

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжёлых ионов

И.Я. Арефьева

Представлены недавно полученные результаты применения дуального голографического метода описания кварк-глюонной плазмы, наблюдаемой при столкновениях тяжёлых ядер при высоких энергиях. Голографический подход и AdS/CFT-дуальность позволяют изучать свойства квантовой теории поля в режиме сильной связи с помощью теории гравитации в высшем числе измерений. Образование кварк-глюонной плазмы после столкновения тяжёлых ионов в дуальных терминах описывается как образование чёрной дыры. Обсуждаются основные достижения голографической теории: вычисление вязкости и других коэффициентов переноса в гидродинамической модели с поправками до второго порядка по градиентам, множественности в зависимости от энергии, времени анизотропной термализации, времени изотропизации. Проводится сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными, включая данные последних экспериментов на Большом адронном коллайдере.

PACS numbers: 04.50.Gh, 11.25.Tq, 12.38.Mh, **24.85.+p**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201406a.0569

Содержание

1. Введение (569).
2. Кварк-глюонная плазма — новое состояние материи (571).
 - 2.1. Основные характеристики кварк-глюонной плазмы.
 - 2.2. Кварк-глюонная плазма при столкновении тяжёлых ионов и в ранней Вселенной.
3. Физика столкновений тяжёлых ионов (573).
 - 3.1. Экспериментальное обоснование локального теплового равновесия.
 - 3.2. Эллиптический поток и подавление струй.
 - 3.3. Характерные времена при образовании кварк-глюонной плазмы при столкновении тяжёлых ионов.
 - 3.4. Множественность при pp- и AA-столкновениях.
4. Релятивистская гидродинамика и кварк-глюонная плазма (576).
 - 4.1. Гидродинамическая модель Ландау.
 - 4.2. Кинематика бёркеновского буст-инвариантного потока.
 - 4.3. Проблемы теории релятивистской вязкой жидкости.
 - 4.4. Эллиптический поток и флуктуации начальных данных.
 - 4.5. Химический потенциал.
5. Описание кварк-глюонной плазмы в рамках AdS/CFT-дуальности (579).
 - 5.1. Соответствие параметров.
 - 5.2. AdS/CFT-дуальность.
 - 5.3. Чёрные дыры и AdS/CFT-дуальность для кварк-глюонной плазмы.
 - 5.4. Буст-инвариантные геометрии.
 - 5.5. Химический потенциал в кварк-глюонной плазме и AdS/CFT-дуальность.
 - 5.6. Улучшенная голографическая модель квантовой хромодинамики.
6. Голографическая термализация (585).
 - 6.1. Образование чёрных дыр в AdS-пространстве.
 - 6.2. Формирование чёрной дыры в AdS-пространстве падающей оболочкой.

- 6.3. Формирование чёрной дыры при столкновении ударных волн в пространстве AdS₅.
- 6.4. Численный анализ столкновений ударных волн в пространстве AdS₅.
7. Дуальность гравитация/гидродинамика (590).
 - 7.1. Чёрная брана и идеальная жидкость.
 - 7.2. Вязкость и гравитация.
 - 7.3. Конформно-инвариантная жидкость и значения коэффициентов переноса, вычисленных с использованием голографии.
 - 7.4. Характеристики термализации буст-инвариантной плазмы из голографии.
8. Заключение (594).
9. Приложения (594).
 - А. Релятивистские уравнения вязкой и теплопроводной среды. Первый и второй порядки по градиентам.
 - Б. Геометрия пространства AdS_D.

Список литературы (596).

1. Введение

Новое состояние материи — кварк-глюонная плазма — было открыто в 2005 г. в экспериментах по исследованию столкновений тяжёлых ионов [1–15]. Предполагается, что Вселенная в ходе эволюции находилась в таком же состоянии спустя короткое время (порядка 10^{-11} с) после Большого взрыва.

Предпринимались многочисленные попытки описать процессы столкновений тяжёлых ионов, приводящие к образованию кварк-глюонной плазмы (КГП), в рамках квантовой хромодинамики (КХД) [16–19]. Трудность состоит в том, что требуется вычислять зависящие от времени корреляционные функции при больших константах взаимодействия.

В последнее время активно разрабатывается новый перспективный подход в теории КГП, основанный на голографической дуальности квантово-полевой системы с сильным взаимодействием в четырёхмерном простран-

И.Я. Арефьева. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

Статья поступила 26 мая 2013 г., после доработки 5 июля 2013 г.

стве Минковского и классической гравитации в пятимерном пространстве анти-де-Ситтера (AdS) [20–23]. В частности, имеется значительный прогресс в голографическом описании равновесной КГП [24]. Голографический подход успешно применяется также к процессу формирования КГП. При таком подходе термализация КГП замечательным образом описывается как процесс образования чёрной дыры в AdS-пространстве, а множественность рождённых частиц связывается с энтропией образовавшейся чёрной дыры. Рассмотрению недавних результатов применения дуального голографического описания КГП, возникающей при столкновениях тяжёлых ядер при высоких энергиях, и посвящён настоящий обзор.

Современная картина образования и эволюции КГП в общих чертах совпадает с картиной множественного рождения при столкновении частиц высоких энергий, предложенной в классических работах Ферми и Ландау [25–27]. Характерной чертой теории Ландау является использование термодинамических соображений на начальном этапе образования плазмы и гидродинамического подхода к описанию её дальнейшей эволюции. Такая картина является приближением к более полному представлению соответствующих процессов, в частности, на основе голографического подхода, который позволяет описать:

- процесс термализации при столкновении тяжёлых ионов;
- свойства равновесной КГП, образовавшейся при этих столкновениях;
- гидродинамическое приближение, свободное от проблем, связанных с нарушением причинности.

Голографическая дуальность устанавливает связь между неравновесной квантовой теорией в 4-мерном пространстве-времени в режиме сильного взаимодействия и 5-мерной классической гравитацией для времён непосредственно после столкновения частиц высоких энергий, а также связь между двумя классическими теориями — 4-мерной гидродинамикой и 5-мерной классической гравитацией — для более поздних времён. Переходный режим от неравновесной 4-мерной квантовой теории к гидродинамике предполагает последовательное описание в рамках единой 5-мерной классической гравитации. Благодаря дуальности квантовая 4-мерная задача образования КГП сводится (в рассматриваемом приближении) к классической задаче общей теории относительности (ОТО) в 5-мерном пространстве. Решив эту 5-мерную задачу, можно получить достаточно полную голографическую картину образования КГП.

Здесь имеются две проблемы. Первая состоит в том, что соответствующие задачи ОТО являются довольно сложными. В последнее время достигнут значительный прогресс в изучении решений со специальной симметрией. Следуя соображениям Бьёркена, связанным с ультрарелятивистским характером столкновений, можно рассмотреть класс буст-инвариантных решений в 5-мерном пространстве-времени. Для этого класса численный анализ существенно упрощается. Результаты вычислений указывают на то, что в соответствующей по голографической дуальности 4-мерной теории происходит локальная анизотропная термализация. Проследить переход в изотропное состояние оказывается возможным как в голографическом, так и в гидродинамических подходах, которые дают практически одинаковые ре-

зультаты. Это демонстрирует общую дуальность гидродинамика/гравитация.

Второй проблемой является необходимость модификации самой голографической модели. Это связано с тем, что, строго говоря, установлена дуальность супергравитации в 5-мерном пространстве AdS и конформно-инвариантной калибровочной теории в 4-мерном пространстве Минковского, точнее говоря, установлена связь между $(\mathcal{N} = 4)$ -суперсимметричной теорией Янга–Миллса с полями материи в присоединённом представлении калибровочной группы $SU(N_c)$ с числом цветов $N_c \rightarrow \infty$ и теорией суперструн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$ — прямом произведении пространства анти-де-Ситтера и 5-мерной сферы. Квантовая хромодинамика не является суперсимметричной теорией, калибровочной цветной группой в КХД является $SU(3)$, хотя предел 'т Хофта при $N_c \rightarrow \infty$ воспроизводит ряд феноменологически приемлемых свойств (см., например, [28]); поля материи в КХД преобразуются по фундаментальному представлению и имеют, кроме того, аромат и в КХД нет конформной инвариантности. Однако при высоких температурах некоторые характеристики КХД становятся близки к характеристикам $(\mathcal{N} = 4)$ -суперсимметричной теории Янга–Миллса: согласно результатам вычислений на решётке, КХД приобретает свойства конформной теории, с другой стороны, результаты вычислений в $(\mathcal{N} = 4)$ -суперсимметричной теории Янга–Миллса для коллективных возбуждений с помощью диаграммной техники Келдыша указывают на то, что её свойства суперсимметрии "стираются".

Более точное голографическое описание предполагает модификацию дуальной модели посредством построения так называемых поправленных голографических моделей, которые включают в себя не только гравитацию, но и низшую струнную скалярную моду — дилатон. С помощью этих моделей к настоящему времени описаны свойства стационарной КГП (см. раздел 5.6). Интересно проследить, как такая модификация влияет на характеристики процесса формирования КГП. Оказывается, что именно голографические модели, связанные с фоновыми решениями, которые дают хорошее описание свойств стационарной КГП, также хорошо описывают множественность, полученную в недавних экспериментах на Большом адронном коллайдере (Large Hadron Collider, LHC). Эти голографические модели активно исследуются в настоящее время.

Структура обзора следующая.

В разделе 2 обсуждаются основные характеристики КГП и аналогии между характеристиками КГП, образующейся при столкновении тяжёлых ионов, и КГП в ранней Вселенной.

В разделе 3 представлены некоторые результаты экспериментов по изучению столкновений тяжёлых ионов на ускорителях. Эти экспериментальные данные сопоставляются в разделах 5–7 с результатами теоретического голографического подхода. Более полное описание экспериментальных результатов и их альтернативные объяснения можно найти, например, в обзорах [13, 18, 29–31] (см. также соответствующие ссылки в разделах 2–4).

В разделе 4 кратко напоминаются гидродинамическое описание КГП, модели Ландау и Бьёркена и обсуждаются проблемы, возникающие в теории релятивистской вязкой жидкости.

Раздел 5 посвящён изложению основных идей голографического подхода к описанию равновесной КГП. На основе простых примеров показано, как работает AdS/CFT-соответствие (CFT — Conformal Field Theory — конформная теория поля). В оптическом приближении с помощью геодезических в 5-мерном пространстве вычислены двухточечные корреляторы как в вакууме, так и при наличии температуры. Эти вычисления являются основой для голографического нахождения более сложных корреляторов. Как отмечалось выше, достигнут значительный прогресс в голографическом описании свойств стационарной КГП: вычислены вязкость, энергетические потери, спектр кваркониума и др. В разделе 5.6 приведены результаты этих вычислений для так называемых улучшенных голографических моделей КХД. В связи с этими моделями также принято говорить об AdS/QCD-соответствии.

В разделе 6 описаны результаты голографического подхода к термализации квантовых систем. Обсуждается несколько моделей голографической термализации. Эффективной моделью голографической термализации является модель светоподобных оболочек, вбрасываемых в 5-мерное пространство AdS. Такие модели позволяют количественно проследить за процессами термализации нелокальных величин и выяснить их зависимость от общих характеристик: установившейся в результате термализации температуры, химического потенциала и др. Другой моделью голографической термализации является модель, в которой сталкивающиеся ионы описываются в дуальной картине гравитационными ударными волнами в фоновом AdS-пространстве. Образованию чёрной дыры соответствует образование ловушечной поверхности. На дуальном языке множественность частиц, рождающихся при столкновении ионов, оценивается как площадь ловушечной поверхности, образующейся при столкновении ударных волн в 5-мерном пространстве.

Описанию дуальности гравитация/гидродинамика посвящён раздел 7. В частности, приведены уравнения релятивистской конформной гидродинамики с диссипацией до второго порядка по градиентам и результаты вычислений коэффициентов переноса.

В приложениях даны используемые в обзоре формулы релятивистской гидродинамики и описание геометрии пространства AdS.

2. Кварк-глюонная плазма — новое состояние материи

2.1. Основные характеристики кварк-глюонной плазмы

КГП — это состояние материи, образованной свободными кварками, антикварками и глюонами при высокой температуре. Как известно, взаимодействие кварков и глюонов описывается квантовой хромодинамикой. В КХД имеется конфайнмент кварков и асимптотическая свобода. Известно (в основном из вычислений на решётке [32]), что если температура T или плотность энергии ядерной материи ε возрастают, то происходит переход материи в фазу деконфайнмента.

Фазовая диаграмма КХД пока недостаточно хорошо исследована как теоретически, так и экспериментально. Общепринятый гипотетический вид фазовой диаграммы

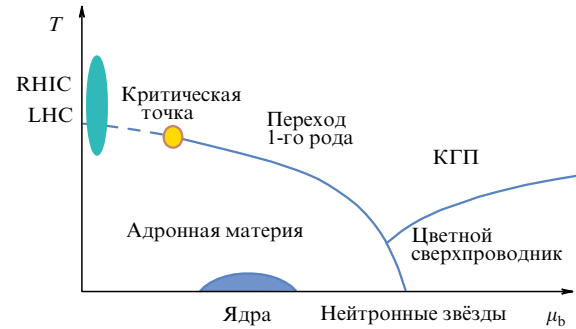


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Фазовая диаграмма КХД.

в переменных кварковый химический потенциал¹ μ_b — температура T представлен на рис. 1 (см., например, [17]).

При $T \sim 200$ МэВ и $\mu_b \sim 0,6$ ГэВ имеется критическая точка. Фазовый переход является переходом первого рода. Штриховой линией на рис. 1 отмечен кроссовер. Обычной ядерной материи на этой диаграмме соответствуют $\mu_b \sim 1$ ГэВ и температура, близкая к нулю. Если увеличивать плотность кварков, т.е. увеличивать μ_b , удерживая температуру достаточно низкой, то происходит переход в фазу всё более сильно сжатой ядерной материи (нейтронные звезды).

В области выше голубой кривой происходит переход к фазе КГП, в которой цветные партоны могут распространяться на значительные расстояния, что приводит к нетривиальной коллективной динамике. В экспериментах по исследованию столкновений ультрарелятивистских тяжёлых ионов на коллайдерах RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) и LHC это состояние материи изучается при исключительно высоких плотностях энергии и относительно малых значениях химического потенциала. Типичные значения μ_b и T , соответствующие столкновениям тяжёлых ионов на этих коллайдерах, показаны на рис. 1 голубым цветом. При более высоких плотностях ожидается появление фазы цветной сверхпроводящей кварковой материи. Кварк-глюонная плазма в контексте возможных экстремальных состояний вещества рассматривалась в обзоре [33].

2.2. Кварк-глюонная плазма

при столкновении тяжёлых ионов и в ранней Вселенной
Согласно современным космологическим представлениям [34] наша Вселенная возникла в результате Большого взрыва. Начиная с формально бесконечно больших плотности и температуры в момент Большого взрыва, Вселенная в ходе эволюции прошла через несколько эпох, соответствующих разным состояниям материи (рис. 2). Наиболее ранним этапом эволюции Вселенной была соответствующая времени порядка $0 < t < 10^{-43}$ с планковская эпоха, во время которой доминировали эффекты квантовой гравитации и струн.

За планковской эпохой следует эпоха Великого объединения, длившаяся примерно до момента 10^{-36} с после Большого взрыва, т.е. до момента "отделения" сильных взаимодействий от других фундаментальных взаимодействий. Далее наступает эпоха инфляции, длившаяся на временах порядка 10^{-36} с $< t < 10^{-32}$ с, с исключительно быстрым экспоненциальным расширением Вселенной.

¹ Кварковый химический потенциал представляет собой меру разности между числом кварков и числом антикварков в системе.

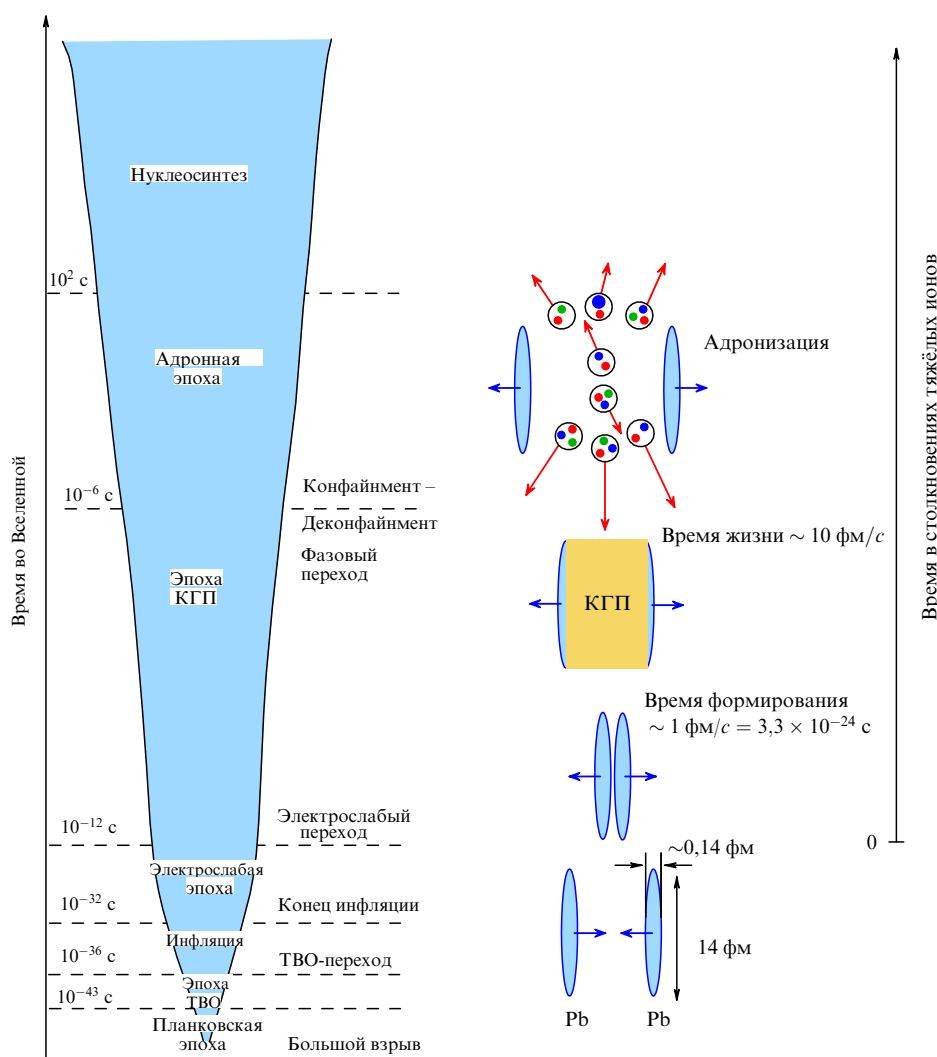


Рис. 2. КГП в ранней Вселенной и в столкновениях тяжёлых ионов. ТВО — теория Великого объединения (Grand Unification Theory — GUT).

Затем при $10^{-32} \text{ с} < t < 10^{-12} \text{ с}$ имеет место электрослабая эпоха (температура порядка 10^{15} К), которая заканчивается тогда, когда электрослабое взаимодействие разделяется на слабое и электромагнитное взаимодействие.

В эпоху КГП, $10^{-12} \text{ с} < t < 10^{-6} \text{ с}$, фундаментальные гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое взаимодействия приняли их современный вид, но материя ещё имела исключительно высокую плотность, порядка $\varepsilon \sim 1 \text{ ГэВ фм}^{-3}$ (для сравнения, типичная плотность ядерной материи, энергия внутри нуклона, порядка $0,13 \text{ ГэВ фм}^{-3}$), и очень высокую температуру, около $T \sim 10^{12} \text{ К}$.

Такие температуры и плотности энергии, согласно результатам вычислений на решётке, соответствуют фазе деконфайнмента в КХД. В эпоху КГП Вселенная была заполнена плотной, горячей кварк-глюонной плазмой. Эпоха КГП заканчивается тогда, когда средняя энергия частиц становится меньше критического значения, соответствующего фазовому переходу конфайнмент–деконфайнмент.

Когда Вселенная охлаждается до температуры ниже этого критического значения, наступает адронная эпоха, $10^{-6} \text{ с} < t < 1 \text{ с}$. В эту эпоху кварки удерживаются внутри адронов. Такой фазовый переход проявляется слишком

слабо для того, чтобы его можно было обнаружить в результате астрономических наблюдений. Поэтому, чтобы понять физику КГП, следует изучать такое состояние материи в лаборатории. Можно сказать, что одна из целей экспериментов по высокоэнергетическим столкновениям тяжёлых ионов заключается в создании этого состояния материи в лаборатории².

Можно интерпретировать столкновение тяжёлых ионов в лабораторных экспериментах как "малый взрыв", частично повторяющий историю Большого взрыва [35, 36]. В правой части рис. 2 изображено столкновение двух ядер, испытывающих лоренцевское сжатие. При $t = 0$, когда эти сжатые ядра сталкиваются, полная энергия обоих ядер сосредоточивается внутри малого объёма и плотность энергии становится очень большой. Сразу после столкновения кварки и глюоны сильно взаимодействуют, система нагревается и образуется КГП. Время, в течение которого ядра перекрываются, может быть оценено как $\tau_{\text{cross}} = 2R/\gamma$, где γ — лоренц-фактор, R — радиус ядра. Для RHIC $\gamma_{\text{RHIC}} = 100$, для LHC $\gamma_{\text{LHC}} = 1376$ (что отвечает соответственно энергиям 200 ГэВ и

² Такие плотности и температуры могут быть также в центральной части плотных нейтронных звёзд.

2,76 ТэВ), т.е. $\tau_{\text{cross}}^{\text{RHIC}} = 0,14 \text{ фм/с} \approx 0,7 \times 10^{-24} \text{ с}$ и $\tau_{\text{cross}}^{\text{LHC}} = 0,01 \text{ фм/с} \approx 0,05 \times 10^{-24} \text{ с}$; напомним, что характерное время сильных взаимодействий τ_{strong} связано с характерным параметром квантовой хромодинамики Λ_{QCD} : $\tau_{\text{strong}} \sim 1/\Lambda_{\text{QCD}} \sim 1 \text{ фм/с}$. Данные по измерению эллиптического потока показывают, что через промежуток времени порядка 0,2 фм/с после столкновения материя демонстрирует коллективное поведение, напоминающее поведение жидкости в локальном равновесии [1–5] (см. также недавний обзор [15] и приведённые там ссылки).

Далее, как и при эволюции ранней Вселенной, горячая и плотная система, образовавшаяся при столкновении тяжёлых ионов, расширяется и охлаждается, в конечном итоге становится достаточно разрежённой и адронируется. Аналогом космологической эпохи нуклеосинтеза при столкновении тяжёлых ионов является стадия кинетического охлаждения, во время которой адронный газ переходит в фазу свободного разлёта.

3. Физика столкновений тяжёлых ионов

В экспериментах по столкновениям тяжёлых ионов ядра сталкиваются при ультрарелятивистских энергиях в системе центра масс. На синхротроне с переменным градиентом AGS (Alternating Gradient Synchrotron) в Брукхейвене, начавшем работу в 1990-х годах, энергия нуклон-нуклонного соударения $\sqrt{s_{NN}} = 4,75 \text{ ГэВ}$, на протонном суперсинхротроне SPS (Super Proton Synchrotron) в ЦЕРНе $\sqrt{s_{NN}} = 17,2 \text{ ГэВ}$, на коллайдере RHIC в Брукхейвене $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ ГэВ}$ и на LHC $\sqrt{s_{NN}} = 2,76 \text{ ТэВ}$.

На RHIC сталкиваются ионы золота, а на LHC — ионы свинца. В 2011 г. детектор ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) зафиксировал светимость 158 мкб^{-1} для Pb–Pb-столкновений при числе событий $N_{\text{event}} = (1,03 \pm 0,02) \times 10^9$.

Имеются убедительные экспериментальные указания, что на RHIC и LHC при столкновении тяжёлых ионов образуются сгустки КГП, которые имеют высокую температуру и проявляют коллективное поведение [1–15]. Вспоминая [37], можно сказать, что образуется "операторная кипящая жидкость".

Кратко свойства КГП можно охарактеризовать следующим образом: наличие гидродинамического поведения; непрозрачность для цветных партонов (подавление струй и кваркониума) и прозрачность для фотонов и слабовазаимодействующих частиц.

Сгустки плазмы на LHC являются более плотными и долгоживущими и имеют больший размер, чем на RHIC, а именно плотность энергии $\approx 10 \text{ ГэВ фм}^{-3}$ (в три раза больше, чем на RHIC), объём $\approx 4800 \text{ фм}^3$ (в два раза больше, чем на RHIC), время жизни порядка 10 фм/с (на 20 % больше, чем на RHIC) [38].

В разделах 3.1–3.4 мы дадим краткое описание основных идей этих экспериментов. Более подробное рассмотрение можно найти в обзорах [13, 30, 31, 39].

3.1. Экспериментальное обоснование локального теплового равновесия

Для системы, находящейся в термическом равновесии, распределение частиц зависит только от температуры, химического потенциала и масс частиц. Поэтому обоснование локального теплового распределения может быть получено из анализа относительного распределения частиц различных типов [40, 41].

