

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Подсеточное моделирование для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы

А.А. Чернышов, К.В. Карельский, А.С. Петросян

Представлен обзор современного состояния исследований сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы методами вычислительной физики. В отличие от турбулентности нейтральной несжимаемой жидкости, в этом случае присутствуют магнитное поле и сжимаемость, что существенно усложняет изучение свойств турбулентности космической плазмы методами прямого численного моделирования. Обсуждается метод крупных вихрей, разработанный в качестве альтернативы прямому моделированию. Метод основан на фильтрации исходных уравнений магнитной гидродинамики и подсеточном моделировании универсальной мелкомасштабной турбулентности. Подробно анализируется как сам метод, так и различные подсеточные модели для сжимаемых магнитогидродинамических турбулентных течений в политропной и теплопроводящей плазме. Обсуждается применение подсеточного моделирования для исследования турбулентности локальной межзвёздной среды и масштабно-инвариантных спектров в магнитогидродинамической турбулентности.

PACS numbers: 47.27.E-, 47.27.ep, 47.27.Gs, 52.35.Ra, 52.65.Kj

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201405a.0457

Содержание

1. Введение (457).
2. Метод крупных вихрей для магнитогидродинамических течений плазмы (460).
 - 2.1. Уравнения магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы.
 - 2.2. Процедура фильтрации уравнений магнитной гидродинамики в методе крупных вихрей.
 - 2.3. Отфильтрованные уравнения магнитной гидродинамики политропной плазмы.
 - 2.4. Отфильтрованные уравнения магнитной гидродинамики теплопроводящей плазмы.
3. Подсеточное моделирование мелкомасштабной турбулентности (465).
 - 3.1. Модель Смагоринского для сжимаемой МГД-турбулентности.
 - 3.2. Модель Колмогорова для сжимаемой МГД-турбулентности.
 - 3.3. Модель, основанная на перекрёстной спи-

ральности. 3.4. Модель подобия масштабов для сжимаемой МГД-турбулентности. 3.5. Смешанная модель для сжимаемой МГД-турбулентности. 3.6. Динамическая процедура определения констант. 3.7. Параметризации подсеточных слагаемых для теплопроводящей плазмы. 3.8. Результаты численного моделирования для политропной плазмы. 3.9. Результаты численного моделирования для теплопроводящей плазмы.

4. Исследование свойств турбулентности локальной межзвёздной среды методом подсеточного моделирования (476).
 - 4.1. Анализ результатов моделирования и теоретическая интерпретация.
5. Масштабно-инвариантные спектры МГД-турбулентности (481).
 - 5.1. Основы теории масштабно-инвариантной МГД-турбулентности и методов её моделирования.
 - 5.2. Линейное представление вынуждающей силы в сжимаемой МГД-турбулентности в физическом пространстве.
 - 5.3. Метод крупных вихрей для сжимаемой МГД-турбулентности при наличии внешней силы.
 - 5.4. Анализ результатов численного моделирования.
6. Заключение (489).

Список литературы (490).

А.А. Чернышов, К.В. Карельский.

Институт космических исследований РАН,
Профсоюзная ул. 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-54-78
E-mail: achernyshov@iki.rssi.ru, kkarelsk@iki.rssi.ru

А.С. Петросян. Институт космических исследований РАН,
Профсоюзная ул. 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация
E-mail: apetrosoy@iki.rssi.ru

Статья поступила 28 марта 2013 г.,
после доработки 13 сентября 2013 г.

1. Введение

Сжимаемая магнитогидродинамическая (МГД) турбулентность является широко распространённым состоянием космической плазмы во многих астрофизических, гелиофизических и геофизических процессах. Например, в аккреционных дисках МГД-турбулентность вызвана магнито-ротационной неустойчивостью [1–3]. Формирование звёздных облаков вследствие эффектов магнитного поля и гравитации происходит в турбулентных

условиях [4–6]. Динамика межзвёздной и межпланетной среды также имеет турбулентный характер [7–9]. Большинство турбулентных явлений в физике Солнца описываются в рамках уравнений магнитной гидродинамики: солнечный ветер, расширение солнечной короны, конвективная зона, фотосфера, солнечный тахоклин [10–14]. Явления турбулентности наблюдаются в околоземном пространстве как в солнечном ветре, так и в различных областях магнитосферы Земли, в частности, в области геомагнитного хвоста наблюдаемые спутниками свойства космической плазмы адекватно можно объяснить только в рамках теории и моделей турбулентности [15–19]. Магнитогидродинамическая турбулентность является важным процессом при возникновении динамо-процессов и генерации магнитного поля в космических условиях [20–24]. Турбулентные течения в магнитном поле также широко распространены и в прикладных областях. Среди инженерных применений можно указать возможность управления пограничным слоем и снижение сопротивления потоку [25, 26], магнитогидродинамические течения в каналах [27] при процессах отливки стали и в трубах для охлаждения термоядерных реакторов [28].

Возникновение турбулентности связано с неустойчивостью исходного состояния космической плазмы. Вследствие неустойчивости амплитуда колебаний в электропроводящей плазме возрастает до нелинейного уровня, при котором становятся существенными сложные процессы взаимодействия и взаимной трансформации колебаний. При больших скоростях потока, т.е. при больших числах Рейнольдса Re (Re характеризует отношение сил инерции к вязким силам), течение становится неустойчивым и разбивается на крупномасштабные вихри. Нелинейное взаимодействие между вихрями приводит к непрерывному их дроблению, происходящему вплоть до малых масштабов, для которых существенно затухание, обусловленное молекулярной вязкостью. Дробление масштабов вихрей соответствует переносу энергии турбулентных движений из длинноволновой области спектра в коротковолновую. В результате в потоке появляются беспорядочные вихри разных размеров и скорость потока в каждой точке меняется случайным образом. Важнейшей особенностью турбулентности в космических условиях является наличие в ней случайных магнитных полей наряду со случайными значениями скорости. Для таких течений существенную роль играют эффекты нелинейности, вязкости, диффузии, анизотропии, сжимаемости. Турбулентность является трёхмерной, поэтому численное моделирование сжимаемой МГД-турбулентности является важным инструментом для исследования заряженной жидкости в таких МГД-течениях. К тому же плазма в космических условиях, как правило, недоступна для непосредственного экспериментального изучения.

Развитие эффективных численных методов и современных компьютерных систем, позволяющих выполнить МГД-моделирование сжимаемых турбулентных течений с реалистичными числами подобия, является важной задачей вычислительной физики. Эти вычисления чрезвычайно важны для понимания сложной физики, особенно когда объект исследования находится вне зоны непосредственного прямого эксперимента. Отметим, что задачи магнитной гидродинамики отличаются от задач гидродинамики нейтральной жидкости. МГД-уравнения

содержат два поля, которые вносят гораздо больше степеней свободы в динамику системы, например, присутствуют как прямые, так и обратные спектральные каскады [29]. Также существуют процессы самоорганизации в МГД-турбулентности, которые не имеют аналогов в обычной гидродинамике, а именно, сохранение перекрёстной спиральности [30], что приводит к состоянию с высокой корреляцией магнитного поля и скорости течения, в то время как сохранение магнитной спиральности может привести к образованию бессильных магнитных конфигураций [31].

Наиболее подробную информацию о турбулентном течении жидкости можно получить с помощью прямого численного моделирования [32], которое будем называть DNS (Direct Numerical Simulation) и которое заключается в численном решении полной нестационарной системы магнитогидродинамических уравнений. При таком подходе разрешаются все масштабы движения заряженной жидкости. Метод DNS не требует специальных замыканий для уравнений магнитной гидродинамики. Прямой численный расчёт МГД-турбулентности сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с большими гидродинамическими и магнитными числами Рейнольдса, которые характерны для исследуемых процессов. В этом случае число степеней свободы турбулентного движения велико и, следовательно, минимальное количество узлов на численной сетке должно быть настолько большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса.

Альтернативой прямому численному моделированию является статистический подход для исследования турбулентных течений [33], который заключается в усреднении уравнений движения — RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes). В методе RANS все параметры движения разлагаются на среднюю и турбулентную составляющие. В уравнениях появляются рейнольдсовские напряжения, которые необходимо замкнуть. Таким образом, вся турбулентность моделируется (например, модель $k-\varepsilon$ [34]), а не рассчитывается, как в методе DNS. Метод RANS обычно используется для теоретических исследований средних течений [35]. Этот подход не содержит информации о динамике турбулентности.

Метод крупных вихрей (далее LES — Large Eddy Simulation) — это метод, описывающий приближённую динамику турбулентности, в котором крупномасштабная часть турбулентного потока рассчитывается непосредственно, а мелкомасштабная — моделируется, т.е. LES является промежуточным подходом к изучению турбулентности между DNS и RANS. Это иллюстрируется на рис. 1, который показывает различия между тремя вычислительными методами, применяемыми для исследования турбулентности.

В методе LES используется операция фильтрации для разложения характеристик турбулентного движения на крупномасштабную и мелкомасштабную части, что связано с изотропностью, однородностью и универсальностью мелких масштабов турбулентного движения. Мелкомасштабное движение исключается из исходной системы уравнений движения с помощью процедуры фильтрации и дальше их влияние на движение моделируется с использованием подсеточных моделей SGS

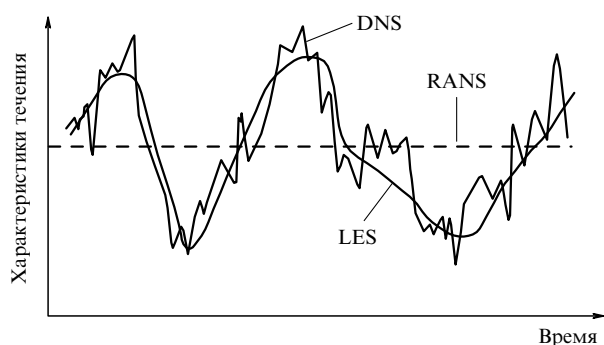


Рис. 1. Сравнение численных методов DNS, RANS и LES.

(subgrid scale, или другое название — SFS, subfilter scale), выраженных через отфильтрованные параметры турбулентных течений. Крупномасштабное турбулентное течение рассчитывается из решения отфильтрованных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. LES является методом для моделирования течений с большими числами Рейнольдса, так как в методе крупных вихрей предполагается, что энергия переносится от больших масштабов к малым только внутри инерционного интервала. Поэтому число степеней свободы в LES будет меньше, чем в методе DNS, следовательно, LES требует значительно меньших вычислительных ресурсов по сравнению с DNS.

Изначально метод крупных вихрей развивался для моделирования гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости [36–41] при изучении задач метеорологии и океанологии. Большая часть работ была выполнена для несжимаемых течений. Использование метода LES в случае сжимаемых сред встречается значительно реже вследствие увеличения сложности задачи из-за необходимости решения уравнения энергии. В отфильтрованном уравнении энергии появляются сразу несколько дополнительных подсеточных слагаемых, которые необходимо параметризовать. Впервые LES разработан и использовался в случае сжимаемой нейтральной жидкости в работе [42]. При первых применениях метода LES к сжимаемым течениям рассматривались транспортные уравнения для внутренней энергии на единицу массы [43, 44], давления [45] или удельной энтальпии [42, 46]. В работах [47, 48] предложено использовать уравнение полной энергии для замыкания системы гидродинамических уравнений нейтральной сжимаемой жидкости, при этом некоторые подсеточные слагаемые имели точно такой же вид, как и в уравнении внутренней энергии или в уравнении энтальпии. Подробная информация о различных подсеточных моделях метода крупных вихрей для случая сжимаемой жидкости содержится в работе [49]. В статье [49] авторы рассматривают и тестируют параметризацию для различных видов уравнений энергии: внутренней энергии, энтальпии и полной энергии.

Для случаев течений электропроводящей плазмы метод LES применялся и исследовался крайне мало. Все предыдущие работы в этом направлении ограничивались в основном рассмотрением в приближении несжимаемой жидкости и для решения инженерных задач. В работах [50–55] с помощью LES изучалась несжимаемая МГД-турбулентность, в статье [56] рассматривалось влияние магнитного поля в методе LES на течение несжимаемой

проводящей жидкости при низких значениях магнитного числа Рейнольдса без использования уравнения для магнитной индукции. Во всех упомянутых выше работах система уравнений в случае несжимаемой МГД-турбулентности рассматривалась без использования уравнения энергии.

Существенный прогресс в исследовании трёхмерных сжимаемых магнитогидродинамических течений достигнут в работах [57–68]. Для замыкания системы уравнений магнитной гидродинамики либо предполагалась политропность (или адиабатичность) процесса, либо давление рассматривалось лишь как пассивная величина, которая обеспечивала несжимаемость МГД-турбулентности [57, 59–61, 63–68]. Однако многие течения плазмы не могут быть описаны в рамках несжимаемой среды или уравнениями для сжимаемой среды в приближении политропности, и необходимо рассматривать теплопроводящую жидкость с использованием уравнения энергии. Применение LES для сжимаемой теплопроводящей МГД-жидкости значительно усложняется из-за того, что нужно решать уравнение энергии, в котором появляются дополнительные слагаемые из-за наличия магнитного поля. К тому же после фильтрации появляются добавочные принципиально новые подсеточные члены, требующие разработки новой теории для их параметризации [58, 59, 62, 65]. Основным методом исследования применимости различных подсеточных моделей является сравнение результатов моделирования методом крупных вихрей и результатов прямого численного моделирования. Как правило, сравнение результатов моделирования выполняется для умеренных величин параметров подобия, для которых прямое численное моделирование всё ещё доступно, при этом считается, что разработанные параметризации подсеточных слагаемых правильно воспроизводят турбулентное течение и для больших чисел подобия.

Полные нелинейные трёхмерные уравнения магнитной гидродинамики, включающие диссипативные, тепловые, диффузионные и сжимаемые эффекты, столь сложны, что поддаются лишь приближённому численному решению. Однако из-за того, что для космических магнитогидродинамических течений характерны большие числа Рейнольдса и числа Маха отличны от нуля, исследование сжимаемой МГД-турбулентности ограничено вычислительными ресурсами и встречается намного реже, чем для несжимаемых сред. Поэтому в таком случае пользуются упрощёнными моделями, пренебрегая некоторыми эффектами. Например, при моделировании идеальных МГД-течений пренебрегают диссипацией и теплопроводностью и считают, что проводимость плазмы бесконечна [69]. В этом случае система МГД-уравнений становится гиперболической, а не параболической, как для диссипативной системы уравнений, что упрощает численные решения, поскольку можно использовать хорошо развитые явные схемы различного порядка точности (в результате решение трёхмерной задачи сводится к решению серии одномерных задач, численные потоки в каждом пространственном направлении вычисляются на основе соответствующей одномерной задачи Римана о распаде произвольного разрыва [70]).

Существуют несколько работ, где используются TVD-схемы (Total Variation Diminishing), ENO/WENO-схемы (Essentially non-oscillatory, Weighted ENO), схемы

на основе принципа минимального значения производной и т.д. для решения уравнений вязкого сжимаемого газа в МГД-случае [71] путём добавления численных вязких потоков к соответствующим невязким потокам. Однако это часто нарушает монотонность разностной схемы и может привести к некорректным результатам, обычно подобного рода реконструкции применяются для невязкой жидкости. Такие методы при использовании сеток тоже могут рассматриваться как метод крупных вихрей с неявной фильтрацией и со схемной вязкостью, которая может играть роль "подсеточного замыкания". Иногда применяют квазиупругое приближение (anelastic approximation) [72–74] для магнитогиродинамического моделирования, когда предполагается, что звуковые моды отсутствуют или стационарны, однако такого рода приближение используется в основном только при моделировании конвективных зон Солнца и звёзд. Часто межзвёздную и межпланетную среду, а также солнечный и звёздный ветер рассматривают, предполагая политропное (или адиабатическое) соотношение между плотностью и давлением для замыкания системы уравнений, в этом случае соображения о температуре процесса не являются основными и система уравнений для сжимаемой МГД-турбулентности решается без уравнения энергии [9, 75–79]. Ещё одним упрощением является рассмотрение сжимаемой двумерной МГД-турбулентности [80–83], причём в работах [80, 81] в качестве начальных условий для скорости и магнитного поля использовалось детерминированное, случайное распределение (так называемый вихрь Орсзага – Танга [84, 85]), однако случайное распределение начальных значений скорости и магнитного поля является более подходящим условием для космических применений в МГД-моделировании. Подробно влияние магнитного числа Рейнольдса на двумерное магнитогиродинамическое течение при различных начальных условиях описывается в работе [83]. Двумерная МГД-турбулентность существенно отличается от трёхмерной турбулентности, так как в двумерном потоке (если пренебречь вязкостью) сохраняется средняя завихрённость, в то время как в трёхмерном — вихревые трубки деформируются и завихрённость не является инвариантом движения, также турбулентные динамо-процессы и генерация крупномасштабного магнитного поля возможны только в трёхмерном случае МГД-турбулентности [86]. Иногда при изучении космических течений считают плазменный параметр бета (отношение давления плазмы к энергии магнитного поля) настолько большим, что пренебрегают магнитным полем, таким образом задача сводится к гидродинамической и решается система уравнений для движения нейтральной жидкости [87–89].

Исследование сжимаемой турбулентности как в гидродинамике нейтральной жидкости, так и в магнитной гидродинамике является трудной задачей, поскольку не существует аналитической или приближённой теории таких явлений. Однако, несмотря на существенную роль сжимаемости в космической плазме, целый ряд наблюдений показывает воспроизведение колмогоровского спектра флуктуаций плотности [90, 91]. В работах [90, 91] для интерпретации таких наблюдений была предложена теория "почти несжимаемой" (nearly incompressible) среды, которая описывает флуктуации плотности в гидродинамике нейтрального [92] и магнитного [93] газов в режиме переноса пассивного скаляра. В работе [88]

аналитическая теория для сжимаемого нейтрального газа была подтверждена прямым численным моделированием только для двумерного случая. В работе [79] прямым численным моделированием было показано, что в случае сжимаемой МГД-турбулентности существует аналогичный эффект уменьшения локального турбулентного числа Маха со значения в сверхзвуковом режиме к значению в дозвуковом, что соответствует режиму преобразования сверхзвуковых турбулентных флуктуаций в дозвуковые. Однако в этой работе в силу ограничений метода прямого численного моделирования не удалось получить спектры плотности и кинетической энергии, а также показать их совпадения и реализацию пассивного режима для плотности в сжимаемой МГД-турбулентности. Несмотря на это, авторы [79] используют такие результаты для интерпретации спутниковых данных о солнечном ветре и локальной межзвёздной среде.

В работах [64, 94–96] достигнут существенный прогресс в понимании турбулентности локальной межзвёздной среды. Впервые получены спектры флуктуаций плотности и энергии, свойства намагниченности плазмы, анизотропии на основе трёхмерного моделирования методом крупных вихрей с использованием уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы.

В настоящей работе обсуждается современное состояние методов подсеточного моделирования для исследования сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности космической плазмы. В разделе 2 сформулирован метод крупных вихрей для политропной и теплопроводящей плазмы, получены отфильтрованные уравнения магнитной гидродинамики для обоих случаев, подробно проанализированы возникающие подсеточные тензоры, которые необходимо параметризовать. В разделе 3 обсуждаются различные подсеточные модели, предложенные для сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности. Также обсуждаются потенциальные возможности предложенных моделей путём сравнения результатов моделирования методом крупных вихрей и методом прямого моделирования. Применение метода крупных вихрей для решения важных задач космической физики — исследование свойств турбулентности локальной межзвёздной среды — обсуждается в разделе 4. В разделе 5 исследуются масштабно-инвариантные спектры сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности в инерционном интервале с использованием вынуждающей силы. Подробно обсуждаются различные представления внешней силы для получения чётко выраженного инерционного интервала турбулентности и анализируются преимущества предложенной модели линейного представления вынуждающей силы для исследования сжимаемой МГД-турбулентности. В заключении сформулированы основные результаты представленного направления исследования вычислительной физики турбулентных течений.

2. Метод крупных вихрей для магнитогиродинамических течений плазмы

2.1. Уравнения магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы

Уравнения магнитной гидродинамики впервые были рассмотрены Альвеном, который объединил уравнения

Максвелла и уравнения обычной гидродинамики. Исходная система уравнений сжимаемой электропроводящей жидкости записывается в следующем виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

уравнение количества движения

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) - \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k = 0, \quad (2)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p) u_j + q_j - \sigma_{ij} u_i] - \Xi j = 0, \quad (3)$$

уравнение магнитной индукции

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} (B_l u_m) + \eta \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

Здесь использованы следующие обозначения: ρ — плотность; p — давление; u_j — скорость в направлении x_j ; $\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - (2/3)\mu S_{kk}\delta_{ij} + \zeta S_{kk}\delta_{ij}$ — вязкий тензор напряжений; $S_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ — тензор скорости деформации; μ — динамический (молекулярный) коэффициент вязкости; ζ — объёмный коэффициент вязкости; $p = \rho RT$ — уравнение состояния идеального газа, где R — универсальная газовая постоянная; $q_j = -\psi(\partial T/\partial x_j)$ — диссипация, связанная с теплопроводностью (закон Фурье), где ψ — коэффициент теплопроводности; $E = \epsilon + u_i u_i/2$ — энергия, которая состоит из внутренней энергии $\epsilon = C_v T$ и кинетической энергии $u_i u_i/2$, где C_v — теплоёмкость при постоянном объёме; $\eta = c^2/4\pi\sigma$ — коэффициент магнитной диффузии; σ — удельная электрическая проводимость; $F_l = (1/c)\varepsilon_{ijk} j_j B_k$ — сила Лоренца; B_j — магнитное поле в направлении x_j ; j — плотность тока; Ξ — электрическое поле; δ_{ij} — символ Кронекера; ε_{ijk} — тензор Леви-Чивита.

Преобразуем систему уравнений магнитной гидродинамики (1)–(5), воспользовавшись уравнениями Максвелла, а также приведём её к безразмерному виду. Приближение магнитной гидродинамики предполагает, что энергия электрического поля значительно меньше, чем энергия магнитного поля. В этом случае все электромагнитные характеристики можно выразить через величины магнитного поля. В результате можно рассматривать и исследовать только взаимодействие между магнитным полем и гидродинамическим. Для приведения к безразмерному виду использована стандартная процедура с характерными значениями скорости — u_0 , плотности — ρ_0 , времени — L_0/U_0 , магнитного поля — B_0 , давления — p_0 , динамической вязкости — μ_0 , магнитной диффузии — η_0 , теплопроводности — ψ_0 , масштаба длины — L_0 . Имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \sigma_{ij} + \frac{B^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{M_a^2} B_j B_i \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j B_i - u_i B_j) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{B^2}{2M_a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\rho E + P) \bar{u}_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} q_j - \frac{1}{\text{Re}} \sigma_{ij} u_i - \frac{1}{M_a^2} B_j B_i u_i \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} B_i \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (6)–(10) используются следующие безразмерные параметры подобия [29]: $\text{Re} = \rho_0 u_0 L_0 / \mu_0$ — гидродинамическое число Рейнольдса, $\text{Re}_m = u_0 L_0 / \eta_0$ — магнитное число Рейнольдса; $M_s = u_0 / c_s$ — (звуковое) число Маха, где c_s — скорость звука, определяемая следующим соотношением: $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$, и $M_a = u_0 / u_a$ — магнитное (другое название — альвеновское) число Маха, где $u_a = B_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$ — альвеновская скорость; $\text{Pr} = C_p \mu_0 / \psi_0$ — число Прандтля, где C_p — теплоёмкость при постоянном давлении.

2.2. Процедура фильтрации уравнений магнитной гидродинамики в методе крупных вихрей

В методе крупных вихрей к исходным уравнениям применяется операция фильтрации, которая предложена в работе [97]. Каждая физическая величина разлагается на крупномасштабную (отфильтрованную) и мелкомасштабную составляющие. При этом эффекты на больших масштабах рассчитываются непосредственно, а на мелких — моделируются. Другими словами, информация о турбулентных структурах с размерами, меньшими ширины фильтра, при фильтрации теряется, и для замыкания отфильтрованной системы уравнений применяются различные подсеточные модели. Для получения отфильтрованных уравнений движения используются подходы с явным и неявным введением оператора фильтрации. При неявной фильтрации разностная дискретизация рассматривается в качестве оператора, в этом случае фильтрующие масштабы меньше, чем шаг сетки [98]. Недостатки неявной фильтрации связаны с трудностями сравнения полученных результатов с результатами прямого численного моделирования и экспериментальными данными. Кроме того, неявная фильтрация не позволяет контролировать высокочастотную часть спектра, что может приводить к вычислительным ошибкам. Поэтому предпочтительна явная фильтрация в методе LES.

