильтона эквивалентны уравнениям в частных производных Гамильтона — Якоби [9]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0, \quad (21)$$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E_0 \quad (22)$$

для $S = W - E_0 t$, так как уравнения Гамильтона описывают характеристические полосы уравнений Гамильтона — Якоби. Кроме того, они эквивалентны вариационным принципам для действий S и W . Вариационные принципы показывают, что W и S имеют геометрический смысл симплектических натуральных параметров ("длин" кривых) траекторий в фазовом (q, p) и расширенном фазовом $(q, t, p, -E)$ пространствах соответственно.

Специальный выбор импульсов p с помощью "принципа детального сохранения энергии" (2) обеспечивает сохранение фазового объёма и фазовой плотности (теорема Лиувилля). Последнее используется в статистической механике.

Определение обобщённых импульсов в (2) похоже на определение энтропии S в основном уравнении термодинамики.

динамики, $dE = -PdV + TdS$ (использованы традиционные обозначения давления P , объёма V и температуры T). Первый член в правой части последнего уравнения — это работа, а второй описывает движение (молекул газа) с помощью измеряемого параметра $T = \partial E / \partial S$ (вместо $v^i = \partial H / \partial p_i$ в (2)) и изменение специально введённого параметра S (вместо p_i).

Таким образом, в настоящей статье сформулирован принцип детального сохранения энергии. Он определяет обобщённые импульсы как специальные переменные, которые обеспечивают "максимальную независимость" степеней свободы. По заданной зависимости энергии от обобщённых координат и скоростей с помощью формул (7) и (9) находится функция Лагранжа. Из неё в свою очередь дифференцированием по скоростям получаются обобщённые импульсы. Подстановка последних в энергию даёт функцию Гамильтона. Уравнения Гамильтона–Якоби и вариационные принципы возникают как следствие уравнений движения (уравнений Лагранжа и Гамильтона).

Изложенная точка зрения позволяет прояснить смысл обобщённых импульсов. Эти величины вводятся для получения уравнений (Гамильтона) с "максимальной независимостью" степеней свободы. Следует заметить, что, поскольку вышеизложенный подход предполагает, что состояние системы задаётся обобщёнными координатами и соответствующими скоростями, фазовое пространство чётномерно. Динамические системы с нечётномерным фазовым пространством требуют отдельного рассмотрения.

Ответим также на естественный вопрос о том, зачем нужно выводить классические уравнения ещё одним способом. Любая математическая модель основана на некоторых исходных предположениях и понятиях (аксиоматике). Обсуждение различных аксиоматик, приводящих к одним и тем же результатам, может быть полезным для понимания области применимости модели и возможных расширений этой области. Известным примером является сравнение различных аксиоматик термодинамики. Математические модели физики основаны на результатах экспериментов. Поэтому, чем ближе понятия, используемые в аксиоматике, к величинам, рассматриваемым в экспериментах, тем более "понятной" выглядит модель. В этом смысле закон сохранения

энергии и его развитие — принцип детального сохранения энергии — выглядят по крайней мере не хуже, чем интегральные вариационные принципы с физически неочевидными и неоднозначно определёнными (а значит, неизмеряемыми) функцией Лагранжа и обобщёнными импульсами. Очень непросто объяснить, почему $L = T - U$ (опять-таки используя понятие энергии), а $\mathbf{P} = \gamma m \mathbf{v} + (Q/c)\mathbf{A}$ (см., однако, [8] и ссылку там). Формулы (6)–(9) позволяют найти функцию Лагранжа (а по ней и обобщённые импульсы) по известной из экспериментов функции энергии. Кроме того, с их помощью получается общая форма уравнений движения, сохраняющих энергию, — обобщённые уравнения Лагранжа (11a). Во всяком случае всегда полезно взглянуть на любую задачу с разных точек зрения.

Работа поддержана грантом World Class Institute Program of the National Research Foundation (NRF) of Korea (NRF Grant Number: WCI 2011-001).

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* 4-е изд. (М.: Наука, 1988); Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* 3rd ed. (Oxford: Pergamon, 1974)
2. Гантмахер Ф Р *Лекции по аналитической механике* 3-е изд. (М.: Физматлит, 2002); Gantmacher F *Lectures in Analytical Mechanics* (Moscow: Mir, 1975)
3. Sommerfeld A *Lectures on Theoretical Physics* Vol. 1 *Mechanics* 4th ed. (New York: Academic Press, 1964); Зоммерфельд А *Механика* (Ижевск: РХД, 2001)
4. Lanczos C *The Variational Principles of Mechanics* 4th ed. (Toronto: Univ. of Toronto Press, 1970; New York: Dover Publ., 1986); Ланцош К *Вариационные принципы механики* (М.: Мир, 1965)
5. José J V, Saletan E J *Classical Dynamics: a Contemporary Approach* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
6. Гантмахер Ф Р *Теория матриц* 5-е изд. (М.: Физматлит, 2004); Gantmacher F R *Applications of the Theory of Matrices* Vols 1, 2 (New York: Interscience Publ., 1959)
7. Heitler W *The Quantum Theory of Radiation* 3rd ed. (Oxford: Clarendon Press, 1954); Гайтлер В *Квантовая теория излучения* (М.: ИЛ, 1956)
8. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика: Дополнительные главы* 2-е изд. (М.: Наука, 1981); Ginzburg V L *Theoretical Physics and Astrophysics* (Oxford: Pergamon Press, 1979)
9. Courant R, Hilbert D *Methods of Mathematical Physics* Vol. 2 *Partial Differential Equations* (New York: Interscience Publ., 1989); Курант Р *Уравнения с частными производными* (М.: Мир, 1964)

Analytical mechanics and field theory: derivation of equations from energy conservation

N.A. Vinokurov

Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Lavrent'eva 14, 630090 Novosibirsk, Russian Federation

E-mail: vinokurov@inp.nsk.su;

Korea Atomic Energy Research Institute, 1045 Daedeok-Daero, Yuseong-gu, Daejeon 305-353, Republic of Korea

Equations of motion in mechanics and field equations in field theory are conventionally derived using the least action principle. This paper presents a nonvariational derivation of Hamilton's and Lagrange's equations. The derivation starts by specifying the system energy as a function of generalized coordinates and velocities and then introduces generalized momenta in such a way that the energy remains unchanged whatever degree of freedom is varied. This immediately leads to Hamilton's equations with as yet undefined Hamiltonian. The explicit dependence of generalized momenta on the coordinates and velocities is determined by first finding the Lagrangian from the known energy function. The paper uses electrodynamics as an illustrative example. The proposed approach provides new insight into the nature of canonical momenta and offers a way to find the Lagrangian from the known energy of the system.

PACS numbers: 03.50.De, 45.20.Jj

Bibliography — 9 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (6) 641–644 (2014)

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201406c.0641

Received 5 August 2013, revised 29 October 2013

Physics – Uspekhi **57** (6) (2014)