Имеется несколько способов оценить температуру КГП сразу после её образования. Один из методов состоит в измерении длины волны прошедших через среду фотонов, излучённых из разнесённых друг от друга источников. Температура среды определяется из анализа экспоненциальной зависимости числа тепловых фотонов от поперечного импульса p_t . Согласно результатам вычислений [42] температура среды составляет около 220 МэВ. (Подробнее об энергетических потерях в КГП см. обзор [43].)

Другой способ определить температуру образовавшейся КГП заключается в использовании дебаевского экранирования тяжёлых кварковых пар. В горячей и плотной КГП в фазе деконфайнмента лёгкие кварки могут экранировать силы взаимодействия между тяжёлыми кварковыми парами в кваркониуме [44]. Отметим, что предсказанное экранирование подтверждено вычислениями в КХД на решётке [45–47]. Слабо связанные состояния кваркониума распадаются при достаточно низких температурах, в то время как более сильно связанные состояния сохраняются при более высоких температурах. Это явление можно использовать как эффективный "термометр" для определения температуры КГП, образовавшейся при столкновении тяжёлых ядер, производя наблюдения за тем, какие состояния кваркониума могут существовать в КГП, а какие — нет [48, 49]. Измерения показывают [50–52], что на RHIC J/ψ подавлены.

Отметим, что недавно на LHC [53] были выполнены измерения Υ -мезонов (связанные состояния b -кварка и его античастицы $\bar{b}$ -кварка). Причём при Pb–Pb-столкновениях наблюдалось значительно меньше Υ -мезонов, чем при pp-столкновениях. Однако теоретические неопределённости относительно выхода тяжёлых векторных мезонов не позволяют использовать их в качестве "термометра".

3.2. Эллиптический поток и подавление струй

Картина центрального столкновения тяжёлых ионов в поперечной к направлению пучка плоскости схематично представлена в правой части рис. 2. На рисунке 3 схематически изображено рассеяние в системе координат пучка при центральном и нецентральном столкновениях.

Первоначальный "комоч" кварков и глюонов, образовавшийся при нецентральном столкновении, не явля-

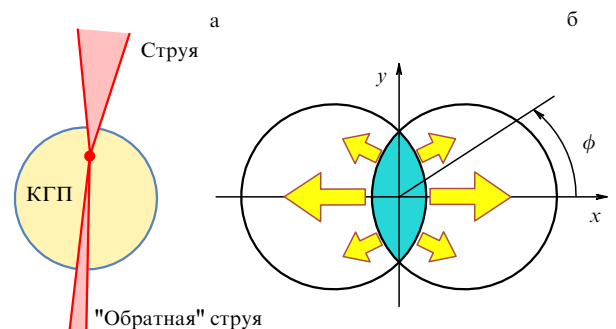


Рис. 3. Столкновения двух ионов в системе координат пучка. (а) Центральное столкновение. (б) Нецентральное столкновение. Капля жидкости имеет нулевое давление на краях и высокое давление в центре. Градиенты давления поперёк "миндалины" (по оси x) больше, чем вдоль неё.

ется симметричным. Если взаимодействие кварков и глюонов мало, то нельзя ожидать, что разлетающиеся частицы, рождённые при столкновении ионов, будут сохранять информацию об асимметрии первоначального комка. Только сильное взаимодействие между частями комка не позволит стереть информацию об асимметрии, и следы первоначальной асимметрии будут проявляться в потоке частиц, рождённых при столкновении ионов. Следы анизотропии видны более явно при малой сдвиговой вязкости, так как обычно большая вязкость сильнее способствует установлению однородности.

Даже при центральном столкновении ионов две струи, рождённые при жёстком соударении, в точке, находящейся на ненулевом расстоянии от центра столкновения (точка А на рис. 3а), теряют энергию различным образом. Струя, направленная "назад", теряет больше энергии, поскольку она проходит более долгий путь в среде. На рисунке 3а изображены две такие струи, распространяющиеся в противоположных направлениях в среде, образовавшейся при столкновении тяжёлых нуклонов.

На рисунке 3б изображено нецентральное столкновение в плоскости, перпендикулярной направлению столкновения. Здесь прицельное расстояние сравнимо с радиусом ядра. Два лоренц-сжатых ядра, два тонких "блина", взаимодействуют только в затемнённой миндалевидной области. Фрагменты ядер вне этой области не взаимодействуют. Если бы наблюдаемые адроны образовывались в результате независимых нуклон-нуклонных столкновений, происходящих внутри миндалевидной области, то тогда, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, конечное состояние адронов было бы равномерно распределено по азимутальному углу ϕ (угол относительно направления пучка). Другими словами, если бы частицы вылетали из миндалевидной области как свободный поток, то конечное распределение частиц не зависело бы от формы этой области, т.е. частицы распределялись бы изотропно. Однако равномерное распределение по азимутальному углу не согласуется с экспериментальными данными. Неравномерное распределение носит пособытийный характер. Этот факт подтверждает гипотезу о том, что столкновения нуклонов приводят к образованию сильно-взаимодействующей среды.

Неаксиально-симметричное распределение частиц в импульсном пространстве характеризуется параметрами анизотропии потока n -го порядка v_n [54]:

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{N}{2\pi} \left\{ 1 + \sum_n v_n(p_t, b) \cos [n(\phi - \Phi_n)] \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь dN — полное число частиц, испущенных в телесный угол между ϕ и $\phi + d\phi$, b — прицельный параметр, Φ_n — азимутальный угол плоскости реакции. Второй коэффициент Фурье, v_2 , который называется эллиптическим потоком, доминирует при нецентральных столкновениях, и v_n убывает с возрастанием n .

Миндалевидную область можно представить как среду, заполненную жидкостью, и оценить соответствующие потоки, используя уравнения гидродинамики. Полагая жидкость идеальной и пренебрегая адронизацией, можно связать распределение энтропии с множественностью, $dS/S \sim dN/N$. В гидродинамике миндалевидную область, изображённую на рис. 3б, можно представить как каплю жидкости с нулевым давлением на

границе и высоким давлением в центре. Градиенты давления больше по направлению поперёк "миндалины", чем вдоль неё. Поэтому когда капля взрывается, этот взрыв оказывается азимутально-асимметричным. Параметры жидкости, такие как температура и сдвиговая вязкость, определяются по наблюдаемому значению v_2 . Согласно данным RHIC [7] отношение коэффициента вязкости к плотности энтропии $\eta/s \approx 0,03 - 0,15$. Это жидкость с самой малой вязкостью из известных в природе.

Другое следствие образования горячей и плотной среды — это гашение струй [55–57]. Имеются хорошо разработанные основанные на идее факторизации методы пертурбативной КХД, которые позволяют описывать образование струй в жёстких процессах при высокоэнергетическом адрон-адронном рассеянии (см., например, обзоры [58, 59]). При столкновении тяжёлых ионов также происходит образование струй, которые, однако, не являются просто суперпозицией струй, возникающих при попарном столкновении адронов. Имеет место гашение (подавление) струй в зависимости от её направления. Гашение струй находит естественное объяснение, если предположить, что струи проходят через взаимодействующую с ними среду. При этом предполагается, что поперечный импульс кварков внутри струй много больше температуры среды.

Ядерный фактор R_{AB}^h характеризует отличие числа адронов, рождённых при столкновении ядра А с ядром В, от числа адронов, рождённых при протон-протонных столкновениях:

$$R_{AB}^h(p_t, \eta, \text{centrality}) = \frac{dN_{\text{medium}}^{AB \rightarrow h}/(dp_t d\eta)}{\langle N_{\text{coll}}^{AB} \rangle dN_{\text{vacuum}}^{pp \rightarrow h}/(dp_t d\eta)}. \quad (3.2)$$

Здесь $\langle N_{\text{coll}}^{AB} \rangle$ — среднее число неупругих столкновений ядер при А–В-столкновениях с фиксированной центральностью. Ядерный фактор зависит, вообще говоря, от поперечного импульса p_t и псевдобыстроты η частиц, типа частиц h и прицельного параметра b .

Из рисунка 4 видно, что π - и η -мезоны с большими импульсами подавлены: ядерные факторы этих мезонов примерно в пять раз меньше ядерного фактора бесцветных нейтральных фотонов. Объяснить это явление можно, используя идею факторизации в адронных столкновениях. Двойное дифференциальное сечение рассеяния для адронного спектра имеет вид

$$d\sigma^{h_1 h_2 \rightarrow h + \text{rest}} \sim \sum_{a,b,c} \int f_{a/h_1}(x_a, Q^2) f_{b/h_2}(x_b, Q^2) d\sigma_{ab \rightarrow cd} \times \\ \times D_{c/h}(z) d\mu(x_a, x_b, z). \quad (3.3)$$

Здесь $f_{a/h}(x, Q^2)$ — функция распределения партонов, $\sigma_{ab \rightarrow cd}$ — сечение рассеяния партонов, $D_{c/h}(z, Q^2)$ — функция фрагментации, эволюция которой по Q определяется уравнением Грибова–Липатова–Докшицера–Альтарелли–Паризи [60–62]; z, x_a, x_b — доли импульса адронов h, h_a, h_b , переносимые соответствующими партонами (в системе бесконечного момента), $Q^2 = p_t^2$; мера $d\mu(z, x_a, x_b)$ учитывает закон сохранения энергии-импульса. Жёсткие столкновения соответствуют большим p_t .

Если рассматривать столкновение двух ионов просто как суперпозицию ряда парных столкновений нуклонов, то, используя данные по протон-протонным столкновениям и оценку парных нуклонных столкновений, можно получить оценку спектра частиц, рождённых при столк-

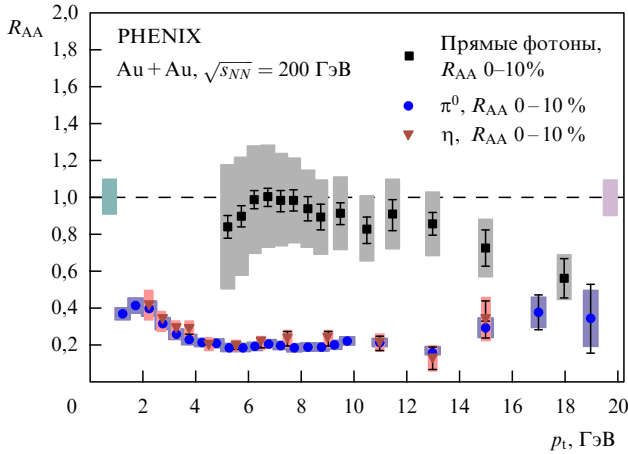


Рис. 4. Гашение струй по данным эксперимента PHENIX (Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment) на RHIC (предварительные результаты коллаборации PHENIX): π - и η -мезоны с большими импульсами подавлены, в отличие от бесцветных нейтральных фотонов. (Из работы [18].)

новении тяжёлых ионов. В частности, согласно такому сценарию, при столкновении тяжёлых ионов должно рождаться довольно много частиц с высокой энергией, так как часть частиц, рождённых при протон-протонных столкновениях, имеет весьма большую энергию. Однако экспериментальные данные показывают, что при столкновении тяжёлых ионов происходит подавление высокоэнергетических частиц в конечном состоянии [1–4]. Этот факт подтверждает наличие эффекта подавления струй при столкновениях тяжёлых ионов.

Итак, можно сказать, что в экспериментах на RHIC [1, 2] и LHC [5] получена КГП, которая ведёт себя не как газ, состоящий из кварков и глюонов, а как сильно взаимодействующая жидкость [8, 9]. Это означает, что для описания КГП мы не можем использовать методы теории возмущений. Методы КХД на решётке также не годятся для описания КГП, так как они плохо приспособлены для изучения процессов в реальном времени. В этой ситуации представляется целесообразным использовать для описания КГП методы голографической дуальности [20–22].

3.3. Характерные времена при образовании кварк-глюонной плазмы при столкновении тяжёлых ионов

В процессе столкновения двух ионов наблюдается быстрая локальная термализация системы партонов, а затем следуют дальнейшее расширение системы и её охлаждение, которое приводит к адронизации и множественному рождению частиц. Эксперименты указывают на очень малое время термализации, $\tau_{\text{therm}} \sim 1$ фм/с, для КГП, образовавшейся при столкновении тяжёлых ионов, тогда как время охлаждения порядка 20 фм/с [1, 9, 14, 16, 19, 63].

Более детально характерные времена можно описать следующим образом. На временном интервале порядка 0,02 фм/с происходят "жёсткие" процессы, ответственные за поведение "жёстких" частиц, наблюдаемых на детекторах. На временах порядка 0,2 фм/с идут полужёсткие процессы, которые производят большую часть "множественности" в конечном состоянии. Затем по истечении времени термализации $\tau_{\text{therm}} \sim 1$ фм/с сис-

тема достигает локально-равновесного состояния, называемого КГП. Далее эволюция КГП описывается уравнениями гидродинамики, и после интервала времени $\tau_{\text{hadr}} \sim 10$ фм/с, когда вследствие разлёта сталкивающихся ионов температура становится ниже температуры деконфайнмента, образуется горячий адронный газ. В ходе дальнейшего расширения происходит охлаждение и к моменту наступления стадии фризаута (freeze-out), "вымораживания", $\tau_f \sim 20$ фм/с, плотность адронного газа становится достаточно низкой и система распадается на свободные адроны, которые можно наблюдать на детекторах.

Таким образом, в экспериментах по столкновениям тяжёлых ионов имеется следующая иерархия характерных времён:

$$\tau_{\text{therm}} < \tau_{\text{hydro}} < \tau_{\text{hadr}} < \tau_f. \quad (3.4)$$

Время термализации τ_{therm} можно грубо оценить по поперечному распределению плотности энергии ε по быстрой y [64]:

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{A\tau_{\text{therm}}} \frac{dN}{dy} \langle m_t \rangle, \quad m_t = \sqrt{m_\pi^2 + k_t^2}, \quad (3.5)$$

где m_π — масса пиона, A — атомный вес, $\langle m_t \rangle$ — эффективная масса, полученная усреднением по поперечному импульсу k_t .

Обсудим оценку времени фризаута τ_f . Имеются экспериментальные указания на порядок величины τ_f , полученной из соотношения [65]

$$\tau_f = R_{\text{long}} \sqrt{\frac{m_t}{T}}, \quad (3.6)$$

здесь T — кинетическая температура фризаута, принятая равной 0,12 ГэВ, R_{long} — гауссов продольный радиус (Хэнбери Брауна – Твисса, ХБТ). Чтобы пояснить смысл R_{long} , скажем, что R_{long} , наряду с R_{side} и R_{out} , определяет пространственную картину сгустка КГП. В экспериментах скорость расширения и пространственная протяжённость при наступлении режима исчезновения взаимодействия (decoupling) измеряются с помощью метода интерферометрии интенсивности. Эта техника, известная как ХБТ-анализ, использует бозе-эйнштейновские корреляции между парами тождественных бозонов [66]. Такой метод успешно применялся для изучения столкновений тяжёлых ионов на RHIC [67]. Результаты измерения двухпионной бозе-эйнштейновской корреляции на LHC в центральных Pb–Pb-столкновениях при энергии в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ ТэВ представлены в [65]. С увеличением энергии $\sqrt{s_{NN}}$ наблюдалось возрастание не только R_{long} , но и R_{side} и R_{out} . Область однородности пионов и время режима исчезновения взаимодействия (decoupling) превышали соответствующие величины, измеренные на RHIC. Для центральных столкновений Pb–Pb при $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ ТэВ была получена оценка $\tau_f \sim 10$ –11 фм/с. Сравнение процессов адронизации на RHIC и LHC проведено в [68].

3.4. Множественность при pp- и AA-столкновениях

Множественность заряженных адронов, образующихся при столкновениях как протонов (pp), так и тяжёлых ионов, быстро возрастает с увеличением энергии в системе центра масс. Например, согласно данным ALICE (A Large Ion Collider Experiment) плотность множественности заряженных частиц, рождённых при Pb–Pb-стол-

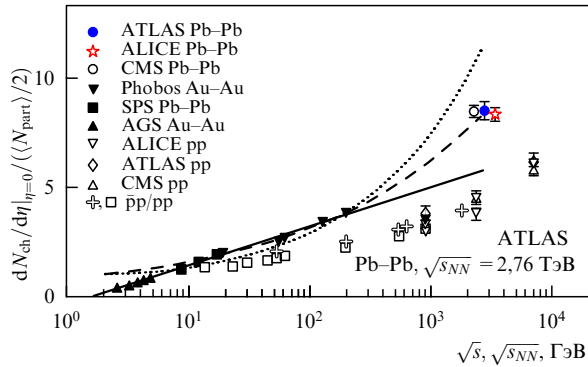


Рис. 5. Плотность быстроты заряженных частиц, приходящаяся на пару нуклонов, как функция энергии $\sqrt{s_{NN}}$ при столкновениях ядер и как функция энергии $\sqrt{s}$ при дифракционных pp- и $\bar{p}p$ -столкновениях. Тёмные кружки, звёзды, светлые кружки и тёмные квадраты — данные по Pb–Pb-столкновениям, полученные на ATLAS, ALICE, CMS (Compact Muon Solenoid) и SPS соответственно. Тёмные треугольники вершиной вверх и вниз — данные по Au–Au-столкновениям в экспериментах AGS и Phobos. Светлые треугольники вершиной вверх, ромбы и светлые треугольники вершиной вниз — данные по pp-столкновениям ALICE, ATLAS и CMS. Кресты и светлые квадраты — данные экспериментов по pp- и $\bar{p}p$ -столкновениям. Пунктирная кривая представляет зависимость $\sim s_{NN}^{0.25}$, отвечающую модели Ландау. Штриховая кривая соответствует степенной аппроксимации данных ALICE, сплошная — логарифмической аппроксимации данных различных экспериментов. (Из работы [69].)

кновениях с энергией на нуклонную пару $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ ТэВ, составляет $dN/d\eta|_{\text{PbPb}} = 1584 \pm 4(\text{stat.}) \pm 76(\text{syst.})$ [6]. Эта величина примерно в 1,9 раза больше, чем в pp-столкновениях при тех же энергиях, и примерно в 2,2 раза больше, чем для центральных Au–Au-столкновений при $\sqrt{s_{NN}} = 0,2$ ТэВ.

На рисунке 5 проведено сравнение плотности множественности заряженных частиц, нормированной на число участвующих нуклонов, $(dN/d\eta)/(0,5\langle N_{\text{part}} \rangle)$, с данными измерений для столкновений Au–Au и Pb–Pb, а также pp- и $\bar{p}p$ -столкновений для широкой области энергий. Как отмечено в [6, 70], график энергетической зависимости имеет более крутой вид для столкновений тяжёлых нуклонов, чем для pp- и $\bar{p}p$ -столкновений:

$$\left. \frac{dN}{d\eta} \right|_{\text{PbPb}(s_{NN})} \sim s_{NN}^{0.15}, \quad \frac{(dN/d\eta)|_{\text{PbPb}(s_{NN})}}{(dN/d\eta)|_{\text{pp}}} = s_{NN}^{0.04}. \quad (3.7)$$

4. Релятивистская гидродинамика и кварк-глюонная плазма

4.1. Гидродинамическая модель Ландау

Гидродинамическая теория множественного рождения частиц при столкновениях сверхбыстрых ядерных частиц была разработана Ландау [25] в 1953 г. Ранее Ферми выдвинул идею о возможности применения для исследования этого процесса статистических методов [26].

Ландау предложил следующую картину процесса столкновения. Весь процесс разбивается на три стадии: 1) стадия столкновения; 2) стадия гидродинамического расширения; 3) стадия разлёта. На первой стадии в момент столкновения возникает большое "число частиц", сосредоточенных в области, линейные размеры которой определяются радиусом действия ядерных сил и энергией сталкивающихся частиц. Подчёркивается, что

само понятие числа частиц в такой системе не имеет точного смысла. Длина пробега частиц в этой системе очень мала по сравнению с её размерами. Малость длины пробега должна сохраняться в течение некоторой стадии процесса расширения. Поэтому вторая стадия процесса (расширение) должна носить гидродинамический характер, так как малая длина пробега позволяет рассматривать движение вещества в системе с макроскопической, гидродинамической, точки зрения как движение некоторой идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Поскольку скорости в системе сравнимы со скоростью света, следует использовать уравнения релятивистской гидродинамики. По мере расширения происходит переход к третьей стадии (разлёт), когда взаимодействие ослабевает, длина пробега возрастает и можно говорить о числе частиц как о физической характеристике.

Полное число частиц в системе в течение гидродинамической стадии расширения не остаётся постоянным. Поэтому число частиц, регистрируемых детектором, определяется не числом частиц, возникающим собственно в момент столкновения, а числом частиц, имеющих в системе в момент перехода к следующей за расширением стадии — свободному разлёту частиц [27].

4.1.1. Термодинамика при столкновениях быстрых частиц и полное число частиц.

Для определения полного числа рождённых частиц в зависимости от энергии сталкивающихся частиц используются термодинамические соображения, следующие из теории излучения чёрного тела. В качестве уравнения состояния сильно сжатого вещества в ультрарелятивистском случае принимается соотношение

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.1)$$

где p — давление, ε — плотность энергии. Поскольку число частиц в системе не является заданным, а определяется условиями статистического равновесия, химический потенциал равен нулю, $\mu = \varepsilon - Ts + p = 0$, где s — энтропия единицы объёма. Учитывая, что при заданном (единичном) объёме первый закон термодинамики имеет вид $d\varepsilon = Tds$, получаем те же соотношения, что и для излучения чёрного тела:

$$s \sim \varepsilon^{3/4}, \quad T \sim \varepsilon^{1/4}. \quad (4.2)$$

Делается важное предположение, что полное число N образовавшихся частиц пропорционально полной энтропии системы: $N = \text{const } S$. Это даёт возможность определить полное число частиц, образующихся при столкновении, умножая плотность энтропии на объём шара, сплюсненного в продольном направлении в m_A/E раз (где E — энергия каждого из сталкивающихся ионов в системе их центра инерции, m_A — масса в системе покоя),

$$N = KA^{3/4} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^{1/2}, \quad (4.3)$$

где K — постоянная порядка единицы, m_p — масса протона.

4.1.2. Распределение образующихся частиц по энергиям и направлениям.

Приведём решение Ландау уравнений релятивистской гидродинамики, описывающее угловое распределение образующихся частиц и их распределение по энергиям. Релятивистская жидкость в модели Ландау

описывается тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, идеальной жидкости (А.3) (см. приложение А), и уравнения имеют вид (А.1), при этом используется уравнение состояния (4.1). Предполагается, что в системе центра инерции в течение значительной части стадии гидродинамического расширения вещество имеет форму сильно сплюсненного диска (начальная толщина диска Δ) в направлении оси $x_{\parallel}$ и движение вещества в течение этого времени можно рассматривать как одномерное с координатой $x_{\parallel}$ и временем t :

$$\partial_t T^{00} + \partial_{x_{\parallel}} T^{01} = 0, \quad \partial_t T^{01} + \partial_{x_{\parallel}} T^{11} = 0, \quad (4.4)$$

где $T^{00} = \varepsilon(u^0)^2 + p(u^1)^2$, $T^{01} = (\varepsilon + p)u^0 u^1$, $T^{11} = \varepsilon(u^1)^2 + p(u^0)^2$, причём выполняется соотношение $(u^0)^2 - (u^1)^2 = 1$. При ультррелятивистских скоростях обе компоненты, u^0 , u^1 , гораздо больше единицы и близки между собой, $u^0 \approx u^1 = u \gg 1$. В первом приближении $u^0 - u^1 \approx 1/(2u)$ и уравнения гидродинамики (4.4) принимают вид

$$\partial_t(\varepsilon u^2) = -\frac{1}{4} \partial_{x_{\parallel}} \varepsilon, \quad \partial_t \varepsilon = -\partial_{x_{\parallel}} \left(\frac{\varepsilon}{u^2} \right). \quad (4.5)$$

Здесь и ниже $x_{\mp} = t \mp x_{\parallel}$. Приближённое решение уравнений (4.5) в области $t \gg t_{-} \gg \Delta$ имеет вид

$$\varepsilon \sim \exp \left[-\frac{4}{3} (a + b - \sqrt{ab}) \right], \quad a = \ln \frac{x_{-}}{\Delta}, \quad b = \ln \frac{t}{\Delta}. \quad (4.6)$$

Отсюда могут быть получены распределения энергии и энтропии и формула для числа образовавшихся частиц на единицу телесного угла. Это рассмотрение справедливо при малых углах разлёта θ .

Замечательно, что два главных предсказания теории Ландау, а именно зависимость отношения числа образующихся заряженных частиц к числу пар, участвующих в столкновениях, $N_{ch}/(N_{part}/2)$ от энергии сталкивающихся ионов и распределение по быстроте, находятся в весьма хорошем согласии с экспериментальными данными в случае не слишком больших энергий. Сравнение данных эксперимента Phobos по распределению по быстротам с распределением Ландау проведено в [71–73]. Однако, как видно из рис. 5, множественность образующихся частиц, полученная в экспериментах при больших энергиях на LHC [6], не соответствует предсказаниям теории Ландау.