Для явной фильтрации уравнений магнитной гидродинамики в методе LES используется фильтр ξ , удовлетворяющий свойству нормировки:

$$\int_a^b \xi(x_j - \bar{x}_j, \bar{\Delta}_j) d\bar{x}_j = 1. \quad (11)$$

Здесь $\xi(x_j - \bar{x}_j, \bar{\Delta}_j)$ является фильтром, а $\bar{\Delta}$ — шириной фильтра. Тогда, например, отфильтрованная скорость выражается как

$$\bar{u}_j = \int_a^b u(\bar{x}_j) \xi(x_j - \bar{x}_j, \bar{\Delta}_j) d\bar{x}_j, \quad (12)$$

где $a = x_j - \bar{\Delta}_j/2$, $b = x_j + \bar{\Delta}_j/2$, $\bar{\Delta}_j = (\bar{\Delta}_x, \bar{\Delta}_y, \bar{\Delta}_z)$, $x_j = (x, y, z)$ — оси декартовой системы координат.

Другие характеристики течения фильтруются аналогично.

Все переменные задачи представим как сумму отфильтрованной (соответствует большим масштабам) и неотфильтрованной (малым масштабам) частей: $u = \bar{u} + u'$, $B = \bar{B} + B'$, $p = \bar{p} + p'$ и т.д.

Заметим, что, в отличие от статистического усреднения по Рейнольдсу, данное разложение имеет более сложные свойства:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &\neq \bar{f}, \\ \bar{f}' &\neq 0, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (13)$$

где f — одна из характеристик движения. Первые два свойства в (13) принципиальным образом отличаются от свойств статистического подхода [99].

Для упрощения уравнений, описывающих турбулентное МГД-течение с переменной плотностью, удобно воспользоваться фильтрацией по Фавру [100] (другое название — средневзвешенная фильтрация), для того чтобы избежать появления дополнительных SGS-слагаемых. Средневзвешенная фильтрация применяется для всех характеристик течения заряженной жидкости, кроме давления и магнитного поля, и определяется как

$$\tilde{f} = \frac{\bar{\rho} f}{\bar{\rho}}. \quad (14)$$

Для обозначения фильтрации в формуле (14) используются два символа: с чертой сверху соответствует обычной фильтрации, с тильдой — средневзвешенной фильтрации.

Таким образом, отфильтрованная по Фавру скорость имеет вид

$$\tilde{u}_j = \frac{\bar{\rho} u_j}{\bar{\rho}} = \frac{\int_a^b \rho u_j \xi(x_j - \bar{x}_j, \bar{\Delta}_j) d\bar{x}_j}{\int_a^b \rho(\bar{x}_j) \xi(x_j - \bar{x}_j, \bar{\Delta}_j) d\bar{x}_j}. \quad (15)$$

Величины, усреднённые по Фавру, можно представить в виде суммы, например, скорость записывается как $u = \tilde{u} + u''$. Здесь используется двойной штрих для обозначения мелкомасштабной части величины, которая фильтруется по Фавру.

Тогда свойства средневзвешенной фильтрации выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{\rho u''} &\neq 0, \\ \tilde{\tilde{u}} &\neq \tilde{u}, \\ \tilde{u}'' &\neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Важно отметить, что простого соотношения между величинами, отфильтрованными по Фавру и традиционным способом, не существует. Чтобы получить \tilde{u} , зная \tilde{u} , необходимо знать пульсации плотности.

Магнитное поле, так же как плотность и давление, фильтруется традиционным способом, чтобы не усложнять расчёты, так как в уравнениях магнитной гидродинамики отсутствуют произведения плотности и магнитного поля.

намики отсутствуют произведения плотности и магнитного поля.

В методе LES традиционно применяются цилиндрический (коробочный) фильтр, фильтр Гаусса и спектральный (фурье-) фильтр [36].

Цилиндрический фильтр имеет вид

$$\xi(x, \bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}}, & \text{если } |x - \bar{x}| \leq \frac{\bar{\Delta}}{2}, \\ 0, & \text{если } |x - \bar{x}| > \frac{\bar{\Delta}}{2}, \end{cases} \quad (17)$$

фильтр Гаусса —

$$\xi(x, \bar{x}) = \left(\frac{6}{\pi \bar{\Delta}^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{6|x - \bar{x}|^2}{\bar{\Delta}^2} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

фильтр Фурье —

$$\xi(x, \bar{x}) = \frac{\sin[k_c(x - \bar{x})]}{k_c(x - \bar{x})}, \quad \text{где } k_c = \frac{\pi}{\bar{\Delta}}. \quad (19)$$

Гауссов фильтр является гладким как в физическом, так и в спектральном пространстве. Цилиндрический фильтр представляет собой, по сути, ступеньку в физическом пространстве, а фурье-фильтр — в спектральном пространстве. Фурье-фильтр обычно используется при дискретизации исходных уравнений движения жидкости при помощи спектрального подхода.

При изучении реальных физических задач часто рассматриваются трёхмерные сжимаемые турбулентные течения, поэтому необходимо использовать трёхмерный фильтр (мультиразмерный в общем случае). Мультиразмерный фильтр может быть сконструирован двумя различными способами. Первый — это линейная комбинация одномерных фильтров, т.е. по каждому направлению физический параметр фильтруется независимо от других [101]:

$$\xi^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi^i, \quad (20)$$

где ξ^i — одномерный фильтр в направлении i , n — размерность рассматриваемого пространства. Линейная комбинация представляет собой одновременное применение всех одномерных фильтров по каждому пространственному направлению. Второй способ предполагает последовательное умножение одномерных фильтров, это можно записать в следующем виде:

$$\xi^n = \prod_{i=1}^n \xi^i. \quad (21)$$

Такая процедура определения мультиразмерного фильтра ξ^n , в отличие от первого случая, представляет собой не одновременное, а последовательное применение одномерных фильтров. Точность мультиразмерных фильтров, построенных двумя различными методами, детально исследована и протестирована в статье [101], где было показано, что последовательное произведение фильтров обеспечивает более точные результаты по сравнению с линейной комбинацией одномерных фильтров. Поэтому в наших работах [57–68, 94–96] используется формула (21) для трёхмерной фильтрации при моделировании сжимаемых МГД-течений.

2.3. Отфильтрованные уравнения магнитной гидродинамики политропной плазмы

Для многих задач космической физики используется предположение о политропности процесса. Такая модель эффективно применяется при исследовании и моделировании сжимаемой турбулентности в нейтральной [102] и магнитной [82] жидкостях, турбулентности солнечного ветра [75, 76], турбулентности в межзвёздном газе [9], а также в других задачах астрофизической турбулентности [77, 103]. Это приводит к тому, что вместо громоздкого и сложного уравнения сохранения энергии для замыкания системы уравнений используется политропное соотношение между плотностью и давлением: $p = \rho^\gamma$, где γ — показатель политропы. В этом случае система уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики сводится к более простому виду. Применив операцию средневзвешенной фильтрации, запишем систему магнитогидродинамических уравнений в следующем виде [60, 63]:

отфильтрованное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (22)$$

отфильтрованное уравнение сохранения количества движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{2M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} (t_{ji}^u + t_{ji}^b) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (23)$$

отфильтрованное уравнение индукции

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{B}_i - \bar{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (25)$$

так как $\overline{\eta B_j} - \bar{\eta} \bar{B}_j = 0$ и $\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} = 0$, где

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\tilde{\mu} \tilde{S}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} + \tilde{\zeta} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij},$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \mu \overline{S_{kk} \delta_{ij}} + \zeta \overline{S_{kk} \delta_{ij}}.$$

В численных расчётах обычно пренебрегают последним слагаемым, полагая, что объёмный коэффициент вязкости ζ равен нулю.

В правой части уравнений (23), (24) слагаемые обозначают влияние подсеточных членов на отфильтрованную часть:

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j), \quad (26)$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{u}_i \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \bar{u}_j). \quad (27)$$

Следует отметить существенное упрощение при использовании фильтрации по Фавру. Действительно, традиционная фильтрация приводит к следующему виду уравнений неразрывности и количества движения:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j} - \bar{\rho} \bar{u}_j), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j u_i} - \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{u}_i) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{B_j B_i} - \bar{B}_j \bar{B}_i) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i} - \bar{\rho} \bar{u}_i). \end{aligned} \quad (29)$$

Видно, что в уравнениях (28) и (29) появляются дополнительные слагаемые, связанные с переносом массы, по сравнению с уравнениями, отфильтрованными по Фавру, в чём и состоит главное преимущество средневзвешенной фильтрации для сжимаемой жидкости.

Рассмотрим подробнее получившиеся уравнения (22)–(24). Поскольку мелкомасштабная скорость (то же самое верно и для других характеристик движения заряженной жидкости) $u'' = u - \bar{u}$ неизвестна, она должна быть оценена с использованием крупномасштабной скорости, полученной посредством фильтрации. В принципе, функциональной зависимости между мелкомасштабной u'' и крупномасштабной \bar{u} скоростями нет, поэтому любая оценка u'' будет содержать ошибку. Как правило, для оценки этой ошибки используются результаты, получаемые с помощью прямого численного моделирования (DNS), причём анализ проводится для относительно малых значений числа Рейнольдса из-за ограниченности вычислительных ресурсов.

Влияние на отфильтрованную часть подсеточных слагаемых, которые появляются в правой части уравнений магнитной гидродинамики (23), (24), описывается посредством SGS-слагаемых. Учёт сжимаемости приводит к усложнению вида тензора подсеточных напряжений в уравнении Навье–Стокса, τ_{ij}^u , связанного с появлением отфильтрованной плотности, по сравнению с несжимаемым течением. Однако магнитный тензор SGS-напряжений τ_{ij}^b , возникающий в уравнении индукции, сохраняет такой же вид, как и для несжимаемого МГД-течения. Тем не менее эти подсеточные замыкания необходимо расширить на случай сжимаемой МГД-турбулентности. В разделе 3 мы сохраним традиционные названия для подсеточных замыканий, при этом понимая, что данные подсеточные модели расширены и обобщены на случай сжимаемых турбулентных МГД-течений.

Запишем нелинейные слагаемые в уравнении сохранения количества движения в виде

$$\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} = \bar{\rho} (\bar{u}_j + u_j'') (\bar{u}_i + u_i'') = \bar{\rho} (\widetilde{u_j u_i} + \widetilde{u_j u_i''} + \widetilde{u_j u_i''} + \widetilde{u_i'' u_j''}), \quad (30)$$

$$\overline{B_j B_i} = (\bar{B}_i + B_i') (\bar{B}_j + B_j') = \bar{B}_i \bar{B}_j + \bar{B}_i B_j' + \bar{B}_j B_i' + \overline{B_i' B_j'}. \quad (31)$$

Поскольку нелинейные члены должны быть выражены через крупномасштабные величины, запишем нелинейные слагаемые как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i''} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji}^u, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{B_j B_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{B_i B_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{B_j B_i} - \overline{B_i B_j}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{B_i B_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji}^b, \end{aligned} \quad (33)$$

где t_{ji}^u и t_{ji}^b — гидродинамическая и магнитная части турбулентного тензора напряжений τ_{ji}^u в правой части уравнения (23).

Аналогично в отфильтрованном уравнении индукции (24) появляется тензор τ_{ij}^b , который имеет вид

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \overline{u_j B_i}) - (\overline{B_i u_j} - \overline{B_j u_i}). \quad (34)$$

Любой подсеточный тензор может быть разложен на три части [97], например, для тензора τ_{ij}^u имеем

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^u &= \overline{\rho(\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_j u_i})} - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \overline{B_j B_i}) = \\ &= \underbrace{\overline{\rho(\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_j u_i})} - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \overline{B_j B_i})}_{\text{Leonard term}} + \\ &+ \underbrace{\overline{\rho(\widetilde{u_i u_j''} + \widetilde{u_j u_i''})} - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j'} + \overline{B_j B_i'})}_{\text{Cross term}} + \\ &+ \underbrace{\overline{\rho(u_i'' u_j'' - u_j'' u_i'')}}_{\text{Reynolds-Maxwell term}} - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i' B_j'} - \overline{B_j' B_i'}) = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}. \end{aligned} \quad (35)$$

В формуле (35) в правой части слагаемое L_{ij} , называемое леонардовским (Leonard term), отвечает за перераспределение энергии между крупномасштабными и мелкомасштабными значениями как для скорости, так и для магнитного поля [36]. Перекрёстное слагаемое C_{ij} (Cross term) включает в себя как прямой каскад энергии, так и обратный (backscatter, т.е. от мелкого масштаба к крупному, например, несколько небольших вихрей сливаются в один крупный). И, наконец, слагаемое Рейнольдса–Максвелла R_{ij} (Reynolds–Maxwell term) представляет диссипацию энергии (outscatter) на маленьких масштабах (соответствует большим волновым числам). Вообще говоря, существуют два подхода к моделированию подсеточных напряжений в методе LES. Первый основан на идее подобия масштабов, где концентрируется внимание на леонардовском слагаемом L_{ij} , т.е. SGS-тензоры пропорциональны леонардовскому тензору напряжений: $\tau_{ij} \propto L_{ij}$. В основе второго подхода — идея вихревой вязкости, которая фокусируется на слагаемом Рейнольдса–Максвелла R_{ij} , и подразумевается, что $\tau_{ij} \propto R_{ij}$.

Таким образом, в отфильтрованной системе магнитогидродинамических уравнений содержатся неизвестные турбулентные тензоры τ_{ij}^u и τ_{ij}^b . Для того чтобы их определить, необходимо использовать специальные турбулентные замыкания (параметризации), основанные на крупномасштабных значениях величин, характеризующих турбулентное магнитогидродинамическое течение. Именно подсеточные модели SGS связывают тензоры τ_{ij}^u , τ_{ij}^b с величинами \widetilde{u}_i и \widetilde{B}_i . Основная цель любой подсеточной параметризации в методе LES состоит в адекватном описании изменения энергии крупномасштабного движе-

ния, при этом, по сути, моделируется турбулентный каскад Ричардсона.

2.4. Отфильтрованные уравнения

магнитной гидродинамики теплопроводящей плазмы

Система отфильтрованных уравнений для полной системы МГД-уравнений теплопроводящей жидкости, которая используется в методе крупных вихрей для моделирования трёхмерной сжимаемой турбулентности, запишется в следующем виде [58, 62]:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = \\ = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{u}_j \bar{B}_i - \widetilde{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \tilde{E} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{P}) \widetilde{u}_j + \frac{1}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} \tilde{q}_j - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\sigma}_{ij} \widetilde{u}_i - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \widetilde{u}_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} \bar{B}_i \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{(\gamma - 1) M_s^2} Q_j + \frac{1}{2} J_j + \frac{1}{M_a^2} V_j - \frac{1}{M_a^2} G_j \right), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (40)$$

где

$$\tilde{q}_j = -\tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}.$$

Безразмерное отфильтрованное уравнение состояния, которое используется для замыкания системы уравнений, записывается как

$$\bar{p} = \frac{\tilde{T} \bar{\rho}}{\gamma M_s^2}. \quad (41)$$

Уравнение полной энергии для МГД-случая имеет вид (39), так как выполняются следующие соотношения (для пояснения запишем их в размерном виде):

$$\begin{aligned} \overline{\rho u_j} &= \overline{\rho R T u_j} = \overline{\rho R T u_j} = \overline{\rho R T u_j} + R \overline{\rho (u_j T - \widetilde{u}_j \tilde{T})}, \\ \overline{\rho E u_j} &= \overline{\rho C_v \tilde{T} u_j} + C_v \overline{\rho (u_j \tilde{T} - \widetilde{u}_j T)} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{\rho \widetilde{u}_j u_k u_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_j u_k u_k - \widetilde{u}_j u_k u_k)} = \\ &= \overline{\rho \tilde{E} u_j} + C_v \overline{\rho (u_j T - \widetilde{u}_j \tilde{T})} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_j u_k u_k - \widetilde{u}_j u_k u_k)}. \end{aligned}$$

Также при выводе учитывается уравнение Майера: $C_p - C_v = R$, связывающее теплоёмкости при постоянном давлении C_p и при постоянном объёме C_v с универсальной газовой постоянной R . Принимая во внимание, что $\gamma = C_p/C_v$, можно записать $C_p = \gamma R/(\gamma - 1)$.

Влияние мелкомасштабной турбулентности на отфильтрованную часть уравнений магнитной гидродина-

мики определяется через следующие SGS-слагаемые в правой части уравнений (37)–(39): тензор подсеточных напряжений τ_{ij}^u , магнитный тензор подсеточных напряжений τ_{ij}^b , подсеточный поток тепла Q_j , турбулентная подсеточная диффузия J_j , поток подсеточной магнитной энергии V_j , подсеточная энергия взаимодействия магнитного натяжения и скорости G_j . Эти величины определяются как

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j), \quad (42)$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \tilde{u}_i \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \tilde{u}_j), \quad (43)$$

$$Q_j = \bar{\rho} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}), \quad (44)$$

$$J_j = \bar{\rho} (\widetilde{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \tilde{u}_k \tilde{u}_k), \quad (45)$$

$$V_j = (\overline{B_k B_k u_j} - \overline{B_k} \overline{B_k} \tilde{u}_j), \quad (46)$$

$$G_j = (\overline{u_k B_k B_j} - \tilde{u}_k \overline{B_k} \bar{B}_j). \quad (47)$$

В работе [47] проведены подробные исследования влияния нелинейных диффузионных слагаемых в уравнениях сохранения количества движения и энергии в гидродинамике нейтральной жидкости, выполнены *a priori* тесты, использующие результаты DNS, полученные при расчётах перемешанного слоя при числах Маха в диапазоне 0,2–1,2. Также было показано, что диффузионными слагаемыми можно пренебречь, т.е. $\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} = 0$ и $\bar{q}_j - \tilde{q}_j = 0$. В наших работах [57–68, 94–96] мы также пренебрегаем диффузионными членами, связанными с магнитной энергией в (39). В статье [49] показано, что подсеточная диффузия вязкости, определяемая как $D_j = \bar{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}_{ij} \bar{u}_i$, является малым параметром в уравнении полной энергии и её величина составляет только около 5 % от дивергенции подсеточного потока тепла Q_j , поэтому при вычислениях мы пренебрегаем данным SGS-слагаемым D_j в уравнении (39).

3. Подсеточное моделирование мелкомасштабной турбулентности

Как отмечалось в разделе 2, для исключения мелкомасштабной турбулентности применяется операция фильтрации. При этом результирующая система уравнений оказывается незамкнутой, поскольку включает в себя члены, описывающие нелинейные взаимодействия крупных вихрей с мелкомасштабной турбулентностью. Параметризация таких взаимодействий называется подсеточной (SGS) моделью и составляет одну из важнейших компонент метода LES. Все подсеточные модели подразделяются на функциональные и структурные модели [98]. Функциональные модели выражают влияние подсеточных масштабов на крупные масштабы. Широко распространённые параметризации на основе вихревой вязкости принадлежат к группе функциональных моделей. Это влияние обычно описывается переносом энергии. Структурные модели конструируются таким образом, что тензор подсеточных напряжений аппроксимируется путём формальной замены неизвестного (мелкомасштабного) параметра на известную (отфильтрованную) величину. К структурным моделям относятся замыкания, основанные на идее подобия масштабов [98].

Вначале обсудим тензоры τ_{ij}^u и τ_{ij}^b . Для замыкания системы уравнений нужно найти такие параметризации для τ_{ij}^u и τ_{ij}^b , которые связывали бы эти тензоры с из-

вестными крупномасштабными значениями характеристик течения. Для турбулентных подсеточных тензоров должны выполняться условия реализуемости, которые гарантируют неотрицательность подсеточной энергии. Необходимое и достаточное условие неотрицательности обеспечивается положительностью полуопределённой формы для турбулентного тензора τ_{ij} , следовательно, выполняются соотношения [47]:

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &\geq 0 && \text{для } i \in \{1, 2, 3\}, \\ |\tau_{ij}| &\leq \sqrt{\tau_{ii} \tau_{jj}} && \text{для } i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ \det(\tau_{ij}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Считаем, что турбулентный тензор τ_{ij}^u связан с тензором скоростей деформации и вязкостью (модель вихревой вязкости), а τ_{ij}^b — с диссипацией из-за сопротивления (т.е. эта диссипация выражается через обобщённый закон Ома и равна ηj [104], где j — плотность электрического тока) следующим образом:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2\nu_t \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (49)$$

$$\tau_{ij}^b - \frac{1}{3} \tau_{kk}^b \delta_{ij} = -2\eta_t \bar{J}_{ij}. \quad (50)$$

Здесь

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

— крупномасштабный тензор скорости деформации,

$$\bar{J}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right)$$

— крупномасштабный тензор магнитной ротации, ν_t и η_t — скалярные турбулентные функции, зависящие от пространственных координат и от времени.

В правой части уравнений (49) и (50) опущены симметричные слагаемые, содержащие магнитный тензор деформации $\tilde{S}_{ij}^b = (\partial \bar{B}_i / \partial x_j + \partial \bar{B}_j / \partial x_i) / 2$ и вихревой тензор $\tilde{J}_{ij}^u = (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j - \partial \tilde{u}_j / \partial x_i) / 2$ соответственно, так как их роль пренебрежимо мала [53]. Заметим, что основная цель подсеточного моделирования состоит не в полной реконструкции потерянной информации вследствие фильтрации, а в моделировании влияния мелкомасштабной динамики на крупномасштабное распределение энергии.

Иногда слагаемым $\tau_{kk}^u \delta_{ij} / 3$ пренебрегают, связывая его с термодинамическим давлением [46] $\nabla(p + (2/3)K\delta_{ij})$, где $K = (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) / 2$ — подсеточная турбулентная кинетическая энергия. В работах [57, 58, 60–65, 67] рассматривается более общий случай, учитывающий изотропное слагаемое (подсеточный изотропный член в (50) равен нулю, так как в этом случае J_{ij} обращается в нуль).

Подсеточное изотропное слагаемое найдём из условия реализуемости (48). Используя данные неравенства, можно записать для подсеточного тензора напряжений τ_{ij} следующее соотношение:

$$\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 \leq \tau_{11}\tau_{22} + \tau_{11}\tau_{33} + \tau_{22}\tau_{33}. \quad (51)$$

Подставляя сюда значения из (49), можно получить оценку для изотропного члена [105]:

$$K \geq \frac{1}{2} \sqrt{3} (v_t |\tilde{S}^u|), \quad (52)$$

где $|\tilde{S}^u| = (2\tilde{S}_{ij}^u \tilde{S}_{ij}^u)^{1/2}$.

Таким образом, предполагая различные замыкания и параметризуя v_t , получим значения анизотропной части подсчетного слагаемого (49) и изотропной части из (52). В следующем разделе представим некоторые подсчетные модели для сжимаемой МГД-турбулентности.

3.1. Модель Смагоринского для сжимаемой МГД-турбулентности

Модель Смагоринского является моделью вихревой вязкости, в которой подсчетные масштабы предполагаются изотропными и находятся в равновесии с крупномасштабным течением [106]. Расширенная модель Смагоринского для случая сжимаемой МГД-турбулентности имеет вид [57, 60, 61, 63]

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (53)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_1 \bar{\Delta}^2 |\bar{j}| \bar{J}_{ij}. \quad (54)$$

Здесь \bar{j} — крупномасштабная плотность электрического тока. Величина η_t — это аналог сдвига по скорости, имеющийся в (53) для v_t , заменённого здесь на сдвиг в магнитном поле (54) (который является плотностью тока [104]).

Неравенство (52) позволяет найти подсчетную модель для турбулентной кинетической энергии K , соответствующую модели вихревой вязкости [47]. Подставляя в (52) значение для турбулентной вязкости из (53), запишем

$$K \geq \frac{1}{2} \sqrt{3} C_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2. \quad (55)$$

Отсюда получим подсчетное замыкание для изотропного слагаемого в виде [47]

$$\tau_{kk}^u = 2Y_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2, \quad (56)$$

где Y_1 — константа, которая обеспечивает переход от неравенства (55) к равенству (56) и попадание в область определения турбулентной кинетической энергии, т.е. выполнение условия (55).

Для других подсчетных моделей, которые будут представлены ниже, изотропные члены определяются аналогично.