Хотя гидродинамика Ландау при не слишком больших энергиях успешно объясняет множественности и распределения по быстротам [72, 73], при энергиях LHC обнаружены отклонения от неё [74, 75], что заставляет рассмотреть поправки к приближению Ландау и варианты модификации самой модели Ландау.

Если не использовать приближение Ландау, то вместо (4.5) получим уравнения [71, 73]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{+}} + 2 \frac{\partial [\varepsilon \exp(-2y_f)]}{\partial x_{-}} &= 0, \\ 2 \frac{\partial [\varepsilon \exp(2y_f)]}{\partial x_{+}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{-}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь y_f — быстрота жидкости, $u^0 = \cosh y_f$, $u^1 = \sinh y_f$. Приближённые решения уравнений (4.7) обсуждаются в [71, 73, 76–79]. Распределение Ландау по быстротам чувствительно к учёту поправок, связанных с попереч-

ным потоком. (О точных решениях с продольным и поперечными потоками в гидродинамике Ландау см. [80].)

Замечательно, что уже релятивистская гидродинамика идеальной жидкости даёт достаточно адекватное описание важных свойств КГП, таких как множественность и радиальный и эллиптический потоки [81–86].

4.2. Кинематика бёркеновского буст-инвариантного потока

Буст-инвариантная динамика [87] описывает расширение КГП при дополнительном предположении, что физика остаётся одинаковой во всех системах отсчёта, движущихся с постоянной скоростью вдоль продольной оси. Эту симметрию можно сделать явной, если ввести координаты собственное время τ и пространственно-временная быстрота y , связанные с координатами лабораторной системы отсчёта, временем x^0 и положением вдоль оси расширения $x^{\parallel}$ соотношениями $t = \tau \cosh y$, $x^{\parallel} = \tau \sinh y$. В этих координатах метрика Минковского приобретает вид

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 dy^2 + dx_{\perp}^2. \quad (4.8)$$

Полагая для простоты наличие симметрии относительно отражений $y \rightarrow -y$, а также трансляционной и вращательной симметрий в поперечной плоскости, получаем, что тензор энергии-импульса будет иметь лишь три ненулевые компоненты: $T_{\tau\tau}$, T_{yy} и $T_{x_2 x_2} = T_{x_3 x_3} \equiv T_{xx}$, которые зависят только от τ . Предположение о конформной инвариантности $T_{\mu\nu}$ приводит к условию бесследовости

$$-T_{\tau\tau} + \frac{1}{\tau^2} T_{yy} + 2T_{xx} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнения законов сохранения $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$ дают следующее соотношение между компонентами тензора:

$$\tau \frac{d}{d\tau} T_{\tau\tau} + T_{\tau\tau} + \frac{1}{\tau^2} T_{yy} = 0. \quad (4.10)$$

Используя (4.9), (4.10), диагональные компоненты тензора энергии-импульса можно выразить через одну функцию $f(\tau)$:

$$\text{diag } T_{\mu\nu} = \{\varepsilon(\tau), \tau^2 p_{\perp}, p_{\perp}, p_{\perp}\}, \quad (4.11)$$

$$\varepsilon(\tau) = f(\tau), \quad p_{\perp} = -\tau \frac{df(\tau)}{d\tau} - f(\tau), \quad (4.12)$$

$$p_{\parallel} = f(\tau) + \frac{1}{2} \tau \frac{df(\tau)}{d\tau},$$

где тензор $T_{\mu\nu}$ записан в координатах (τ, y, x_1, x_2) , $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$ — поперечное и продольное давление соответственно. Вид тензора энергии-импульса (4.11) целиком основан на кинематике. Динамика модели определит выбор конкретной функции $f(\tau)$. Идеальная жидкость или жидкость с ненулевой вязкостью или другими коэффициентами переноса будут приводить к выбору различных $f(\tau)$.

Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса имеет вид правой части в (А.3) (см. приложение А). Для буст-инвариантной кинематики в координатах (τ, y, x_1, x_2) тогда получим $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Сравнивая (А.3) с (4.11), находим, что функция $f(\tau)$ должна иметь вид

$$f(\tau) = \frac{\text{const}}{\tau^{4/3}}. \quad (4.13)$$

Модель Бьёркена идеальной жидкости [64] является предельным случаем модели Ландау (ср. с обсуждением в [73]). Действительно, в области $y \ll \ln(t/\Delta)$ из (4.6) получаем (4.13).

В ряде работ рассматривались $SO(3)$ -инвариантная и также буст-инвариантная гидродинамика и её возмущения [88–91] без предположения об идеальности жидкости. Деформация бьёркеновского потока [92], которая сохраняет его обычную симметрию в поперечной плоскости, но модифицирует продольную буст-инвариантность таким образом, что имеет место интерполяция между бьёркеновским потоком при средних быструтах и состоянием типа глазмы при больших быструтах, недавно рассматривалась также в [93]. Для тензора энергии-импульса, описывающего глазму, продольное давление примерно равно плотности энергии, взятой с противоположным знаком [94].

4.3. Проблемы теории релятивистской вязкой жидкости

Для более точного описания КГП, в частности для исследования зависимости от выбора начальных данных, требуется использование формализма релятивистской гидродинамики с учётом диссипации, т.е. вязкости и теплопроводности. При выводе релятивистских уравнений движения вязкой и теплопроводной среды возникает известная проблема, связанная с тем, что если в тензоре вязких напряжений ограничиться только линейными членами по градиентам скорости и термодинамических величин, то полученная теория (так называемый формализм первого порядка) [95, 96] приводит к неустойчивости и нарушению причинности (распространение сигналов со сверхсветовой скоростью). Путь решения этой проблемы, который был предложен Израэлем и Стюартом [97–100], заключается в учёте членов второго порядка по градиентам (см. также недавнее рассмотрение этой проблемы для конформной вязкой релятивистской гидродинамики [101–103]).

Релятивистские уравнения вязкой и теплопроводной среды в первом и втором порядках по градиентам приведены в приложении А.

Ввиду того что в приближении первого порядка по градиентам релятивистские уравнения гидродинамики допускают распространение возмущений со сверхсветовой скоростью [104, 105], рассматривают приближение второго порядка по градиентам. Уравнения релятивистской гидродинамики с точностью до второго порядка по градиентам для конформно-инвариантной жидкости получены в [101] (см. также недавний обзор [106]). Дополнительные слагаемые для неконформной жидкости с ненулевой второй вязкостью получены в [107] (см. также недавние работы [108, 109]). Рассмотрение вихрей при столкновении тяжёлых ионов при учёте флуктуаций проведено в [110]. Выбор диссипативных токов в формализме Израэля–Стюарта обсуждается в [106, 109].

Численные расчёты динамики столкновений тяжёлых ионов в рамках формализма Израэля–Стюарта в $(2+1)$ -измерениях выполнены в [111–116] при предположении буст-инвариантности в продольном направлении. Это предположение довольно хорошо обосновано при средней быстрой для столкновений при достаточно высоких энергиях, в частности, на ЛНС. Аналогичные вычисления в $(2+1)$ -измерениях также выполнены с

использованием эквивалентного формализма Оттинге-ра–Грмелы [117, 118]. Недавно были проведены $(3+1)$ -мерные вычисления для вязкой жидкости в широком диапазоне быструт при более низкой энергии столкновений [119–121].

КХД не является конформно-инвариантной теорией, поэтому она должна включать в себя ненулевой коэффициент второй вязкости ζ , поскольку ζ пропорционален следу тензора энергии-импульса [113], т.е. конформной аномалии. Исследовались влияние второй вязкости [122], а также совместное влияние первой и второй вязкости [123, 124] на эллиптический поток. Ожидается, что вторая вязкость имеет пик (возможно, вместе со временем релаксации) при критической температуре T_c , при которой система приобретает большую корреляционную длину [125–128].

Имеются указания на необходимость учёта поправок к гидродинамике второго порядка по градиентам. При разложении до третьего порядка по градиентам [129] численное различие с результатами теории Израэля–Стюарта второго порядка пренебрежимо мало при значении отношения вязкости η к энтропии s порядка 0,05, но становится существенным при $\eta/s \gtrsim 0,2$ (см. [130]).

На ранних стадиях эволюции, когда локальное распределение по импульсам, ещё не достигшее равновесного состояния, является вследствие быстрого продольного расширения сильно анизотропным, вязкие поправки к тензору энергии-импульса превосходят равновесную часть, что приводит к отрицательному давлению. В недавних работах [131–134] предприняты попытки описать как раннюю, так и более позднюю стадии эволюции в рамках единого подхода на основе гидродинамического разложения в окрестности анизотропного распределения. Это приводит к новым уравнениям движения, включая уравнение для степени анизотропии функции распределения.

В одномерном [131, 135] и $(2+1)$ -мерном [136] случаях такой подход, позволяющий воспроизвести два предельных случая: свободные струи (free streaming) и идеальную жидкость, приводит к уравнениям гидродинамики второго порядка по градиентам, если сделать разложение по малому параметру анизотропии. Интересно отметить, что энтропия, вычисленная в такой анизотропной гидродинамике, существенно отличается от энтропии, вычисленной в рамках гидродинамики вязкой жидкости до второго порядка по градиентам. Это понятно, так как анизотропная гидродинамика в предельном случае описывает свободные струи — режим, который находится далеко за пределами области применимости гидродинамики вязкой жидкости второго порядка по градиентам.

4.4. Эллиптический поток и флуктуации начальных данных

Как отмечалось в разделе 3.3, в экспериментах на RHIC и ЛНС обнаружено, что при столкновениях тяжёлых ионов распределение в поперечной плоскости частиц, образующихся при нецентральных столкновениях, отклоняется от сферически-симметричного распределения (см., например, обзоры [39, 106, 130, 137–141]). Эта асимметрия, обусловленная эллиптическим потоком, т.е. не равным нулю коэффициентом Фурье v_2 (см. раздел 3.2), находит естественное объяснение в рамках гидродинамики.

При дополнительных предположениях можно получить выражение для эллиптического потока с помощью точных решений нелинейных уравнений гидродинамики [142]. При этом в [142] использовались более ранние результаты [76, 77, 143].

Отметим, что вычисление поправок по вязкости к моделям идеальной гидродинамики множественного рождения частиц стало проводиться после того, как было вычислено отношение вязкости к энтропии η/s с помощью AdS/CFT-дуальности [144] (см. также [106, 145]). В случае ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса найдено отношение $\eta/s = 1/4\pi$. Недавние численные расчёты в гидродинамике [140] показали, что коэффициент вязкости достаточно мал. Проводились вычисления в КХД на решётке [127, 146–148], но применимость статических вычислений на решётке для определения динамических коэффициентов переноса не вполне ясна. На основе численных расчётов и экспериментальных данных установлено, что величина η/s лежит в области $0,07 \leq \eta/s \leq 0,43$ [141].

Результаты численных расчётов в гидродинамике и их сопоставление с результатами экспериментов показывают важность учёта флуктуаций в начальных геометрических конфигурациях [149–153] (см. недавний обзор [106] и приведённые там ссылки).

Вследствие флуктуаций не только чётные, $v_2, v_4, \dots$, но и нечётные, $v_3, v_5, \dots$, гармоники становятся отличными от нуля. Различные v_n зависят от η/s и начальных данных, которые определяются динамикой и флуктуациями партонов в исходных волновых функциях ионов. Недавние численные расчёты в рамках гидродинамических моделей с флуктуирующими начальными данными показали прекрасное согласие с измерениями потоков на RHIC и LHC [154].

Предложены различные способы учёта флуктуаций начальных данных в гидродинамике. Речь идёт о задании распределения плотности энергии и скорости жидкости в момент времени термализации. Одна из наиболее широко применяемых моделей — это монте-карловская модель Глаубера [138]. Для двух ионов вводится случайный прицельный параметр b и траектории всех нуклонов предполагаются прямолинейными. Из результатов численных расчётов в этой модели [113] следует, что малые отклонения от идеальной жидкости (поправки по вязкости) существенно изменяют эллиптический поток. Другая, широко применяемая, модель для начальных состояний — это монте-карловская модель Харзеева–Левина–Нарди, основанная на использовании конденсата цветного стекла (КЦС). В рамках последнего подхода учитывается хорошо установленное свойство КХД, заключающееся в том, что при малых значениях параметра Бёркена x доминирует режим с большими плотностями глюонов и нелинейной когерентностью [155]. Большие плотности глюонов соответствуют сильным классическим полям, что позволяет вычислять волновую функцию из уравнений классической теории поля [11]. Рассматривается также модель, использующая высокоэнергетическую волновую функцию, совместную с классической янг-миллсовской динамикой полей глазмы [156], образующихся при столкновении тяжёлых ионов [157, 158]. Эта модель учитывает нелинейную неравновесную эволюцию исходных глюонных полей.

4.5. Химический потенциал

При ненулевом химическом потенциале μ имеем

$$\varepsilon = -p + Ts + \mu n, \quad d\varepsilon = Tds + \mu dn, \quad (4.14)$$

здесь $n = N/V$ — плотность числа частиц в объёме V . В этом случае кроме уравнения состояния (4.1) надо предположить связь μ и ε . В [159] предложено соотношение

$$\mu = \frac{a}{1 + \varepsilon/b}, \quad (4.15)$$

где $a \approx 1,27$ ГэВ, $b \approx 4,3$ ГэВ. Выбор соотношения такого вида мотивирован подгонкой к экспериментальным данным [159] (см. также [160, 161]).

Отметим, что, конечно, желательно было бы получить вид зависимости химического потенциала от энергии из вычислений на решётке. Однако такие вычисления проводятся при нулевом химическом потенциале, что достаточно для экспериментов на LHC на верхнем пределе энергий и в диапазоне средних быстрот. При выходе из диапазона средних быстрот и не слишком высоких энергиях барионная плотность становится существенной величиной. Трудности с вычислениями на решётке при ненулевом химическом потенциале связаны с так называемой проблемой знаков, которая возникает в методе Монте-Карло при работе с фермионами. В случае достаточно малого барионного химического потенциала μ_b можно ограничиться рассмотрением первых членов разложения по μ_b [162]. Недавно это было проделано в [163] с использованием решёточных вычислений первых членов разложения [164, 165].

5. Описание кварк-глюонной плазмы в рамках AdS/CFT-дуальности

AdS/CFT-дуальность, или дуальность гравитация/калибровочная теория [20–22], устанавливает соответствие между супергравитацией в 5-мерном пространстве AdS (приближение к теории суперструн типа IIB) и конформно-инвариантной калибровочной теорией в 4-мерном пространстве Минковского. Корреляционные функции 4-мерной калибровочной теории выражаются через величины 5-мерной супергравитации. Известным примером такого соответствия является ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричная теория Янга–Миллса — суперконформная теория с полями материи в присоединённом представлении калибровочной группы $SU(N_c)$, которая дуальна теории суперструн типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$.

Однако пока точно не известна теория гравитации, дуальная КХД. Различие между ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теорией Янга–Миллса и КХД становится менее существенным в случае, когда кварки и глюоны находятся в фазе деконфайнмента, поскольку вследствие конформной симметрии в квантовом случае ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричная теория Янга–Миллса не обладает свойством конфайнмента. Вычисления на решётке [166] показывают, что КХД становится квазиконформно-инвариантной при температурах $T > 300$ МэВ и уравнение состояния может быть взято в виде $\varepsilon = 3p$ (бесследовый конформно-инвариантный тензор энергии-импульса). Эти соображения мотивировали использование AdS/CFT-дуальности для исследования непертурбативной динамики КХД.

Достигнут значительный прогресс при описании свойств КГП, в частности в вычислении η/s [144, 167–170] (см. также работу [171], в которой обсуждается нарушение голографической оценки для вязкости).

Кроме того, как показывают недавно проведенные вычисления в $(\mathcal{N} = 4)$ -суперсимметричной теории Янга–Миллса, поведение коллективных возбуждений в режиме слабой связи, вычисленных с помощью диаграммной техники Келдыша [172], не намного отличается от поведения таковых в теории без суперсимметрии [173].

В последние годы предложены также поправленные голографические модели, которые включают в себя не только гравитацию, но и низшую струнную скалярную моду — дилатон. Описанию свойств стационарной КГП с помощью этих моделей посвящен раздел 6.6.

5.1. Соответствие параметров

Рассмотрим соответствие параметров калибровочной теории в 4-мерном пространстве и теории в пространстве $\text{AdS}_5 \times S^5$.

- Калибровочная теория имеет два параметра:
 - константа взаимодействия (элементарный заряд) g ;
 - число цветов N_c .

Пределы сильной или слабой связи определяются параметром 'т Хофта $\lambda = g^2 N_c$.

- Теория струн имеет три параметра:
 - длина струны l_s , т.е. характерная длина колебаний струны;
 - константа струнного взаимодействия g_{st} ;
 - кривизна пространства дополнительных измерений R .

Соотношения между этими параметрами следующие [20]:

$$g^2 = 4\pi g_{st}, \quad (5.1)$$

$$g^2 N_c = \frac{R^4}{l_s^4}. \quad (5.2)$$

В пределе сильной связи в теории поля $g^2 N_c \gg 1$ и длина струны много меньше радиуса кривизны,

$$l_s \ll R, \quad (5.3)$$

так что вместо теории струн можно использовать эйнштейновскую гравитацию.

Более того, из теории струн, точнее теории струн типа IIB, следует соотношение между G_{10} , g_s и l_s :

$$16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_{st}^2 l_s^8. \quad (5.4)$$

Константа G_{10} связана с 10-мерной планковской длиной, $G_{10} \sim l_P$. Поэтому из (5.4) получаем

$$\frac{l_P^8}{l_s^8} \sim g_{st}^2. \quad (5.5)$$

Как известно, классическая гравитация применима, если $l_P \ll R$. Отсюда находим

$$\frac{l_P^2}{R^2} = \frac{l_P^2}{l_s^2} \frac{l_s^2}{R^2} \sim \sqrt{g_{st}} \frac{1}{g\sqrt{N_c}} = \frac{\sqrt{g_{st}}}{\sqrt{4\pi g_{st} N_c}} \sim \frac{1}{\sqrt{N_c}}, \quad (5.6)$$

и мы действительно получаем, что планковская длина много меньше радиуса кривизны,

$$l_P \ll R, \quad (5.7)$$

при $N_c \rightarrow \infty$.

5.2. AdS/CFT-дуальность

5.2.1. Евклидовы корреляционные функции в AdS/CFT-дуальности. Рассмотрим соответствие между квантовой конформной теорией в d -мерном евклидовом пространстве и классической гравитацией в пространстве AdS_D , $D = d + 1$ (см. приложение Б). Евклидова версия AdS_D -метрики (Б.9) имеет вид

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (d\tau^2 + dx^2 + dz^2). \quad (5.8)$$

Эта метрика является решением уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной. В AdS/CFT-дуальности d -мерная квантовая теория поля рассматривается на границе $\partial M = R^d$ пространства $M = \text{AdS}_D$ при $z = 0$. Пусть заданное в пространстве M поле ϕ , принимающее значение ϕ_0 на границе ∂M , взаимодействует с оператором $\mathcal{O}$ на границе ∂M с лагранжианом взаимодействия $\phi\mathcal{O}$. В этом случае AdS/CFT-дуальность формально выражается следующим равенством [21, 22]:

$$\left\langle \exp \left(\int_{\partial M} \phi_0 \mathcal{O} d^d x \right) \right\rangle = \exp \{ -S[\phi_{cl}(\phi_0)] \}. \quad (5.9)$$

В левой части (5.9) стоит производящий функционал для корреляционных функций оператора $\mathcal{O}$ в d -мерной квантовой конформной теории поля, а в показателе экспоненты в правой части (5.9) — действие S для поля ϕ , вычисленное на классическом решении ϕ_{cl} уравнений движения с соответствующими граничными условиями:

$$\delta S[\phi_{cl}] = 0, \quad \phi_{cl}|_{z=0} = \phi_0. \quad (5.10)$$

Формула (5.9) требует перенормировочного предписания [174, 175].

5.2.2. Скалярное поле. Рассмотрим пример безмассового скалярного поля в евклидовом пространстве AdS_D . Действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \int_{R^d} dx \frac{1}{z^{d-1}} \sum_{i=0}^d (\partial_i \phi)^2, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \quad (5.11)$$

$$x = (x_0, \mathbf{x}), \quad x_0 = z.$$

Здесь $\epsilon > 0$ — параметр обрезания (см. [21]). Решение задачи Дирихле

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{d-1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = 0, \quad \phi|_{z=0} = \phi_0(\mathbf{x}), \quad (5.12)$$

может быть представлено в виде

$$\phi(z, \mathbf{x}) = z^{d/2} \int_{R^d} d\mathbf{p} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) |\mathbf{p}|^{d/2} K_{d/2}(|\mathbf{p}|z) \tilde{\phi}_0(\mathbf{p}), \quad (5.13)$$

где $K_{d/2}(y)$ — модифицированная функция Бесселя, $\tilde{\phi}_0$ — некоторая произвольная функция. Интегрируя по частям, (5.11) можно привести к виду

$$S = -\frac{1}{2} \int_{R^d} d\mathbf{x} \frac{\phi \partial_z \phi}{z^{d-1}} \Big|_{z=\epsilon}. \quad (5.14)$$

Используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя, получим перенормированное выражение для действия. При $d = 4$ в пределе $z \rightarrow 0$

имеем

$$\phi(z, \mathbf{x}) = C \int_{\mathbb{R}^4} d\mathbf{p} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) \times \left[2 - \frac{1}{2} (z|\mathbf{p}|)^2 - \frac{(z|\mathbf{p}|)^4}{8} \log \frac{z|\mathbf{p}|}{2} + (z|\mathbf{p}|)^4 + \dots \right] \tilde{\Phi}_0(\mathbf{p}). \quad (5.15)$$

Здесь и ниже C, c_1, a, b — постоянные, явный вид которых не существен.

Действие (5.14) при $\epsilon \rightarrow 0$ обладает асимптотикой

$$S = C \int_{\mathbb{R}^4} d\mathbf{p} |\tilde{\Phi}_0(\mathbf{p})|^2 \left[-\frac{1}{\epsilon^2} |\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{p}|^4}{2} \log \frac{\epsilon|\mathbf{p}|}{2} + c_1 |\mathbf{p}|^4 + \dots \right]. \quad (5.16)$$

Перенормированное действие выражается как

$$S_{\text{ren}} = \int_{\mathbb{R}^4} d\mathbf{p} |\tilde{\Phi}_0(\mathbf{p})|^2 [ap^4 \log |\mathbf{p}|^2 + b|\mathbf{p}|^4]. \quad (5.17)$$

Используя обобщённую функцию $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2d}$ [174], действие (5.17) при $d = 4$ можно представить как

$$S_{\text{ren}} = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\Phi_0(\mathbf{x}) \Phi_0(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^8} d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (5.18)$$

поскольку согласно [176, 177] преобразование Фурье обобщённой функции $|\mathbf{x}|^{-8}$ имеет вид

$$|\widetilde{|\mathbf{x}|^{-8}} = ap^4 \log |\mathbf{p}| + b|\mathbf{p}|^4.$$

5.2.3. Корреляционные функции высших токов и поля высших спинов в AdS-пространстве. Соотношение (5.9) между полем в пространстве³ $\mathcal{M}$ и конформным оператором на границе $\partial\mathcal{M}$ обобщается и для случая высших спинов [23]. Поля высших спинов — это фронсдаловские свободные поля [178], а конформные операторы — конформные токи. В связи с этим интересно отметить, что теория высших спинов, которая сама по себе является нетривиальной теорией с рядом открытых вопросов [179, 180], допускает построение взаимодействующей теории именно в пространстве AdS [181]. Дуальность ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса с полями материи в присоединённом представлении калибровочной группы $SU(N_c)$ и теории суперструн типа IIB на $\text{AdS}_5 \times S^5$, разумеется, включает в себя соответствие между суперконформными токами и суперструнными модами, которые содержат все высшие спины. Обобщение соответствия (5.9), (5.10) для случая целых спинов получено в [182, 183]. С точки зрения приложений, важную роль играет соответствие для полей спина 2, которое в свою очередь даёт соответствие между метрикой пространства (bulk) и тензором энергии-импульса на границе (см. ниже соотношение (5.35)). Возможно, классические поля высших спинов играют немаловажную роль в формировании некоторых устойчивых структур в КГП.

5.2.4. Температурные корреляционные функции Мацубары и BAdS/TCFT-дуальность. Для вычисления мацубаровских корреляционных функций при конечной темпера-

туре (TCFT — Thermal CFT) используется соотношение (5.9) с заменой метрики (5.8) метрикой евклидовой чёрной браны (планарной чёрной дыры — BAdS — Black Hole AdS):

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left(f(z) d\tau^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right), \quad (5.19)$$

$$f(z) = 1 - \frac{z^d}{z_h^d}, \quad z_h = \left(\frac{4\pi T}{d} \right)^{-1}, \quad (5.20)$$

где z_h — положение горизонта, T — температура Хокинга. Предполагается, что евклидова временная координата τ имеет период $1/T$, $\tau \sim \tau + T^{-1}$, z изменяется от 0 до z_h .