Расширенная на МГД-случай модель Смагоринского даёт достаточную диссипацию и диффузию, которые, кроме того, стабилизируют численные вычисления [57]. К недостаткам данной модели относится неуниверсальность констант C_1 , Y_1 и D_1 . Действительно, если задавать определённые положительные значения констант, то не описывается обратный каскад энергии (backscatter), а если отрицательные значения — то прямой каскад передачи энергии.

3.2. Модель Колмогорова для сжимаемой МГД-турбулентности

Если длина фильтра находится в инерциальном интервале полностью развитой турбулентности, то предпола-

гают, что нелинейное взаимодействие между крупномасштабными кинетической и магнитной энергиями намного меньше, чем энергия диссипации, поэтому можно считать, что подсчетные кинетическая и магнитная энергии зависят только от времени [51]. Также предполагается, что коэффициент, отвечающий за размерность, равен единице [53]. Эти параметризации основываются на колмогоровском скейлинге. Расширенная модель Колмогорова для случая сжимаемой МГД-турбулентности имеет вид [57, 60, 61, 63]

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_2 \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (57)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_2 \bar{\Delta}^{4/3} \bar{J}_{ij}, \quad (58)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_2 \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} |\tilde{S}^u|. \quad (59)$$

Константы, применяемые в одной модели, отличаются от констант, которые используются в другом методе замыкания уравнений. Все недостатки, относящиеся к константам в модели Смагоринского и в модели Колмогорова, совпадают.

3.3. Модель, основанная на перекрёстной спиральности

Определим перекрёстную (другое название — взаимная) спиральность между полем скорости и магнитным полем следующим образом: $H^c = \int_V (\mathbf{uB}) dV$. В случае МГД-турбулентности находят характерные значения турбулентной скорости и магнитного поля, и перекрёстная спиральность связана с обменом между кинетической и магнитной энергиями, вызванным силой Лоренца [52]. Спиральность характеризует энергетический обмен между крупными и мелкими масштабами в методе LES. В работах [57, 60, 61] предложена параметризация, основанная на перекрёстной спиральности для случая сжимаемой МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_3 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{f}| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (60)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_3 \bar{\Delta}^2 \text{sgn}(\bar{j}\tilde{\omega}) |\bar{j}\tilde{\omega}|^{1/2} \bar{J}_{ij}, \quad (61)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_3 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{f}| |\tilde{S}^u|. \quad (62)$$

Здесь

$$\tilde{f} = |\tilde{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^b|^{1/2},$$

$$\bar{S}_{ij}^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

$\tilde{\omega} = \nabla \times \tilde{\mathbf{u}}$ — крупномасштабная завихренность.

В модели, основанной на перекрёстной спиральности, только магнитная диффузия η_t может менять знак (в (61) функция $\text{sgn}(\cdot)$ определяет знак аргумента), так как в магнитогидродинамической турбулентности только магнитная энергия отвечает за процесс переноса от мелких (т.е. подсчетных) масштабов к крупным [52].

3.4. Модель подобия масштабов для сжимаемой МГД-турбулентности

Модель подобия масштабов не является моделью вихревой вязкости. В этом случае неизвестные турбулентные тензоры моделируются в предположении, что они пропорциональны леонардовскому члену. Теория этого подхода базируется на идее об универсальном характере

турбулентности на небольших масштабах, а именно, в предположении, что самые энергоёмкие подсеточные компоненты в каскаде энергии из больших масштабов к мелким могут быть оценены с достаточной точностью из наименьших крупномасштабных вихрей, получаемых после операции фильтрации. Этот метод относительно прост, однако он не обеспечивает необходимого количества диссипации энергии в гидродинамике нейтральной жидкости. Модель подобия масштабов была предложена в статье [107] и затем исследована в [108]. Для случая сжимаемой МГД-турбулентности модель подобия масштабов обобщена в статьях [60, 67]:

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} (\widehat{u_i u_j} - \tilde{u_i} \tilde{u_j}) - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j), \quad (63)$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \tilde{u_i} \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \tilde{u_j}). \quad (64)$$

Таким образом, модель подобия масштабов (63), (64), в отличие от других моделей, полностью определяется в методе LES использованием отфильтрованных величин турбулентного движения.

3.5. Смешанная модель для сжимаемой МГД-турбулентности

Для гидродинамического случая в работе [42] предложено объединить два разных подхода — модель подобия масштаба и модель вихревой вязкости, а в работе [109] впервые использована динамическая форма смешанной модели, где модельная константа определялась динамически на каждом временном шаге. Расширенная смешанная модель для сжимаемой МГД-турбулентности записывается в следующем виде [60]:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk} \right) + \bar{\rho} (\widehat{u_i u_j} - \tilde{u_i} \tilde{u_j}) - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j), \quad (65)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_s \bar{\Delta}^2 |\tilde{j}| \tilde{J}_{ij} + (\overline{u_i B_j} - \tilde{u_i} \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \tilde{u_j}), \quad (66)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2. \quad (67)$$

В выражениях (65), (66) смешанная модель является комбинацией двух моделей: модели подобия масштабов и модели Смагоринского для случая сжимаемой МГД-турбулентности.

3.6. Динамическая процедура определения констант

Для того чтобы устранить проблему, связанную с выбором значений модельных констант в подсеточных замыканиях, предложена динамическая процедура [110, 111], которая определяет значение константы на каждом шаге. Для этого используется дополнительный тестовый фильтр, причём ширина тестового фильтра больше ширины основного фильтра. Иными словами, в динамических подсеточных моделях используется предположение об инвариантности констант, входящих в замыкания, относительно ширины фильтрации [110]. Предполагается, что одна и та же подсеточная модель применима как при более грубом, так и при более мелком пространственном разрешении. Имея решение на мелкой сетке, можно получить решение на более грубой сетке с помощью дополнительной тестовой фильтрации по пространству и выразить для него оценку турбулентных

напряжений. Приведём обобщение динамической процедуры на случай сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности [57].

Пусть T_{ij}^u и T_{ij}^b являются тестовыми подсеточными тензорами, которые получаются при использовании тестового фильтра, соответственно для τ_{ij}^u и τ_{ij}^b :

$$T_{ij}^u = \hat{\tau}_{ij}^u + L_{ij}^u, \quad (68)$$

$$T_{ij}^b = \hat{\tau}_{ij}^b + L_{ij}^b, \quad (69)$$

где леонардовские тензоры определяются как

$$L_{ij}^u = \frac{\widehat{\rho u_i \rho u_j}}{\bar{\rho}} - \frac{\widehat{\rho u_i} \widehat{\rho u_j}}{\hat{\rho}} - \frac{1}{M_a^2} (\widehat{B_i B_j} - \hat{B}_i \hat{B}_j), \quad (70)$$

$$L_{ij}^b = \left(\frac{\widehat{\rho u_i B_j}}{\bar{\rho}} - \frac{\widehat{\rho u_i} \hat{B}_j}{\hat{\rho}} \right) - \left(\frac{\widehat{B_i \rho u_j}}{\bar{\rho}} - \frac{\hat{B}_i \widehat{\rho u_j}}{\hat{\rho}} \right). \quad (71)$$

Здесь знак $\hat{}$ обозначает тестовую фильтрацию переменной. Леонардовские тензоры могут быть определены из крупномасштабных значений скорости и магнитного поля. Соотношения (70) и (71) устанавливают связь между исходными подсеточными и тестовыми тензорами.

Обозначим турбулентную вязкость и магнитную диффузию следующим образом: $\nu_t = C_s \alpha_{ij}^u$ (для τ_{ij}^u), $\eta_t = Y_s \alpha_{ij}^b$ (для τ_{ij}^b), $\eta_t = D_s \phi_{ij}^b$ (для τ_{ij}^b), где $s = 1, 2, 3 \dots$

Для определения констант используем метод наименьших квадратов, для того чтобы минимизировать ошибку функционалов [112]:

$$Z^u = \langle (T_{ij}^u - \hat{\tau}_{ij}^u - L_{ij}^u)^2 \rangle,$$

$$Z^b = \langle (T_{ij}^b - \hat{\tau}_{ij}^b - L_{ij}^b)^2 \rangle.$$

Угловые скобки обозначают пространственное усреднение.

Константы определяются динамически на каждом временном шаге по формулам [57]:

$$C_s = \frac{\langle L_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}{\langle M_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}, \quad (72)$$

$$Y_s = \frac{\langle L_{kk}^b \rangle}{\langle \hat{\alpha}^u |\hat{S}^u| - \alpha^u |\tilde{S}^u| \rangle}, \quad (73)$$

$$D_s = \frac{\langle L_{ij}^b m_{ij}^B \rangle}{\langle m_{ij}^B m_{ij}^B \rangle}, \quad (74)$$

где

$$M_{ij}^u = \hat{\alpha}_{ij}^u \left(\hat{S}_{ij}^u - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{S}_{kk}^u \right) - \left[\alpha_{ij}^u \left(\tilde{S}_{ij}^u - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk}^u \right) \right]^{\hat{}},$$

$$m_{ij}^B = \hat{\phi}_B \hat{J}_{ij} - \phi_B \tilde{J}_{ij}.$$

Здесь $[]^{\hat{}}$ обозначает, что операция тестовой фильтрации относится ко всему выражению в квадратных скобках.

Отметим, что переменные задачи, фильтруемые по Фавру в исходных уравнениях, также должны фильтроваться по Фавру и в случае применения тестового фильтра. Запись \hat{u} понимается здесь как $\hat{u} = \widehat{\rho u} / \hat{\rho}$. Характерная ширина тестового фильтра, как правило, в большинстве работ берётся в два раза больше, т.е. $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$.

Важно заметить, что значения констант могут быть и отрицательными, что соответствует обратному каскаду

энергии, т.е. увеличению энергии для крупномасштабного течения. Для того чтобы избежать численной неустойчивости, необходимо ограничить значения констант таким образом, чтобы обеспечить неотрицательность общей вязкости (турбулентной плюс молекулярной).

3.7. Параметризации подсеточных слагаемых для теплопроводящей плазмы

При рассмотрении полной системы уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики без предположения о политропности или адиабатичности процесса для замыкания системы уравнений резко увеличивается количество слагаемых, которые необходимо параметризовать.

Наличие уравнения энергии в системе МГД-уравнений (36)–(39) значительно усложняет решение задачи методом крупных вихрей. В отличие от уравнений количества движения и магнитной индукции, в отфильтрованном уравнении полной энергии возникают принципиально новые SGS-слагаемые, которые необходимо параметризовать.

Рассмотрим вначале подсеточный тепловой поток $Q_j = \bar{\rho}(u_j \bar{T} - \tilde{u}_j \tilde{T})$. Для параметризации этого SGS-слагаемого используется так называемая вихревая диффузионная модель в виде

$$Q_j = -C_s \frac{\bar{\Delta}^2 \bar{\rho} |\tilde{S}^u|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (75)$$

где C_s — коэффициент, определённый ранее в расширенной модели Смагоринского для МГД-случая. Константа C_s рассчитывается динамически по формуле (72). В соотношении (75) величина Pr_T является турбулентным числом Прандтля, которое также вычисляется с использованием динамической процедуры следующим образом:

$$\text{Pr}_T = C_s \frac{\langle Y_k Y_k \rangle}{\langle \Phi_j Y_j \rangle}. \quad (76)$$

В формуле (76) введены следующие обозначения:

$$Y_j = -\hat{\Delta}^2 \hat{\rho} |\hat{S}^u| \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} + \bar{\Delta}^2 \bar{\rho} |\tilde{S}^u| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (77)$$

$$\Phi_j = \frac{\widehat{\rho u_j \rho T}}{\bar{\rho}} - \frac{\widehat{\rho u_j \rho T}}{\bar{\rho}}. \quad (78)$$

Впервые нестационарная формулировка для Q_j предложена в работе [113] для решения задачи Рэлея – Бенара. Динамический вариант вихревой диффузионной модели для теплового подсеточного потока продемонстрирован в работе [43] для LES. Данная модель (75), основанная на вихревой диффузии, похожа на определение молекулярного теплового потока, однако молекулярная вязкость и число Прандтля были заменены соответственно на динамическую вихревую вязкость и турбулентное число Прандтля.

Рассмотрим величину J_j , описывающую подсеточную турбулентную диффузию. Модель для $J_j = \bar{\rho}(u_j \bar{u}_k u_k - \tilde{u}_j \tilde{u}_k \tilde{u}_k)$ предложена в работе [114], она получается по аналогии с подходом Рейнольдса для усреднения уравнений Навье–Стокса и в предположении, что $\tilde{u}_i \simeq \tilde{u}_i$. Тогда для J_j имеем

$$J_j \simeq \tilde{u}_k \tau_{jk}^u, \quad (79)$$

где подсеточный тензор τ_{jk}^u был найден выше.

Для окончательного замыкания полной системы уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики необходимо параметризовать SGS-слагаемые в уравнении энергии (39), возникающие из-за наличия магнитного поля. Для того чтобы получить эти подсеточные модели, воспользуемся теорией, основанной на обобщённых центральных моментах [111]. Данный подход в работах [58, 62] расширен и применён к магнитогидродинамическому случаю. Запишем выражения для корреляционных моментов второго порядка:

$$\varphi(B_i, B_k) = \overline{B_i B_k} - \bar{B}_i \bar{B}_k, \quad (80)$$

$$\varphi(u_i, B_k) = \overline{u_i B_k} - \bar{u}_i \bar{B}_k, \quad (81)$$

и третьего порядка:

$$\begin{aligned} \varphi(B_i, B_k, u_j) = & (\overline{B_i B_k u_j} - \bar{B}_i \bar{B}_k \bar{u}_j) - \\ & - \bar{u}_j \varphi(B_i, B_k) - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_i) - \bar{B}_i \varphi(u_j, B_k). \end{aligned} \quad (82)$$

Проведём замену индексов в (82):

$$\begin{aligned} \varphi(B_k, B_k, u_j) = & (\overline{B_k B_k u_j} - \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j) - \bar{u}_j \varphi(B_k, B_k) - \\ & - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_k) - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_k). \end{aligned} \quad (83)$$

Используя обозначения подсеточного потока магнитной энергии (46), можно записать:

$$\begin{aligned} V_j = & \overline{B_k B_k u_j} - \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j = \\ = & \overline{B_k B_k u_j} - \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j - \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j + \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j, \end{aligned} \quad (84)$$

откуда получим следующее выражение:

$$V_j = \varphi(B_k, B_k, u_j) + 2\bar{B}_k \varphi(u_j, B_k). \quad (85)$$

Аналогичным образом запишем соотношение для SGS-тензора G_j . Воспользовавшись формулами (82) и (47), в итоге находим:

$$G_j = \varphi(B_j, B_k, u_k) + \bar{B}_k \varphi(u_k, B_j) + \tilde{u}_k \varphi(B_j, B_k) + \bar{B}_j \varphi(u_k, B_k). \quad (86)$$

Нижне предполагается, что в формуле (86) тройной корреляцией $\varphi(B_j, B_k, u_k)$ можно пренебречь. Корреляция $\varphi(B_j, B_k)$ не учитывается при моделировании SGS-тензора (42) в уравнении сохранения количества движения, так как магнитные моменты имеют намного более слабую корреляцию по сравнению с моментами скорости. В работе [53] показано, что модельный коэффициент C_b в магнитной части (42), полученный с помощью динамической процедуры, значительно меньше C_s , а именно $C_b/C_s \sim 10^{-3}$. Момент второго порядка $\varphi(u_k, B_k)$ в выражении (86) описывает корреляции в направлении, где вектор скорости и вектор магнитного поля коллинеарны, следовательно, сила Лоренца в этом направлении отсутствует. Таким образом, разумно пренебречь последним слагаемым в (86). Поэтому сумму подсеточных тензоров V_j и G_j можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2} V_j - G_j \simeq \frac{1}{2} (2\bar{B}_k \varphi(u_j, B_k)) - \bar{B}_k \varphi(u_k, B_j). \quad (87)$$

Магнитный подсеточный тензор напряжений может быть представлен в виде

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{u}_i \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \bar{u}_j) = \varphi(u_i, B_j) - \varphi(u_j, B_i), \quad (88)$$

поэтому можно записать следующее подсеточное замыкание для SGS-слагаемых в уравнении полной энергии (39), которые появляются из-за наличия магнитного поля при рассмотрении электропроводящей жидкости, а именно, для потока подсеточной магнитной энергии V_j и подсеточной энергии G_j взаимодействия магнитного натяжения и скорости:

$$\frac{1}{2} V_j - G_j \simeq \bar{B}_k \tau_{jk}^b. \quad (89)$$

Таким образом, используя разработанные в работах [58, 62] подсеточные параметризации для системы отфильтрованных уравнений магнитной гидродинамики, получим замкнутую систему метода крупных вихрей для моделирования сжимаемой МГД-турбулентности теплопроводящей жидкости.

3.8. Результаты численного моделирования для полнотропной плазмы

В данном разделе приведены основные результаты расчётов сжимаемых МГД-течений методом LES с использованием различных подсеточных параметризаций. Проведён анализ на основе сравнения полученных результатов LES с результатами численных экспериментов, выполненных прямым численным моделированием [60].

В работах [57, 60, 61, 63] метод LES реализован для пяти подсеточных моделей, сформулированных в разделе 3.7, в них изучались различные свойства сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах подобия. Подробности реализации численного моделирования, отфильтрованных уравнений, а также алгоритм, граничные и начальные условия, расчётная сетка и другие аспекты сжимаемого МГД-моделирования обсуждаются в работе [60].

Для временной интеграции использовался модифицированный явный метод Рунге–Кутты третьего порядка точности (предложенный Вильямсоном [115]), который требует меньше ресурсов оперативной памяти по сравнению со стандартным методом Рунге–Кутты. В данном модифицированном методе Рунге–Кутты только два набора переменных необходимо разместить в памяти. Такой численный подход применим для сколь угодно высокого порядка точности, хотя не все схемы Рунге–Кутты могут быть записаны в модифицированном виде [115, 116]. Численный код с конечно-разностными схемами четвёртого порядка точности используется для моделирования сжимаемой МГД-турбулентности. Для большинства задач магнитной гидродинамики [84, 117–119] применялись различные спектральные методы (обычно для несжимаемой среды). Однако в данном исследовании используется конечно-разностный подход, который, в отличие от спектрального метода, более эффективен при решении задач со сложной геометрией, с различными граничными условиями, а также требует меньше компьютерных ресурсов и меньшее количество времени для вычислений [103, 120].

В работах [57, 60, 61, 63] разработан и создан численный код для системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной в консервативной форме. Однако для нелинейных слагаемых применяется кососимметричная форма:

намаки, записанной в консервативной форме. Однако для нелинейных слагаемых применяется кососимметричная форма:

$$\begin{aligned} \Psi_i^d &= \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}, \\ \Psi_i^a &= \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \\ \Psi_i^s &= \frac{1}{2} (\Psi_i^d + \Psi_i^a). \end{aligned} \quad (90)$$

Соотношения (90) демонстрируют, каким образом получается кососимметричная форма Ψ_i^s . Кососимметричная форма является фактически усреднением между дивергентной Ψ_i^d и конвективной Ψ_i^a формами нелинейного слагаемого. Хотя аналитически все три формы: кососимметричная, дивергентная и конвективная — эквивалентны, результаты численных расчётов будут отличаться. В статье [121] показано, что кососимметричная форма обеспечивает более точные результаты, так как уменьшаются ошибки, связанные с дискретизацией при использовании конечно-разностного подхода для моделирования турбулентных течений.

Для разделения турбулентного течения на крупномасштабные и мелкомасштабные вихри применяется фильтр Гаусса четвёртого порядка точности. В статье [101] подробно изучались оптимальные дискретные формы цилиндрического фильтра и фильтр Гаусса для центрально-разностных схем различного порядка точности. Одномерный фильтр записывается в следующем виде (для x -направления):

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_i &= \frac{\epsilon^4 - 4\epsilon^2}{1152} (\zeta_{i-2} + \zeta_{i+2}) + \frac{16\epsilon^2 - \epsilon^4}{288} (\zeta_{i-1} + \zeta_{i+1}) + \\ &+ \frac{\epsilon^4 - 20\epsilon^2 + 192}{192} \zeta_i, \end{aligned} \quad (91)$$

где ζ_i — величина, характеризующая поток жидкости в точке i , ϵ — параметр, определённый как отношение размера численной сетки к ширине фильтра [101]. Константы в подсеточных моделях определяются с помощью динамической процедуры, для этого используется дополнительный тестовый фильтр шириной в два раза больше, чем исходный. Поскольку изучается трёхмерное турбулентное МГД-течение, для получения трёхмерной фильтрации применяется формула (21).

Результаты LES сравниваются с вычислениями DNS, и качество LES определяется различием между отфильтрованными результатами DNS и LES. Для получения результатов DNS использовалась сетка с плотностью дискретизации 256^3 , а для LES — 64^3 . Расчётная область представляет собой трёхмерный куб размерами $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Начальные условия для LES получаются фильтрацией начальных условий DNS. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы обеспечить соленоидальность магнитного поля, т.е. чтобы выполнялось условие $\text{div } \mathbf{B} = 0$. При расчётах используется критерий Куранта–Фридрикса–Леви (CFL-condition) для ограничения временного шага для устойчивости вычислений. Периодические граничные условия ставились на всех границах расчётной области.

На рисунках 2а, б показана временная эволюция кинетической и магнитной энергий. Основная цель подсеточных замыканий заключается в том, чтобы адекватно

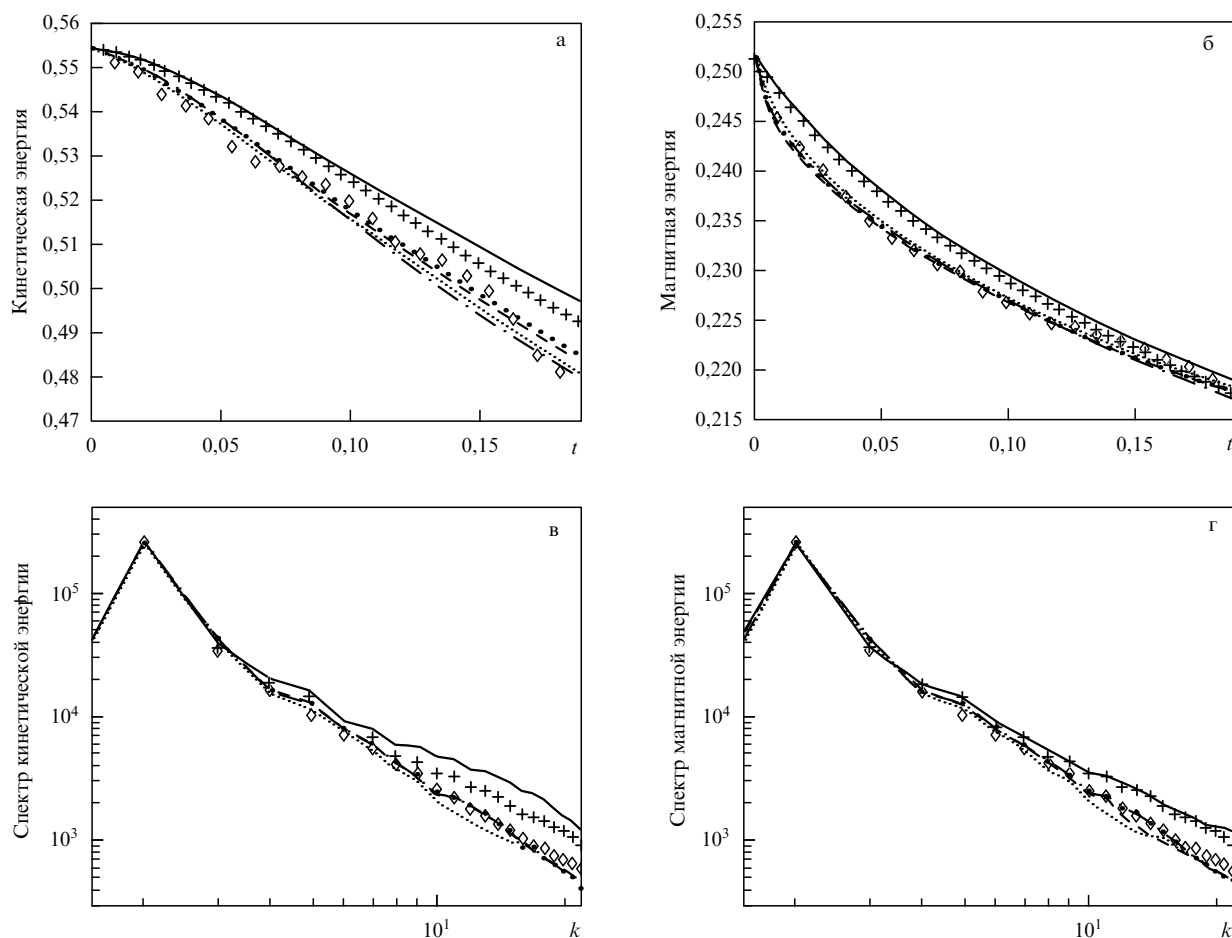


Рис. 2. (а, б) Временная динамика кинетической (а) и магнитной (б) энергий. (в, г) Спектры кинетической (в) и магнитной (г) энергий. Сплошные линии соответствуют случаю, когда подсеточные тензоры τ_{ij}^u и τ_{ij}^b опущены, т.е. LES фактически является DNS на грубой LES-сетке, этот случай представлен здесь для более полного анализа и понимания влияния подсеточных замыканий на моделирование МГД-течения при сравнении DNS-результатов с полученными в рамках SGS-моделей. Штриховые линии соответствуют модели Смагоринского для МГД-течения, пунктирные линии — расширенной модели Колмогорова для магнитной гидродинамики, линии из чёрных точек — модели, основанной на взаимной спиральности магнитного поля и поля скорости, линии из плюсов — модели подобия масштабов, штрихпунктирные линии — смешанной модели для МГД-случая. Для обозначения результатов DNS используются линии из ромбов.