5.2.5. AdS/CFT-дуальность в метрике Минковского. Казалось бы, можно ожидать, что соотношение для AdS/CFT-дуальности в метрике Минковского будет иметь вид

$$\left\langle \exp \left(i \int_{\partial\mathcal{M}} \phi_0 \mathcal{O} d^D x \right) \right\rangle = \exp (iS_{\text{cl}}[\phi]). \quad (5.21)$$

Однако такой прямолинейный аналог евклидовой версии дуальности неудовлетворителен [184]. В евклидовой версии классическое решение ϕ определяется единственным образом его значением ϕ_0 на границе $z = 0$ и требованием регулярности на горизонте $z = z_h$. Поэтому евклидовы корреляционные функции определяются соотношением (5.9) единственным образом. В метрике Минковского недостаточно требования регулярности на горизонте для единственности решения. С точки зрения функций Грина, это проявляется в известном факте существования в теории поля многих функций Грина (запаздывающей, опережающей, фейнмановской и др.). Классическое действие сводится к поверхностному члену

$$S = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \phi_0(-k) \mathcal{F}(k, z) \phi_0(k) \Big|_{z=z_b}^{z=z_h}, \quad (5.22)$$

где z_b — положение границы, и приемлемый "рецепт" AdS/CFT-дуальности имеет вид

$$G^r(k) = -2\mathcal{F}(k, z) \Big|_{z=z_b}, \quad (5.23)$$

где G^r — запаздывающая функция Грина. Определение $\mathcal{F}$ и подробное обсуждение этих вопросов дано в [184]. Вывод (5.23), приведённый в [185], использует пропагаторы Келдыша [172].

5.2.6. Геодезическое приближение в AdS/CFT-дуальности. Как показано в [186], корреляционные функции операторов $\mathcal{O}_A(t, x_1, \dots, x_d)$ с конформным весом Δ , определённые с помощью интеграла по путям, могут быть вычислены при больших Δ посредством суммирования по геодезическим:

$$\langle \mathcal{O}_A(t, x_1, \dots, x_{d-1}) \mathcal{O}_A(t', x'_1, \dots, x'_{d-1}) \rangle = \int \mathcal{DP} \exp(i\Delta L(\mathcal{P})) \approx \sum_{\text{geodesics}} \exp(-\Delta \mathcal{L}). \quad (5.24)$$

Здесь интеграл вычисляется по всем путям в AdS-пространстве, которые начинаются и заканчиваются в граничных точках $(t, x_1, \dots, x_{d-1})$ и $(t', x'_1, \dots, x'_{d-1})$, $L(\mathcal{P})$ — длина пути $\mathcal{P}$, которая становится мнимой для

³ В англоязычной литературе в данном контексте употребляется термин "bulk".

пространственноподобных траекторий, $\mathcal{L}$ — вещественная длина геодезической между точками на границе. Такое приближение справедливо, если $\Delta \gg 1$.

При $d = 2$ можно непосредственно проверить, что формула (5.24) действительно даёт правильный результат для конформно-инвариантной одновременной двухточечной корреляционной функции перенормированного оператора:

$$\left\langle \mathcal{O}_\Delta^{\text{ren}}\left(t, -\frac{l}{2}\right) \mathcal{O}_\Delta^{\text{ren}}\left(t, \frac{l}{2}\right) \right\rangle = l^{-2\Delta}. \quad (5.25)$$

Действительно, рассмотрим метрику (5.19) в лоренцевской сигнатуре при $d = 2$, $f(r) = r^2$, $R = 1$ в координатах (r, t, x) , $r = 1/z$:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 dx^2. \quad (5.26)$$

Рассматривая одновременную геодезическую, начинающуюся и заканчивающуюся вблизи AdS-границы, $r = r_{\text{reg}}$, в точках, находящихся на расстоянии l друг от друга по оси x , получаем, что длина геодезической $\mathcal{L}$ связана с l следующим образом:

$$\mathcal{L} = 2 \ln(2r_{\text{reg}}) + 2 \ln \frac{l}{2}, \quad (5.27)$$

где r_{reg} — регуляризованное значение координаты r на границе (на границе $r = \infty$). Длина геодезической $\mathcal{L}_{\text{AdS}}$ при $r_{\text{reg}} \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности, т.е. вблизи AdS-границы появляется расходимость. Поэтому определим перенормированную длину $\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L} - 2 \ln r_{\text{reg}}$, с помощью обрезания r_{reg} удаляя расходящуюся часть длины геодезической в "чистом" пространстве AdS (ср. с перенормировкой действия, рассмотренной в [174]). Перенормированный одновременной двухточечный коррелятор получаем в виде

$$\langle \mathcal{O}_\Delta^{\text{ren}}(t, \mathbf{x}) \mathcal{O}_\Delta^{\text{ren}}(t, \mathbf{x}') \rangle \sim \exp(-\Delta \delta\mathcal{L}) = \exp(-\Delta \ln l^2), \quad (5.28)$$

что соответствует (5.25).

5.2.7. Геодезическое приближение в BAdS/TCFT-дуальности. Рассмотрим теперь метрику чёрной дыры в AdS₃-пространстве и покажем, что с помощью вычисления длин геодезических можно получить температурные корреляционные функции в конформной теории поля. Метрика чёрной дыры задаётся выражением (5.26), где

$$f = r^2 - 1. \quad (5.29)$$

Как и в разделе 5.2.6, рассматривая одновременную геодезическую, начинающуюся и заканчивающуюся вблизи AdS-границы, $r = r_{\text{reg}}$, в точках, находящихся на расстоянии l друг от друга по оси x , получим, что длины $\mathcal{L}$ и l связаны между собой следующим образом:

$$\mathcal{L} = 2 \ln(2r_{\text{reg}}) + 2 \ln \left(\sinh \frac{l}{2} \right), \quad (5.30)$$

и для перенормированной длины имеем $\delta\mathcal{L} = 2 \ln [\sinh(l/2)]$. Результат (5.30) можно интерпретировать в конформной теории поля следующим образом. Двухточечная корреляционная функция оператора скалярного поля $\mathcal{O}_{h_L, h_R}(z, \bar{z})$ с конформными размерностями левой и правой мод (h_L, h_R) в 2-мерной конформной теории поля определяется из условия конформной инва-

риантности с точностью до нормировочной константы:

$$\langle \mathcal{O}_{h_L, h_R}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{h_L, h_R}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h_L} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2h_R}}. \quad (5.31)$$

Для того чтобы получить выражение для корреляционной функции при конечной температуре T , производится конформное отображение $w = \ln z / (2\pi T)$ из бесконечной плоскости на цилиндр с длиной окружности основания $L = 1/T$. Тогда корреляционная функция (5.31) принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}_{h_L, h_R}(w_1, \bar{w}_1) \mathcal{O}_{h_L, h_R}(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \\ & = \frac{C_{12}(\pi T)^{2h_L} (\pi T)^{2h_R}}{\sinh^{2h_L} [\pi T(w_1 - w_2)] \sinh^{2h_R} [\pi T(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)]}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Очевидно, что если положить $w_1 = l/2$, $w_2 = -l/2$ и $h_L = h_R = \Delta/2$, то выражение (5.32) совпадёт с геометрическим результатом $\exp(\Delta \delta\mathcal{L})$ при $2\pi T = 1$.

5.3. Чёрные дыры и AdS/CFT-дуальность для кварк-глюонной плазмы

При использовании AdS/CFT-дуальности для описания КГП устанавливается соответствие между феноменологическими термодинамическими параметрами плазмы (T , E , P и μ) и параметрами, характеризующими деформации пространства AdS₅. В дуальном гравитационном описании источник температуры и энтропии считается обусловленным гравитационными горизонтами. Соотношение между плотностью энергии КГП и температурой чёрной дыры в AdS-пространстве, согласно [187, 188], имеет вид $E/L^3 = 3\pi^3 T^4 / (16G_5)$, где L — радиус AdS-пространства, G_5 — пятимерная гравитационная постоянная.

В феноменологических гидродинамических моделях [25, 64] состояние КГП характеризуется тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x^\rho)$, $\mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3$. В дуальном гравитационном описании тензору энергии-импульса соответствует метрика в асимптотическом пространстве AdS₅. Удобно использовать пятимерную метрику Фефермана – Грехэма [189]:

$$ds^2 = L^2 \frac{g_{\mu\nu}(x^\rho, z) dx^\mu dx^\nu + dz^2}{z^2}. \quad (5.33)$$

Плоская метрика Минковского $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ задаёт AdS₅-пространство в координатах Пуанкаре. Конформной границей пятимерного пространства-времени (5.33) является $z = 0$, и при $z \rightarrow 0$ справедливо разложение:

$$g_{\mu\nu}(x^\rho, z) = \eta_{\mu\nu} + z^4 g_{\mu\nu}^{(4)}(x^\rho) + \dots \quad (5.34)$$

В данном случае AdS/CFT-дуальность приводит к замечательно простому соотношению:

$$g_{\mu\nu}^{(4)}(x^\rho) = \frac{N_c^2}{2\pi^2} \langle T_{\mu\nu}(x^\rho) \rangle \quad (5.35)$$

(см., например, обзоры [175, 190]).

Метрика чёрной дыры в координатах Фефермана – Грехэма имеет вид (5.33) со следующими ненулевыми компонентами $g_{\mu\nu}(x^\rho, z)$ (см., например, [191]):

$$g_{00} = -\frac{(1 - z^4/z_0^4)^2}{1 + z^4/z_0^4}, \quad g_{ii} = 1 + \frac{z^4}{z_0^4}. \quad (5.36)$$

Заменой координат $\tilde{z} \rightarrow z/(1 + z^4/z_0^4)^{1/2}$ (5.33) преобразуется в стандартную статическую метрику AdS-шварцшильдовской чёрной дыры:

$$\tilde{z}^2 ds^2 = -\left(1 - \frac{\tilde{z}^4}{\tilde{z}_0^4}\right) dt^2 + dx^2 + \frac{1}{1 - \tilde{z}^4/\tilde{z}_0^4} d\tilde{z}^2, \quad (5.37)$$

где $\tilde{z}_0 = z_0/\sqrt{2}$ — положение горизонта чёрной дыры. (Далее тильду над z мы опускаем.)

В этом случае разложение метрики (5.34) при $z \rightarrow 0$ приводит к простой гидродинамической модели с тензором энергии-импульса

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \propto g_{\mu\nu}^{(4)} = \text{diag} \left(\frac{3}{z_0^4}, \frac{1}{z_0^4}, \frac{1}{z_0^4}, \frac{1}{z_0^4} \right). \quad (5.38)$$

Два наиболее эффективных способа выяснить свойства КГП, возникающей при столкновениях тяжёлых ионов, связаны с энергетическими потерями редких высокоэнергетических партонов и спектром кваркониа, образующихся при этих столкновениях.

Когда тяжёлый кварк движется в сильновзаимодействующей КГП, на него действует тормозящая сила и, следовательно, он теряет энергию. В простейшем случае кварк рассматривается как внешний движущийся источник с фиксированной скоростью v и предполагается, что он находится в тепловом равновесии со средой. Такое представление справедливо, если масса кварка гораздо больше, чем типичный энергетический масштаб среды (температура), и движение кварков изучается на временном интервале, большем масштаба времени релаксации среды, но меньшем времени, за которое существенно изменяется траектория кварка. В этом пределе тяжёлые кварки описываются линией Вильсона вдоль мировой линии кварка.

В дуальном описании линия Вильсона задаётся конфигурацией классической струны, один конец которой закреплён в точке на границе, где находится кварк, а сама струна свисает внутрь пространства (bulk) [192, 193]. Рассмотрим стационарную ситуацию, в которой кварк движется с фиксированной скоростью в течение длительного времени и форма струны, "волочащейся" за ним, не изменяется со временем. Для определённости будем считать, что кварк движется в x_1 -направлении, и параметризуем струну как $\tau = t$, $\sigma = z$. Задача нахождения профиля струны означает нахождение функции $x_1(\tau, \sigma)$, удовлетворяющей уравнению движения струны. Решение должно удовлетворять также граничному условию $x_1(t, z \rightarrow 0) = vt$. Стационарное решение имеет вид $x_1(t, z) = vt + \xi(z)$ при условии $\xi(z \rightarrow 0) = 0$. Индуцированная метрика на струнном мировом листе (World Sheet — WS) выражается в виде

$$ds_{\text{WS}}^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[-(f(z) - v^2) d\tau^2 + \left(\frac{1}{f(z)} + \xi'^2 \right) d\sigma^2 + v\xi'(d\tau d\sigma + d\sigma d\tau) \right], \quad (5.39)$$

где, как и в (5.37), $f(z) = 1 - z^4/z_0^4$, штрих означает дифференцирование по z . Действие Намбу–Гото для этой струны принимает вид

$$S = T \int dz \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'} \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{f(z) - v^2 + f^2(z)\xi'^2}{f(z)}}. \quad (5.40)$$

Здесь T — полное время движения кварка, α' — натяжение струны. Легко найти экстремаль $\xi(z)$ этого действия, удовлетворяющую упомянутым выше начальным условиям:

$$\xi(z) = -\frac{vz_0}{2} \left(\text{artanh} \frac{z}{z_0} - \arctan \frac{z}{z_0} \right). \quad (5.41)$$

Импульс, который теряет тяжёлый кварк при прохождении через среду, согласно [192, 193], отождествляется с моментом, который "стекает" с границы вдоль струны в направлении горизонта,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_1}. \quad (5.42)$$

Для коэффициента торможения η_D , определённого соотношением $dp/dt = -\eta_D p$, AdS/CFT-соответствие даёт

$$\eta_D = \frac{\pi\sqrt{\lambda} T^2}{2m_q}. \quad (5.43)$$

Здесь m_q — масса кварка, λ — константа взаимодействия ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной калибровочной теории. Модификация этого результата для КХД рассмотрена в разделе 5.6.

5.4. Буст-инвариантные геометрии

Решение уравнений Эйнштейна в AdS-пространстве с граничным условием (5.34), которое соответствует тензору энергии-импульса в буст-инвариантной форме (4.11), (4.12), найдено в [87]. На асимптотическую AdS₅-геометрию было наложено условие буст-инвариантности, а также условия симметрии $y \rightarrow -y$ и симметрии относительно трансляций и поворотов в поперечной плоскости [87]. В наиболее общем виде метрика, допускающая эти симметрии в координатах Фефермана–Грехэма, выражается как

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left[-\exp(a(\tau, z)) d\tau^2 + \tau^2 \exp(b(\tau, z)) dy^2 + \exp(c(\tau, z)) dx_\perp^2 + dz^2 \right]. \quad (5.44)$$

Разложение трёх функций, $a(\tau, z)$, $b(\tau, z)$ и $c(\tau, z)$, при малых z должно начинаться с z^4 в соответствии с (5.34), (5.35) и (4.11), (4.12). Случай $f(\tau) = e_0/\tau^s$, где e_0 — некоторая постоянная, при $0 < s < 4$ рассмотрен в [87]. Для того чтобы найти вид решения, отвечающего $\varepsilon(\tau) = 1/\tau^s$ при больших временах, решения уравнений Эйнштейна ищутся в виде степенных рядов для метрических коэффициентов:

$$a(\tau, z) = \sum_{n=0} a_n(\tau) z^{4+2n}, \quad (5.45)$$

где $a_0(\tau) = -\varepsilon(\tau) = -1/\tau^s$. Тогда из каждого коэффициента $a_n(\tau)$ можно выделить главный член асимптотики по τ и пренебречь остальными членами. Однако удобнее предположить автомодельность с самого начала, вводя "растянутую" переменную $v = z/\tau^{3/4}$ и предполагая, что метрические коэффициенты асимптотически являются функциями только от v , т.е. $a(z, \tau) = a(v)$ при $\tau \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$, причём v фиксировано. В этом пределе уравнения Эйнштейна становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые могут быть решены аналитически. Такая процедура описана в [194]. Результат можно сформулировать следующим образом:

• для произвольных s решение сингулярно в том смысле, что появляется сингулярность в инвариантах кривизны $R_{\mu\nu\rho\gamma}R^{\mu\nu\rho\gamma}$;

• решение несингулярно только при $s = 4/3$, что отвечает Бёркеновскому решению;

• в последнем случае полученная метрика принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left\{ - \frac{[1 - (e_0/3)(z^4/\tau^{4/3})]^2}{1 + (e_0/3)(z^4/\tau^{4/3})} d\tau^2 + \left(1 + \frac{e_0}{3} \frac{z^4}{\tau^{4/3}} \right) (\tau^2 dy^2 + dx_\perp^2 + dz^2) \right\}. \quad (5.46)$$

Решение (5.46) напоминает чёрную дыру в AdS-пространстве, но положение горизонта в этом случае зависит от времени, $z_0 = \sqrt[4]{3/e_0} \tau^{1/3}$. Соответствующие температура и энтропия имеют вид $T = \sqrt{2}/\pi z_0$, $S \propto \tau/z_0^3$. Таким образом, движение горизонта в 5-мерном пространстве AdS, с точки зрения 4-мерной калибровочной теории, соответствует охлаждению плазмы. Отметим, что метрика (5.46), в отличие от (5.37), не является точным решением уравнений Эйнштейна и представляет собой приближённое решение только при больших временах, а при малых временах нуждается в модификации.

5.5. Химический потенциал в кварк-глюонной плазме и AdS/CFT-дуальность

Метрика Рейснера–Нордстрёма заряженной чёрной дыры в пространстве AdS имеет вид

$$ds^2 = -g(R) dt^2 + g^{-1}(R) dR^2 + R^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (5.47)$$

$$g(R) = 1 - \frac{2M}{R^2} + \frac{Q^2}{R^4} + \frac{\Lambda}{3} R^2, \quad (5.48)$$

где Λ — космологическая постоянная, связанная с характерной длиной a , $\Lambda/3 \equiv 1/a^2$, M и Q выражаются через массу m и заряд σ Арновитта–Дезера–Мизнера как $M = 4\pi G_5 m/(3\pi^2)$, $Q^2 = 4\pi G_5 \sigma^2/3$, электромагнитное поле имеет только одну ненулевую компоненту,

$$A_t = -\frac{\sqrt{3}Q}{2R^2} + \Phi, \quad (5.49)$$

где $\Phi = \sqrt{3}/2(Q/R_+^2)$, R_+ — наибольший корень уравнения $g(R) = 0$.

Термодинамика чёрной дыры [195] описывается свободной энергией в большом каноническом ансамбле $W = TI$. Здесь I — действие, вычисленное на решении (5.48), (5.49):

$$I = \frac{\pi\beta}{8G_5 a^2} \left(a^2 R_+^2 + R_+^4 - \frac{Q^2 a^2}{R_+^2} \right), \quad (5.50)$$

$$T = \frac{1}{4\pi} g'(R_+), \quad \mu = \frac{\sqrt{3}Q}{2R_+^2},$$

где T — температура Хокинга. Связь с первым законом термодинамики, $d\mathcal{E} = T dS + \mu dQ$, получается при идентификации

$$W = \mathcal{E} - TS - \Phi Q, \quad \mathcal{E} = m, \quad S = \frac{S_h}{4G_5}, \quad (5.51)$$

$$Q = Q, \quad \mu = \Phi,$$

где S_h — площадь горизонта. Химический потенциал определяется асимптотикой вектора-потенциала [196,

197]:

$$\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} A_t(r). \quad (5.52)$$

Состояние КГП характеризуется по меньшей мере двумя термодинамическими величинами: температурой и химическим потенциалом. Модель квантовой теории поля может иметь химический потенциал для любого сохраняющегося заряда. В AdS/CFT-дуальности обычно рассматривают два типа химических потенциалов: соответствующих R-заряду и барионному числу.

Барионный заряд возникает, если теория содержит в фундаментальном представлении группы ароматов. Введение ароматов с помощью D7-браны приводит к появлению глобальной группы $U(N_f)$ -симметрии ароматов. Эта группа содержит подгруппу барионной симметрии $U(1)_b$, что в свою очередь приводит к появлению соответствующего химического потенциала μ_b для барионного числа [198].

5.6. Улучшенная голографическая модель квантовой хромодинамики

Улучшенная голографическая КХД-модель построена в работах [199, 200]. Основная идея этих работ следующая: найти такую модель скалярного поля (дилатона), взаимодействующего минимальным образом с гравитацией в 5-мерном пространстве-времени, чтобы радиальные классические решения скалярного поля повторяли форму β -функции КХД при изменении масштаба и в то же время сшивались с решёточными результатами, описывающими термодинамический фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент. Действие 5-мерной модели имеет вид

$$S = -M_P^3 N_c^2 \int d^5x \sqrt{g} \left(R - \frac{4}{3} (\partial\Phi)^2 + V(\Phi) \right), \quad (5.53)$$

здесь M_P — 5-мерная планковская масса, g — детерминант 5-мерной метрики g_{MN} , R — кривизна этой метрики, Φ — дилатонное поле, $V(\Phi)$ — его потенциал. Ищется потенциал $V(\Phi)$, при котором радиальные решения для метрики и поля удовлетворяли бы соответствию

$$\beta(\lambda) \Leftrightarrow 2 \frac{g_{00}}{g'_{00}} \Phi' \exp \Phi, \quad (5.54)$$

$$\lambda \Leftrightarrow \exp \Phi. \quad (5.55)$$

Здесь $\beta(\lambda) = d\lambda/d \ln \mu$, g'_{00} — радиальная производная 00-компоненты метрики. Как оказалось, условиям (5.54), (5.55) удовлетворяет потенциал [199]

$$V(\lambda) = \frac{12}{L^2} \left[1 + V_0 \lambda + V_1 \lambda^{4/3} \sqrt{\log(1 + V_2 \lambda^{4/3} + V_3 \lambda^2)} \right], \quad (5.56)$$

где V_2 определяется из согласования с β -функцией при малых константах, а лучшее согласие с результатами решёточных вычислений получается при $V_1 = 14$ и $V_3 = 170$. Зависимость плотности энергии от температуры, найденная с использованием улучшенной голографической КХД-модели, приведена на рис. 6а. Согласно голографическому предписанию [201] спектр глюоболов определяется исходя из эффективного потенциала (5.56). Результат вычисления спектра в сопоставлении с результатами вычислений на решётке представлен в [202]. На

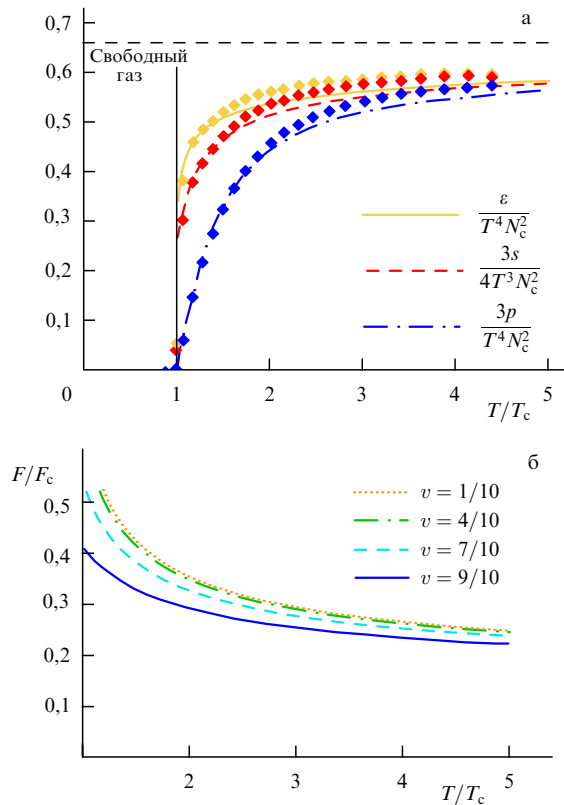


Рис. 6. (а) Зависимости плотности энергии ε/T^4 (сплошная кривая), энтропии s/T^3 (штриховая кривая) и давления p/T^4 (штрихпунктирная кривая) от температуры (критическая температура $T_c = 247$ МэВ). Ромбами показаны результаты вычислений на решётке при $N_c = 3$. Кривые — результаты голографических вычислений с использованием улучшенной голографической КХД-модели (из работы [93]). (б) Зависимость сил торможения от температуры при различных скоростях v (из работы [202]).

рисунке 6б приведена зависимость тормозных сил от температуры, которые, согласно общим голографическим принципам [24], определяют энергетические потери в КГП.

Отметим, что соответствие (5.54), (5.55) напоминает недавнее предложение [203] использовать размерную редукцию четырёхмерного пространства-времени ($D = 1 + 3$) к пространству с меньшим числом пространственных измерений, $D = 1 + d$, $d < 3$, для анализа квантовой теории поля на достаточно малых расстояниях.

6. Голографическая термализация

6.1. Образование чёрных дыр в AdS-пространстве

Термализацией пространства-времени называют процесс образования горизонта событий (чёрной дыры). В частности, рассмотрим геометрии деформированных асимптотически-AdS-пространств и поставим вопрос: при каких условиях они эволюционируют к асимптотически-AdS-пространствам с чёрной дырой или чёрной браной (Black Brane — BB)? Возникает следующая картина возможных эволюций геометрий асимптотически-AdS-пространств.

• Пространство Шварцшильда — AdS является "точкой" равновесия в пространстве асимптотически-AdS-геометрий (точка BHAdS на рис. 7а).

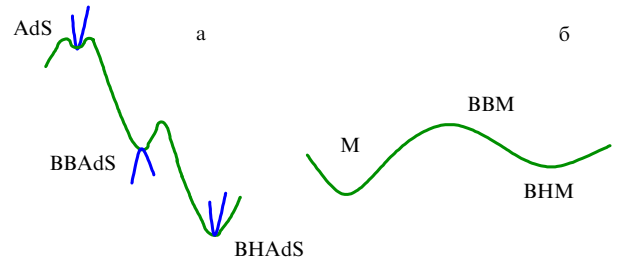


Рис. 7. (а) Схематическое представление деформаций пространства AdS. V-образные кривые вблизи точек AdS ("пустое" AdS-пространство) и BHAdS (чёрная дыра в AdS-пространстве) указывают на устойчивость к деформациям в различных направлениях. Λ-образная кривая вблизи точки BBAdS (чёрные браны в AdS-пространстве) указывает на неустойчивость к деформациям. (б) Схематическое представление асимптотически-минковского пространства с чёрной дырой (BHM) и чёрными бранами (BBM).

• "Точки" геометрии чёрных бран являются точками локального равновесия только относительно некоторых "небольших" флуктуаций (точка BBAdS на рис. 7а).

• Геометрия стабильна относительно малых флуктуаций и нестабильна относительно больших нелинейных флуктуаций (точка AdS на рис. 7а).

Картина деформаций, представленная на рис. 7а, является гипотетической, однако она подтверждена результатами численных расчётов. Представленная картина радикально отличается от картины на рис. 7б, описывающей ситуацию в пространстве Минковского. Точка М стабильна по отношению к большим флуктуациям, поскольку пространство Минковского устойчиво относительно конечных возмущений [204, 205]. Однако это не так в AdS-пространстве, которое может быть нестабильным относительно вброса энергии на сколь угодно малых масштабах и при этом образовывать малые чёрные дыры [206–210]. Это явление интерпретируется как турбулентная нестабильность пространства AdS. Можно сказать, что после достаточно длительного времени любое конечное возмущение AdS-пространства коллапсирует в чёрную дыру.

Малые возмущения чёрных дыр/бран в AdS-геометрии (деформации вблизи точек BBAdS и BHAdS) хорошо изучены. В частности, исследованы квазинормальные моды полей, распространяющихся на фоне чёрной браны [211–216]. Эти результаты были использованы в дуальном голографическом подходе к описанию КГП для исследования вязкости и других коэффициентов переноса в гидродинамике (см., например, обзор [217]).

Гравитационный коллапс материи, вброшенной в пространство Минковского, и формирование горизонта событий являются традиционными проблемами в ОТО [218–220]. Естественно, аналогичные вопросы возникают и в пространстве AdS.

В рамках AdS/CFT-дуальности интерес для нас представляют деформации AdS-пространства, дуальные к изменению исходного состояния ядер при их столкновении с ультрарелятивистскими скоростями. Поэтому указанные деформации в дуальном описании должны соответствовать вбрасыванию в AdS-пространство материи с высокой энергией или на очень малых пространственно-временных масштабах. Рассматриваются следующие варианты таких деформаций:

• сталкивающиеся гравитационные ударные волны [221–235];

• вбрасывание оболочек материи с нулевой массой покоя ("световая пыль") [236–249];

• мгновенные возмущения метрики вблизи границы, которые распространяются внутрь области [250, 251].

Интересно изучить вопрос, как долго происходит процесс образования чёрной дыры в AdS-пространстве. Это особенно важно для исследования процесса образования плазмы в голографическом дуальном AdS/CFT-описании. В [209, 210] найдено, что чёрные дыры образуются очень быстро, за время порядка причинной границы, для широкого спектра масс чёрных дыр. Отметим здесь более ранние работы, в которых изучался гравитационный коллапс в пространстве AdS_{d+1} , включая оценку времени коллапса (см. обзор [251] и приведённые там ссылки). Аналог оценки Чандрасекара коллапса звезды в чёрную дыру в AdS/CFT-описании рассмотрен в [252]. Возникновение чёрной дыры вследствие изменения взаимодействия с полями материи обсуждается в [253, 254]. В двух первых случаях, указанных выше, можно, хотя бы частично, сделать необходимые оценки аналитически. Такие вычисления рассмотрены в разделах 6.2, 6.3.

6.2. Формирование чёрной дыры в AdS-пространстве падающей оболочкой

В этом разделе мы рассмотрим голографическую модель термализации, которая описывает процесс образования чёрной дыры с помощью метрики Вайдьи (точнее, метрики Вайдьи-AdS).

Падающая материальная оболочка описывается метрикой Вайдьи

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} [-(1 - m(v)z^d) dv^2 - 2 dz dv + dx^2], \quad (6.1)$$

где v — светоподобная координата, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ — пространственноподобные координаты на границе $z = 0$. Здесь радиус AdS принят равным единице. Обычно функция $m(v)$ выбирается в виде

$$m(v) = M\theta(v), \quad (6.2)$$

где M — постоянная, $\theta(v)$ — функция Хевисайда (рис. 8).

При $m(v) = M$ замена переменных

$$dv = dt - \frac{dz}{1 - Mz^d} \quad (6.3)$$

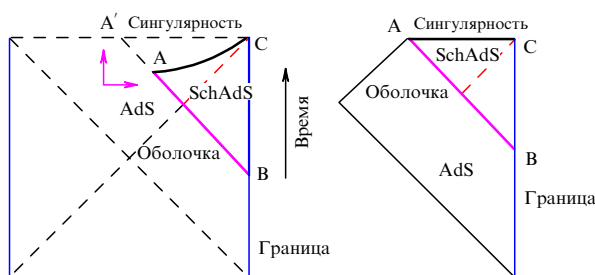


Рис. 8. Диаграмма Пенроуза для метрики VAdS (Vaidya-AdS) (6.1), (6.2) как результат насильственного склеивания части диаграмм Пенроуза для AdS-пространства (см. на рис. 14а полную диаграмму Пенроуза для AdS-пространства) и части диаграмм Пенроуза для пространства SchAdS (Schwarzschild-AdS), ограниченной линиями, соединяющими точки A, B и C (см. на рис. 14б полную диаграмму Пенроуза для SchAdS) вдоль светоподобной линии AB, при этом точка A склеивается с точкой A' по линии AB. Поскольку на линии склеивания имеются скачки координат, при склеивании происходит искривление картин.

приводит (6.1) к стандартному виду метрики чёрной дыры в AdS-координатах Пуанкаре:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left[-(1 - Mz^d) dt^2 + \frac{dz^2}{1 - Mz^d} + dx^2 \right]. \quad (6.4)$$

При $v < 0$ метрика (6.1) с $m(v)$ вида (6.2) становится метрикой AdS-пространства.

Для метрик (6.1), (6.2) с $d = 2, 3, 4$ геодезические, начинающиеся и заканчивающиеся на границе в одно-временных точках, разделённых расстоянием l , изучались в [237–241]. В случае AdS_3 -пространства длина геодезической, соединяющей эти точки и пересекающей оболочку, даётся параметрической формулой

$$\delta\mathcal{L}(t_0, l) = 2 \ln \frac{\sinh(r_h t_0)}{r_h s(l, t_0)}, \quad (6.5)$$

где $s(l, t_0) \in [0, 1]$ — параметр, определяемый из условия

$$l = \frac{1}{r_h} \left(\frac{2\kappa}{s\rho} + \ln \frac{2(1+\kappa)\rho^2 + 2s\rho - \kappa}{2(1+\kappa)\rho^2 - 2s\rho - \kappa} \right), \quad (6.6)$$

$$2\rho = \coth(r_h t_0) + \sqrt{\coth^2(r_h t_0) - \frac{2\kappa}{\kappa + 1}}, \quad (6.7)$$

$s = \sqrt{1 - \kappa^2}$, $\rho = 1/(r_h z_c)$, $r_h = \sqrt{M}$, z_c — положение точки "прокола" оболочки геодезической, κ — произвольный параметр. Ясно, что при любом l в случае достаточно большого времени геодезическая, соединяющая точки на границе, окажется полностью внутри чёрной дыры и тогда длина геодезической будет определяться выражением $\delta\mathcal{L}_{\text{thermal}}(l) = 2 \ln(\sinh r_h l/2) - 2 \ln r_h$, которое при $r_h = 1$ совпадает с (5.30), что означает термализацию для любого сколь угодно большого l . Из этого результата следует, что время термализации в 2-мерном пространстве равно половине расстояния между точками. Анализ, проведённый в [244], показывает, что время термализации уменьшается с увеличением размерности пространства.

Для описания фризаута (freeze-out) можно использовать метрику Вайдьи-AdS с отрицательной энергией (отрицательной массовой функцией) [244] (ср. с [255]), где рассматривается процесс испарения чёрной дыры за счёт хокинговского излучения). Метрика этого процесса даётся выражением (6.1) с $m(v) = M\theta(v) - M_1\theta(v - v_1)$. Случай полной детермализации соответствует $M = M_1$. Более сложные модели, использующие модель оболочки Вайдьи в анизотропной деформации пространства AdS с чёрными дырами/бранами [245, 246], т.е. в пространстве со скейлингом Лифшица, рассмотрены в [247, 248]. Термализация, зависящая от центральности столкновений, дуальна динамике оболочки Вайдьи-Керра-AdS [249]. Для 2-мерного случая получено, что время термализации не зависит от керровского параметра.

6.3. Формирование чёрной дыры

при столкновении ударных волн в пространстве AdS_5

6.3.1. Ударные волны в пространстве AdS_5 . Ударные волны (shock wave — SW), распространяющиеся в AdS-пространстве, имеют вид [256–261]

$$ds_{\text{SW}}^2 = L^2 \frac{-du dv + dx_{\perp}^2 + \phi(x_{\perp}, z) \delta(u) du^2 + dz^2}{z^2}, \quad (6.8)$$

здесь u, v — координаты светового конуса, $x_{\perp}$ — координата, перпендикулярная к направлению движе-

ния ударной волны и оси z . Этой метрике соответствует тензор энергии-импульса T_{MN} только с одной ненулевой компонентой T_{uu}^{SW} ,

$$T_{uu}^{SW} = J_{uu}(z, x_\perp) \delta(u), \quad (6.9)$$

и уравнения Эйнштейна сводятся к уравнению

$$\left(\square_{H_3} - \frac{3}{L^2} \right) \Phi(z, x_\perp) = -16\pi G_5 \frac{z}{L} J_{uu}(z, x_\perp), \quad (6.10)$$

где

$$\Phi(z, x_\perp) \equiv \frac{L}{z} \phi(z, x_\perp), \quad \square_{H_3} = \frac{z^3}{L^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z^2}{L^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\perp^2} \right).$$

Различные формы ударных волн соответствуют источникам $J_{uu}(z, x_\perp)$ разного вида. Наиболее общая форма $O(3)$ -инвариантной ударной волны в AdS-пространстве, локализованной в $u = 0$, соответствует $\Phi^{(3)}(z, x_\perp) = F(q)$, где q — хордовая длина,

$$q = \frac{(x_\perp^1)^2 + (x_\perp^2)^2 + (z - z_0)^2}{4zz_0}.$$

В этом случае уравнения Эйнштейна сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$q(q+1)F''_{qq} + \frac{3}{2}(1+2q)F'_q - 3F = -16\pi G_5 L^2 \rho(q), \quad (6.11)$$

$$\rho(q) = \frac{z J_{uu}(z, x_\perp)}{L}.$$

Профиль точечной ударной волны F^P плотности $\rho^P(q) = E\delta(q)/(\sqrt{q(1+q)}L^3)$ имеет вид

$$F^P = \frac{2G_5 E}{L} \frac{8q^2 + 8q + 1 - 4(2q+1)\sqrt{q(1+q)}}{\sqrt{q(1+q)}}. \quad (6.12)$$

Профиль заряженной точечной ударной волны описывается суммой $F = F^P + F^Q$, где F^P определено в (6.12), а F^Q — решение уравнения (6.11) с $\rho^Q = 5Q^2/(24\pi \times 64 L^5 [q(q+1)]^{5/2})$; здесь Q — электрический заряд. Более сложные ударные волны в AdS-пространстве рассматривались в [257–263].

Более простое дуальное описание сталкивающихся ионов получается при рассмотрении столкновений стенка–стенка в AdS-пространстве [226]. Такие стенки называются также доменными. Уравнение Эйнштейна для профиля стенки [226] имеет вид

$$\left(\partial_z^2 - \frac{3}{z} \partial_z \right) \phi(z) = -16\pi G_5 \frac{E}{L^2} \frac{z_0^3}{L^3} \delta(z - z_0). \quad (6.13)$$

При рассмотрении протяжённых ударных волн типа доменных стенок требуется специальное уточнение. Это связано с тем, что при применении техники ловушечных поверхностей надо обеспечить компактность ловушечной поверхности. Если предположить, что отсутствует зависимость от части координат, так что задача редуцируется к задаче с меньшей размерностью, и находить ловушечную поверхность для этой маломерной задачи [226], то тогда встаёт вопрос: останется ли маломерная ловушечная поверхность профилем многомерной ловушечной поверхности? Этот вопрос предполагает введение в рассмотрение доменных стенок с конечными размерами, т.е. введение регуляризации [234]. Вопрос о

существовании многомерной ловушечной поверхности при столкновении доменных стенок с конечными размерами рассмотрен в [234], где в достаточно общем случае показано, что если ловушечная поверхность существует в маломерной задаче, то она имеется и для регуляризованных доменных стенок. Отметим, что вопрос о регуляризации профилей волн в направлениях, зависимость от которых отсутствует в выбранном приближении, относится также к рассмотрению буст-инвариантных конфигураций [250, 264].

6.3.2. Множественность и площадь ловушечной поверхности в AdS₅-пространстве. Габсер, Пуфу и Яром предложили следующую голографическую картину термализации при столкновении тяжёлых ионов [221].

- Дуальным объектом, описывающим один из сталкивающихся ионов, является ударная волна (6.8), распространяющаяся в пространстве AdS₅.

- Дуальным образом двух сталкивающихся ионов является сумма двух ударных волн, движущихся навстречу друг другу, и метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [-du dv + dx_\perp^2 + \phi_1(x_\perp, z) \delta(u) du^2 + \phi_2(x_\perp, z) \delta(v) dv^2 + dz^2]. \quad (6.14)$$

- При столкновении двух ударных волн в AdS₅-пространстве формируется (при определённых условиях) чёрная дыра, что интерпретируется как образование КГП.

В ОТО известна так называемая техника ловушечной поверхности (ЛП) [220, 265], которая позволяет судить об образовании чёрной дыры. ЛП — это такая поверхность, все нормальные геодезические к которой распространяются по направлению внутрь её [218], т.е. площади фронтов уменьшаются. Пока отсутствует строгое доказательство того, что наличие ЛП в пространстве-времени, имеющем AdS-асимптотическое поведение, гарантирует образование чёрной дыры. Однако принято считать, что ЛП лежит за горизонтом событий и, более того, нижняя граница энтропии чёрной дыры S_{AdS} определяется площадью ЛП $A_{trapped}$,

$$S_{AdS} \geq S_{trapped} \equiv \frac{A_{trapped}}{4G_5}. \quad (6.15)$$

Эти предположение и оценка недавно получили подтверждение в численных экспериментах [266].

Для того чтобы использовать соотношение дуальности количественно, мы должны установить связь параметров в 5-мерном пространстве G_5 , L и E с феноменологическими параметрами КГП. В соответствии с [221] $L^3/G_5 = 16E/(3\pi^3 T^4) \approx 1.9$. Здесь учтено, что, согласно результатам вычислений на решётке в КХД [32], E/T^4 является слабо изменяющейся величиной: $E/T^4 \approx 11$.

Соотношение AdS/CFT-дуальности (5.35) между усреднённым тензором энергии-импульса и деформацией AdS₅-метрики, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{L^2}{4\pi G_5} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3} \Phi(z, x_\perp) \delta(u), \quad (6.16)$$

используется для того, чтобы фиксировать параметр L . Это удаётся сделать, поскольку правая часть (6.16) для точечной ударной волны F^P , определяемой (6.12), даёт следующий усреднённый тензор энергии-импульса для

теории поля на границе:

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{2LE}{\pi(L^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^3} \delta(u). \quad (6.17)$$

Правая часть (6.17) совпадает с профилем плотности энергии в ядре Вуда–Саксона [267, 268], где L имеет смысл поперечного среднего радиуса ядра, $L \approx 4,3$ фм для Au и $L \approx 4,4$ фм для Pb.

На RHIC сталкиваются ядра Au ($A = 197$) при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Это означает, что каждое ядро имеет энергию $E = 100$ ГэВ на 1 нуклон, т.е. полная энергия ядра $E \approx E_{\text{beam}} \approx 19,7$ ТэВ. На LHC сталкиваются ядра Pb ($A = 208$) при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 5,5$ ТэВ, следовательно, полная энергия каждого ядра $E \approx E_{\text{beam}} \approx 570$ ТэВ, т.е. в 10 раз больше, чем на RHIC. Оценки безразмерного параметра [221] EL для столкновений Au–Au на RHIC и Pb–Pb на LHC следующие:

$$EL|_{\text{Au–Au}, \sqrt{s_{NN}}=200 \text{ ГэВ}} \approx 4,3 \times 10^5,$$

$$EL|_{\text{Pb–Pb}, \sqrt{s_{NN}}=5,5 \text{ ТэВ}} \approx 1,27 \times 10^7.$$

Отметим, что в [226] предложен несколько другой способ фиксации L или характерного масштаба сталкивающихся протяжённых волн z_0 , согласно которому радиус L отождествляется с размером ядра, а z_0 — с масштабом насыщения Q_s в рамках модели КЦС [11, 155].

Вычисления [221, 229] показали, что в пределе большой энергии столкновений E энтропия возрастает как $E^{2/3}$,

$$S_{\text{trapped}} \approx \pi \left(\frac{L^3}{G_5} \right)^{1/3} (2EL)^{2/3}. \quad (6.18)$$

Включение в рассмотрение нецентральных столкновений ударных волн в пространстве AdS_5 существенно не меняет характера зависимости $E^{2/3}$, однако имеется критическое значение прицельного параметра, при превышении которого возникновение ЛП невозможно [226], что согласуется с результатами [224]. На существование экспериментальных ограничений на величину прицельного параметра сталкивающихся ионов, при превышении которой КГП не образуется, было указано в [226].

Полная множественность S_{QGP} получается в результате анализа экспериментальных данных, связанных с оценкой множественности рождённых заряженных частиц N_{ch} ; связь между этими величинами следующая: $S_{\text{QGP}} \approx 7,5 N_{\text{ch}}$ [269]. Соотношение между полной множественностью S_{QGP} , найденной в результате анализа экспериментальных данных, и энтропией рождённой чёрной дыры в пространстве AdS_5 оказалось не вполне удовлетворительным [221], поскольку зависимость от энергии (6.18) отличается от экспериментальной зависимости (3.7). Несоответствие асимптотик S_{trapped} и N_{ch} приводит к мысли о необходимости изменения самой голографической модели.

6.3.3. Оценка множественности в деформированном AdS_5 -пространстве. Для получения зависимости множественности от энергии, моделирующей экспериментальную зависимость (см. рис. 5), рассматривается образование чёрных дыр в модифицированных пространствах AdS с различными b -факторами,

$$ds^2 = b^2(r)(dr^2 + dx^i dx^i - 2dx^+ dx^-). \quad (6.19)$$

Возможность такой модификации связана с введением дилатонного поля. Одну из таких модификаций представляет собой дилатонная модель (5.53) и, в частности, улучшенная голографическая КХД-модель [199, 200]. Метрика ударной волны в таких моделях имеет вид

$$ds^2 = b^2(r)(dr^2 + dx^i dx^i - 2dx^+ dx^- + \phi(r, x^1, x^2)\delta(x^+)(dx^+)^2), \quad (6.20)$$

$$\Phi = \Phi(r),$$

где $\Phi(r)$ — скалярное поле. Предполагается, что метрика асимптотически ведёт себя как AdS -метрика при $r = 0$. Профиль волны удовлетворяет уравнению

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + 3 \frac{b'}{b} \partial_r + \partial_r^2 \right) \phi = -2\kappa_5^2 J_{++}, \quad (6.21)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \equiv \partial_i \partial_i, \quad b' \equiv \partial_r b(r), \quad \kappa_5^2 \equiv 8\pi G_5,$$

с источником J_{++} , локализация которого зависит от типа рассматриваемой ударной волны. Как видно из (6.21), геометрия фона определяется b -фактором, вид которого в свою очередь определяется потенциалом в (5.53).

Рассмотрим ряд случаев [199, 270, 271], в которых имеется различное инфракрасное (ИК) поведение b -фактора ($r \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow r_0$):

- $b \sim r^a$ при $a \leq -1$. AdS -пространству соответствует $a = 1$. Этот случай, в котором отсутствует конфайнмент и потенциал имеет асимптотику $V \sim \exp(Q\Phi_s)$, $\Phi_s \rightarrow \infty$, $Q < 4/3$, соответствует квазиконформной геометрии;
- $b(r) \sim (r_0 - r)^a$ при $a > 1/3$ и r_0 определяет положение ИК-сингулярности [271]. Потенциал при $\Phi_s \rightarrow \infty$ обладает асимптотикой $V \sim \exp(Q\Phi_s)$, $Q > 4/3$, и имеются массовая щель и дискретный спектр у глоболов.
- $b(r) \sim \exp[-(Ar)^a]$ при $a > 0$ описывает ситуацию, соответствующую конфайнменту. Потенциал при $\Phi_s \rightarrow \infty$ обладает асимптотикой $V \sim \exp(4\Phi_s/3) \Phi_s^{(a-1)/a}$, и имеются массовая щель и дискретный спектр;
- $b(r) \sim \exp\{-[A/(r - r_0)]^a\}$ при $a > 0$ и $r_0 > 0$ описывает ситуацию, соответствующую конфайнменту. Потенциал при $\Phi_s \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $V \sim \exp(4\Phi_s/3) \times \Phi_s^{(a+1)/a}$.

Поскольку сама задача об образовании чёрных дыр для модифицированных моделей в случае точечных источников или источников, имеющих нетривиальную зависимость от поперечных координат, является достаточно сложной [232], представляет интерес использование доменных стенок в качестве модели сталкивающихся ионов. Как отмечалось в разделе 6.3.2, такой подход, предложенный в [226], требует специальной регуляризации, при которой вводится конечный размер стенок [234]. Однако использование доменной стенки позволяет существенно упростить задачу для модифицированных моделей. Это удобно для поиска моделей, способных описать зависимость множественности от энергии, близкую к экспериментальной.

Для приведённых выше потенциалов получены оценки для площадей ЛП [232, 272]:

- $b \sim r^{-a}$, $a \geq 1$. В этом случае $A_{\text{trap}} \sim s^{(3a-1)/(6a)}$. Для $a = 1$ имеем полученную в [226] оценку, которая совпадает с оценкой для точечных ударных волн [221];
- $b(r) \sim (r_0 - r)^a$, $a > 1/3$. При больших энергиях $A_{\text{trap}} \sim s^{n(a)}$, $n(a) = (3a + 1)/(6a)$ и $1/2 < n(a) < 1$;

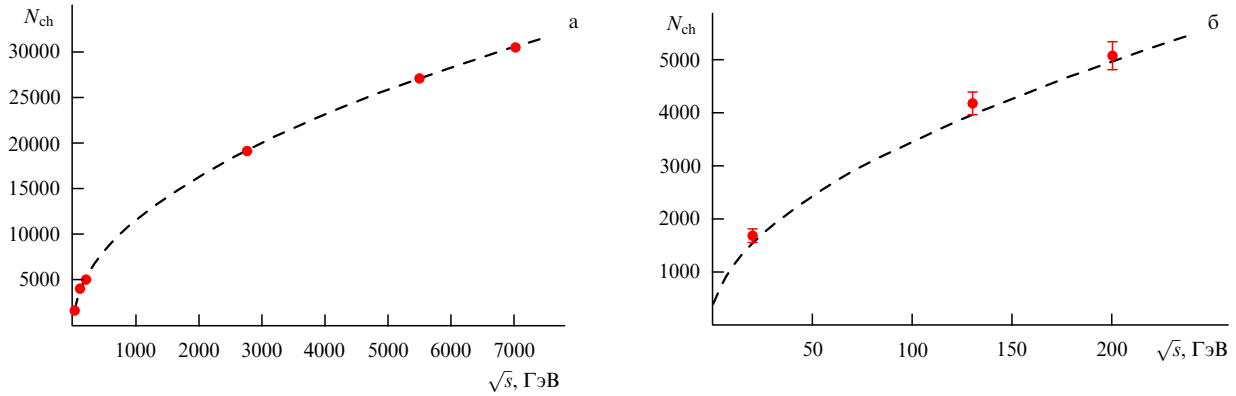


Рис. 9. (а) Зависимость множественности N_{ch} от энергии $\sqrt{s}$. Кривая — результат расчёта по формуле (6.22), тёмными кружками показаны данные RHIC. (б) Увеличенный фрагмент рис. а. (Из работы [232].)