описать диссипацию энергии крупномасштабного движения. Как ожидалось, результаты для случая без подсеточных моделей оказываются наименее точными при сравнении с результатами DNS. Как видно из рис. 2а и 2б, модель Колмогорова демонстрирует наименее точные результаты по сравнению с другими подсеточными моделями. Особенно сильное отклонение можно наблюдать в начальные промежутки времени, как это видно на рис. 2б для магнитной энергии и на рис. 2а для кинетической энергии. Модель подобия масштабов демонстрирует нехватку диссипации энергии на обоих рис. 2а, б, так же как и в случае гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости [122]. Другие подсеточные параметризации значительно улучшают точность вычислений.

Для магнитной гидродинамики заряженной жидкости важными являются не только временная динамика магнитной и кинетической энергий, но и эволюция взаимной спиральности магнитного поля и поля скорости. В этом случае, так же как и для кинетической и магнитной энергий, модель без подсеточной параметризации и модель подобия масштабов являются менее точными [60]. Другие модели обеспечивают хорошее согласование с результатами DNS (рис. 2в, г).

На рисунке 3а изображена молекулярная диссипация $\epsilon_\mu = 2\mu\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}$, которая всегда положительна, в зависимости от времени. На рисунке 3б представлено временное изменение подсеточной кинетической диссипации, определённой как $\chi_u = -\tau_{ij}^u\tilde{S}_{ij}$ и выбранной таким образом, что фильтрованная кинетическая энергия уменьшается, когда $\chi_u > 0$, и возрастает, когда $\chi_u < 0$ (соответствует обратному каскаду энергии). Значение χ_u определяет количество энергии, переносимое от крупномасштабной части к подсеточным масштабам, и χ_u зависит от SGS-модели, которая используется для нахождения подсеточного тензора τ_{ij}^u . На рисунке 3б подсеточная диссипация для случая без SGS-параметризации отсутствует, так как здесь не используется подсеточная параметризация. Как видно из рисунка, подсеточная диссипация для модели подобия масштабов до момента времени $t = 0,13$ наименьшая, поэтому такая модель не обеспечивает диссипацией должным образом кинетическую энергию и на рис. 2а модель подобия масштабов, как и случай без подсеточных параметризаций, показывают наихудшие результаты. Нехватку подсеточной диссипации частично компенсирует тот факт, что, как видно из рис. 3а, молекулярные диссипации модели подобия масштабов и без SGS-замыканий имеют несколько большее значение в

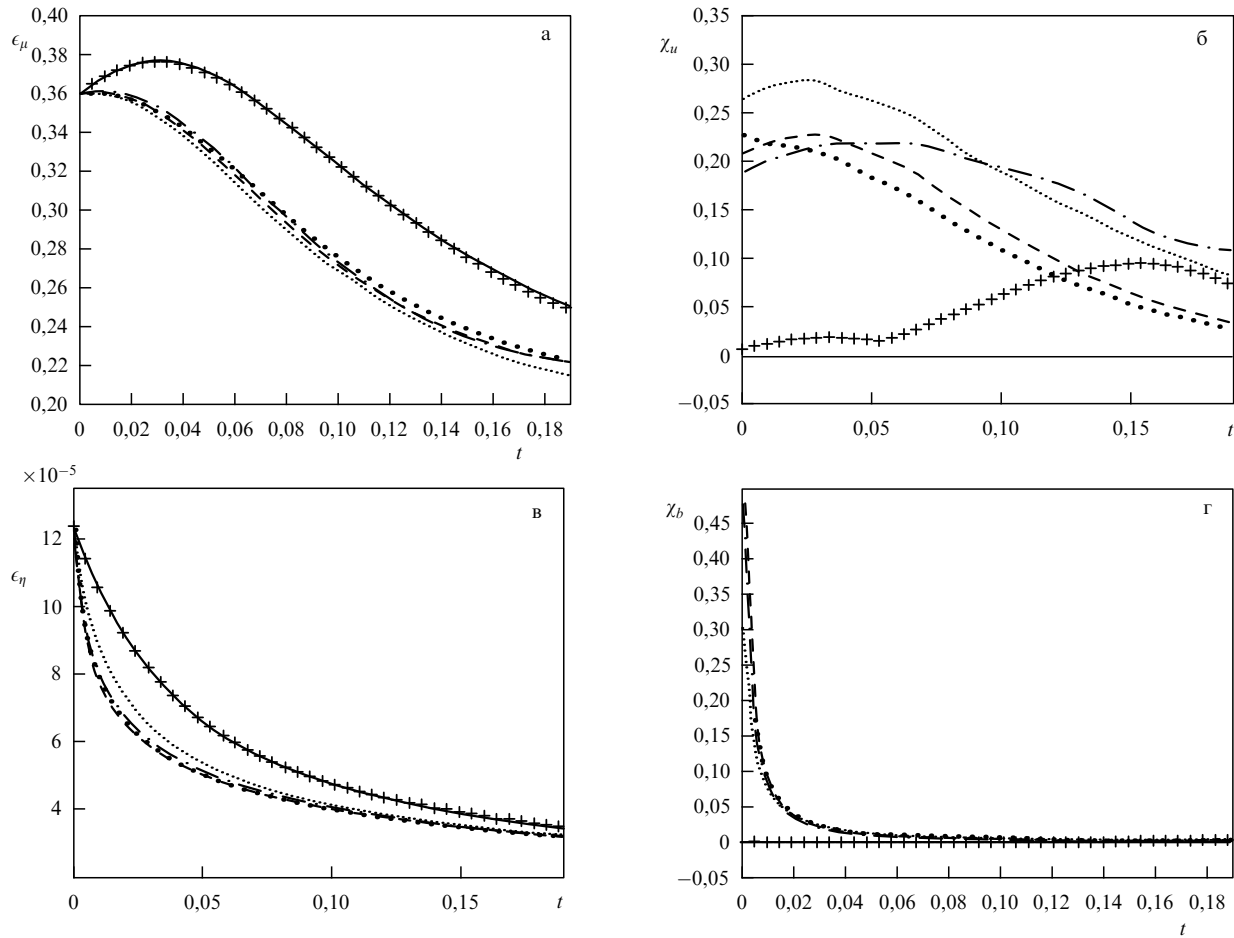


Рис. 3. Временная динамика диссипации (обозначения кривых такие же, как на рис. 2).

начальный промежуток времени, чем в остальных моделях. Самое большое значение подсеточной кинетической энергии демонстрируют модель Смагоринского и смешанная модель.

Магнитная молекулярная диссипация турбулентного поля находится из соотношения $\epsilon_\eta = \eta |\bar{j}|^2$, и её временная зависимость показана на рис. 3в. Магнитная подсеточная диссипация (рис. 3г) определяется как $\chi_b = -\tau_{ij}^b \bar{j}_{ij}$ и также представляет собой крупномасштабное уменьшение энергии вследствие влияния подсеточных масштабов, причём прямой каскад энергии наблюдается при $\chi_b > 0$ и обратный — при $\chi_b < 0$. Как и для кинетической энергии, молекулярная магнитная диссипация несколько больше для модели подобия масштабов и случая без SGS-параметризации, в то время как магнитная подсеточная энергия намного меньше для модели подобия масштабов, чем для остальных моделей (для случая без SGS-замыкания она, разумеется, равна нулю). Эти графики хорошо согласуются с графиком магнитной энергии на рис. 2б, где после $t = 0,1$ различие между результатами DNS и различными SGS-замыканиями незначительно, и на рис. 3г после $t = 0,1$ значение подсеточной магнитной диссипации для всех моделей почти одинаково и намного меньше, чем в начальной фазе вычислений.

Определим флуктуирующую часть скорости как $v_i = \tilde{u}_i - \langle \bar{\rho} \tilde{u}_i \rangle / \langle \bar{\rho} \rangle$, флуктуирующую часть магнитного поля — как $b_i = \tilde{B}_i - \langle \tilde{B}_i \rangle$ и сравним результаты подсеточных моделей с результатами DNS для турбулентных напря-

жений. Скобки $\langle . \rangle$ означают усреднение по пространству. На рисунке 4в показано изменение $\langle \bar{\rho} v_x v_x \rangle$ со временем, а на рис. 4а — компоненты тензора турбулентного напряжения $\langle \bar{\rho} v_x v_z \rangle$. Видно, что турбулентное напряжение при DNS диссипирует сильнее, причём для $\langle \bar{\rho} v_x v_x \rangle$ характерны сильные осцилляции (для наглядности на рис. 4в это показано серой линией). Как и для энергии, результаты вычислений без применения подсеточной параметризации демонстрируют наибольшее отклонение от результатов DNS. На рисунках 4б и 4г показаны магнитные турбулентные напряжения $\langle b_x b_z \rangle$ и $\langle b_x b_x \rangle$ соответственно, в расчётах DNS диссипация чуть меньше при увеличении времени вычисления, чем при применении LES. После $t = 0,15$ модель Смагоринского оказывается менее всего диссипативной для магнитных турбулентных напряжений, даже меньше, чем для случая без SGS-замыкания.

Для понимания структуры турбулентного МГД-течения, статистических свойств, перемежаемости рассматриваемого движения, важными параметрами являются асимметрия и пологость турбулентного течения, которые характеризуют анизотропию рассматриваемого движения жидкости. Асимметрия и пологость для компонент скорости определяются как

$$Su_j = \frac{\langle u_j^3 \rangle}{(\langle u_j^2 \rangle)^{3/2}}, \quad Ku_j = \frac{\langle u_j^4 \rangle}{(\langle u_j^2 \rangle)^2}. \quad (92)$$

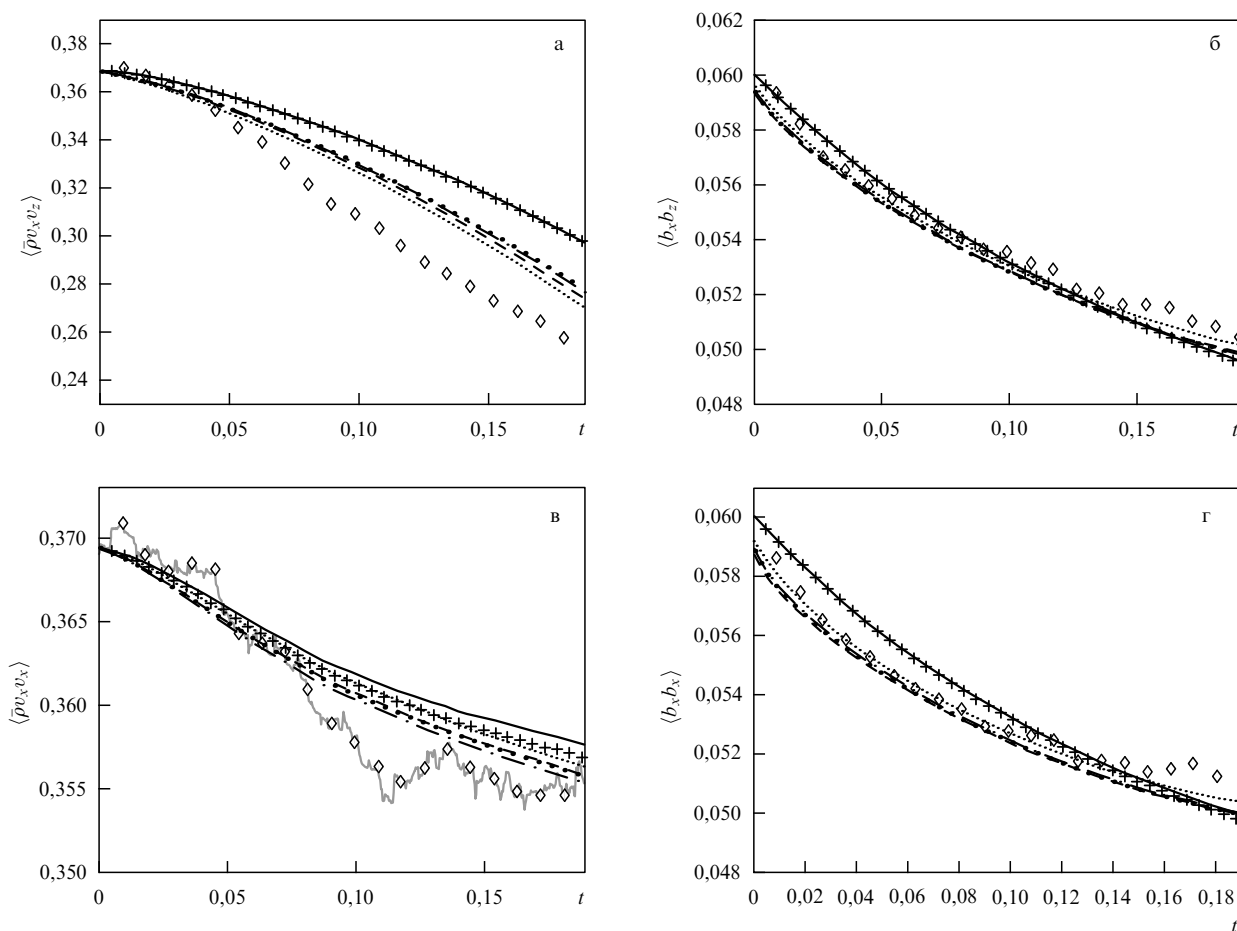


Рис. 4. Временная динамика турбулентных напряжений (обозначения кривых такие же, как на рис. 2).

Асимметрия и пологость для магнитного поля имеют вид соответственно

$$Sb_j = \frac{\langle B_j^3 \rangle}{(\langle B_j^2 \rangle)^{3/2}}, \quad Kb_j = \frac{\langle B_j^4 \rangle}{(\langle B_j^2 \rangle)^2}. \quad (93)$$

На рисунке 5 представлено сравнение различных подсеточных моделей LES с DNS для пологости. Если для магнитного поля разброс в результатах практически отсутствует и данные всех моделей почти совпадают с результатами DNS, то для скорости влияние выбора подсеточной параметризации оказывается более существенным. Модели подоби́я масштабов и случай без подсеточной параметризации демонстрируют самое большое отклонение от результатов DNS. На рисунке 6 приведена временная эволюция асимметрии. Интересно заметить, что асимметрия магнитного поля Sb_x и Sb_y (рис. 6б, г) и скорости Su_x и Su_z (рис. 6а, в) для модели подоби́я масштаба и для случая без SGS-замыкания, наоборот, оказываются ближе к результатам DNS.

В работе [63] подробно исследуется асимметрия, пологость компонент скорости и магнитного поля при различных значениях числа Рейнольдса, звукового числа Маха и магнитного числа Рейнольдса. Показано, что наилучшие результаты для изучения пологости и асимметрии компонент скорости и магнитного поля демонстрируют модель Смагоринского для МГД-случая и модель, основанная на перекрёстной спиральности между скоростью и магнитным полем. Из численных резуль-

татов видно, что для пологости и асимметрии скорости влияние выбора подсеточной параметризации оказывается более существенным, чем для тех же характеристик магнитного поля. В результате проведённого исследования показано, что метод LES обеспечивает адекватные результаты и может быть использован для изучения характеристик перемежаемости (например, структурных функций различных моментов скорости и магнитного поля) сжимаемых МГД-течений при различных числах подоби́я [63].

Важным тестом для метода LES является спектральное распределение кинетической и магнитной энергий, которое характеризует перераспределение энергии в зависимости от волнового вектора k (т.е. в зависимости от масштаба). Кроме того, спектр позволяет оценить влияние подсеточных замыканий при моделировании сжимаемого МГД-течения. На рисунках 2в, г представлены спектры кинетической и магнитной энергий соответственно. Заметно, что на больших масштабах (что соответствует маленьким значениям волнового вектора) все графики почти совпадают и различия между результатами подсеточных моделей практически отсутствуют, следовательно, наиболее крупные масштабы турбулентности фактически не зависят от SGS-параметризаций. Различия проявляются главным образом на мелких масштабах (при больших числах k). В целом спектр энергий подтверждает ранее полученные результаты для подсеточных замыканий. Спектр DNS находится в хорошем соответствии с моделями Смагоринского,

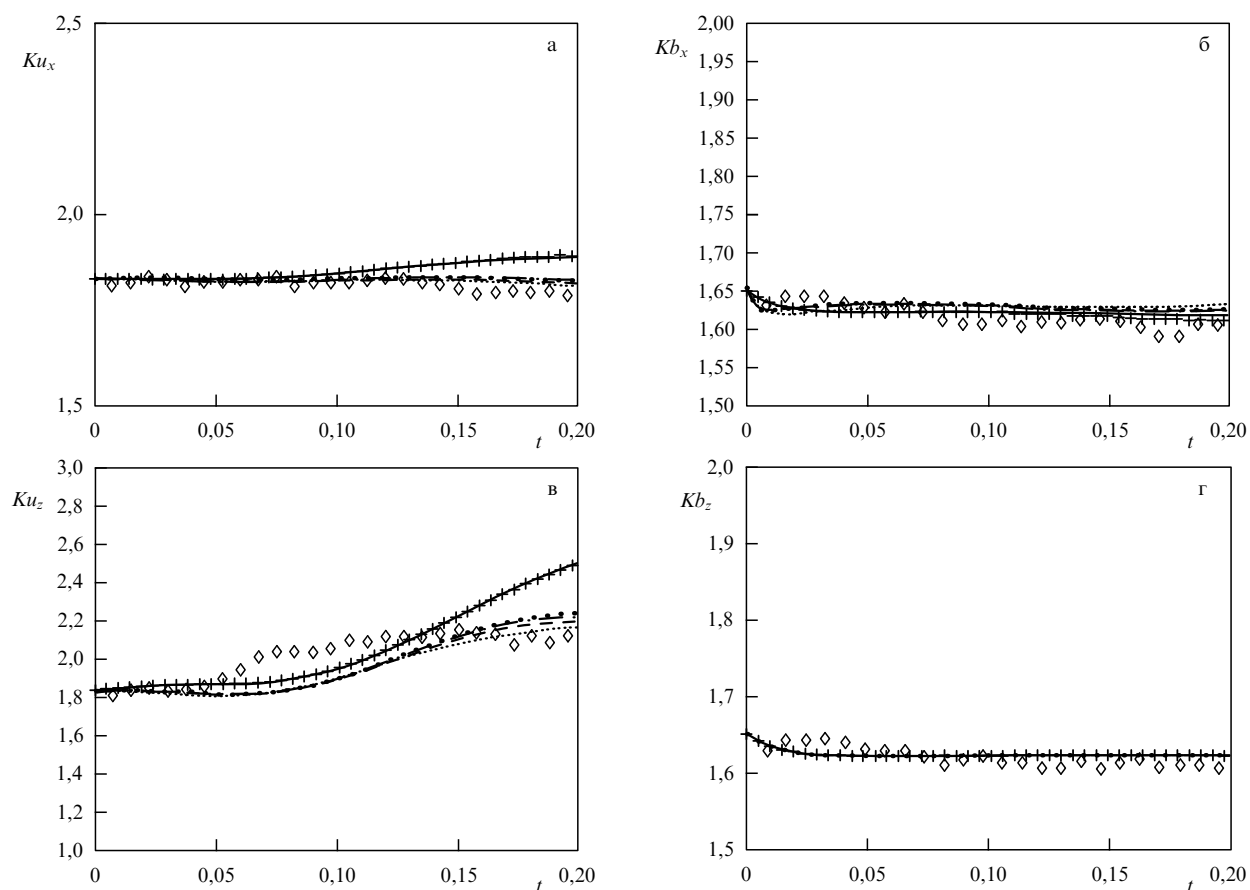


Рис. 5. Временная динамика пологости (обозначения кривых такие же, как на рис. 2).

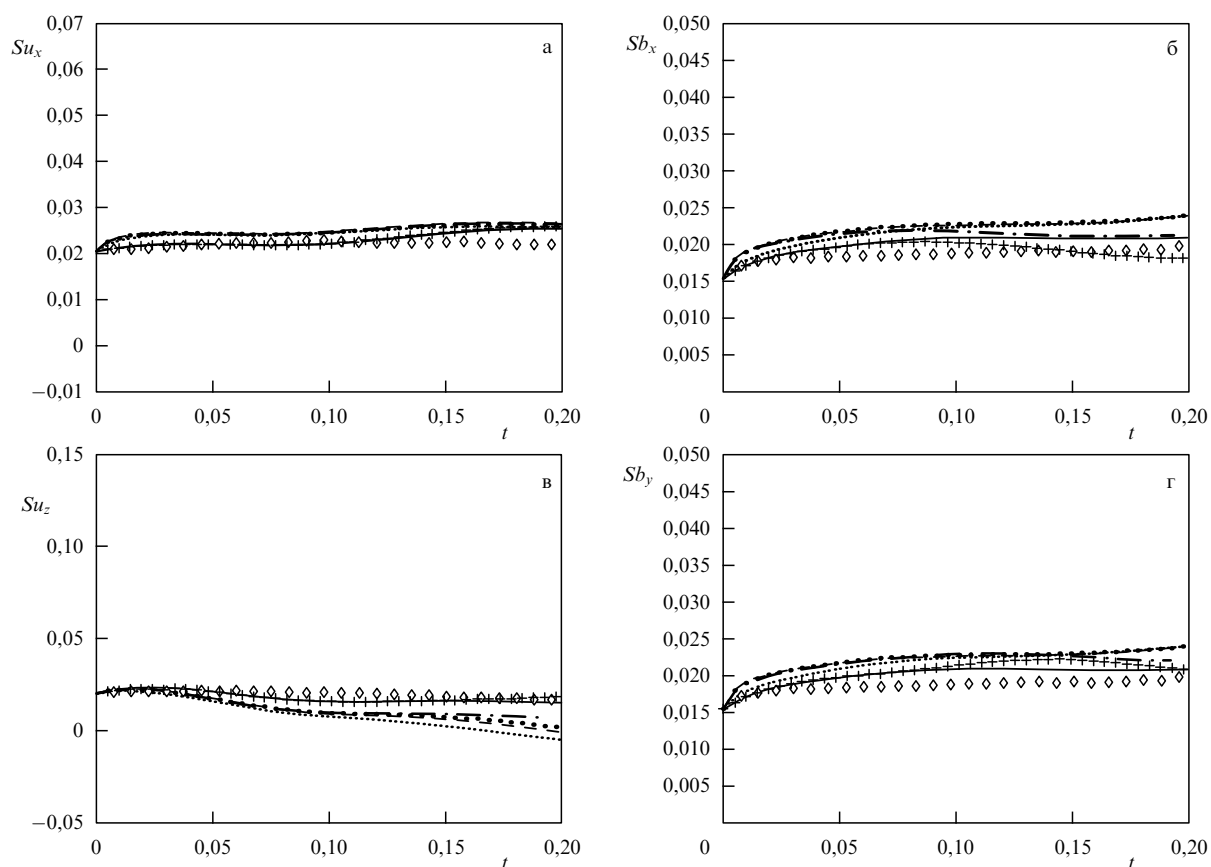


Рис. 6. Временная динамика асимметрии (обозначения кривых такие же, как на рис. 2).

Колмогорова, смешанной моделью и моделью, основанной на перекрёстной спиральности, причём особенно с двумя последними подсеточными моделями. Кроме того, заметно, что при моделировании с использованием модели подобия масштабов и без учёта подсеточных слагаемых не обеспечивается достаточное количество диссипации энергии, другими словами, для модели подобия масштабов и для случая без подсеточной параметризации характерно скопление энергии при больших значениях волнового вектора из-за нехватки диссипации. Данные выводы из спектрального распределения энергии подтверждают результаты, полученные при исследовании временной динамики кинетической и магнитной энергий.

В работе [60] показано, что при уменьшении магнитного числа Рейнольдса Re_m различие между подсеточными моделями уменьшается для магнитной энергии и все рассмотренные модели демонстрируют хорошее согласие с результатами DNS при малых значениях числа Re_m . При увеличении числа Рейнольдса возрастает роль подсеточных замыканий при моделировании сжимаемой МГД-турбулентности и уменьшается скорость диссипации магнитной энергии. Наилучшие результаты показывают модели Смагоринского, Колмогорова и модель, основанная на взаимной спиральности для эволюции магнитной энергии. Такое же поведение наблюдается и для взаимной спиральности: роль подсеточных параметризаций возрастает при увеличении Re_m . Для кинетической энергии при уменьшении магнитного числа Рейнольдса наблюдается большее расхождение в результатах LES при применении различных SGS-параметризаций. Модель подобия масштабов демонстрирует наихудшие результаты, остальные SGS-замыкания увеличивают точность расчётов [60]. Для временной динамики турбулентных напряжений, как магнитных, так и кинетических, характерно увеличение влияния на результаты моделирования МГД-турбулентности SGS-параметризаций при увеличении Re_m . Роль анизотропии в расчётах и расхождение результатов LES и DNS для анизотропии увеличиваются при уменьшении магнитного числа Рейнольдса. Стоит отметить, что при увеличении магнитного числа Рейнольдса Re_m кинетическая энергия уменьшается сильнее, а магнитная энергия, наоборот, слабее, такие же результаты были отмечены в работе [83], где исследовалось влияние Re_m на двумерную МГД-турбулентность методом DNS.

При изменении тейлоровского числа Рейнольдса Re_λ результаты расчётов ведут себя качественно похожим образом, это связано с тем, что начальные условия для магнитного поля и поля скоростей не изменялись, поэтому в вычислениях влияние тейлоровского числа Рейнольдса на выбор подсеточной параметризации является слабым [60]. Подсеточные модели Смагоринского, Колмогорова, смешанная модель и модель, основанная на взаимной спиральности скорости и магнитного поля, показывают адекватные результаты и хорошее приближение к результатам DNS.

Число Маха M_s оказывает существенное влияние на результаты вычислений. При возрастании M_s увеличивается расхождение результатов DNS и LES для кинетической энергии. Модель Смагоринского и модель, основанная на взаимной спиральности, для кинетической энергии показывают наилучшее согласование с DNS при различных числах Маха [60]. Для магнитной энер-

гии, наоборот, наблюдается уменьшение разброса в результатах при увеличении M_s . Следует заметить, что при уменьшении числа Маха магнитная энергия быстрее стремится к постоянному значению. Для взаимной спиральности магнитного поля и скорости модель Смагоринского показывает лучшие результаты как для больших чисел Маха, так и для маленьких. Асимметрия компонент скорости, рассчитанная с использованием LES, лучше совпадает с результатами DNS при увеличении M_s . Выбор SGS-параметризации практически не оказывает влияния на асимметрию компонент магнитного поля. При увеличении числа Маха турбулентные напряжения, рассчитанные при помощи LES, лучше согласуются с результатами DNS [60].

В общем случае подсеточные модели меньше всего оказывают влияние на временную эволюцию пологости и асимметрии (модель без подсеточных замыканий также демонстрирует сравнительно хорошее согласие с результатами DNS) [60, 63]. Это связано с тем, что анизотропия и перемежаемость являются свойствами крупномасштабных структур, а различия между SGS-моделями и моделью без подсеточных замыканий имеют место на мелких масштабах турбулентного течения.

В целом наилучшие результаты демонстрируют расширенная модель Смагоринского для МГД-случая и модель, основанная на взаимной спиральности магнитного поля и поля скоростей [60]. Модель подобия масштабов не обеспечивает достаточной диссипацией кинетическую и магнитную энергии, и эту модель следует использовать только вместе с моделями вихревой вязкости (например, с моделью Смагоринского), что является основной идеей смешанной модели.

3.9. Результаты численного моделирования для теплопроводящей плазмы

В работах [58, 62] представлены результаты расчётов сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности теплопроводящей плазмы методом LES при различных числах Маха. Полученные численные результаты LES проанализированы на основе сравнения с результатами численных экспериментов, выполненных прямым численным моделированием для теплопроводящей плазмы.

Численные методы, алгоритмы, схемы, а также вид фильтрационной функции для разделения турбулентности на мелкомасштабную и крупномасштабную, применяющиеся для расчётов сжимаемых МГД-течений методами LES и DNS, подробно описываются в работе [62], где в качестве подсеточной параметризации тензоров τ_{ij}^u и τ_{ij}^b использовалась расширенная модель Смагоринского для магнитной гидродинамики. Поскольку эффекты сжимаемости и временная динамика температуры, определяемая из уравнения полной энергии, нетривиально зависят от числа Маха, в работе [62] рассматриваются три случая: число Маха равно $M_s = 0,38$, т.е. течение умеренно сжимаемое; число Маха $M_s = 0,65$, когда сжимаемость играет существенную роль; $M_s = 1,45$, что соответствует появлению сильных разрывов в существенно сжимаемом течении.

Временная динамика кинетической и магнитной энергий для течения с числом Маха $M_s = 0,38$ показана на рис. 7а и 7б соответственно. Для более полного понимания влияния подсеточных моделей на уравнение энергии в уравнении полной энергии опущены SGS-слагаемые, а

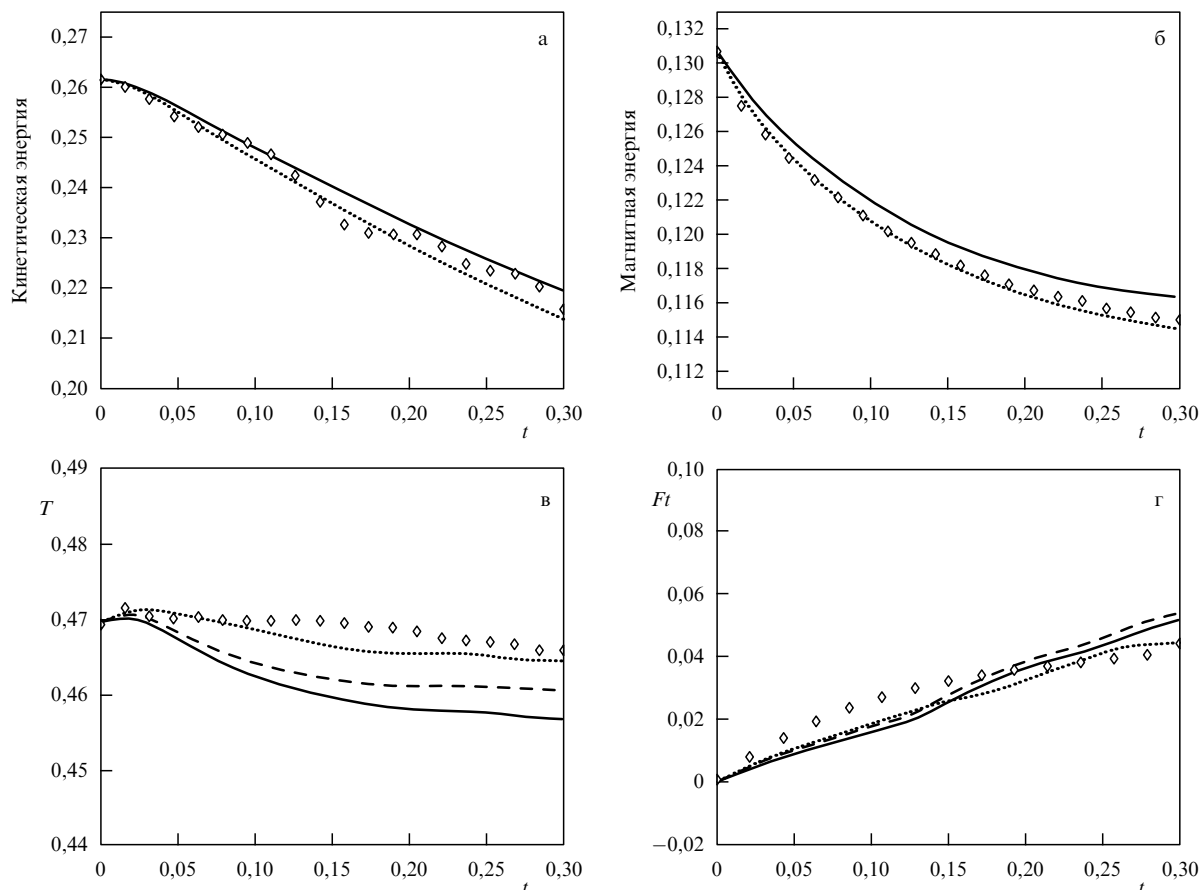


Рис. 7. Временная эволюция кинетической энергии (а), магнитной энергии (б) и температуры (в) для случая $M_s = 0,38$. Эволюция со временем параметра Ft для случая $M_s = 0,38$ (г). Линии из ромбов — результаты DNS, сплошные линии — результаты LES без подсеточных замыканий, пунктирные линии — LES со всеми SGS-параметризациями, штриховые линии — LES без SGS-параметризаций в уравнении энергии.

высчитываются только подсеточные тензоры в уравнениях сохранения количества движения и магнитной индукции.

На рисунках 7а, б видно, что учёт подсеточных параметризаций для кинетической и магнитной энергий приближает кривую LES к данным DNS, а следовательно, повышается точность расчётов. Подсеточные замыкания в уравнении полной энергии фактически не оказывают влияния на временную динамику магнитной и кинетической энергий. Из графиков видно, что линии для случая со всеми параметризациями совпадают с кривыми, соответствующими параметризациям только в уравнениях магнитной индукции и количества движения. Такое же поведение наблюдается и для случая взаимной спиральности между магнитным полем и скоростью [62]. Подсеточные модели для SGS-тензоров (42) и (43) заметно улучшают точность вычислений. Так же как и в случае магнитной и кинетической энергий, подсеточные параметризации в уравнении энергии не оказывают влияния на временную эволюцию взаимной спиральности.

На рисунке 7в представлена временная эволюция для средней температуры. В отличие от динамики магнитной и кинетической энергий, включение SGS-параметризаций в уравнении полной энергии заметно влияет на результаты численного эксперимента. Как видно из рис. 7в, наиболее точные результаты для средней температуры наблюдаются при учёте всех подсеточных

замыканий в полной системе отфильтрованных МГД-уравнений. Пренебрежение всеми SGS-параметризациями демонстрирует наибольшее отклонение от результатов DNS.

В работе [63] подробно рассмотрены влияние различных параметризаций и чисел подобия на асимметрию, пологость компонент магнитного поля и скорости, а также временная эволюция турбулентной интенсивности. При этом в работе [62] акцентируется внимание на поведении температуры (другими словами, на уравнении полной энергии), тем более, как было показано выше, учёт подсеточных слагаемых в уравнении энергии почти не оказывает влияния на точность вычисления кинетической и магнитной энергий. Температурная асимметрия слабо растёт со временем, и различия между графиками всех трёх случаев применения LES невелики. Данный факт свидетельствует о том, что анизотропия (главным образом — свойство крупномасштабных структур) и различия между SGS-замыканиями и моделью без подсеточных параметризаций имеют место в основном на мелких масштабах турбулентного течения [62].

Чтобы лучше понять поведение температуры и её флуктуаций при различных числах Маха в зависимости от SGS-замыканий, определим параметр, характеризующий флуктуации температуры, как

$$Ft = [\langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle]^{1/2}. \quad (94)$$

На рисунке 7г приведены графики изменения параметра Fl со временем. Более точные результаты численного эксперимента наблюдаются для LES с учётом всех подсеточных замыканий, что ещё раз показывает важность подсеточных моделей в уравнении полной энергии [62].

Необходимо отметить, что при увеличении числа Маха M_s возрастают влияние вязкости и роль нелинейных эффектов, что приводит к усилению осцилляций и флуктуаций характеристик турбулентного течения [62].

Показано, что учёт подсеточных слагаемых в уравнении полной энергии почти не оказывает никакого влияния на кинетическую и магнитную энергии даже при больших числах Маха, в то же время для температуры (соответственно и для внутренней энергии) наличие SGS-моделей в уравнении полной энергии является важным условием для повышения точности вычислений термодинамических величин [58, 62]. При увеличении значения числа Маха возрастают осцилляции кинетической энергии и температуры. Вообще, метод LES с использованием явной средневзвешенной фильтрации демонстрирует хорошие результаты при моделировании электро- и теплопроводящей плазмы в сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности при различных числах Маха.

4. Исследование свойств турбулентности локальной межзвёздной среды методом подсеточного моделирования

В данном разделе представлена МГД-модель локальной межзвёздной среды и характерные величины, которые используются при численном моделировании сжимаемой МГД-турбулентности при помощи метода крупных вихрей.

Межзвёздная среда — это вещество и поля, наблюдаемые в пространстве между звёздами внутри галактик. Лишь сравнительно недавно удалось доказать, что звёзды существуют не в абсолютной пустоте и что космическое пространство не вполне прозрачно. Наличие поглощающей разрежённой среды было убедительно показано менее 100 лет назад, в первой половине XX в., путём сравнения наблюдаемых свойств далёких звёздных скоплений на различных расстояниях от нас. Межзвёздная среда нашей Галактики, непосредственно примыкающая к Солнечной системе, называется локальной (местной) межзвёздной средой. Межзвёздная среда нашей Галактики оказывает сильное влияние на Солнечную систему. Параметры газа среды во многом определяют структуру гелиосферы, или области, заполненной солнечным ветром.

Сильно ионизированный газ в космических условиях находится в непрерывном движении, которое носит нерегулярный характер. Даже если имеется регулярное движение (например, дифференциальные вращения, солнечный/звёздный ветер, аккреция), то на него накладываются флуктуации. При таком движении скорость представляет собой случайное поле, её величина и направление меняются хаотичным образом. Распространённость турбулентности в космических условиях, а именно в межзвёздной среде, связана в первую очередь с тем, что число Рейнольдса Re очень велико вследствие огромных размеров большинства космических объектов.

При достаточно мощном источнике энерговыделения, когда скорость движения вещества превышает скорости распространения любых линейных возмущений в рассматриваемой среде (т.е. звуковую и альвеновскую скорости), турбулентность становится сверхзвуковой. Анализ наблюдательных данных [90] даёт степенную зависимость для спектров скорости и плотности, близкую к закону Колмогорова–Обухова [123–126]. Основные источники энергии и импульса МГД-турбулентности в межзвёздной среде — это крупномасштабные движения газа и звёздной подсистемы, а также активные процессы в звёздах и звёздных скоплениях [127]. Полученные результаты со спутниковых данных стали неожиданными, так как спектр колмогоровского типа $k^{-5/3}$ был теоретически получен для несжимаемой гидродинамической среды, а межзвёздная турбулентность является магнитогиродинамической и существенно сжимаемой, поэтому основной задачей является понимание причин возникновения колмогоровского спектра для флуктуаций плотности и кинетической энергии в локальной межзвёздной турбулентности. Решение данной задачи значительно усложняется тем, что межзвёздная среда недоступна для непосредственного наблюдения и экспериментов, численные исследования МГД-турбулентности на космических масштабах ограничены современными вычислительными ресурсами, так как для таких процессов характерны очень большие числа Рейнольдса и, как следствие, числа степеней свободы турбулентного движения. Для такого рода течений в локальной межзвёздной среде удобно применить описанный выше метод LES для сжимаемой МГД-турбулентности. В работе [94] впервые турбулентность в локальной межзвёздной среде изучалась методом LES, что позволило получить новые результаты о спектрах флуктуаций плотности и энергии МГД-турбулентности.

Статистически однородная, изотропная плазма в локальной межзвёздной среде описывается одножидкостной магнитогиродинамической моделью для политропной плазмы [94].

Величины, возникающие после нормировки при введении к безразмерному виду исходных уравнений, связаны с крупномасштабными плазменными движениями. Также существуют турбулентные скорости, числа Маха и Рейнольдса, зависящие локально от мелкомасштабных структур и относительно высоких частотных флуктуаций. Крупномасштабное течение, или постоянное среднее фоновое течение, приводит, как правило, к постоянному значению числа Маха, в то время как локальные флуктуирующие вихри изменяют турбулентное число Маха, зависящее от локальных свойств мелкомасштабных турбулентных флуктуаций.

Определим скорость звука для мелкомасштабных турбулентных течений следующим образом:

$$\check{c}_s = \sqrt{\gamma} \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad (95)$$

и турбулентное гидродинамическое число Маха —

$$M_s = \frac{\sqrt{\langle |u|^2 \rangle}}{\check{c}_s}. \quad (96)$$

Флуктуирующая альвеновская скорость $\check{u}_a = \check{B}/\sqrt{4\pi\check{\rho}}$, следовательно, турбулентное альвеновское число Маха

записывается как

$$\tilde{M}_a = \frac{\sqrt{\langle |u|^2 \rangle}}{\tilde{u}_a}. \quad (97)$$

Здесь $u_{rms} = \sqrt{\langle |u|^2 \rangle}$ является среднеквадратичной скоростью. Турбулентные числа Рейнольдса и плазменный параметр β определяются аналогично. Заметим, что исследование эволюции локальных значений данных величин является важным для понимания флуктуаций характеристик турбулентного МГД-течения в локальной межзвёздной среде.

Для изучения сжимаемой турбулентности в локальной межзвёздной среде проводится трёхмерное численное моделирование затухающей МГД-турбулентности. Численные методы, схемы и алгоритмы подробно описаны в работах [64, 94]. При исследовании локальной межзвёздной турбулентности используется метод LES для решения системы уравнений сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности (22)–(24), в качестве подсеточной параметризации применяется расширенная модель Смагоринского для МГД-случая, которая продемонстрировала достаточно точные результаты при различных числах подобия, как было показано в разделе 3. Начальные изотропные турбулентные спектры для кинетической и магнитной энергий определяются в фурье-пространстве и выбраны близкими к спектру k^{-2} со случайными амплитудой и фазами по всем трём направлениям. Выбор именно такого спектра в качестве начальных условий обусловлен тем, что возмущения скорости в фурье-пространстве аналогичны возмущениям в развитой турбулентности и поэтому могут быть использованы для моделирования развитой турбулентности в начальный момент времени [4, 128]. Выбор спектра k^{-2} (спектра бургерсовской турбулентности) также определён физическими соображениями его быстрой сходимости к спектру k^{-3} посредством прямого каскада энергии в гидродинамической турбулентности [89]. К тому же разрывные ударные волны также будут иметь подобный энергетический спектр (вследствие фурье-преобразования ступенчатой функции) и фурье-преобразование разрывных волн не изменит данный спектр. Тем не менее большинство распределений со спектром k^{-2} не содержат ударных волн [4, 129]. Затем с использованием обратного преобразования Фурье получены начальные условия для скорости и магнитного поля. Расчётная область представляет собой трёхмерный куб с линейными размерами π . Для получения результатов LES использовалась сетка с плотностью дискретизации 64^3 . Начальное гидродинамическое число Рейнольдса $Re \approx 1000$ и магнитное число Рейнольдса $Re_m \approx 200$. Число Re берётся большим Re_m , вследствие того что в межзвёздной среде могут возникать эффекты амбиполярной диффузии, а это приводит к повышенному значению магнитной диффузии и, как следствие, к пониженной величине Re_m [29]. Другие параметры, которые использовались при моделировании турбулентности локальной межзвёздной среды, имеют следующие значения: альвеновское число Маха и звуковое число Маха $M_a \approx M_s \approx 2,2$, отношение теплоёмкостей $\gamma = 5/3$, шаг по времени $dt = 0,3 \times 10^{-3}$. На всех границах расчётной области выполнялись периодические граничные условия. Небольшие изменения в начальных условиях не влияют качественно на результаты вычислений. Такие же вы-

воды о слабом влиянии начальных параметров были сделаны в статье [79].

4.1. Анализ результатов моделирования и теоретическая интерпретация

В данном разделе представлены результаты расчётов сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности локальной межзвёздной среды методом крупных вихрей. Численные результаты анализируются и приводятся теоретические обоснования полученных результатов.

4.1.1. Свойства сжимаемости среды. Сжимаемая МГД-турбулентность эволюционирует под влиянием нелинейных взаимодействий, в которых более крупные вихри переносят энергию к более мелким посредством прямого турбулентного каскада энергии. МГД-турбулентность диссипирует из-за конечного значения числа Рейнольдса и затухания мелкомасштабного движения, вследствие того что вязкие напряжения сдвига выполняют работу. Временная эволюция турбулентного гидродинамического числа Маха M_s показана на рис. 8. Видно, что локальное мелкомасштабное число Маха затухает от сверхзвукового значения ($M_s > 1$) до дозвукового ($M_s < 1$). Этот факт указывает на то, что турбулентный каскад, связанный с нелинейными взаимодействиями в комбинации с диссипативными эффектами на мелких масштабах, приводит к тому, что сверхзвуковые плазменные флуктуации затухают достаточно сильно к дозвуковым флуктуациям в электропроводящем течении и турбулентность становится умеренно сжимаемой. На рисунке 9 показана временная эволюция дивергенции скорости $\text{div } \mathbf{u} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3$. Для несжимаемой среды выполняется условие $\text{div } \mathbf{u} = 0$, следующее из уравнения неразрывности. Из рисунка 9 видно, что дивергенция скорости затухает достаточно быстро и стремится к нулю (но не равна нулю), т.е. существенно сжимаемое турбулентное течение становится слабо сжимаемым. Это соответствует выводам и результатам, полученным из рис. 8 для локального мелкомасштабного турбулентного числа Маха M_s . Таким образом, в

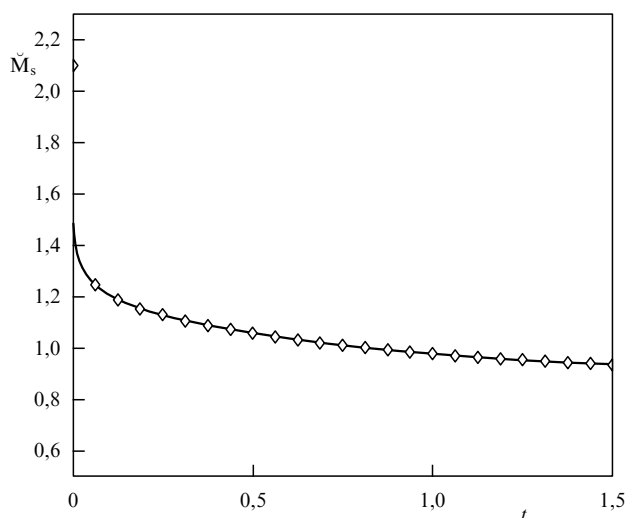


Рис. 8. Затухание турбулентного мелкомасштабного числа Маха M_s со временем. Наблюдается переход из сверхзвукового режима $M_s > 1$ в дозвуковой $M_s < 1$.

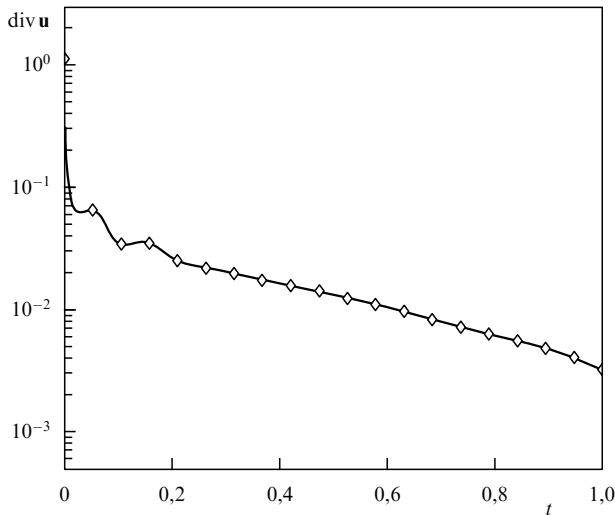


Рис. 9. Временная динамика дивергенции скорости $\text{div } \mathbf{u}$. Дивергенция скорости, характеризующая сжимаемость среды, затухает, и течение становится слабо сжимаемым со временем.