• $b(r) \sim \exp[-(Ar)^a]$. При больших энергиях $A_{trap} \sim s^{1/2}(\log s)^{(a+1)/a}$;

• $b(r) \sim \exp\{-[A/(r-r_0)]^a\}$. При больших энергиях $A_{trap} \sim s^{1/2}(\log s)^{(1-a)/a}$;

• $b = (L/r) \exp(-r^2/R^2)$. Именно этот случай соответствует улучшенной голографической КХД-модели (см. (5.56)).

В последнем случае, если учесть возможную зависимость от поперечных направлений, результаты численных расчётов [232] приводят к следующей асимптотике для множественности при больших энергиях:

$$N_{ch} = 78,05 \left(\frac{A}{A_{Au}} \frac{\sqrt{s}}{1 \text{ ГэВ}} \right)^{0,451} \log^{0,718} \left(534,9 \frac{A}{A_{Au}} \frac{\sqrt{s}}{1 \text{ ГэВ}} \right). \quad (6.22)$$

Сравнение (6.22) с данными RHIC представлено на рис. 9.

Важно также отметить, что модифицированные модели дают лучшую феноменологию при описании свойств равновесной КГП (см. раздел 5.6).

6.4. Численный анализ столкновений ударных волн в пространстве AdS_5

Для того чтобы проанализировать динамику сталкивающихся ударных волн в области их перекрывания, численно решаются уравнения Эйнштейна с начальными данными, связанными с метрикой (6.14). При этом имеют дело со сглаженными плоскими волнами вида [87]

$$ds^2 = r^2(-dx_+ dx_- + dx_\perp^2) + \frac{1}{r^2}(dr^2 + h(x_\pm) dx_\pm^2), \quad (6.23)$$

где $x_\pm \equiv t \pm z$; функцию h , вообще говоря произвольную, удобно выбрать в гауссовом виде с шириной w и амплитудой μ^3 ,

$$h(x_\pm) \equiv \mu^3 (2\pi w^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_\pm^2}{w^2}\right). \quad (6.24)$$

Энергия на единицу площади ударной волны равна $\mu^3(N_c^2/2\pi^2)$. Ясно, что если профиль волны имеет локализованный носитель, то тогда сумма левой и правой волн в достаточно отдалённые моменты времени является решением уравнений Эйнштейна с соответствующими источниками, поскольку каждая из волн — это решение уравнений Эйнштейна с источником. По-

скольку гауссовы пакеты не локализованы, сумма (6.23) является приближённым решением. Для задания подходящих начальных данных берётся достаточно большое отрицательное время, порядка нескольких ширин пакетов, и рассматривается сумма двух волн. Проводится преобразование в координаты Эддингтона–Финкельштейна, в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = -A dv^2 + \Sigma^2 [\exp B d^2 x_\perp^2 + \exp(-2B) dz^2] + 2 dv (dr + F dz), \quad (6.25)$$

где A , B , Σ и F — функции r , v и z . Около границы (мы рассматриваем асимптотически- AdS -решения)

$$A = r^2 \left(1 + \frac{2\xi - 2\partial_v \xi}{r} + \frac{\xi^2 - 2\partial_v \xi}{r^2} + \frac{a_4}{r^4} + O(r^{-5}) \right),$$

$$F = \partial_z \xi + \frac{f_2}{r^2} + O(r^{-3}), \quad B = \frac{b_4}{r^4} + O(r^{-5}), \quad (6.26)$$

$$\Sigma = r + \xi + O(r^{-7}),$$

где ξ — параметр, зависящий от калибровки, а a_4 и f_2 связаны с h следующим образом:

$$a_4 = -\frac{4}{3} [h(v_0 + z) + h(v_0 - z)], \quad f_2 = h(v_0 + z) - h(v_0 - z). \quad (6.27)$$

Численный анализ, проведённый в [233], уточнён в недавней работе [273], в итоге получены картины столкновений ударных волн, показанные на рис. 10.

В [273] обнаружено качественное различие в поведении сталкивающихся волн в зависимости от энергии. Низкоэнергетические и высокоэнергетические столкновения моделируются как столкновения толстых и тонких ударных волн соответственно. При низких энергиях сталкивающиеся волны сначала останавливаются, их начальные формы стираются и их дальнейшее развитие можно описывать гидродинамически. Такая картина имеет близкое сходство с картиной, возникающей в модели Ландау. При больших энергиях сталкивающиеся волны проходят друг через друга, разбегаясь при этом со скоростью света и оставляя за собой области с отрицательными плотностью энергии и продольным давлением. Распределение по быстротам получается не буст-инвариантным. Для средних быстрот оно является гауссовым с шириной, которая убывает с возрастанием энергии.

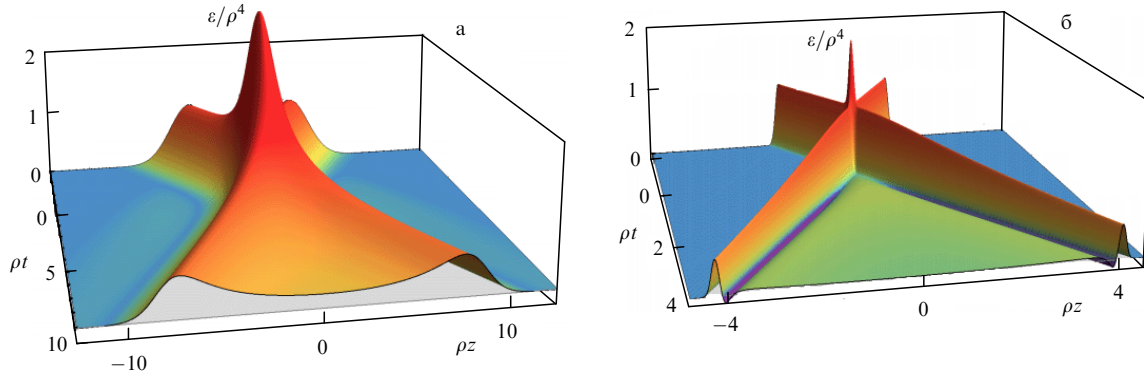


Рис. 10. Распределение энергии в голографической картине столкновения ударных волн: (а) толстые волны, (б) тонкие волны. (Из работы [273].)

7. Дуальность гравитация/гидродинамика

В этом разделе описывается соответствие между приближёнными решениями уравнений Эйнштейна в 5-мерном пространстве AdS и решениями уравнений релятивистской гидродинамики с диссипацией второго порядка по градиентам [102, 103].

7.1. Чёрная брана и идеальная жидкость

Рассмотрим уравнения Эйнштейна

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R - 6 g_{MN} = 0. \quad (7.1)$$

Здесь $M, N = 0, 1, \dots, 4$ и выбраны единицы, в которых $R_{\text{AdS}} = 1$. Найдём такое приближённое решение этих уравнений для метрики g_{MN} , чтобы построенный по метрике тензор энергии-импульса в 4-мерном пространстве Минковского удовлетворял законам сохранения, т.е. уравнениям релятивистской гидродинамики.

Уравнения (7.1) имеют решения следующего вида (используются координаты Эддингтона – Финкельштейна $r, x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$):

$$ds^2 = -2u_\mu dx^\mu dr - r^2 f(br) u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (7.2)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{1}{r^4}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7.3)$$

$$u^i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad P^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}.$$

Здесь b и β_i — константы, $\beta^2 = \beta_i \beta^i$, индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского, $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$.

Метрика (7.2) описывает в координатах Эддингтона – Финкельштейна чёрную брану с температурой $T = 1/\pi b$, движущуюся со скоростью β_i .

Предположим теперь, что в метрике (7.2) b и β_i являются не константами, а медленно изменяющимися функциями координат x^μ на границе пространства AdS: $b(x^\alpha) = T(x^\alpha)/\pi$, $\beta_i(x^\alpha)$, тогда

$$ds^2 = -2u_\mu(x^\alpha) dx^\mu dr - r^2 f(b(x^\alpha)r) u_\mu(x^\alpha) u_\nu(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu. \quad (7.4)$$

В общем случае метрика (7.4) (обозначим её как $g^{(0)}(b(x^\alpha), \beta_i(x^\alpha))$) не удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. Однако можно проверить, что при подстановке метрики (7.4) в левую часть уравнений Эйнштейна (7.1) при $M, N = \mu, \nu$ получим сумму членов, каждый из которых пропорционален первой или второй производной от $T(x^\alpha)$ или $\beta_i(x^\alpha)$ по x^μ , так что с точностью до членов первого порядка по градиентам по x^μ это подмножество уравнений Эйнштейна будет удовлетворяться. Однако уравнения Эйнштейна, соответствующие индексу $M = r$, будут выполняться, только если функции $T(x^\alpha)$ и $\beta_i(x^\alpha)$ удовлетворяют уравнениям $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ для $T^{\mu\nu} = (\pi T)^4 (\eta^{\mu\nu} + 4u^\mu u^\nu)$. Последние уравнения являются не чем иным, как уравнениями релятивистской гидродинамики идеальной жидкости с давлением $(\pi T)^4$. Таким образом, установлена дуальность приближённого решения уравнений Эйнштейна и решения уравнений релятивистской гидродинамики идеальной жидкости.

7.2. Вязкость и гравитация

Вовлекая в процедуру разложения большее число производных и учитывая члены первого порядка по производным в метрике, получаем приближённое решение уравнений Эйнштейна с точностью до второго порядка по градиентам вида

$$ds^2 = -2u_\mu dx^\mu dr - r^2 f(br) u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2r^2 b F(br) \sigma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{2}{3} r u_\mu u_\nu \partial_\lambda u^\lambda dx^\mu dx^\nu - r u^\lambda \partial_\lambda (u_\nu u_\mu) dx^\mu dx^\nu, \quad (7.5)$$

где

$$F(r) = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{(1+r)^2(1+r^2)}{r^4} - 2 \arctan r + \pi \right), \quad (7.6)$$

если выполнены уравнения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ при $T^{\mu\nu} = (\pi T)^4 \times (\eta^{\mu\nu} + 4u^\mu u^\nu) - 2(\pi T)^3 \sigma^{\mu\nu}$, причём $\sigma^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \partial_{(\alpha} u_{\beta)} - (1/3) P^{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha$. Этот тензор энергии-импульса описывает жидкость с плотностью энтропии $s = 4\pi^4 T^3$ и вязкостью $\eta = \pi^3 T^3$. Отметим, что

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}, \quad (7.7)$$

что согласуется с известным результатом [167].

Наконец, учитывая члены второго порядка по производным в метрике, получаем приближённое решение уравнений Эйнштейна с точностью до третьего порядка,

если выполнены уравнения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. В этом случае

$$T^{\mu\nu} = (\pi T)^4 (\eta^{\mu\nu} + 4u^\mu u^\nu) - 2(\pi T)^3 \sigma^{\mu\nu} + (\pi T)^2 \left[(\ln 2) T_{2a}^{\mu\nu} + 2T_{2b}^{\mu\nu} + (2 - \ln 2) \left(\frac{1}{3} T_{2c}^{\mu\nu} + T_{2d}^{\mu\nu} + T_{2e}^{\mu\nu} \right) \right], \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} T_{2a}^{\mu\nu} &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma(\mu} \sigma_{\gamma}^{\nu)} u_\alpha \lambda_\beta, \\ T_{2b}^{\mu\nu} &= \sigma^{\mu\alpha} \sigma_\alpha^\nu - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \\ T_{2c}^{\mu\nu} &= \partial_\alpha u^\alpha \sigma^{\mu\nu}, \\ T_{2d}^{\mu\nu} &= Du^\mu Du^\nu - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} Du^\alpha Du_\alpha, \quad \lambda_\mu = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} u^\alpha \partial^\beta u^\gamma, \\ T_{2e}^{\mu\nu} &= P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} D(\partial_\alpha u_\beta) - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} D(\partial_\alpha u_\beta). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1$, $D \equiv u^\alpha \partial_\alpha$, круглые скобки у верхних или нижних индексов означают симметризацию: $a^{(\alpha} b^{\beta)} = (a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha)/2$.

7.3. Конформно-инвариантная жидкость и значения коэффициентов переноса, вычисленных с использованием голографии

Полезно провести классификацию всех тензоров, инвариантных относительно преобразований Вейля в различных порядках разложения по числу производных.

В первых двух порядках по производным имеются следующие симметрические бесследовые тензоры, для которых преобразование Вейля однородно:

$$\begin{aligned} \text{первый порядок: } & \sigma^{\mu\nu}; \\ \text{второй порядок: } & \mathfrak{T}_1^{\mu\nu} = 2u^\alpha \mathcal{D}_\alpha \sigma_{\mu\nu}, \quad \mathfrak{T}_2^{\mu\nu} = C_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta, \\ & \mathfrak{T}_3^{\mu\nu} = 4\sigma^{\alpha(\mu} \sigma_{\alpha}^{\nu)}, \quad \mathfrak{T}_4^{\mu\nu} = 2\sigma^{\alpha(\mu} \omega_{\alpha}^{\nu)}, \\ & \mathfrak{T}_5^{\mu\nu} = \omega^{\alpha(\mu} \omega_{\alpha}^{\nu)}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}_\alpha$ — ковариантная относительно преобразований Вейля производная, введенная в [274], здесь ${}^{(\mu} A^{\nu)}$ обозначает симметричный, поперечный (относительно вектора u) и бесследовый тензор 2-го ранга, построенный по тензору ${}^{\mu} A^{\nu}$ (аналогично определению (A.7) в приложении A). Эти тензоры⁴ включают в себя производные по скорости, такие как ускорение a^μ , натяжение $\sigma^{\mu\nu}$ и т.д. Последние величины определяются с помощью разложения градиента скорости $\nabla^\nu u^\mu$ на поперечную (или бесследовую) часть и след:

$$\nabla^\nu u^\mu = -a^\mu u^\nu + \sigma^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{3} \theta P^{\mu\nu},$$

где дивергенция, ускорение и ротор определены соответственно как $\theta = \nabla_\mu u^\mu$, $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, $\omega^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \nabla_{(\alpha} u_{\beta)}$. Кроме того, в 4-мерном пространстве-времени имеется следующий ротор скорости: $l^\mu = u_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \nabla_\beta u_\gamma$. Используя эти обозначения, поправки по градиентам к тензору

энергии-импульса можно представить в общем виде:

$$\begin{aligned} P_{(1)}^{\mu\nu} &= -2\eta \sigma^{\mu\nu}, \\ P_{(2)}^{\mu\nu} &= \tau \pi \eta \mathfrak{T}_1^{\mu\nu} + \kappa \mathfrak{T}_2^{\mu\nu} + \lambda_1 \mathfrak{T}_3^{\mu\nu} + \lambda_2 \mathfrak{T}_4^{\mu\nu} + \lambda_3 \mathfrak{T}_5^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Таким образом, имеются шесть коэффициентов переноса: η , $\tau\pi$, κ , λ_i ($i = 1, 2, 3$), которые описывают поток вязкой жидкости.

Используя для голографического описания жидкости результаты исследования решений уравнений гравитации в пространстве AdS_5 , можно найти явные выражения для коэффициентов переноса. В частности, для ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса получено⁵:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{N^2}{8\pi} (\pi T)^3, \quad \frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}, \quad \tau\pi = \frac{2 - \ln 2}{2\pi T}, \quad \kappa = \frac{\eta}{\pi T}, \\ \lambda_1 &= \frac{\eta}{2\pi T}, \quad \lambda_2 = \frac{\eta \ln 2}{\pi T}, \quad \lambda_3 = 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где во втором соотношении первой строки использовано известное выражение для плотности энтропии в ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса в режиме сильной связи, $s = \pi^3 N^2 T^3/2$, при этом получается известное отношение вязкости к плотности энтропии [144].

Мы привели результаты для $d = 4$ -релятивистской жидкости, которая дуальна гравитационному полю чёрной дыры в пространстве AdS_5 . Эти результаты обобщены в [275, 276] для других размерностей, $d \geq 3$.

7.4. Характеристики термализации буст-инвариантной плазмы из голографии

В [264, 277] рассмотрен процесс буст-инвариантной термализации КГП с точки зрения голографического описания. Термализация любых малых возмущений в AdS -пространстве является экспоненциально быстрой и описывается квазимодами, изучавшимися ранее в [278]. Гравитация, дуальная расширяющейся плазме, не является стационарным решением и выглядит как результат буста чёрной дыры, однако термализация произвольных малых возмущений также является быстрой, квазиэкспоненциальной, т.е. $\sim \exp(-\text{const } \tau^{2/3})$ [279].

Метрика, описывающая буст-инвариантную плазму, в координатах Фефермана–Грехэма имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{u} \left[- \left(1 - \frac{2\pi^2}{N_c^2} \varepsilon(\tau) u^2 \right) d\tau_{\text{FG}}^2 + \right. \\ &+ \tau_{\text{FG}}^2 \left(1 + \frac{2\pi^2}{N_c^2} p_l(\tau) u^2 \right) dy^2 + \\ &+ \left. \left(1 + \frac{2\pi^2}{N_c^2} p_t(\tau) u^2 \right) dx_\perp^2 + \frac{1}{4u} du^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Гидродинамические уравнения приводят к следующему разложению плотности энергии:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{8} N_c^2 \pi^2 \frac{\Lambda^4}{(\Lambda\tau)^{4/3}} \left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_3}{(\Lambda\tau)^{2/3}} + \frac{\varepsilon_4}{(\Lambda\tau)^{4/3}} + \dots \right], \quad (7.13)$$

где $\varepsilon_2 = 1$ в случае ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса при больших N_c в режиме сильной связи.

⁴ В литературе используются различные соглашения для нормирования тензоров. Здесь мы будем следовать нормировке, первоначально использованной в [101]. Вследствие этого в определении тензоров $\mathfrak{T}_i$ появляются множители 2 (см. [102]).

⁵ Аналогичный результат для общей ($\mathcal{N} = 1$)-суперконформной теории поля, которая дуальна супергравитации в пространстве $\text{AdS}_5 \times S^5$, получается просто заменой величины $N^2/8\pi^2$ соответствующим центральным зарядом [101, 102].

Параметр Λ , который является единственным свободным параметром, задаёт масштаб энергий. Продольное и поперечное давления, согласно (4.11), (4.12), выражаются в виде

$$p_l = -\varepsilon - \tau \frac{d\varepsilon}{d\tau}, \quad p_t = \varepsilon + \frac{1}{2} \tau \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (7.14)$$

Используя понятие эффективной температуры T_{eff} , соотношение (7.13) можно представить следующим образом [170, 280, 281]:

$$\varepsilon(\tau) = N_c^2 \frac{3}{8} \pi^2 T_{\text{eff}}^4(\tau). \quad (7.15)$$

Температура T_{eff} никак не связана с реальной температурой и термализацией, её зависимость от $\Lambda\tau$ в первом приближении выражается как

$$T_{\text{eff}}(\tau) = \frac{\Lambda}{(\Lambda\tau)^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{6\pi(\Lambda\tau)^{2/3}} + \frac{-1 + \log 2}{36\pi^2(\Lambda\tau)^{4/3}} + \frac{-21 + 2\pi^2 + 51 \log 2 - 24 \log^2 2}{1944\pi^3(\Lambda\tau)^2} + \dots \right]. \quad (7.16)$$

Разложение плотности энергии при больших τ по степеням $\tau^{-2/3}$ эквивалентно гидродинамическому разложению по градиентам, оно следует из выражения градиентов скорости ($\nabla_\mu u_\nu \sim \tau^{-1}$) в единицах эффективной температуры.

Для буст-инвариантной конформной плазмы законы сохранения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ можно представить в виде дифференциального уравнения первого порядка для масштабной инвариантной величины $w = T_{\text{eff}}\tau$, а именно

$$\frac{\tau}{w} \frac{dw}{d\tau} = \frac{F_{\text{hydro}}(w)}{w}, \quad (7.17)$$

где $F_{\text{hydro}}(w)$ полностью определяется в терминах коэффициентов переноса⁶.

Для плазмы в $(\mathcal{N} = 4)$ -суперсимметричной теории Янга–Миллса в режиме сильной связи известен явный вид функции $F_{\text{hydro}}(w)/w$ с точностью до поправок гидродинамики 3-го порядка по градиентам [281]

$$\frac{F_{\text{hydro}}^{\text{3rd order}}(w)}{w} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9\pi w} + \frac{1 - \log 2}{27\pi^2 w^2} + \frac{15 - 2\pi^2 - 45 \log 2 + 24 \log^2 2}{972\pi^3 w^3} + \dots \quad (7.18)$$

Поправки высших порядков для плотности энергии (7.13) могут быть получены [283, 284] посредством решения уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной для метрики вида

$$ds^2 = 2 d\tau dr - A d\tau^2 + \Sigma^2 \exp(-2B) dy^2 + \Sigma^2 \exp B(dx_1^2 + dx_2^2), \quad (7.19)$$

где функции A , Σ и B , зависящие от r и τ , определяются с помощью градиентного разложения согласно дуальности гидродинамика/гравитация. Недавно было установлено [285] факториальное возрастание градиентного разложения высших порядков. Это означает, что ряд гидродинамического разложения по градиентам имеет

нулевой радиус сходимости. Как обычно в квантовой теории поля [286], полезно провести преобразование Бореля. В [285] установлена эквивалентность ведущей сингулярности в преобразовании Бореля гидродинамической плотности энергии с низшими негидродинамическими возбуждениями, соответствующими негидродинамическим квазинормальным модам гравитации. Высказана гипотеза [282, 287], что квазинормальные моды могут играть роль, аналогичную роли инстантонов в контексте суммирования по Борелю в квантовой теории поля [286].

Представляется интересным проверить предположение о существовании универсальной функции $F(w)$ в правой части уравнения (7.17) с помощью численного решения соответствующих уравнений гравитации. Как отмечалось в разделе 6.4, в этом случае при вычислениях в координатах Фефермана–Грехэма возникает проблема сингулярности. В [264] предложено для численного решения этих уравнений гравитации использовать метрику Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ) [288], имеющую в данном случае вид

$$ds^2 = -\frac{a^2(u)\alpha^2(t,u) dt^2}{u} + \frac{t^2 a^2(u)b^2(t,u) dy^2}{u} + \frac{c^2(t,u) dx_\perp^2}{u} + \frac{d^2(t,u) du^2}{4u^2}. \quad (7.20)$$

Пустому пространству AdS соответствует случай, в котором все коэффициентные функции равны единице.

Отметим, что, вообще говоря, временная координата t не равна собственному времени калибровочной теории τ на границе. Соотношение между АДМ-временем t и собственным временем τ имеет вид $\tau \equiv f_0(t) = b(t,0)t/c(t,0)$, соотношения между τ_{FG} и t , z и u выражаются как

$$\tau_{\text{FG}} = f_0(t) + f_1(t)u + f_2(t)u^2 + \dots, \quad (7.21)$$

$$z = g_0(t)u^{1/2} + g_1(t)u^{3/2} + g_2(t)u^{5/2} + \dots$$

Соотношения для $\varepsilon(\tau)$ и $p_l(\tau)$ в терминах метрических коэффициентов принимают вид

$$\varepsilon(\tau) = \frac{N_c^2}{2\pi^2} c^4 \left(\partial_u^2 a + \frac{2\partial_u a \partial_u b}{b} - \partial_u a \partial_u d - \frac{\partial_u b \partial_u d}{b} - \frac{2\partial_u c \partial_u d}{c} - \frac{9}{4} \partial_u d^2 - \frac{\partial_u P}{4tb} - \frac{3M \partial_u P}{4c^2} + \frac{\partial_u^2 b}{b} + 2 \frac{\partial_u^2 c}{c} + \frac{3}{4} \partial_u^2 d \right), \quad (7.22)$$

$$p_l(\tau) = \frac{N_c^2}{2\pi^2} \left(c^3 \partial_u^2 c - \frac{1}{4} c^4 \partial_u d^2 + \frac{1}{4} c^4 \partial_u^2 d + \frac{1}{4} \partial_u d M^2 - \frac{1}{4} c^2 M \partial_u P \right). \quad (7.23)$$

Продольное давление $p_l(\tau)$ можно определить из условия бесследовости $\varepsilon(\tau) = p_l(\tau) + 2p_t(\tau)$.

Установление гидродинамического режима, начиная с далёких от равновесия конфигураций, прослежено в работах [264, 277]. Несмотря на наличие сложной динамики вдали от равновесия, авторы этих работ установили корреляции между начальной энтропией и полной произведённой энтропией, а также между начальной температурой и температурой $T_{\text{hydro-therm}}$ перехода к

⁶ Это напоминает результат работы [282], в которой описана гидродинамика с учётом всех высших порядков в терминах линеаризованной AdS-динамики.