локальной межзвёздной среде сжимаемое магнито-гидродинамическое течение со сверхзвуковым значением числа Маха становится дозвуковым движением электропроводящей жидкости с незначительным вкладом соленоидальной компоненты скорости, т.е. при $\text{div } \mathbf{u} \ll 1$.

Полученные результаты соответствуют результатам асимптотического анализа и оценкам, выполненным в работе [79], в которой показано, что существенно сжимаемая МГД-плазма стремится эволюционировать к умеренно сжимаемому течению с уменьшением дивергенции скорости в затухающей турбулентности, т.е. $\text{div } \mathbf{u} \rightarrow 0$ (или $|iku_k| \ll 1$ в фурье-пространстве).

4.1.2. Динамика намагниченности плазмы. Переход МГД-плазмы от существенно сжимаемого турбулентного течения к умеренно сжимаемому течению в межзвёздной среде не только преобразует сверхзвуковое движение в дозвуковое, но также приводит к ослаблению намагниченности плазмы. Это можно увидеть из временной эволюции турбулентного плазменного параметра β , которая показана на рис. 10. Плазменный параметр бета — это отношение плазменного давления к давлению магнитного поля, определённое как $\beta_0 = 8\pi p_0/B_0$. На рисунке 10 видно, что в начальный промежуток времени плазменное давление не превышает магнитного давления (т.е. $\beta \leq 1$) в сильно сжимаемой магнито-гидродинамической плазме. Затем, когда существенно сжимаемые плазменные флуктуации затухают (как хорошо видно из рис. 8 и 9), намагниченность плазмы уменьшается и плазменный параметр увеличивается от низкого значения ($\beta \leq 1$) до высокого ($\beta > 1$). Из этого следует, что плазменное давление превышает магнитную энергию. В инерционном интервале турбулентности можно записать соотношение

$$kd \geq 1 > k_0 \lambda_{\text{mfp}}, \quad (98)$$

где d — ионный гирорадиус, $k_0 \sim 1/L_0$, L_0 — интегральный масштаб, λ_{mfp} — средняя длина свободного пробега. Физически неравенства (98) означают, что частицы

плазмы, связанные с магнитными силовыми линиями, выталкиваются с их гироорбит вследствие того, что увеличивается доминирующая роль плазменного давления по сравнению с магнитной энергией. Это приводит в конечном счёте к ослаблению намагниченности плазмы, а следовательно, и плазменных флуктуаций, и переходу к режиму с $\beta > 1$ и дозвуковому слабо сжимаемому течению. Преобразование мод — ещё один фактор, который частично объясняет переход МГД-плазмы от сильно сжимаемого к слабо сжимаемому состоянию. Турбулентный плазменный параметр β может быть записан в виде

$$\beta \simeq \frac{8\pi \tilde{p}}{\tilde{B}^2} \sim \frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{u}_a^2} \sim \frac{\tilde{M}_a^2}{M_s^2}. \quad (99)$$

Поскольку МГД-плазма эволюционирует в режим с $\beta > 1$, альвеновское турбулентное мелкомасштабное число Маха M_a уменьшается. Монотонное уменьшение M_s (в соответствии с рис. 8) отвечает более высокому значению β , т.е. МГД-течение становится всё более и более слабо сжимаемым. Также из временной динамики сжимаемого магнито-гидродинамического течения следует, что магнитозвуковые флуктуации ослабевают быстрее, чем альвеновские (альвеновские моды, тем не менее, тоже затухают вследствие диссипации). Этот вывод совпадает с полученным ранее теоретически в работах [79, 93].

Постепенное увеличение турбулентного плазменного параметра β , кроме того, приводит к изменению скорости турбулентного каскада в дозвуковом режиме сжимаемой МГД-плазмы. Состояние турбулентного течения с высоким значением плазменного параметра β подразумевает, что сдвиговые альвеновские моды распространяются медленнее, чем звуковые волны. Таким образом, магнито-гидродинамические возмущения в установившемся состоянии упорядочены по скоростям следующим образом:

$$\tilde{u} < \tilde{u}_a < \tilde{c}_s. \quad (100)$$

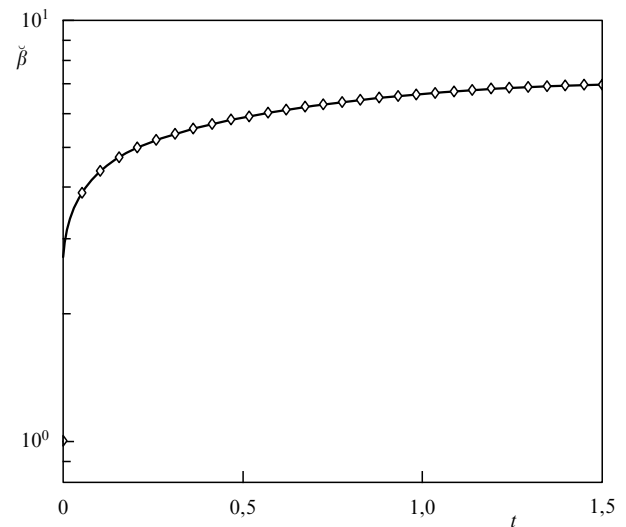


Рис. 10. Временная эволюция турбулентного плазменного параметра β в сжимаемой МГД-турбулентности. Плазма из сильно намагниченной в начальный промежуток времени становится менее намагниченной со временем.

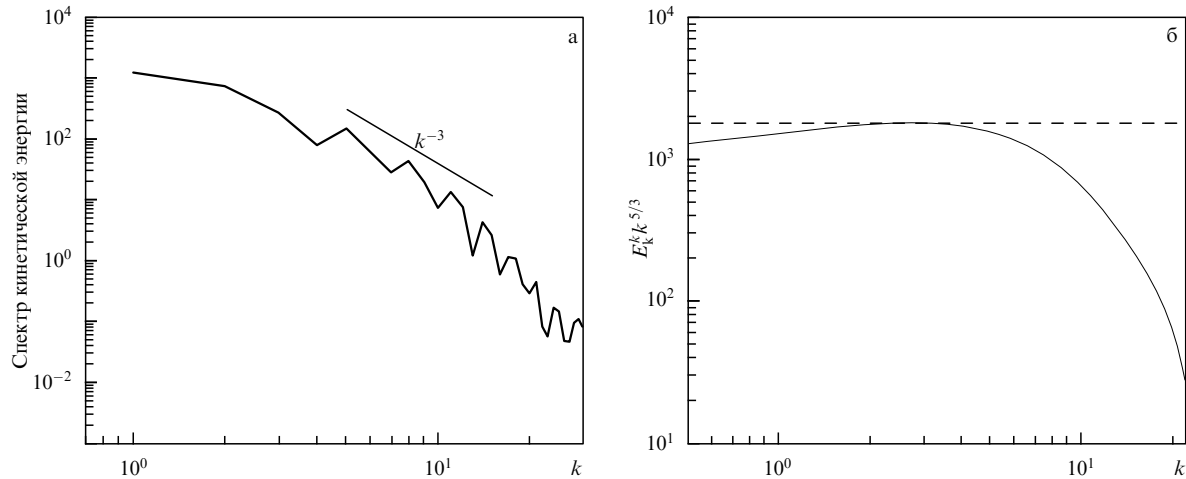


Рис. 11. (а) Спектр кинетической энергии. (б) Нормализованный (умноженный на $k^{5/3}$) сглаженный спектр кинетической энергии. Видно, что степенной показатель спектра близок к k^{-3} для большей части турбулентного каскада. Однако существует чётко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа $k^{-5/3}$.

Временные масштабы нелинейных взаимодействий для этих неравенств записываются в следующем виде:

$$\tau_s < \tau_a < \tau_{NL}, \quad (101)$$

где τ_s , τ_a и τ_{NL} обозначают соответственно магнитозвуковой временной масштаб, альвеновский масштаб времени и масштаб времени, за который вихрь совершает один оборот. Данные неравенства (101) указывают на то, что нелинейное время взаимодействий для альвеновских мод увеличивается по сравнению с магнитозвуковыми модами. Следовательно, плазменное движение становится слабо сжимаемым на альвеновском временном масштабе. В процессе постепенного перехода к режиму слабой сжимаемости сжимаемые быстрые/медленные магнитозвуковые моды слабо связаны с альвеновскими модами [79]. Поэтому в каскаде постепенно начинают доминировать сдвиговые альвеновские моды (которые в основном являются несжимаемыми), в то время как сжимаемые быстрые/медленные магнитозвуковые волны подавляют нелинейные каскады, диссипируя продольные флуктуации, что приводит к анизотропии МГД-турбулентности (подробно эффекты анизотропии будут рассмотрены ниже в разделе 4.1.4). Если замагниченность сжимаемой плазмы уменьшается и турбулентное плазменное давление со временем становится намного больше, чем турбулентная магнитная энергия, то возмущения являются главным образом ненамагниченными, т.е. ситуация аналогична гидродинамическому случаю. Таким образом, флуктуирующее магнитное поле становится в итоге достаточно слабым и почти не влияет на скорость диссипации турбулентной энергии.

4.1.3. Спектры турбулентности локальной межзвёздной среды. Данные наблюдений показывают, что флуктуации плотности в локальной межзвёздной среде демонстрируют спектр колмогоровского типа в широком диапазоне турбулентных масштабов [90, 91, 130]. В межзвёздной плазменной турбулентности флуктуации плотности случайны как по пространству, так и по времени. Подобные результаты были получены численно в рамках приближения "почти несжимаемой" среды [89, 131].

На рисунке 11а показан спектр кинетической энергии для $t = 1,45$ при турбулентном числе Маха $M_s < 1$ (режим дозвуковой турбулентности), который имеет показатель степени, близкий к k^{-3} , в широком диапазоне масштабов, что соответствует диссипативному интервалу турбулентности. Однако существует чётко выраженный инерционный интервал турбулентности с колмогоровским спектром $k^{-5/3}$. Для того чтобы показать существование такого интервала и определить, при каких волновых числах он возникает, на рис. 11б изображён нормализованный (т.е. по оси y откладывается произведение $E_k^k k^{5/3}$, где E_k^k — кинетическая энергия в фурье-пространстве, k — волновой вектор), сглаженный спектр кинетической энергии. Видно, что при $2 \leq k \leq 5$ существует инерционный интервал с колмогоровским спектром.

На рисунке 12а приведены спектр плотности и спектр флуктуаций плотности. Оба графика на этом рисунке демонстрируют степенной закон распределения в фурье-пространстве, а именно k^{-3} , что соответствует спектру в диссипативном интервале колмогоровской турбулентности в режиме прямого каскада энергии для затухающей турбулентности. Нормализованный сглаженный спектр флуктуаций плотности $P^k k^{5/3}$ показан на рис. 12б. Заметно, что, как и для спектра кинетической энергии, существует интервал, который можно приближённо аппроксимировать колмогоровским спектром $k^{-5/3}$, причём практически при таких же волновых числах $2 \leq k \leq 5$. В целом спектр флуктуаций плотности демонстрирует такое же поведение в фурье-пространстве, как и спектр кинетической энергии (см. рис. 11). Таким образом, можно сделать вывод, что флуктуации плотности являются пассивной примесью в умеренно сжимаемом течении дозвуковой турбулентности. Теоретические модели турбулентности, кроме того, предполагают, что любая физическая характеристика течения, которая пассивно распространяется в поле фоновой турбулентности, демонстрирует схожий спектр [132].

Изменение спектра полной энергии (суммы магнитной и кинетической энергий) со временем показано на рис. 13. Видно, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности. Амплитуда спектра также убывает, что соответствует диссипа-

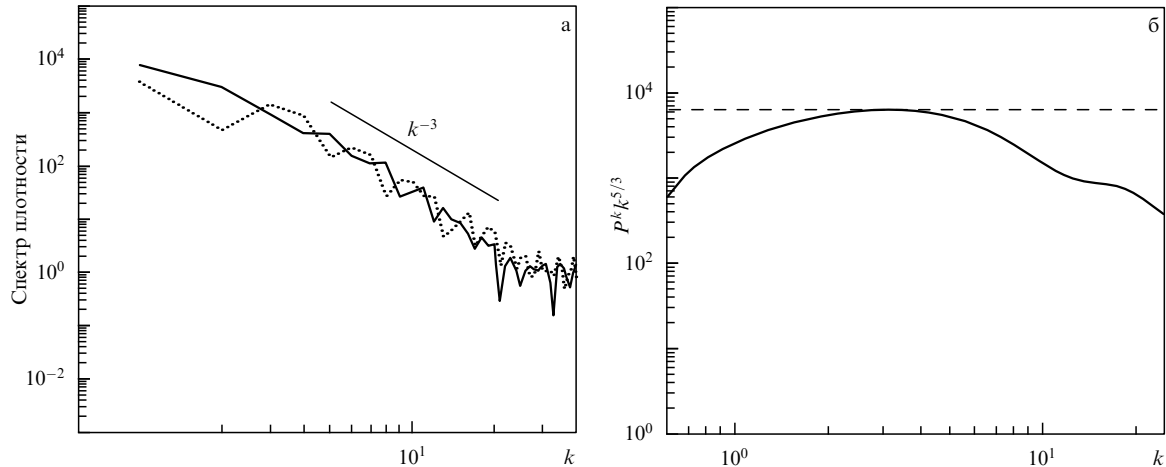


Рис. 12. (а) Спектр плотности (сплошная линия) и спектр флуктуаций плотности (пунктирная линия). (б) Нормализованный (умноженный на $k^{5/3}$) сглаженный спектр флуктуаций плотности. На рисунке а оба графика имеют показатель спектра, близкий к k^{-3} . Также существует чётко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа $k^{-5/3}$ для флуктуаций плотности, что подтверждают наблюдательные данные.

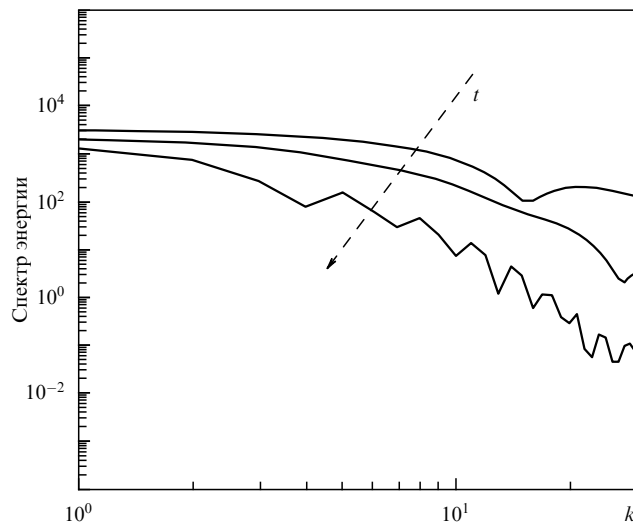


Рис. 13. Изменение спектра энергии со временем. Временное направление показано на рисунке штриховой линией.

ции рассматриваемого сжимаемого течения. Заметно, что увеличивается диссипативный интервал в энергетическом каскаде и уменьшается инерционный интервал, что соответствует уменьшению со временем гидродинамического числа Рейнольдса в затухающей турбулентности (инерционный интервал турбулентности прямо пропорционален числу Рейнольдса).

4.1.4. Свойства анизотропии турбулентности. Колмогоровская модель турбулентности предполагает независимость между крупными и малыми масштабами и приводит к изотропии мелкомасштабного течения [123, 124]. Колмогоров предположил, что при прохождении энергии от крупных масштабов до мелких будет теряться информация о механизме её генерации. Если число шагов в энергетическом каскаде велико, можно предположить, что будет утеряна вся информация. Наименьшие масштабы "могут знать" только о том, как много энергии ими приобретается, и можно ожидать, что они будут изотропными, потерявшими всю информацию об анизотропии энергосодержащих масштабов. Турбулентность в межзвёздной среде является анизотропной, что было

показано как теоретически, так и по данным наблюдений [88, 90]. В работах [64, 94] демонстрируется, что крупномасштабное течение в сжимаемой МГД-турбулентности является анизотропным по сравнению с мелкомасштабным. Численное моделирование в работе [94] показывает различное поведение компонент скорости в спектральном каскаде при малых волновых числах k для x -, y - и z -компонент поля скорости, а также почти отсутствие различий при больших фурье-модах, что означает возникновение турбулентных анизотропных каскадов главным образом на больших масштабах. Таким образом, в локальной межзвёздной среде крупномасштабная развитая турбулентность является анизотропной, что подтверждают результаты работ [88, 89].

Для оценки степени анизотропии и симметрии течения используем угол Шебалина [133] (или другое название — анизотропный угол), который определяется как

$$\tan^2 \theta_u = 2 \frac{G_{xx}^u + G_{xy}^u + G_{xz}^u}{G_{yx}^u + G_{yy}^u + G_{yz}^u}, \quad (102)$$

$$\tan^2 \theta_b = 2 \frac{G_{xx}^b + G_{xy}^b + G_{xz}^b}{G_{yx}^b + G_{yy}^b + G_{yz}^b}, \quad (103)$$

где $G_{ij}^u = \langle \partial u_j / \partial x_i \rangle$ и $G_{ij}^b = \langle \partial B_j / \partial x_i \rangle$. Для изотропной турбулентности $\theta = \arctan \sqrt{2} \approx 54^\circ \approx 1$ рад. На рисунке 14 показаны изменения со временем t анизотропного угла θ_u (для скорости) и θ_b (для магнитного поля), характеризующие крупномасштабные структуры. После начального временного интервала анизотропия и скорости, и магнитного поля почти не меняется и достигает некоторого уровня насыщения.

При низких значениях плазменного параметра β , когда роль магнитной энергии существенна, анизотропия и нарушения симметрии вызваны в первую очередь магнитным полем. При больших значениях β , когда роль магнитного поля невелика, каскады анизотропной турбулентности наблюдаются из-за распространения сжимаемых акустических мод, которые препятствуют спектральному переносу в локальном фурье-пространстве. Эти моды в МГД-турбулентности могут быть возбуждены либо крупными масштабами, либо внешней скоростью фоновой турбулентности [88].

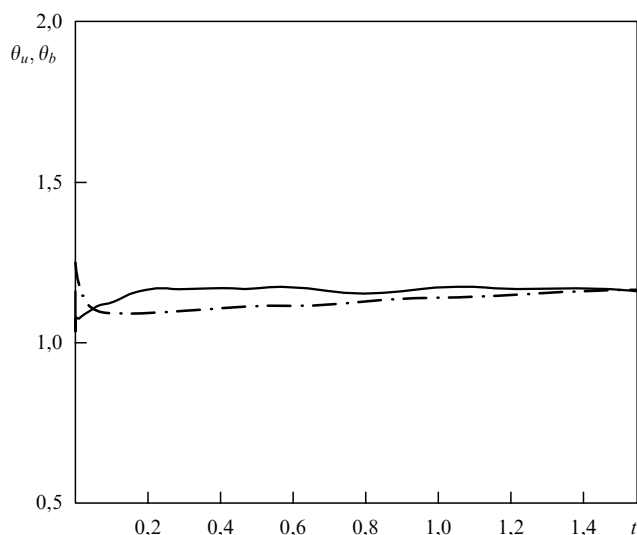


Рис. 14. Временная эволюция анизотропного угла для скорости θ_u (сплошная линия) и магнитного поля θ_b (штрихпунктирная линия).

Суммируя результаты моделирования локального межзвёздного газа, можно сказать, что исследовалась сжимаемая МГД-турбулентность в локальной межзвёздной среде методом LES для решения системы магнитогидродинамических уравнений. Несмотря на то что для локальной межзвёздной среды характерны сверхзвуковые течения с высокими крупномасштабными числами Маха, существуют также дозвуковые флуктуации слабо сжимаемых компонент межзвёздной среды. Именно эти слабо сжимаемые дозвуковые флуктуации отвечают за появление спектра колмогоровского типа в локальной межзвёздной турбулентности, который наблюдается в экспериментальных данных. Показано, что флуктуации плотности являются пассивным скаляром в поле скорости в умеренно сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности и демонстрируют колмогоровский спектр в диссипативном интервале энергетического каскада. Это позволило подтвердить гипотезу о слабосжимаемой природе флуктуаций плотности, наблюдаемых в локальной межзвёздной среде. Показатели степенного спектра для плотности и кинетической энергии почти совпадают и близки к k^{-3} для сжимаемой затухающей МГД-турбулентности. Также продемонстрировано изменение со временем спектра кинетической энергии, показывающего уменьшение энергосодержащих крупных вихрей и инерционного интервала, и увеличение диссипативного масштаба. Показано, что турбулентное число Маха значительно уменьшается от значения в сверхзвуковом режиме турбулентности ($M_s > 1$), где рассматриваемая среда является сильно сжимаемой, до дозвукового значения ($M_s < 1$), характеризующего слабо сжимаемое течение. Этот вывод об уменьшении роли сжимаемости в турбулентных флуктуациях подтверждается временной эволюцией дивергенции скорости, которая уменьшается и стремится к нулю (но не равна нулю). В локальной межзвёздной среде переход плазмы от существенно сжимаемого магнитогидродинамического турбулентного течения к умеренно сжимаемому течению не только преобразует сверхзвуковое движение в дозвуковое, но также приводит к ослаблению намагниченности плазмы, так как плазменный

параметр β увеличивается со временем, таким образом, роль магнитной энергии уменьшается по сравнению с влиянием давления плазмы. Также рассматривалась анизотропия турбулентного течения и было показано, что крупномасштабное течение проявляет анизотропные свойства, в то время как мелкомасштабные структуры являются изотропными.

Метод LES для изучения трёхмерной сжимаемой МГД-турбулентности позволил получить существенные результаты при исследовании локальной межзвёздной среды, а именно, были интерпретированы данные наблюдений и получены новые данные относительно спектров турбулентности локального межзвёздного газа [94].

5. Масштабно-инвариантные спектры МГД-турбулентности

В предыдущих разделах статьи обсуждался метод крупных вихрей для изучения сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности плазмы и была показана его применимость для исследования однородной вырождающейся турбулентности. Обсудим вопрос об адекватности метода LES для исследования физических процессов в сжимаемой МГД-турбулентности, вынуждаемой внешней силой. Дело в том, что для численного решения отфильтрованных уравнений метода крупных вихрей, так же как и для решения исходных уравнений прямого численного моделирования, в случае сжимаемой МГД-турбулентности наиболее адекватными являются конечно-разностные и конечно-объёмные методы в координатном пространстве [78, 83, 134, 135]. Решение исходных уравнений конечно-разностными методами, кроме того, позволяет естественным образом исследовать неоднородные и нестационарные турбулентные течения. Традиционный путь реализации внешней силы для сжимаемых МГД-течений опирается на опыт изучения турбулентности несжимаемой жидкости и основан на спектральном представлении внешней силы и последующем пересчёте заданной силы в координатное пространство [102, 103, 136]. Заметим, что в магнитной гидродинамике сжимаемой жидкости существуют четыре типа волн: альвеновские, медленные магнитозвуковые, быстрые магнитозвуковые и энтропийные [137, 138]. Спектры в инерционном интервале турбулентности в этом случае могут определяться более богатой картиной взаимодействия перечисленных типов волн, и для описания такой турбулентности при разных параметрах подобия традиционные виды внешней силы, основанные на локальных спектральных представлениях источника турбулентности, могут сильно упростить картину процессов в сжимаемой МГД-турбулентности плазмы. Проблема адекватности метода крупных вихрей в этом случае сводится не только и не столько к сравнению с методом прямого численного моделирования (что было сделано в наших работах [57–63, 94]), а скорее, к возможности воспроизведения масштабнo-инвариантных спектров Колмогорова и Ирошникова–Крейчмана в физических условиях их возникновения. Именно изучению этого важного аспекта метода крупных вихрей посвящён данный раздел.

В работах [65–68] для исследования сжимаемой МГД-турбулентности в инерционном интервале предполагается использовать линейную внешнюю силу, предложенную недавно в гидродинамике нейтральной несжи-

маемой жидкости [139–141]. Идея состоит в использовании силы, которая прямо пропорциональна флуктуирующей скорости. Данный подход определения вынуждающей силы получил название "линейный форсинг". Несмотря на несомненные преимущества этого метода, он всё ещё не нашел широкого применения в изучении турбулентности методами DNS и LES. Основное преимущество использования силы такого вида состоит, прежде всего, в том, что она действует на все масштабы в координатном пространстве и поэтому обеспечивает производство турбулентной кинетической энергии и адекватность стационарных решений с учётом накапливающихся в пространстве нелинейных взаимодействий волн [65, 67].