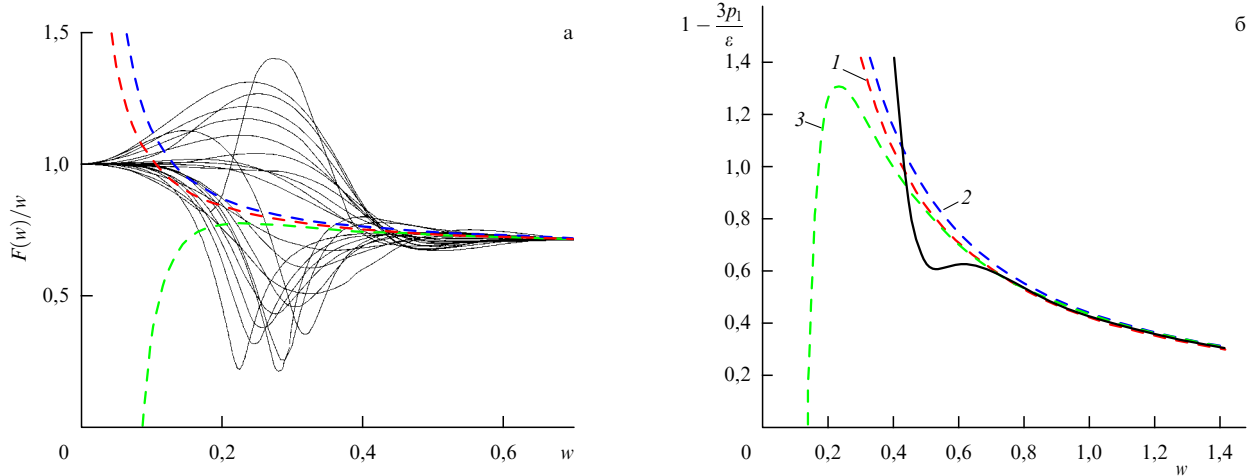


Рис. 11. (а) $F(w)/w$ как функция w для 29 начальных данных. (б) Анизотропия давления $1 - 3p_1/\varepsilon$ для выбранного профиля. Сплошная кривая — результат, полученный с помощью численного решения уравнений Эйнштейна. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют гидродинамике 1-го, 2-го и 3-го порядков. (Из работ [264, 277].)

гидродинамическому описанию. Они также получили, что гидродинамика применима для собственного времени, большего, чем $0,7 T_{\text{therm}}^{-1}$, где T_{therm}^{-1} — время установления изотропного режима ⁷.

На основе численного решения уравнений Эйнштейна для метрики (7.20) с использованием формул (7.15) и (7.22) была проанализирована величина $d \ln w / d \ln \tau$ для различных начальных данных и было установлено, что поведение определённой из (7.17) функции $F_{\text{hydro}}(w)/w$ действительно является универсальным при $w > 0,7$.

Для того чтобы более детально изучить переход к гидродинамике, был введён численный критерий такого перехода, а именно предложено считать, что переход возможен, если выполнено условие

$$\left| \tau \frac{d}{d\tau} \frac{w}{F_{\text{hydro}}^{3\text{rd order}}(w)} - 1 \right| < 0,005, \quad (7.24)$$

где выражение в третьем порядке даётся формулой (7.18).

Обнаружена [264, 277] существенная анизотропия в тензоре энергии-импульса в процессе термализации. Оказалось, что применимость гидродинамического описания при столкновениях тяжёлых ионов может возникать значительно ранее, чем наступит стадия изотропизации, и дальнейшая эволюция к изотропному термодинамическому равновесию описывается в рамках хорошо исследованной гидродинамики с вязкостью.

На рисунке 11а показано несколько траекторий, соответствующих различным начальным состояниям. Из рисунка 11б видно, что негидродинамические моды важны на начальной стадии эволюции КГП. Имеются весьма хорошее согласие с гидродинамикой для $w > 0,63$ и весьма значительное анизотропное давление в этом режиме, которое, тем не менее, полностью объясняется диссипативной гидродинамикой (см. работу [289], в которой получен аналогичный вывод, а также более ранние работы [290–293]).

Что касается энтропии, то, поскольку результаты численных вычислений указывают на возникновение кажущегося горизонта (apparent horizon — АН), энтропия может быть определена как произведение $1/4G_N$ на площадь кажущегося горизонта, отображённого на границу вдоль входящих изотропных геодезических [289, 294, 295]. Плотность энтропии кажущегося горизонта определяется здесь как плотность энтропии Бекенштейна–Хокинга,

$$s_{\text{АН}} = \frac{1}{4G_N} \frac{t}{u} a(u) b(t, u) c^2(t, u) \Big|_{u=u_{\text{АН}}}, \quad (7.25)$$

и находится из требования, что $\theta_l = 0$, $\theta_n < 0$, где θ_l , θ_n — расширения [218, 219].

Используя общие рассуждения дуальности гидродинамика/гравитация [294], эту энтропию можно ассоциировать с граничной энтропией, которую можно получить, сопоставив точки горизонта с точками на границе, используя входящие радиальные изотропные геодезические [280, 295]. Аналогичное сопоставление энтропий проводится и для метрики Вайдьи [237].

Вводя безразмерную плотность энтропии $s_{n\text{-eq}} = 2s_{\text{АН}}/(N_c^2 \pi^2 (T_{\text{eff}}^i)^2)$, можно сравнить её с результирующей, произведённой, энтропией, определяемой при $\tau = \infty$ как $s_{n\text{-eq}}^f = \Lambda^2 (T_{\text{eff}}^i)^{-2}$, где масштаб Λ находится из условия соответствия с выражением для T_{eff} в гидродинамике третьего порядка, приведённым в (7.16). Производство энтропии Δs , определённое как разность $\Delta s = s_{n\text{-eq}}^f - s_{n\text{-eq}}^i$, в зависимости от $s_{n\text{-eq}}^i$ было численно изучено для всех рассмотренных профилей в [277]. Несмотря на значительное различие в эволюции в начальные моменты, установлена зависимость Δs от начальной энтропии, которая с хорошей точностью описывается формулой

$$\Delta s = 1,64 (s_{n\text{-eq}}^i)^{1,58}. \quad (7.26)$$

В дальнейшем в работе [296] на основе голографического подхода в рамках первого приближения к уравнению Эйнштейна была рассмотрена изотропизация сильно анизотропной начальной конфигурации. В [296] уравнения Эйнштейна рассматриваются в рамках анзаца

⁷ Авторы [264, 277] называют время перехода к гидродинамическому описанию временем эффективной термализации, а время изотропизации — временем истинной термализации. Представляется предпочтительным время перехода к гидродинамическому описанию называть временем локальной термализации.

(7.19) при предположении, что тензор энергии-импульса имеет вид

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{N_c^2}{2\pi^2} \text{diag} [\varepsilon, p_t(t), p_t(t), p_t(t)],$$

$$p_t(t) = \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{2}{3} \Delta \mathcal{P}(t), \quad p_l(t) = \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \Delta \mathcal{P}(t),$$

где $\Delta \mathcal{P} = p_t - p_l$. Такое предположение отличается от предположения, сделанного в [250]. Показано, что с точностью до 10–20 % время $\tau_{\text{iso}} \lesssim 1/T$, где T — конечная температура, связанная с асимптотикой $A(r) = r^2 - \pi^4 T^4/r^2 + \dots$. Энтропия стабилизируется несколько ранее. В недавней работе [297] рассмотрены следующие порядки. Отметим также более раннюю работу [298], в которой изучался радиальный поток на основе голографического подхода.

8. Заключение

В настоящем обзоре приведены результаты, показывающие, что ряд наблюдаемых свойств кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновении тяжёлых ионов на ускорителях RHIC и LHC, может быть описан в рамках голографического подхода на основе AdS/CFT-дualности. Применение голографического подхода позволило описать энергетические потери быстрых тяжёлых частиц, спектр кваркониума, транспортные свойства КГП, множественность рождения частиц, малое время термализации, анизотропный характер локальной термализации и выход на гидродинамический режим.

В этом новом, голографическом, направлении имеется ряд задач, которые, по-видимому, будут решены в будущем, — это выход за рамки бёркеновского потока и всестороннее исследование процесса термализации с помощью численных методов в соответствующей пятимерной задаче, исследование моделей оболочек в деформированном AdS-пространстве, исследование потерь энергии лёгкими частицами, всесторонний учёт химического потенциала в улучшенной модели AdS/CFT-соответствия и др.

Возможно, голографические методы окажутся также полезными для описания недавних экспериментов на LHC по столкновениям протон–ядро с высокой множественностью [299–302], в которых, по-видимому, тоже проявляются коллективные свойства.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 11-01-00707-а).

9. Приложения

А. Релятивистские уравнения вязкой и теплопроводной среды. Первый и второй порядки по градиентам

Релятивистская жидкость описывается тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, и набором токов J_i^μ , $i = 1, 2, \dots, n$. Уравнения движения следуют из законов сохранения энергии и импульса

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.1})$$

и соответствующих токов

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0, \quad (\text{A.2})$$

где J_i^μ — i -й сохраняющийся ток. Для идеальной жидкости при пренебрежении эффектами диссипации тензор

энергии-импульса и токи имеют вид

$$T_0^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu - p(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu), \quad J_{0,i}^\mu = n_i u^\mu. \quad (\text{A.3})$$

Здесь u^μ — векторное поле скорости жидкости, $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$, $g_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, ε — плотность энергии, p — давление, n_i — плотность i -го сохраняющегося заряда. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо также задать уравнение состояния $p = p(\varepsilon, n)$.

Выражение для $T^{\mu\nu}$ с учётом диссипативных эффектов ищется в виде

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + \dots, \quad (\text{A.4})$$

где тензор $T_1^{\mu\nu}$ содержит производные первого порядка по градиентам функций u^μ , ε и p , а тензор $T_2^{\mu\nu}$ — производные второго порядка по градиентам тех же функций и т.д. Выражение для J^μ строится аналогично: $J_i^\mu = J_{0,i}^\mu + J_{1,i}^\mu + \dots$.

Первый порядок по градиентам. Вектор скорости определяется таким образом, чтобы для каждого элемента жидкости в собственной системе отсчёта его импульс равнялся нулю, а его энергия выражалась через другие термодинамические величины теми же формулами, что и в отсутствие диссипативных процессов. Это условие приводит к соотношениям (в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одного тока)

$$T_1^{\mu\nu} u^\nu = 0, \quad J_1^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{A.5})$$

В приближении первого порядка по градиентам релятивистские уравнения жидкости с диссипацией имеют вид [96]

$$\partial_\mu (T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu}) = 0, \quad \partial_\mu (J_0^\mu + J_1^\mu) = 0, \quad (\text{A.6})$$

где

$$T_1^{\mu\nu} = \eta \partial^{(\mu} u^{\nu)} - \zeta \partial_\alpha u^\alpha \Delta^{\mu\nu},$$

$$J_1^\mu = \kappa \left(\frac{nT}{w} \right)^2 \left[\partial^\mu \left(\frac{\mu_b}{T} \right) - u^\mu u^\nu \partial_\nu \left(\frac{\mu_b}{T} \right) \right].$$

Здесь η и ζ — коэффициенты вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, T — температура, $w = \varepsilon + p$ — тепловая функция единицы объёма, μ_b — релятивистский химический потенциал: $n\mu_b = w - Ts$, где s — энтропия, отнесённая к единице собственного объёма; введено обозначение

$$A_{(\mu} B_{\nu)} = (\Delta_\mu^\alpha \Delta_\nu^\beta + \Delta_\nu^\alpha \Delta_\mu^\beta - \frac{2}{3} \Delta^{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu}) A_\alpha B_\beta, \quad (\text{A.7})$$

где $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ — проектор, ортогональный вектору скорости, $u_\mu \Delta^{\mu\nu} = 0$.

Вектор плотности потока энтропии выражается как

$$s^\alpha = s u^\alpha - \frac{\mu_b}{T} J_1^\alpha, \quad (\text{A.8})$$

закон возрастания энтропии имеет вид

$$\partial_\alpha s^\alpha = -J_1^\alpha \partial_\alpha \frac{\mu_b}{T} + \frac{1}{T} T_1^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu. \quad (\text{A.9})$$

Формализм Израэля–Стюарта второго порядка для конформной жидкости. Уравнения гидродинамики во втором порядке по градиентам имеют вид

$$\partial_\mu (T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{A.10})$$

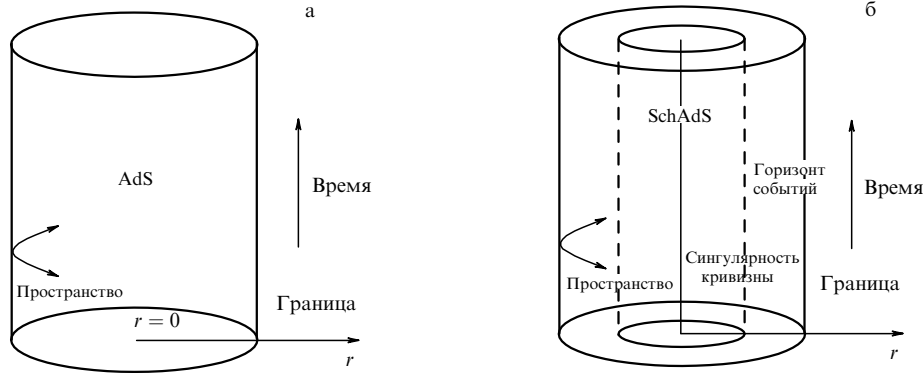


Рис. 12. (а) Схематическое изображение пространства AdS. (б) Пространство SchAdS, представленное в виде цилиндра. Горизонт событий изображён в виде внутреннего цилиндра.

В формализме Израэля–Стюарта для конформной жидкости [101] тензор энергии-импульса представляется как $T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$. Простейшие уравнения движения принимают вид

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu u^\sigma \partial_\sigma \pi^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\tau_\Pi} (\pi^{\mu\nu} - T_1^{\mu\nu}) - \frac{4}{3} \pi^{\mu\nu} (\partial_\alpha u^\alpha),$$

τ_Π — постоянная (транспортный коэффициент).

Поэтому для конформной жидкости $\zeta = 0$ и сохраняется только первый коэффициент вязкости η . Для конформной вязкой жидкости получено следующее выражение для поправок второго порядка по градиентам к тензору энергии-импульса [101, 102]:

$$T_2^{\mu\nu} = -\tau_2 \eta \left[\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu D \sigma^{\alpha\beta} + \frac{4}{3} \sigma^{\mu\nu} (\partial_\alpha u^\alpha) \right] - \lambda_1 \sigma_\alpha^{(\mu} \sigma^{\nu)\alpha} + \lambda_2 \sigma_\alpha^{(\mu} \omega^{\nu)\alpha} - \lambda_3 \omega_\alpha^{(\mu} \omega^{\nu)\alpha}. \quad (\text{A.12})$$

Здесь $D = u^\alpha \partial_\alpha$, $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$, $\sigma^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu} u^{\nu)}$, $\omega_{\mu\nu} = (\nabla_\nu u_\mu - \nabla_\mu u_\nu)/2$ и появилось четыре дополнительных коэффициента переноса: τ_2 , λ_1 , λ_2 и λ_3 .

Б. Геометрия пространства AdS_D

Пространство AdS — это некомпактное многообразие постоянной кривизны с лоренцевской сигнатурой метрики. Его можно представить как фактор-пространство $\text{AdS}_D = \text{SO}(2, d)/\text{SO}(1, d)$, $D = d + 1$. Можно реализовать AdS-пространство как гиперболоид:

$$\begin{aligned} \text{AdS}_{d+1} = \\ = \{X \in \mathbb{R}^{(2; d)}: +X_1^2 + \dots + X_d^2 - X_0^2 - X_{d+1}^2 = -R^2\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где $\mathbb{R}^{(2; d)}$ имеет два времениподобных измерения и d пространственноподобных измерений. Линейный элемент пространства анти-де-Ситтера строится посредством ограничения $(D + 1)$ -мерной метрики на многообразие AdS_D :

$$ds^2 = -dX_{d+1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2 \Big|_{\text{AdS}_{d+1}}. \quad (\text{Б.2})$$

Эта метрика является максимально симметрическим решением уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной. Пространство AdS_D имеет группу изометрий $\text{SO}(2; D)$.

Глобальные координаты:

$$X^{d+1} = R\sqrt{1 + \rho^2} \cos t, \quad X^0 = R\sqrt{1 + \rho^2} \sin t, \quad (\text{Б.3})$$

$$X^1 = R\rho \cos \theta_1, \quad X^2 = R\rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad (\text{Б.4})$$

$$X^3 = R\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad X^d = R\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1}. \quad (\text{Б.5})$$

Индукцированная метрика в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = -(1 + \rho^2) dt^2 + \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 \Omega_{d-1}^2. \quad (\text{Б.6})$$

Здесь Ω_{d-1}^2 — метрика на $(d - 1)$ -мерной единичной сфере, $R = 1$. Эти сферические координаты являются глобальными координатами, $\rho > 0$, и t имеет период 2π (можно рассмотреть накрывающее пространство). Если ввести $\rho = \sinh r$, то тогда

$$ds^2 = -\cosh^2 r dt^2 + dr^2 + \sinh^2 r \Omega_{d-1}^2. \quad (\text{Б.7})$$

Координаты Пуанкаре, $R = 1$:

$$\begin{aligned} X^1 = \frac{x^1}{z}, \quad \dots \quad X^{d-1} = \frac{x^{d-1}}{z}, \quad X^{d+1} = \frac{x^0}{z}, \\ X^d = \frac{z^2 - 1 - (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2}{2z}, \\ X^0 = \frac{z^2 + 1 - (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2}{2z}, \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

где предполагается, что $z > 0$. Эти координаты покрывают только часть пространства AdS_D . Метрика (Б.2) в координатах (Б.8) имеет вид

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-d\tau^2 + dx^2 + dz^2). \quad (\text{Б.9})$$

На рисунке 12а изображено пространство AdS в виде цилиндра. Время направлено вертикально вверх, граница — боковая поверхность цилиндра, для пространства AdS_3 границей является $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, для пространства AdS_5 — $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. На рисунке 12б пространство SchAdS схематически представлено в виде цилиндра с горизонтом событий, изображённым в виде внутреннего цилиндра.

На рисунке 13а изображён планарный предел пространства SchAdS в виде плоского пространства. Область, показанная зелёным параллелепипедом на рис. 13а, в увеличенном виде представлена на рис. 13б. Здесь граница стала плоскостью (отмеченной синим цветом), то же стало и с горизонтом (показан красным цветом).

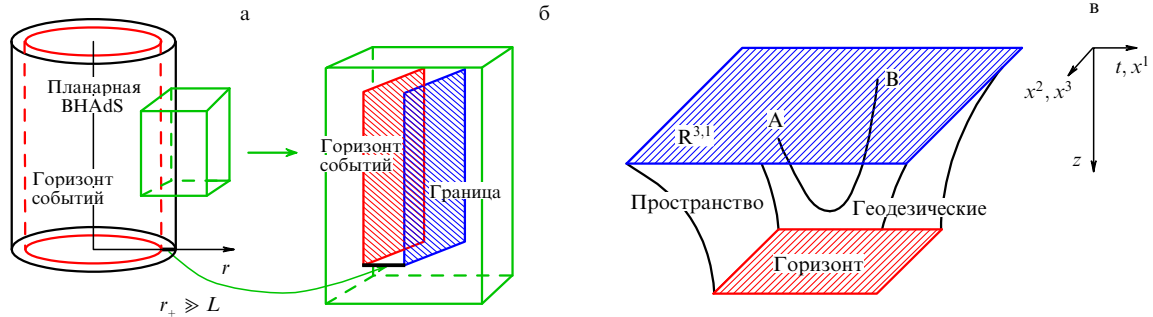


Рис. 13. (в цвете онлайн.) (а) Планарный предел пространства SchAdS. (б) Изображение в увеличенном виде области, выделенной зелёным параллелепипедом на рис. а. (в) Планарная чёрная дыра AdS. Плоское пространство-время, на котором мы "живём", показано синим цветом.

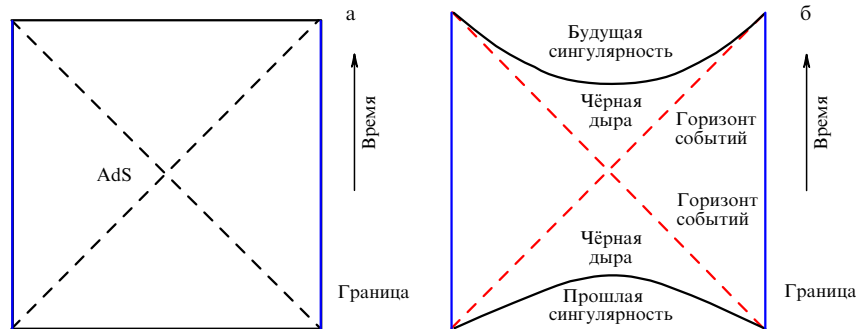


Рис. 14. (а) Диаграмма Пенроуза пространства AdS. (б) Диаграмма Пенроуза пространства AdS с чёрной дырой (SchAdS).

Плоское пространство, на котором мы "живём", окрашено синим цветом. На рисунке 13в представлена типичная картина при обсуждении AdS/CFT-соответствия. Плоское пространство-время, в котором мы живём, — граница AdS-пространства. Корреляторы квантового поля в точках А и В на границе определяются оканчивающейся в этих точках геодезической, свисающей внутрь пространства. Наличие горизонта деформирует геодезическую.

Для описания глобальных свойств удобны глобальные координаты. Диаграмма Пенроуза пространства AdS приведена на рис. 14а, а диаграмма Пенроуза пространства AdS с чёрной дырой — на рис. 14б.