5.1. Основы теории масштабно-инвариантной МГД-турбулентности и методов её моделирования

Магнитогидродинамическая турбулентность плазмы, так же как и гидродинамическая турбулентность, обладает свойствами масштабной инвариантности в инерционном интервале [12, 13, 76, 117, 123–126, 142–157]. Существование полностью развитого турбулентного состояния возможно, если интегральный масштаб L и масштаб диссипации d различаются на несколько порядков величины ($L \gg d$). Согласно феноменологической теории Колмогорова, это состояние характеризуется двумя свойствами. Во-первых, скорость диссипации энергии не зависит от вязкости рассматриваемой жидкости, т.е. принимает конечное значение в пределе нулевой вязкости. Поскольку нелинейные взаимодействия вихрей не нарушают закон сохранения энергии, скорость диссипации ϵ должна быть равна скорости передачи энергии Π^0 в систему (т.е. $\Pi^0 = \epsilon$) либо от внешнего источника, либо от самых больших энергосодержащих вихрей, имеющих масштаб L . Во-вторых, энергия передаётся не непосредственно от наибольшего масштаба к диссипативному, а переносится вдоль спектра благодаря последовательным взаимодействиям между всё меньшими и меньшими масштабами, т.е. наблюдается каскад энергии. В этом каскаде вихри масштаба l распадаются на меньшие вихри, но воспроизводятся большими вихрями и т.д. Согласно теории Колмогорова предполагается, что все масштабы находятся в энергетическом равновесии, скорость диссипации энергии для вихрей размером l не зависит от масштаба l и равна ϵ : $\Pi(l) = \Pi^0 = \epsilon$. Если $\tau^*(l)$ — характерное время, необходимое вихрю размером l , чтобы передать свою энергию $E(l)$, то

$$\Pi(l) \approx \frac{E(l)}{\tau^*(l)}. \quad (104)$$

Поскольку в нейтральной жидкости перенос энергии обусловлен деформацией вихря под влиянием его собственного движения, время переноса равно времени его оборота τ_{nl} . Предполагая, что взаимодействия локальны в пространстве волновых чисел, это время можно записать как

$$\tau_{nl} \approx \frac{l}{u(l)}, \quad (105)$$

где $u(l)$ — характерный разброс скоростей внутри вихря. Используя соотношение $E(l) \approx u^2(l)$, получим $E(l) \approx \epsilon^{2/3}$. Учитывая, что $k \approx 1/l$ и $E(l) \approx \int^k E_k dk \approx k E_k$,

запишем следующее выражение:

$$\Pi_k \approx k^{5/2} E_k^{3/2} = \epsilon. \quad (106)$$

Независимость потока от масштаба, таким образом, приводит к соотношению для колмогоровского спектра:

$$E_k \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (107)$$

В проводящей жидкости в однородном магнитном поле имеют место несжимаемые флуктуации в виде альвеновских волн. Основное положение теории Ирошника и Крейчнана заключается в том, что в крупномасштабном магнитном поле роль собственной деформации вихря играют более слабые взаимодействия между распространяющимися альвеновскими волнами. С процессом распространения альвеновских волн связан дополнительный временной масштаб, альвеновское время $\tau_A \approx l/V_A$, где V_A — альвеновская скорость, так что эффективное время переноса энергии вдоль спектра $\tau^*(l)$ больше не равно времени оборота вихря $\tau_{nl} \approx l/u \approx l/b$, где b — флуктуация магнитного поля, выраженная в единицах скорости. Время когерентных взаимодействий сводится к τ_A , а τ_A отличается от времени оборота вихря в b/V_A раз. Таким образом, рассматривая последовательные столкновения волновых пакетов как независимые, можно показать, что

$$\tau^*(l) \approx \frac{\tau_{nl}}{\tau_A} \tau_{nl} \approx \frac{V_A}{b} \tau_{nl}, \quad (108)$$

и это время может намного превышать τ_{nl} . Подставляя теперь в выражение (104) для скорости переноса энергии Π вместо времени оборота вихря эффективное время переноса $\tau^*(l)$, получаем

$$\Pi_k \approx \frac{k E^2}{V_A} = \frac{k^3 E_k^2}{V_A}. \quad (109)$$

Налагая условие постоянства скорости диссипации ϵ , имеем следующее выражение:

$$E(l) \approx (V_A \epsilon)^{1/2}. \quad (110)$$

Соотношение (110) приводит к спектру Ирошника – Крейчнана:

$$E_k \approx (\epsilon V_A)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (111)$$

В работе [158] выведены обобщённые формулы для каскада энергии в эльзасеровских (Elsasser) переменных [159] $z = u \pm b$. Эльзасеровские переменные иногда удобно применять при рассмотрении МГД-турбулентности. Такое представление помогает нагляднее описать поведение флуктуаций, которые распространяются либо по направлению крупномасштабного магнитного поля, либо в противоположном направлении. Время оборота вихря типа z^+ и z^- зависит от амплитуды поля другого типа, т.е.

$$\tau_{nl}^{\pm} \approx \frac{l}{z^{\pm}}. \quad (112)$$

Если допустить, что происходит разрушение корреляций, предполагаемое в теории Ирошника – Крейч-

нана, то спектральные потоки Π^+ и Π^- одинаковы:

$$\Pi_k^+ \approx \Pi_k^- \approx \frac{k^3 E_k^- E_k^+}{V_A}. \quad (113)$$

Это соотношение вновь приводит к энергетическому спектру Ирошника–Крейчнана (пропорциональному $k^{-3/2}$), если амплитуды сравнимы по величине.

В статье [160] сделано предположение, что нелинейный временной масштаб $\tau_{nl}^\pm \approx (kz_k^\mp)^{-1}$ определяется как время оборота вихря, т.е. взаимодействия когерентны, как в колмогоровском каскаде. Скорости спектрального переноса, таким образом, не равны друг другу:

$$\Pi_k^\pm \approx k^{5/2} \frac{E_k^- E_k^+}{(E_k^\mp)^{1/2}} \approx \epsilon^\pm. \quad (114)$$

В этом случае условие постоянства обоих потоков приводит к колмогоровским спектрам для обоих полей независимо от соотношения потоков ϵ^\pm . Другими словами, получен спектр Колмогорова в эльзасеровских переменных:

$$E_k^\pm \approx (\Pi^\pm)^{4/3} (\Pi^\mp)^{-2/3} k^{-5/3}. \quad (115)$$

Основное различие между двумя конкурирующими феноменологическими теориями ($-3/2$ и $-5/3$) заключается в выборе характерного временного масштаба для времени взаимодействия. Основное предположение подразумевает, что гипотеза Ирошника и Крейчнана справедлива для сильного магнитного поля, в то время как феноменология Колмогорова для МГД-случая (т.е. предположение, сделанное в работе [160]) применима, когда флуктуации преобладают над магнитным полем (сильная турбулентность). Обе феноменологические теории развиты в предположении, что турбулентность изотропна, т.е. когда нет постоянного крупномасштабного среднего магнитного поля. Крупномасштабное среднее магнитное поле обычно подавляет энергетические каскады вдоль направления магнитного поля.

Имеется несколько физических причин, по которым может не происходить разрушение корреляций, предполагаемое в теории Ирошника–Крейчнана. Первая состоит в том, что в присутствии крупномасштабного магнитного поля энергетический каскад не изотропен в пространстве волновых векторов, и для мод с волновыми векторами, почти перпендикулярными магнитному полю, время распада альвеновских корреляций становится намного больше времени нелинейных взаимодействий [13]. Вторая причина заключается в том, что при решении большинства задач космической физики флуктуации являются сжимаемыми и это должно приводить к прямым взаимодействиям между сжимаемыми волнами, распространяющимися в одном направлении. Например, солнечный ветер не является ни несжимаемым, ни изотропным, ни однородным, к тому же это электропроводящая среда; большая часть наблюдательных данных о турбулентности в солнечном ветре даёт показатели спектров, очень близкие к колмогоровскому значению, несмотря на то что для магнитогидродинамической турбулентности ожидается спектр с показателем $-3/2$. Для решения этой проблемы, например, в статье [161] предложено использовать ренормгрупповой анализ и показано, что на альвеновские флуктуации влияет зависимость от масштаба "локальное среднее магнитное поле".

Если локальное среднее магнитное поле, определённое как $k^{-1/3}$, подставить в уравнения для каскада энергии в эльзасеровских переменных [158], то получим решение в виде колмогоровского спектра для МГД-турбулентности.

Возможности прямого численного моделирования ограничены для определения масштабно-инвариантных спектров сжимаемой МГД-турбулентности большими числами Рейнольдса, необходимыми для получения явно выраженного инерционного интервала турбулентности. Поэтому достаточно сложно точно измерить наклон спектров с тем, чтобы определить, какая из феноменологических теорий справедлива — Колмогорова или Ирошника–Крейчнана. Для решения этой проблемы в работе [65] предполагалось использовать преимущества метода крупных вихрей.

Концепция изотропной однородной турбулентности предложена для исследования универсальных статистических свойств спектров. Если энергия не поступает в турбулентное течение, то через некоторое время это течение становится ламинарным из-за наличия вязкости и диффузии. Для того чтобы получить результаты с высокой статистической точностью, необходимо усреднить достаточно много реализаций турбулентного течения. Для численных расчётов намного более эффективно провести одно длинное вычисление, чем подготовить много вычислений с различными начальными условиями, поэтому часто усреднение по ансамблю заменяется усреднением по времени. Во многих задачах космической физики необходимо изучать статистически стационарную (квазистационарную) турбулентность. Квазистационарность подразумевает, что значения энергии и скорости диссипации энергии приблизительно равны во времени и проявляться могут лишь небольшие флуктуации вокруг их средних значений. Для того чтобы поддерживать трёхмерную турбулентность, применяются внешние силы для инжектирования энергии в систему (другими словами — форсинга) и для поддержания турбулентности, эта энергия восполняет потери, связанные с диссипацией на малых масштабах. Отметим, что различные методы для определения вынуждающей силы на самом деле являются в первую очередь техническим вопросом, а не реальным физическим аспектом. Большинство методов разработаны для определения вынуждающей силы при исследовании гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости и основаны на добавлении внешней силы в уравнение Навье–Стокса для всех мод в интервале волновых чисел $|\mathbf{k}| = |k_f|$ или внутри сферы $|\mathbf{k}| \leq k_f$, где k_f — предельное значение k . Эти интервалы ограничены наименьшими волновыми числами, так чтобы сила действовала только на крупные масштабы течения, и таким образом образуется инжектированный энергетический каскад, который на малых масштабах диссипирует из-за эффектов вязкости.

Используются различные методы для определения силы при моделировании турбулентности. Часто применяется подход, при котором вынуждающая сила выражается в виде

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \zeta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t), \quad (116)$$

где знак $\hat{}$ обозначает фурье-преобразование. Коэффициент ζ подбирается во время моделирования таким образом, чтобы сохранять постоянным значение инжек-

тированной энергии. В работе [162] использовалась объёмная сила в форме

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \frac{\epsilon \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)}{N \hat{\mathbf{u}}^2(\mathbf{k}, t)} \quad (117)$$

для каждого волнового числа \mathbf{k} в интервале $(0, k = k_0)$, содержащем N волновых чисел, где ϵ — скорость диссипации. Данная формулировка внешней силы подразумевает, что энергия, поступающая в систему, постоянна и равна значению скорости диссипации. Однако существует проблема с таким определением внешней силы, так как в этом случае она сильно коррелирована с полем скорости. В статье [163] использовался такой же подход для задания вынуждающей силы, но для уменьшения проблемы, связанной с корреляцией, этот метод был модифицирован. Модификация заключалась в том, что для внешней силы использовались только $\hat{N} < N$ случайно выбранных волновых чисел в заданном интервале.

В работе [164] развит метод, в котором использовалась стохастическая сила, определяемая как

$$\hat{f}_i(\mathbf{k}, t) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) w_j(\mathbf{k}, t) [\Theta(\mathbf{k}) - \Theta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_f)], \quad (118)$$

где w_j — стохастический процесс Орнштейна – Уленбека, Θ — функция Хевисайда. Однако, так как существует определённый временной масштаб, на котором сила коррелирована, корреляция скорость – сила будет вносить ощутимый эффект в суммарный эффект вынуждающей силы. В статье [165] данный метод определения внешней силы применён для изучения подсеточных замыканий в методе крупных вихрей, но при таком моделировании появляются проблемы в обеспечении одинаковой вынуждающей силы при различных размерах расчётной области вычислений.

В работе [166] предложена стохастическая схема с вынуждающей внешней силой вида

$$\hat{f}_i(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}, t) e_i^1 + B(\mathbf{k}, t) e_i^2. \quad (119)$$

Здесь e_i^1 и e_i^2 — единичные ортогональные векторы, которые перпендикулярны \mathbf{k} ; функции A и B — случайные комплексные функции, которые зависят от спектра силы в начальный момент времени. Такая внешняя сила использована в работах [78, 137, 167] для исследования свойств сжимаемой МГД-турбулентности, эволюции различных типов волн в магнитной гидродинамике (альвеновских, быстрых и медленных магнитозвуковых волн) и задач магнитного пересоединения.

Для изучения сверхзвуковой турбулентности в замагниченных молекулярных облаках в работе [134] использовали крупномасштабную (при фиксированных волновых числах $k \leq 2$) изотропную соленоидальную внешнюю силу с нулевой спиральностью, записанную в следующем виде:

$$f = \rho a - \langle \rho a \rangle, \quad (120)$$

где $a = u_0/\tau$ — ускорение, а угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по всей расчётной области. Такая формулировка вынуждающей силы позволила сохранять звуковое число Маха практически постоянным на протяжении всего численного расчёта.

Существуют также различные методы, где поддерживается постоянная кинетическая энергия для наименьших волновых чисел. В статье [168] использован подход, при котором сохраняются постоянные значения амплитуд фурье-коэффициентов $\hat{\mathbf{u}}$ в интервале $1 \leq k \leq 2$. В работе [169] эта идея модифицирована таким образом, чтобы величина $|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|$ сохранялась постоянной для каждой моды с $1 \leq k < 2$, и при этом их фазы эволюционировали. Однако на самом деле трудно сказать, чему физически соответствует такое определение внешней силы. В работе [170] применён данный метод с небольшими изменениями, а именно, при сохранении энергии в промежутке $|\mathbf{k}| \leq k_f$, где k_f может быть больше двух. В статье [171] использована внешняя сила, которая поддерживает постоянной суммарную кинетическую энергию посредством повторной заправки потерянной энергии на каждом временном шаге в диапазоне $1 \leq k \leq 5$. Таким образом, диссипированная энергия переносится в крупные масштабы рассматриваемого течения. В работах [172, 173] предложен метод, в котором полная энергия на первых двух волновых интервалах ($1 \leq k < 2$ и $2 \leq k < 3$) сохраняется постоянной с течением времени. В работе [174] рассматривались другие волновые интервалы: $0,5 < k \leq 1,5$ и $1,5 < k \leq 2,5$. Отношение между энергиями в этих двух волновых интервалах устанавливалось таким образом, чтобы соответствовать колмогоровскому масштабнo-инвариантному спектру $k^{-5/3}$. Данный метод применён также в работах [175, 176] для получения изотропной внешней силы.

В статье [177] проведены сравнения результатов моделирования с использованием стохастического метода возбуждения турбулентности (118) и результатов моделирования для детерминированной внешней силы, которая выражается как $\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) g_k(t)/\tau$. Функция $g_k(t)$ определяется через дифференциальное уравнение для каждого волнового числа. Получено хорошее согласие результатов, полученных этими двумя методами, в то же время детерминированный метод показал меньшие статистические вариации для большинства величин.

Все упомянутые выше методы разработаны для получения решений исходных уравнений в волновом пространстве. Однако часто необходимо использовать конечно-разностный подход в физическом пространстве для моделирования турбулентных течений, который, в отличие от спектрального метода в волновом пространстве, более эффективен при решении задач со сложной геометрией, с различными граничными условиями, а также требует меньше компьютерных ресурсов и меньшее количество времени для вычислений. Методы определения вынуждающей силы, описанные выше, предполагают знание волновых чисел и фурье-преобразование физических величин, которые описывают рассматриваемое течение. Ниже обсудим такой способ определения внешней силы в физическом пространстве для изучения масштабнo-инвариантных свойств сжимаемой МГД-турбулентности, в котором вынуждающая сила не будет зависеть от фурье-представления.

5.2. Линейное представление вынуждающей силы в сжимаемой МГД-турбулентности в физическом пространстве

В данном разделе приведём обобщение теории линейного представления вынуждающей внешней силы на случай сжимаемой МГД-турбулентности. Получены

формулы для внешней силы в уравнении сохранения количества движения и в уравнении магнитной индукции для моделирования МГД-турбулентности в физическом пространстве.

Система уравнений сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности при наличии внешней вынуждающей силы записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \quad (121)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij} + \frac{B^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_j B_i \right) + F_i^u, \quad (122)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j B_i - u_i B_j) + \eta \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} + F_i^b, \quad (123)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (124)$$

F_i^u и F_i^b — внешние силы, которые поддерживают турбулентность, так как кроме затухающей турбулентности часто необходимо изучать статистическую стационарную (квазистационарную) турбулентность. Если энергия не поступает в турбулентное течение, то через некоторое время данное течение становится ламинарным из-за наличия вязкости и диффузии. Чтобы поддерживать трёхмерную турбулентность, применяются внешние силы для инжектирования энергии в систему и поддержания турбулентности, эта энергия восполняет потери, связанные с диссипацией на малых масштабах. Квазистационарность подразумевает, что значение энергии и скорости диссипации энергии приблизительно равны во времени и могут проявляться лишь небольшие флуктуации вокруг их средних значений.

Для моделирования гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости с вынуждающей силой в физическом пространстве недавно предложен и использован так называемый "линейный форсинг" [139, 140, 178]. Основная идея данного подхода заключается в добавлении внешней силы, которая пропорциональна флуктуирующей скорости. Линейная внешняя сила соответствует турбулентности с вынуждающей силой, вызванной средним градиентом скорости, т.е. сдвигом. Эта сила возникает как одно из слагаемых в уравнении для флуктуирующей скорости, которое соответствует члену генерации турбулентности в уравнении для турбулентной кинетической энергии. Здесь мы обобщим данный подход на случай сжимаемого МГД-течения проводящей жидкости [65, 66].

Уравнение для флуктуирующей скорости в турбулентном сжимаемом магнитогидродинамическом течении запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] = & -\frac{\partial \dot{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \dot{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \\ & - \left[\rho \dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \rho \left\langle \dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\dot{B}^2}{8\pi} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[\dot{Y}_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} + \dot{B}_j \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{4\pi} \left[\dot{B}_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} - \left\langle \dot{B}_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right]. \quad (125) \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие, так называемые рейнольдсовские, разложения: $u_i = U_i + \dot{u}_i$, $B_i = Y_i + \dot{B}_i$,

$p = P + \dot{p}$, $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}$, где U_i , Y_i , Σ_{ij} , P — средние значения, а \dot{u}_i , \dot{B}_i , $\dot{\sigma}$, \dot{p} — флуктуирующие величины.

В уравнении (125) третье слагаемое в правой части $\rho \dot{u}_j (\partial U_i / \partial x_j)$ соответствует источнику в уравнении турбулентной кинетической энергии. Уравнение турбулентной кинетической энергии выводится как разность статистически усреднённого уравнения, полученного из скалярного произведения скорости на усреднённое уравнение количества движения, и скалярного произведения скорости на усреднённое уравнение количества движения. В символьном виде вывод уравнения турбулентной кинетической энергии запишется как $\langle u \cdot \text{NS eq.} \rangle - U \langle \text{NS eq.} \rangle$ (где под NS eq. подразумевается уравнение Навье–Стокса с силой Лоренца). Поэтому уравнение турбулентной кинетической энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \right\rangle U_j + \left\langle \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \dot{u}_j \right\rangle - \langle \beta_{ij} \dot{u}_i \rangle \right) = \\ = - \left\langle \dot{u}_i \frac{\partial \dot{p}}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \dot{u}_i \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle - \langle \rho \dot{u}_i \dot{u}_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \left\langle \beta_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (126) \end{aligned}$$

где β_{ij} — турбулентный магнитный тензор,

$$\beta_{ij} = \frac{\dot{B}_i \dot{B}_j}{4\pi} - \frac{\dot{B}^2}{8\pi} \delta_{ij}. \quad (127)$$

В уравнении (126) полученные слагаемые можно интерпретировать следующим образом: $\langle (1/2) \rho \dot{u}^2 \rangle U_j$ — поток турбулентной кинетической энергии, связанный со средней скоростью, $\langle (1/2) \rho \dot{u}^2 \dot{u}_j \rangle$ — диффузионный турбулентный поток турбулентной кинетической энергии, $\langle \dot{u}_i (\partial \dot{\sigma}_{ij} / \partial x_j) \rangle$ — диссипация турбулентной энергии из-за вязкости, $\langle \dot{u}_i (\partial \dot{p} / \partial x_i) \rangle$ — корреляция давление–сдвиг (турбулентная диффузия давления посредством корреляций давления и скорости, the pressure–strain rate term). Последние члены в левой и правой частях (126) характеризуют связь турбулентной кинетической энергии с магнитной энергией, т.е. влияние работы магнитных сил на турбулентную скорость. Слагаемое $\langle \rho \dot{u}_i \dot{u}_j (\partial U_i / \partial x_j) \rangle$ в выражении (126) является источником турбулентной кинетической энергии в единичном объёме на единицу времени, получающимся в результате взаимодействия рейнольдсовских напряжений и сдвига в среднем течении. В уравнении (125) данный член интерпретируется как слагаемое с вынуждающей силой [139], пропорциональное скорости. Таким образом, предполагается, что для изотропной однородной турбулентности это слагаемое может являться подходящей силой для получения стационарного турбулентного течения с силой, которая прямо пропорциональна скорости:

$$F_i^u = \Theta \rho u_i. \quad (128)$$

Здесь Θ — коэффициент, который определяется из баланса кинетической энергии для стационарно статистического состояния с учётом того, что в однородной изотропной турбулентности градиент средней скорости равен нулю:

$$\Theta = \frac{1}{3 \langle \rho \rangle u_{\text{rms}}^2} \left[\left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_j} p \delta_{ij} \right\rangle + \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_j} B^2 \delta_{ij} \right\rangle \right], \quad (129)$$

где $\varepsilon = -\langle u_j(\partial\sigma/\partial x_j) \rangle$ является скоростью средней диссипации турбулентной энергии в тепло. В выражении (129) учтено, что $1/\langle \rho u^2 \rangle = 1/(3\langle \rho \rangle u_{\text{rms}}^2)$, так как $u_{\text{rms}}^2 = \langle \rho u^2 \rangle / (3\langle \rho \rangle)$ является средневзвешенным усреднением среднеквадратичной скорости. Заметим, что в сжимаемой однородной турбулентности член $\langle u_j(\partial p/\partial x_j) \rangle = -\langle p(\partial u_j/\partial x_j) \rangle$. Необходимо заметить, что коэффициент Θ в выражении (128) может как сохраняться постоянным, так и пересчитываться во время вычисления [140].

Функциональное представление внешней силы $F_i^u = \Theta \rho u_i$ в физическом пространстве равносильно представлению силы в спектральном (фурье-) пространстве, которая действует на все моды. Это фактически единственное отличие линейного представления от стандартного спектрального представления внешней силы в случае, когда энергия добавляется в систему только в интервале малых волновых чисел, т.е. в интегральный масштаб турбулентности.