Список литературы

- Adams J et al. (STAR Collab.) *Nucl. Phys. A* **757** 102 (2005)
- Adcox K et al. (PHENIX Collab.) *Nucl. Phys. A* **757** 184 (2005)
- Arsene I et al. (BRAHMS Collab.) *Nucl. Phys. A* **757** 1 (2005)
- Back B B et al. *Nucl. Phys. A* **757** 28 (2005)
- "Quark Matter 2011: Proc. of the 22nd Intern. Conf. on Ultra-Relativistic Nucleus–Nucleus Collisions, Annecy, France, 23–28 May 2011" *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **38** (12) (2011)
- Aamodt K et al. (ALICE Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **105** 252301 (2010)
- Masui H et al. *Nucl. Phys. A* **830** 463C (2009)
- Shuryak E *Prog. Part. Nucl. Phys.* **53** 273 (2004)
- Shuryak E *Nucl. Phys. A* **750** 64 (2005)
- Heinz U W, hep-ph/0407360
- Леонидов А В *УФН* **175** 345 (2005); Leonidov A V *Phys. Usp.* **48** 323 (2005)
- Salgado C A, arXiv:0907.1219
- Дремин И М, Леонидов А В *УФН* **180** 1167 (2010); Dremine I M, Leonidov A V *Phys. Usp.* **53** 1123 (2010)
- Gelis F J. *Phys. Conf. Ser.* **381** 012021 (2012); arXiv:1110.1544
- Snellings R *New J. Phys.* **13** 055008 (2011); arXiv:1102.3010
- Gyulassy M, McLerran L *Nucl. Phys. A* **750** 30 (2005); nucl-th/0405013
- Alford M G et al. *Rev. Mod. Phys.* **80** 1455 (2008); arXiv:0709.4635
- Sorensen P, arXiv:1201.0784
- Iancu E, arXiv:1205.0579
- Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
- Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
- Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998)
- Aharony O et al. *Phys. Rep.* **323** 183 (2000)
- Casalderrey-Solana J et al., arXiv:1101.0618
- Ландау Л Д *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **17** 51 (1953)
- Fermi E *Prog. Theor. Phys.* **5** 570 (1950)
- Померанчук И Я *ДАН СССР* **78** 884 (1951)
- Арефьева И Я, Славнов А А "Теория калибровочных полей", в сб. *XIV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий, Дубна, 1980* (Дубна: ОИЯИ, 1981) с. 36
- Snellings P J. *Phys. Conf. Ser.* **381** 012019 (2012)
- Martinez G, arXiv:1304.1452
- Singh R et al. *Adv. High Energy Phys.* **2013** 761474 (2013); arXiv:1304.2969
- Karsch F *Lecture Notes Phys.* **583** 209 (2002); hep-lat/0106019
- Фортов В Е *УФН* **179** 653 (2009); Fortov V E *Phys. Usp.* **52** 615 (2009)
- Горбунов Д С, Рубаков В А *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва* (М.: ЛКИ, 2008); Gorbunov D S, Rubakov V A *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory* (Singapore: World Scientific, 2011)
- Flambaum V V, Shuryak E V *Europhys. Lett.* **74** 813 (2006); hep-th/0512038
- Shuryak E *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62** 48 (2009); arXiv:0807.3033
- Фейнберг Е Л *УФН* **168** 697 (1998); Feinberg E L *Phys. Usp.* **41** 617 (1998)
- Denisov D, "Experimental Summary 2013", in *Rencontres de Moriond QCD and High Energy Interactions, La Thuile, March 9–16, 2013*; arXiv:1306.6908
- Salgado C A, arXiv:0907.1219
- Barannikova O (STAR Collab.), nucl-ex/0403014
- Braun-Munzinger P, Redlich K, Stachel J, in *Quark Gluon Plasma* (Eds R C Hwa, X-N Wang) (Singapore: World Scientific Publ., 2004) p. 491
- Adare A et al. (PHENIX Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **104** 132301 (2010)
- Пенья С, Смилга А В *УФН* **179** 697 (2009); Peigné S, Smilga A V *Phys. Usp.* **52** 659 (2009)
- Matsui T, Satz H *Phys. Lett. B* **178** 416 (1986)
- Kaczmarek O et al. *Phys. Rev. D* **70** 074505 (2004); *Phys. Rev. D* **72** 059903 (2005), Erratum
- Petrov K (RBC-Bielefeld Collab.) *PoS LAT* **2006** 144 (2006)
- Satz H J. *Phys. G Nucl. Part. Phys.* **32** R25 (2006)
- Karsch F, Mehr M T, Satz H Z. *Phys. C* **37** 617 (1988)
- Digal S, Petreczky P, Satz H *Phys. Rev. D* **64** 094015 (2001)
- Mocsy A, Petreczky P *Phys. Rev. D* **73** 074007 (2006)
- Mocsy A, Petreczky P *Phys. Rev. Lett.* **99** 211602 (2007)
- Adare A et al. (PHENIX Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **98** 232301 (2007)
- Chatrchyan S et al. (CMS Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **109** 222301 (2012)
- Ollitrault J Y *Phys. Rev. D* **46** 229 (1992)

55. Wang X N *Phys. Rev. C* **63** 054902 (2001)
56. Gyulassy M et al. *Phys. Lett. B* **526** 301 (2002)
57. Gyulassy M, Vitev I, Wang X N *Phys. Rev. Lett.* **86** 2537 (2001)
58. Ali A, Kramer G *Eur. Phys. J. H* **36** 245 (2011)
59. Brodsky S J, de Téramond G, Karliner M *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **62** 1 (2012)
60. Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 1218 (1972); Gribov V N, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** 675 (1972)
61. Докшицер Ю Л *ЖЭТФ* **73** 1216 (1977); Dokshitzer Yu L *Sov. Phys. JETP* **46** 641 (1977)
62. Altarelli G, Parisi G *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977)
63. Muller B, Schafer A *Int. J. Mod. Phys. E* **20** 2235 (2011)
64. Bjorken J D *Phys. Rev. D* **27** 140 (1983)
65. Aamodt K et al. (ALICE Collab.) *Phys. Lett. B* **696** 328 (2011)
66. Hanbury Brown R, Twiss R *Nature* **178** 1046 (1956)
67. Lisa M A et al. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **55** 357 (2005)
68. Petráň M, Rafelski J *Phys. Rev. C* **88** 021901(R) (2013); arXiv:1303.0913
69. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Lett. B* **710** 363 (2012)
70. Beane B B et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 052303 (2003)
71. Wong C Y *Phys. Rev. C* **78** 054902 (2008)
72. Steinberg P *Nucl. Phys. A* **752** 423 (2005)
73. Wong C Y *EPJ Web Conf.* **7** 01006 (2010)
74. Abbas E et al. (ALICE Collab.) *Phys. Lett. B* **726** 610 (2013); arXiv:1304.0347
75. Chatrchyan S et al. (CMS Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **109** 152303 (2012)
76. Бельский С 3, Ландау Л Д *УФН* **56** 309 (1955)
77. Халатников И М *ЖЭТФ* **27** 529 (1954)
78. Розенталь И Л *ЖЭТФ* **31** 278 (1956); Rozental' I L *Sov. Phys. JETP* **4** 217 (1957)
79. Милехин Г А *ЖЭТФ* **35** 978 (1958); Milekhin G A *Sov. Phys. JETP* **8** 682 (1959)
80. Liao J, Koch V *Phys. Rev. C* **80** 034904 (2009)
81. Teaney D, Lauret J, Shuryak E V *Phys. Rev. Lett.* **86** 4783 (2001)
82. Huovinen P et al. *Phys. Lett. B* **503** 58 (2001)
83. Kolb P F et al. *Nucl. Phys. A* **696** 97 (2001)
84. Hirano T, Tsuda K *Phys. Rev. C* **66** 054905 (2002)
85. Kolb P F, Heinz U W, in *Quark Gluon Plasma* (Eds R C Hwa, X-N Wang) (Singapore: World Scientific Publ., 2004) p. 634
86. Teaney D A, arXiv:0905.2433
87. Janik R A, Peschanski R B *Phys. Rev. D* **73** 045013 (2006)
88. Gubser S S *Phys. Rev. D* **82** 085027 (2010)
89. Gubser S S, Yarom A *Nucl. Phys. B* **846** 469 (2011)
90. Staig P, Shuryak E *Phys. Rev. C* **84** 034908 (2011)
91. Staig P, Shuryak E *Phys. Rev. C* **84** (2011) 044912
92. Gubser S S *Phys. Rev. C* **87** 014909 (2013)
93. DeWolfe O et al., arXiv:1304.7794
94. Lappi T, McLerran L *Nucl. Phys. A* **772** 200 (2006)
95. Eckart C *Phys. Rev.* **58** 919 (1940)
96. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
97. Israel W *Ann. Physics* **100** 310 (1976)
98. Stewart J *Proc. R. Soc. Lond. A* **357** 59 (1977)
99. Israel W, Stewart J M *Ann. Physics* **118** 341 (1979)
100. Liu I-Sh, Müller I, Ruggeri T *Ann. Physics* **169** 191 (1986)
101. Baier R et al. *JHEP* (04)100 (2008)
102. Bhattacharyya S et al. *JHEP* (02) 045 (2008)
103. Hubeny V E, Minwalla S, Rangamani M, arXiv:1107.5780
104. Hiscock W A, Lindblom L *Ann. Physics* **151** 466 (1983)
105. Pu S, Koide T, Rischke D H *Phys. Rev. D* **81** 114039 (2010)
106. Gale C, Jeon S, Schenke B *Int. J. Mod. Phys. A* **28** 1340011 (2013)
107. Betz B, Henkel D, Rischke D H J. *Phys. G Nucl. Part. Phys.* **36** 064029 (2009)
108. Muronga A *Phys. Rev. Lett.* **88** 062302 (2002); *Phys. Rev. Lett.* **89** 159901 (2002), Erratum
109. Denicol G S et al. *Eur. Phys. J. A* **48** 170 (2012); arXiv:1206.1554
110. Florschinger S, Wiedemann U A *JHEP* (11) 100 (2011)
111. Romatschke P *Eur. Phys. J. C* **52** 203 (2007)
112. Romatschke P, Romatschke U *Phys. Rev. Lett.* **99** 172301 (2007)
113. Luzum M, Romatschke P *Phys. Rev. C* **78** 034915 (2008); *Phys. Rev. C* **79** 039903 (2009), Erratum
114. Heinz U W, Song H, Chaudhuri A K *Phys. Rev. C* **73** 034904 (2006)
115. Song H, Heinz U W *Phys. Lett. B* **658** 279 (2008)
116. Song H, Heinz U W *Phys. Rev. C* **78** 024902 (2008)
117. Grmela M, Ottinger H C *Phys. Rev. E* **56** 6620 (1997)
118. Dusling K, Teaney D *Phys. Rev. C* **77** 034905 (2008)
119. Schenke B, Jeon S, Gale C *Phys. Rev. Lett.* **106** 042301 (2011)
120. Schenke B, Jeon S, Gale C *Phys. Lett. B* **702** 59 (2011)
121. Bozek P *Phys. Rev. C* **85** 034901 (2012)
122. Denicol G S et al. *Phys. Rev. C* **80** 064901 (2009)
123. Monnai A, Hirano T *Phys. Rev. C* **80** 054906 (2009)
124. Song H, Heinz U *Phys. Rev. C* **81** 024905 (2010)
125. Paech K, Pratt S *Phys. Rev. C* **74** 014901 (2006)
126. Kharzeev D, Tuchin K *JHEP* (09) 093 (2008)
127. Meyer H B *Nucl. Phys. A* **830** 641c (2009)
128. Buchel A *Phys. Lett. B* **681** 200 (2009)
129. El A, Xu Z, Greiner C *Phys. Rev. C* **81** 041901 (2010)
130. Heinz U W, Snellings R *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63** 123 (2013); arXiv:1301.2826
131. Martinez M, Strickland M *Nucl. Phys. A* **848** 183 (2010)
132. Martinez M, Strickland M *Nucl. Phys. A* **856** 68 (2011)
133. Florkowski W, Ryblewski R *Phys. Rev. C* **83** 034907 (2011)
134. Ryblewski R, Florkowski W *Eur. Phys. J. C* **71** 1761 (2011)
135. Peschanski R, Saridakis E N *Nucl. Phys. A* **849** 147 (2011)
136. Martinez M, Ryblewski R, Strickland M *Phys. Rev. C* **85** 064913 (2012)
137. Ollitrault J Y *Eur. J. Phys.* **29** 275 (2008)
138. Miller M L et al. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** 205 (2007)
139. Teaney D A, arXiv:0905.2433
140. Hirano T, van der Kolk N, Bilandzic A *Lecture Notes Phys.* **785** 139 (2010)
141. Luzum M, Ollitrault J-Y *Nucl. Phys. A* **904-905** 377 (2013); arXiv:1210.6010
142. Peschanski R, Saridakis E N *Phys. Rev. C* **80** 024907 (2009)
143. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Y *Phys. Lett. A* **331** 12 (2004)
144. Kovtun P, Son D T, Starinets A O *Phys. Rev. Lett.* **94** 111601 (2005)
145. Heller M P, Janik R A, Peschanski R *Acta Phys. Polon. B* **39** 3183 (2008)
146. Berges J et al. *Phys. Rev. D* **89** 074011 (2014); arXiv:1303.5650
147. Nakamura A, Sakai S *Phys. Rev. Lett.* **94** 072305 (2005)
148. Meyer H B *Phys. Rev. D* **76** 101701 (2007)
149. Alver B et al. (PHOBOS Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **98** 242302 (2007)
150. Alver B H et al. *Phys. Rev. C* **82** 034913 (2010)
151. Alver B, Roland G *Phys. Rev. C* **81** 054905 (2010)
152. Schenke B, Jeon S, Gale C *Phys. Rev. Lett.* **106** 042301 (2011)
153. Qiu Z, Heinz U W *Phys. Rev. C* **84** 024911 (2011)
154. Gale C et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 012302 (2013)
155. Iancu E, Venugopalan R, in *Quark Gluon Plasma* (Eds R C Hwa, X-N Wang) (Singapore: World Scientific Publ., 2004) p. 249
156. Gelis F *Nucl. Phys. A* **854** 10 (2011)
157. Schenke B, Tribedy P, Venugopalan R *Phys. Rev. Lett.* **108** 252301 (2012)
158. Schenke B, Tribedy P, Venugopalan R *Phys. Rev. C* **86** 034908 (2012)
159. Cleymans J *Pramana* **60** 787 (2003)
160. Steinberg P *Acta Phys. Hung. A* **24** 51 (2005)
161. Steinberg P *PoS CPOD 2006* 036 (2006)
162. Allton C R et al. *Phys. Rev. D* **71** 054508 (2005)
163. Huovinen P, Petreczky P, Schmidt C *Central Eur. J. Phys.* **10** 1385 (2012)
164. Miao C, Schmidt C (RBC-Bielefeld Collab.) *PoS LATTICE2008* **172** (2008)
165. Cheng M et al. *Phys. Rev. D* **79** 074505 (2009)
166. Borsanyi S et al. *JHEP* (11) 077 (2010); arXiv:1007.2580
167. Policastro G, Son D T, Starinets A O *Phys. Rev. Lett.* **87** 081601 (2001)
168. Policastro G, Son D T, Starinets A O *JHEP* (09) 043 (2002)
169. Kovtun P, Son D T, Starinets A O *JHEP* (10) 064 (2003)
170. Heller M P, Janik R A *Phys. Rev. D* **76** 025027 (2007)
171. Buchel A *Phys. Rev. D* **85** 066004 (2012)
172. Кельдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964); Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1018 (1965)
173. Czajka A, Mrowczynski S *Phys. Rev. D* **86** 025017 (2012)
174. Aref'eva I Ya, Volovich I V *Phys. Lett. B* **433** 49 (1998)
175. de Haro S, Solodukhin S N, Skenderis K *Commun. Math. Phys.* **217** 595 (2001)
176. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1981); Vladimirov V S *Equations of Mathematical Physics* (New York: M. Dekker, 1971)
177. Гельфанд И М, Шилев Г Е *Обобщенные функции и действия над ними* (М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958)
178. Fronsdaal C *Phys. Rev. D* **20** 848 (1979)
179. Васильев М А *УФН* **173** 226 (2003); Vasil'ev M A *Phys. Usp.* **46** 218 (2003)
180. Васильев М А *УФН* **181** 665 (2011); Vasiliev M A *Phys. Usp.* **54** 641 (2011)
181. Fradkin E S, Vasiliev M A *Nucl. Phys. B* **291** 141 (1987)
182. Metsaev R R *Phys. Rev. D* **78** 106010 (2008)
183. Metsaev R R *Phys. Rev. D* **85** 126011 (2012)
184. Son D T, Starinets A O *JHEP* (09) 042 (2002)
185. Herzog G P, Son D T *JHEP* (03) 046 (2003)
186. Balasubramanian V, Ross S F *Phys. Rev. D* **61** 044007 (2000)
187. Hawking S W, Page D N *Commun. Math. Phys.* **87** 577 (1983)
188. Gubser S S, Klebanov I R, Peet A W *Phys. Rev. D* **54** 3915 (1996)
189. Fefferman C, Graham C R, in *Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui, Lyon, 25 - 29, 1984 Astérisque* (Paris: Société Mathématique de France, 1985) p. 95
190. Kovchegov Y V *Rep. Prog. Phys.* **75** 124301 (2012)

191. Bernamonti A, Peschanski R *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **216** 94 (2011)
192. Herzog C P et al. *JHEP* (07) 013 (2006)
193. Gubser S S *Phys. Rev. D* **74** 126005 (2006)
194. Janik R A, Peschanski R B *Phys. Rev. D* **74** 046007 (2006)
195. Chamblin A et al. *Phys. Rev. D* **60** 064018 (1999)
196. Mateos D et al. *JHEP* (11) 085 (2007)
197. Erdmenger J et al. *JHEP* (01) 055 (2009)
198. Kobayashi S et al. *JHEP* (02) 016 (2007)
199. Gursoy U, Kiritsis E *JHEP* (02) 032 (2008)
200. Gursoy U, Kiritsis E, Nitti F *JHEP* (02) 019 (2008)
201. Gursoy U et al. *Nucl. Phys. B* **820** 148 (2009)
202. Gursoy U et al. *JHEP* (12) 056 (2009)
203. Shirkov D V *Phys. Part. Nucl. Lett.* **7** 379 (2010)
204. Christodoulou D, Klainerman S *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1993)
205. Friedrich H *Commun. Math. Phys.* **107** 587 (1986)
206. Bizon P, Rostworowski A *Phys. Rev. Lett.* **107** 031102 (2011)
207. Jalmuzna J, Rostworowski A, Bizon P *Phys. Rev. D* **84** 085021 (2011)
208. Dias O J C, Horowitz G T, Santos J E *Class. Quantum Grav.* **29** 194002 (2012)
209. Garfinkle D, Pando Zayas L A *Phys. Rev. D* **84** 066006 (2011)
210. Garfinkle D et al. *JHEP* (02) 119 (2012)
211. Chandrasekhar S, Detweiler S L *Proc. R. Soc. Lond. A* **344** 441 (1975)
212. Horowitz G T, Hubeny V E *Phys. Rev. D* **62** 024027 (2000)
213. Starinets A O *Phys. Rev. D* **66** 124013 (2002)
214. Kovtun P K, Starinets A O *Phys. Rev. D* **72** 086009 (2005)
215. Friess J J et al. *JHEP* (04) 080 (2007)
216. Iqbal N, Liu H *Phys. Rev. D* **79** 025023 (2009)
217. Hubeny V E, Rangamani M *Adv. High Energy Phys.* **2010** 297916 (2010)
218. Hawking S W, Ellis G R E *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973)
219. Wald R M *General Relativity* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1984)
220. Penrose R, unpublished (1974)
221. Gubser S A, Pufu S S, Yarom A *Phys. Rev. D* **78** 066014 (2008)
222. Gubser S S, Pufu S S, Yarom A *JHEP* (11) 050 (2009)
223. Grumiller D, Romatschke R *JHEP* (08) 027 (2008)
224. Alvarez-Gaume L et al. *JHEP* (02) 009 (2009)
225. Albacete J L, Kovchegov Y V, Taliotis A *JHEP* (07) 100 (2008)
226. Lin S, Shuryak E *Phys. Rev. D* **79** 124015 (2009)
227. Lin S, Shuryak E *Phys. Rev. D* **83** 045025 (2011)
228. Albacete J L, Kovchegov Y V, Taliotis A *JHEP* (05) 060 (2009)
229. Arefeva I Ya, Bagrov A A, Guseva E A *JHEP* (12) 009 (2009)
230. Arefeva I Ya, Bagrov A A, Joukovskaya L V *JHEP* (03) 002 (2010)
231. Kovchegov Y V, Lin S *JHEP* (03) 057 (2010)
232. Kiritsis E, Taliotis A *JHEP* (04) 065 (2012)
233. Chesler P M, Yaffe L G *Phys. Rev. Lett.* **106** 021601 (2011)
234. Arefeva I Ya, Bagrov A A, Pozdeeva E O *JHEP* (05) 117 (2012)
235. Taliotis A *JHEP* (05) 034 (2013)
236. Danielsson D H, Keski-Vakkuri E, Kruczenski M *Nucl. Phys. B* **563** 279 (1999)
237. Hubeny V E, Rangamani M, Takayanagi T *JHEP* (07) 062 (2007)
238. Balasubramanian V et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 191601 (2011)
239. Balasubramanian V et al. *Phys. Rev. D* **84** 026010 (2011)
240. Abajo-Arrestia J, Aparicio J, Lopez E *JHEP* (11) 149 (2010)
241. Callan R, He J-Y, Headrick M *JHEP* (06) 081 (2012)
242. Galante D, Schvellinger M *JHEP* (07) 096 (2012)
243. Saceres E, Kundu A *JHEP* (09) 055 (2012)
244. Арефьева И Я, Волович И В *ТМФ* **174** 216 (2013); Arefeva I Ya, Volovich I V *Theor. Math. Phys.* **174** 186 (2013); arXiv: 1211.6041
245. Taylor M, arXiv:0812.0530
246. Tarrío J, Vandoren S *JHEP* (09) 017 (2011)
247. Keranen V, Keski-Vakkuri E, Thorlacius L *Phys. Rev. D* **85** 026005 (2012)
248. Keranen V, Thorlacius L *Class. Quantum Grav.* **29** 194009 (2012)
249. Arefeva I, Bagrov A, Koshelev A S *JHEP* (07) 170 (2013); arXiv:1305.3267
250. Chesler P M, Yaffe L G *Phys. Rev. Lett.* **102** 211601 (2009)
251. Bhattacharyya S, Minwalla S *JHEP* (09) 034 (2009)
252. Arsiwalla X et al. *JHEP* (01) 144 (2011)
253. Das S R, Nishioka T, Takayanagi T *JHEP* (07) 071 (2010)
254. Hashimoto L, Iizuka N, Oka T *Phys. Rev. D* **84** 066005 (2011)
255. Волович И В, Загребнов В А, Фролов В П *ТМФ* **29** 191 (1976); Volovich I V, Zagrebnoy V A, Frolov V P *Theor. Math. Phys.* **29** 1012 (1976)
256. Hotta M, Tanaka M *Class. Quantum Grav.* **10** 307 (1993)
257. Sftetsos K *Nucl. Phys. B* **436** 721 (1995)
258. Horowitz G T, Itzhaki N *JHEP* (02) 010 (1999)
259. Emparan R *Phys. Rev. D* **64** 024025 (2001)
260. Podolsky J, Griffiths J B *Class. Quantum Grav.* **15** 453 (1998)
261. Kang K, Nastase H *Phys. Rev. D* **72** 106003 (2005)
262. Arefeva I Ya *Phys. Part. Nuclei* **41** 835 (2010)
263. Arefeva I Ya *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 1243010 (2012)
264. Heller M P, Janik R A, Witaszczyk P *Phys. Rev. Lett.* **108** 201602 (2012)
265. Eardley D M, Giddings S B *Phys. Rev. D* **66** 044011 (2002)
266. Bantilan H, Pretorius F, Gubser S S *Phys. Rev. D* **85** 084038 (2012)
267. Klein K, Nystrand J *Phys. Rev. C* **60** 014903 (1999)
268. Adams J et al. (STAR Collab.) *Phys. Rev. C* **70** 031902 (2004)
269. Ochs S, Heinz U W *Phys. Rev. C* **54** 3199 (1996)
270. Gursoy U et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 181601 (2008)
271. Gouteraux B, Kiritsis E *JHEP* (12) 036 (2011); arXiv:1107.2116
272. Арефьева И Я, Поздеева Е О, Поздеева Т О *ТМФ* **176** 35 (2013); Arefeva I Ya, Pozdeeva E O, Pozdeeva T O *Theor. Math. Phys.* **176** 861 (2013)
273. Casalderrey-Solana J et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 181601 (2013); arXiv:1305.4919
274. Loganayagam R *JHEP* (05) 087 (2008)
275. Haack M, Yarom A *JHEP* (10) 063 (2008)
276. Bhattacharyya S et al. *JHEP* (12) 116 (2008)
277. Heller M P, Janik R, Witaszczyk P *Phys. Rev. D* **85** 126002 (2012)
278. Horowitz G T, Hubeny V E *Phys. Rev. D* **62** 024027 (2000)
279. Janik R, Peschanski R *Phys. Rev. D* **74** 046007 (2006)
280. Janik R *Phys. Rev. Lett.* **98** 022302 (2007)
281. Booth I, Heller M P, Spalinski M *Phys. Rev. D* **80** 126013 (2009)
282. Lublinsky M, Shuryak E *Phys. Rev. C* **76** 021901 (2007)
283. Heller M P et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 041601 (2009)
284. Kinoshita S et al. *Prog. Theor. Phys.* **121** 121 (2009)
285. Heller M P, Janik R A, Witaszczyk P *Phys. Rev. Lett.* **110** 211602 (2013); arXiv:1302.0697
286. Липатов Л Н *ЖЭТФ* **72** 411 (1977); Lipatov L N *Sov. Phys. JETP* **45** 216 (1977)
287. Lublinsky M, Shuryak E *Phys. Rev. D* **80** 065026 (2009)
288. Arnowitt R L, Deser S, Misner C W *Gen. Relat. Grav.* **40** 1997 (2008)
289. Chesler P M, Yaffe L G *Phys. Rev. D* **82** 026006 (2010)
290. Beuf G et al. *JHEP* (10) 043 (2009)
291. Kovchegov Y V, Taliotis A, *Phys. Rev. C* **76** 014905 (2007)
292. Lin S, Shuryak E *Phys. Rev. D* **77** 085013 (2008)
293. Lin S, Shuryak E *Phys. Rev. D* **77** 085014 (2008)
294. Bhattacharyya S et al. *JHEP* (06) 055 (2008)
295. Figueras P et al. *JHEP* (04) 137 (2009)
296. Heller M P et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 191601 (2012)
297. Heller M P et al. *JHEP* (09) 026 (2013); arXiv:1304.5172
298. van der Schee W *Phys. Rev. D* **87** 061901(R) (2013); arXiv:1211.2218
299. Chatrchyan S et al. (CMS Collab.) *Phys. Lett. B* **718** 795 (2013)
300. Abelev B et al. (ALICE Collab.) *Phys. Lett. B* **719** 29 (2013)
301. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **110** 182302 (2013); arXiv:1212.5198
302. Adare A et al. (PHENIX Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **111** 212301 (2013); arXiv:1303.1794

Holographic approach to quark–gluon plasma in heavy ion collisions

I.Ya. Arefeva. V.A. Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina 8, 119991 Moscow, Russian Federation. E-mail: arefeva@mi.ras.ru

We review recent applications of dual holographic approach to the quark–gluon plasma observed in high energy collisions of relativistic heavy ions. Holography and AdS/CFT duality provide a means to study the properties of strong coupling quantum field theories using higher-dimensional gravity theories. The appearance of quark–gluon plasma in a heavy ion collision can in dual terms be described as the formation of a black hole. To illustrate the major achievements of holographic theory we discuss the calculation of the following quantities: the shear viscosity and other transport coefficients (all calculated by second order hydrodynamic models), the energy dependence of multiplicities, and the anisotropic thermalization and isotropization times. We also compare theoretical predictions with experimental data, including the recent LHC results.

PACS numbers: 04.50.Gh, 11.25.Tq, 12.38.Mh, **24.85.+p**

Bibliography — 302 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (6) 569–598 (2014)

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201406a.0569

Received 26 May 2013, revised 5 July 2013

Physica – Uspekhi **57** (6) (2014)