Аналогично будем действовать для нахождения внешней силы F_i^b в уравнении магнитной индукции. Уравнение для флуктуирующей части магнитного поля в сжимаемом МГД-течении запишем как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} = \dot{B}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \dot{B}_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \gamma_i \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 \dot{B}_i}{\partial x_j^2} + \\ + \left[\dot{B}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \left\langle \dot{B}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right] + \gamma_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \dot{u}_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \\ - \left[\dot{u}_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} - \left\langle \dot{u}_j \frac{\partial \dot{B}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (130)$$

В выражении (130) первое слагаемое в правой части $\dot{B}_j(\partial U_i/\partial x_j)$ соответствует члену генерации в уравнении турбулентной магнитной энергии. Уравнение для турбулентной магнитной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\dot{B}^2}{8\pi} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left\langle \frac{\dot{B}^2}{8\pi} \right\rangle U_j + \left\langle \frac{\dot{B}^2}{8\pi} \dot{u}_j \right\rangle \right] = \\ = \frac{\langle \dot{B}_i \dot{B}_j \rangle}{4\pi} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left\langle \frac{\dot{B}_i \dot{B}_j}{4\pi} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\eta}{4\pi} \left\langle \dot{B}_i \frac{\partial^2 \dot{B}_i}{\partial x_j^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (131)$$

Слагаемые в выражении (131) описывают перенос, генерацию и диссипацию турбулентной магнитной энергии в электропроводящем газе. В уравнении (131) член $\langle \dot{B}^2/8\pi \rangle U_j$ соответствует адвекции турбулентной магнитной энергии, $\langle (\dot{B}^2/8\pi) \dot{u}_j \rangle$ — турбулентной диффузии турбулентной магнитной энергии, $\langle (\dot{B}_i \dot{B}_j/4\pi)(\partial \dot{u}_i/\partial x_j) \rangle$ — взаимодействию турбулентной магнитной энергии с флуктуирующими компонентами среднего сдвига, $(\eta/4\pi) \langle \dot{B}_i(\partial^2 \dot{B}_i/\partial x_j^2) \rangle$ — диссипации турбулентной магнитной энергии из-за магнитной диффузии. Первое слагаемое в правой части (131) $(\langle \dot{B}_i \dot{B}_j \rangle/4\pi)(\partial U_i/\partial x_j)$ интерпретируется как генерация магнитной энергии вследствие взаимодействия между магнитным полем и средним сдвигом. Заметим, что данный член соответствует слагаемому $-\langle \rho \dot{u}_j \dot{u}_j(\partial U_i/\partial x_j) \rangle$ в уравнении турбулентной кинетической энергии (126). Предположим, что вынуждающая сила в уравнении магнитной индукции пропорциональна магнитному полю. Поэтому силу F_i^b определим как

$$F_i^b = \Psi B_i, \quad (132)$$

где Ψ — коэффициент. Как и выше при нахождении Θ , для определения коэффициента Ψ воспользуемся балансом магнитной энергии для стационарно статистического состояния (т.е. учтём, что производная по времени равна нулю):

$$\Psi = \frac{\chi}{3B_{\text{rms}}^2}, \quad (133)$$

где $\chi = \langle \eta B_i(\partial^2 B_i/\partial x_j^2) \rangle$ — резистивная диссипация турбулентной магнитной энергии в МГД-турбулентности, $B_{\text{rms}}^2 = \langle B^2 \rangle/3$ — среднеквадратичное магнитное поле. Так же как и параметр Θ в (128), коэффициент Ψ в (132) во время моделирования МГД-турбулентности с вынуждающей силой может как сохраняться постоянным, так и пересчитываться на каждом временном шаге.

Таким образом, мы вывели выражения для внешних сил в уравнении сохранения количества движения (128) и в уравнении магнитной энергии (132), которые будут использованы далее для моделирования трёхмерной сжимаемой МГД-турбулентности в физическом пространстве.

5.3. Метод крупных вихрей для сжимаемой МГД-турбулентности при наличии внешней силы

В данном разделе сформулируем метод LES для моделирования сжимаемой МГД-турбулентности с вынуждающей внешней силой, вид которой получен в разделе 5.2. Отфильтрованные уравнения с внешней силой записываются как [65, 67, 68]

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \frac{\bar{\rho}^2}{\gamma M_s^2} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\sigma}_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = -\frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} + \bar{F}_i^u, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{B}_i - \bar{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} + \bar{F}_i^b, \quad (136)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (137)$$

Первые слагаемые в правой части уравнений (135), (136) содержат турбулентные подсеточные тензоры τ_{ij}^u и τ_{ij}^b , которые описывают влияние подсеточных членов на крупномасштабную динамику.

В правой части уравнений (135), (136) находятся внешние силы соответственно F_i^u и F_i^b , определённые с помощью теории линейного представления силы для возбуждения турбулентности в (128) и (132), которые в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^u = \frac{1}{3\langle \bar{\rho} \rangle \bar{u}_{\text{rms}}^2} \times \\ \times \left[\bar{\varepsilon} + \aleph + \frac{\langle \bar{u}_j(\partial/\partial x_j) \bar{\rho}^2 \delta_{ij} \rangle}{\gamma M_s^2} + \frac{\langle \bar{u}_j(\partial/\partial x_j) \bar{B}^2 \delta_{ij} \rangle}{2M_a^2} \right] \bar{\rho} \bar{u}_i, \end{aligned} \quad (138)$$

$$\bar{F}_i^b = \frac{\chi + \hbar}{3B_{\text{rms}}^2} \bar{B}_i, \quad (139)$$

где $\bar{\varepsilon} = -\langle (\bar{u}_j/\text{Re})(\partial \bar{\sigma}/\partial x_j) \rangle$. Слагаемое $\aleph = \langle \bar{u}_j(\partial \tau_{ij}^u/\partial x_j) \rangle$ представляет собой SGS-диссипацию, при которой фактически энергия передаётся локально от энергетических

крупномасштабных вихрей к мелкомасштабному движению. Слагаемое $h = \langle \tilde{B}_i (\partial \tau_{ij}^h / \partial x_j) \rangle$ является магнитной подсеточной энергией диссипации.

Необходимо отметить, что при использовании метода LES для изучения сжимаемой МГД-турбулентности с внешней силой появляется дополнительный член, связанный с подсеточным тензором, в балансе энергии при определении коэффициента для нахождения вынуждающей силы. Однако если используется модель вихревой вязкости (например, модель Смагоринского) и динамическая процедура для определения модельных констант, то дополнительные слагаемые \mathcal{N} и h могут быть опущены, так как значения этих модельных констант рассчитываются самосогласованно на каждом временном шаге в течение моделирования турбулентности. В динамической процедуре модельная константа получается таким образом, чтобы минимизировать (применяя метод наименьших квадратов) зависимость турбулентной статистики от ширины фильтра Δ [179], следовательно, обеспечивается подходящее значение динамически определённой константы. Если же в качестве подсеточной параметризации используется модель подобия масштабов, в которой нет модельных констант, то слагаемые \mathcal{N} и h необходимо включить в определение внешних сил методом линейного представления.

Различия при определении внешних сил с помощью линейного подхода и в политропном случае заключаются в том, что при рассмотрении теплопроводящего газа давление определяется через уравнение состояния и зависит от температуры [65], в то время как в политропном случае предполагается зависимость давления от плотности вида $p = \rho^\gamma$, где γ — политропный индекс.

5.4. Анализ результатов численного моделирования

Обсудим численные результаты моделирования сжимаемой МГД-турбулентности как для политропного [65, 67], так и для теплопроводящего [65] заряженного газа с внешней вынуждающей силой в физическом пространстве. Начальный изотропный турбулентный спектр для кинетической и магнитной энергий определялся в фурье-пространстве и выбран близким к спектру k^{-2} со случайными амплитудой и фазами по всем трём направлениям. Более подробную информацию об аспектах трёхмерного моделирования МГД-турбулентности с вынуждающей внешней силой можно найти в работе [65].

На рисунках 15 и 16 представлены графики временной эволюции кинетической энергии E_k и магнитной энергии E_M соответственно для случая, когда в начальный момент времени магнитная энергия больше кинетической, $E_k < E_M$. Заметим, что наблюдается быстрый рост кинетической энергии и в то же время резкое уменьшение значений магнитного поля. Затем и кинетическая, и магнитная энергии принимают постоянные значения. В работе [65] приведён график изменения со временем значений средней плотности, из которого видно, что, пока не установился статистически стационарный режим сжимаемой МГД-турбулентности, возникают флуктуации плотности. Затем флуктуации средней плотности становятся пренебрежимо малыми. Нормализованный сглаженный спектр полной энергии E_T^k (умноженный на $k^{3/2}$) показан на рис. 17. Изучение свойств инерционного интервала является одной из главных задач при исследовании масштабно-инвариантных спектров МГД-турбулентности. Свойства инерционного интервала опреде-

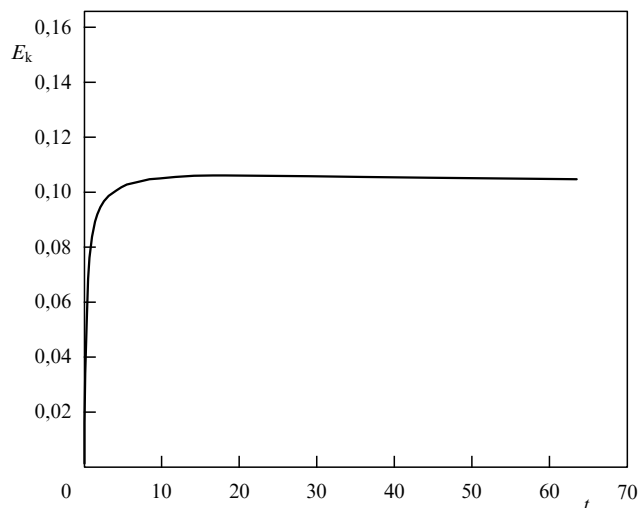


Рис. 15. Временная эволюция кинетической энергии для сжимаемой МГД-турбулентности с внешней силой.

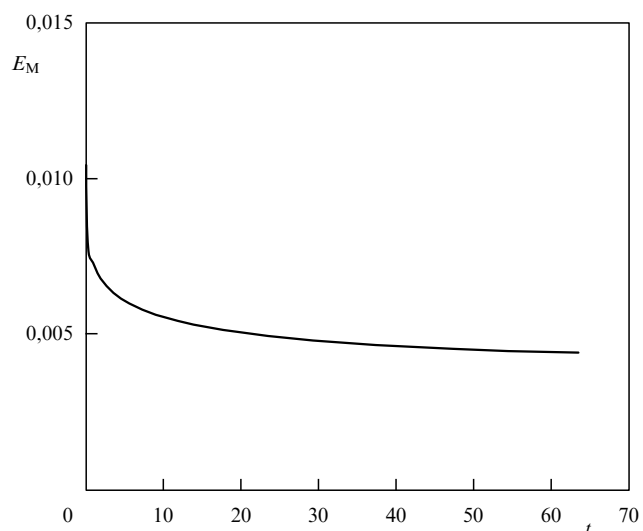


Рис. 16. Временная эволюция магнитной энергии для сжимаемой МГД-турбулентности с внешней силой.

ляются усреднением статистики на том периоде, в течение которого выполняются условия статистически стационарной турбулентности [154]. Спектр полной энергии получен после усреднения значений полной энергии $E_T = E_M + E_k$ в статистически стационарном режиме турбулентности. Как видно из рис. 17, существует чётко выраженный инерционный интервал МГД-турбулентности со спектром Ирошника – Крейчана с показателем $k^{-3/2}$, что согласуется с результатами теоретических исследований. В этом случае в проводящей жидкости имеют место флуктуации в виде альвеновских волн и магнитные взаимодействия играют заметную роль в турбулентном каскаде энергии, что приводит к спектру Ирошника – Крейчана $k^{-3/2}$ [144, 180].

Если в начальный момент времени кинетическая энергия намного больше магнитной энергии, $E_k \gg E_M$, то после начального интервала времени, когда наблюдаются большие флуктуации, возникает статистически стационарная турбулентность и значения E_k и E_M практически не меняются со временем, т.е. наблюдается

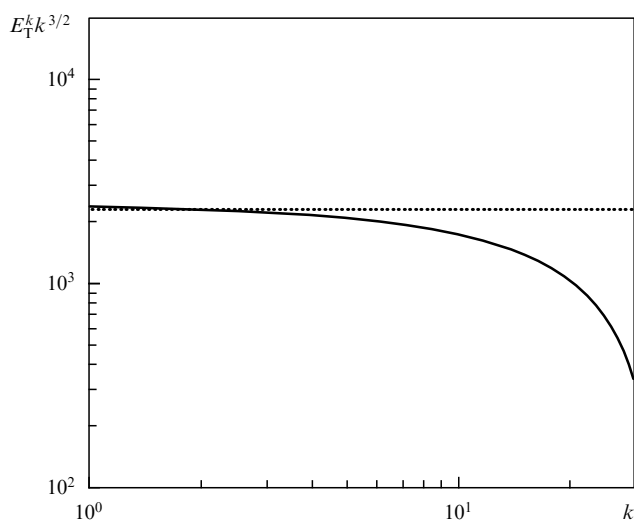


Рис. 17. Нормализованный сглаженный спектр полной энергии, умноженный на $k^{3/2}$, для случая $E_k < E_M$.

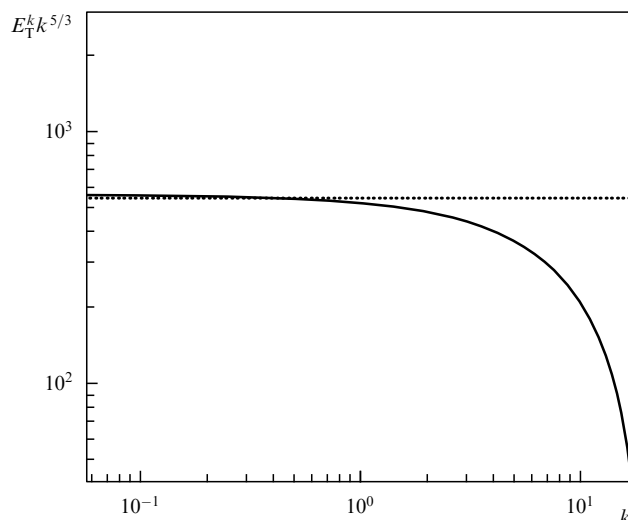


Рис. 18. Нормализованный сглаженный спектр полной энергии, умноженный на $k^{5/3}$, для случая $E_k \gg E_M$.

баланс между диссипацией и поступающей в систему энергией [65]. Если рассматривается МГД-турбулентность и кинетическая энергия намного больше магнитной, т.е. нелинейные взаимодействия гораздо существеннее магнитных и фактически жидкость является гидродинамической, то наблюдается спектр Колмогорова с показателем степени $-5/3$. Нормализованный (умноженный на $k^{5/3}$) сглаженный спектр полной энергии показан на рис. 18. Спектр полной энергии получен после усреднения значений в статистически стационарном режиме. Из рисунка 18 видно, что имеет место спектр Колмогорова [123, 125]. Этот результат согласуется с теоретическими ожиданиями. Также исследован спектр остаточной энергии [65, 149], которая определяется как $E_R^k = |E_M^k - E_k^k|$. Этот спектр представляет интерес, поскольку позволяет лучше понять спектральное взаимодействие кинетической и магнитной энергий и проявляет самоподобный скейлинг. В работе [65] подробно изучается нормализованный сглаженный спектр остаточной энергии $E_R^k \sim k^{-7/3}$ в инерционном интервале турбулентности, который был теоретически получен и подтвержден численно для несжимаемой МГД-турбулентности [119, 149]. Видно, что нет существенных различий в статистических свойствах в инерционном интервале из-за слабой сжимаемости (такой результат недавно был получен для сжимаемой гидродинамической турбулентности нейтрального газа [181]). Следовательно, данная внешняя сила обеспечивает правильный результат.

Таким образом, показано, что определение внешней вынуждающей силы с помощью теории линейного представления силы для возбуждения турбулентности обеспечивает правильные и адекватные результаты при моделировании сжимаемых турбулентных МГД-течений, гарантируя нахождение статистически стационарного режима турбулентности. Найденные выражения использованы для формулировки метода крупных вихрей. Изучены потенциальные возможности метода крупных вихрей воспроизводить физику изучаемого течения в стационарном режиме как для политропной, так и для теплопроводящей плазмы [65]. Показано, что для случая, когда в начальный момент времени кинетическая энергия течения намного больше магнитной энергии, наблюда-

ется спектр Колмогорова с показателем степени $-5/3$, в то же время если в начальный момент времени магнитная энергия больше кинетической энергии, то имеет место спектр Ирошникова–Крейчмана с показателем $k^{-3/2}$. Таким образом, продемонстрирована эффективность метода LES для изучения масштабно-инвариантных свойств сжимаемой МГД-турбулентности.

Необходимо сделать несколько важных замечаний относительно модели подобия масштабов. Как отмечено выше, в этой модели используется предположение о том, что крупные подсеточные вихри и малые разрешимые масштабы обладают свойством подобия. Для затухающей турбулентности — как для МГД-случая, так и для гидродинамики нейтральной жидкости — SGS-модели на основе концепции вихревой вязкости и/или смешанные модели показывали наиболее точные результаты среди подсеточных замыканий. Как известно, наиболее важным свойством подсеточных параметризаций является способность диссипировать энергию должным образом. Общий вывод заключается в том, что необходимо использовать модель подобия масштабов вместе с моделью вихревой вязкости (например, с параметризацией Смагоринского, что составляет основную идею смешанной подсеточной модели) для вырождающейся турбулентности. Однако модель подобия масштабов в априорных тестах воспроизводит корреляцию между модельным и действительным тензорами турбулентных напряжений корректно, даже когда течение сильно анизотропно [122]. Это указывает на то, что модель подобия масштабов правильно предсказывает расположение турбулентных структур. Также, несмотря на то что эта модель интегрально диссипативна, она способна обеспечивать локальную генерацию турбулентной энергии, имитируя обратный каскад энергии от мелких вихрей к крупным. Это свойство оказывается важным для моделирования анизотропных турбулентных потоков при реализации процесса самоорганизации мелкомасштабной турбулентности в когерентные крупномасштабные структуры. Одно из главных преимуществ модели подобия масштабов состоит в том, что данная SGS-параметризация не требует введения специальных модельных констант, в отличие от моделей на

основе концепции вихревой вязкости. (При этом может использоваться второй фильтр, более широкий по сравнению с основным фильтром, что приводит к появлению модельных констант [37, 182], которые в свою очередь могут быть найдены с помощью динамической процедуры, однако тогда это приводит к галилеевской неинвариантности [183].) Тем не менее недостаточная диссипативность модели подобия масштабов приводит к неточным результатам в случаях затухающей гидродинамической и магнитогидродинамической турбулентности [48, 60]. Но ситуация меняется кардинально при изучении масштабно-инвариантных свойств турбулентности с внешней силой. В этом случае модель подобия масштабов может обеспечить более точные результаты по сравнению с замыканиями типа вихревой вязкости. В турбулентности с внешней силой, где эта сила вводится, чтобы инжектировать энергию в турбулентное течение (иначе данное течение со временем станет ламинарным из-за вязкости и диффузии), подсеточное моделирование должно обеспечивать корректным образом статистически стационарный режим, а не только гарантировать адекватную диссипацию энергии, как в случае вырождающейся турбулентности. Модель подобия масштабов, имеющая ряд ключевых преимуществ, упомянутых выше, может быть использована для изучения скейлинговых свойств магнитогидродинамических турбулентных течений. Можно ожидать, что результаты моделирования сжимаемой МГД-турбулентности с внешней силой методом LES, где в качестве подсеточного замыкания применяется модель подобия масштабов, будут достаточно точными, и таким образом данная параметризация, в отличие от случая затухающей МГД-турбулентности, может быть использована как самостоятельная подсеточная модель. Следует отметить, что эльзасеровские переменные часто используются в магнитной гидродинамике, чтобы записать систему МГД-уравнений в более симметричной форме, и в этом случае особенно важно иметь хорошую корреляцию между подсеточными и действительными турбулентными тензорами. Например, сильная корреляция между всеми тремя компонентами флуктуаций скорости и магнитного поля наблюдается в солнечном ветре, и показано, что спектр полной энергии может зависеть от уровня корреляций [146]. Возможно также, что хорошая корреляция играет важную роль в задачах, в которых учитываются неоднородности турбулентного потока. Поэтому в работе [67] проведено подробное исследование эффективности модели подобия масштабов для моделирования сжимаемых МГД-течений с внешними силами.

На рисунке 19 показан спектр полной энергии для случая, когда $Re > Re_m$ и наблюдается спектр колмогоровского типа $k^{-5/3}$. Как видно из рис. 19, модель подобия масштабов обеспечивает даже более точные результаты, чем параметризация Смагоринского для МГД-турбулентности, т.е. результаты модели подобия масштабов лучше согласуются с результатами DNS [67]. Таким образом, данная подсеточная модель с линейной внешней силой может корректно воспроизводить масштабно-инвариантные свойства магнитогидродинамических турбулентных течений. Это делает модель подобия масштабов удобной подсеточной параметризацией при исследовании различных незатухающих турбулентных плазменных течений, особенно в астрофизических и космических приложениях, с учётом преимущества данной

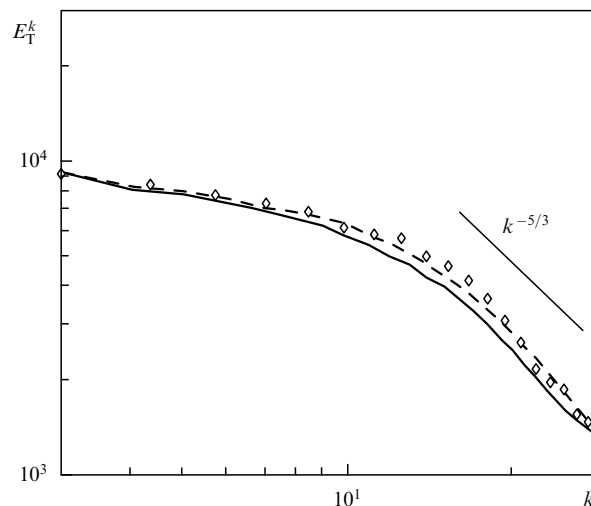


Рис. 19. Спектр полной энергии E_T^k . Линия из ромбов соответствует результатам DNS, сплошная линия — модели Смагоринского для сжимаемой МГД-турбулентности, штриховая линия — модели подобия масштабов для сжимаемой МГД-турбулентности.

параметризации, состоящего в первую очередь в том, что не нужно определять модельные константы.

6. Заключение

В работе приведён обзор последних достижений в исследованиях по вычислительной физике сжимаемой турбулентности космической плазмы. Сложность исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы определяет необходимость развития методов, альтернативных методу прямого численного моделирования. Альтернативой методу прямого численного моделирования сложных турбулентных течений является метод крупных вихрей, хорошо зарекомендовавший себя в исследованиях геофизической турбулентности и турбулентности инженерных течений. Основная идея метода заключается в фильтрации исходных уравнений гидродинамики и последующей параметризации универсальной части турбулентного течения подсеточными замыканиями. Этот метод выгодно отличается от альтернативных методов исследования турбулентности. В отличие от рейнольдсовского описания, метод LES разрешает крупные вихри и тем самым обеспечивает информацию о статистических и спектральных свойствах турбулентного поля. В отличие от метода прямого численного моделирования, LES позволяет исследовать течение с большими по сравнению с DNS параметрами подобия для имеющихся мощностей компьютерного оборудования, так как число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса. Последнее преимущество особенно принципиально для исследования магнитогидродинамической турбулентности сжимаемой плазмы, которая характеризуется большими числами Рейнольдса и Маха.

Подробно описан метод крупных вихрей для изучения сжимаемой магнитогидродинамической турбулент-

ности плазмы и показана его применимость для исследования однородной вырождающейся турбулентности. Детально анализируются возможные параметризации подсеточных явлений. Показано, что в случае политропной плазмы подсеточные модели получаются комбинацией и обобщением известных подсеточных слагаемых в гидродинамике сжимаемой нейтральной жидкости и несжимаемой магнитной жидкости. Рассмотрена теория подсеточных турбулентных течений в теплопроводящей плазме для новых подсеточных слагаемых, возникающих из-за наличия магнитного поля в уравнении полной энергии. Также показано, что расширенная модель Смагоринского и модель, основанная на перекрёстной спиральности магнитного поля и скорости, обеспечивают наиболее точные численные результаты при моделировании турбулентности политропного газа. Обсуждается моделирование сжимаемой МГД-турбулентности теплопроводящей плазмы при различных числах Маха и показана применимость метода крупных вихрей при малых и умеренных числах Маха.

Эффективность метода крупных вихрей продемонстрирована для решения важных задач физики космической плазмы. Исследование трёхмерной динамики флуктуаций плотности в магнитогиродинамической турбулентности локальной межзвёздной среды методом крупных вихрей показало, что существует режим, в котором исходно сильно сжимаемые флуктуации становятся слабо сжимаемыми и спектр флуктуаций плотности воспроизводит спектр кинетической энергии. Это соответствует тому, что флуктуации плотности переносятся магнитогиродинамическим течением в режиме пассивной примеси. Проанализированы изменения свойств полученных спектров энергии со временем. Установлено, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности, амплитуда спектров также убывает. Показано, что увеличивается диссипативный интервал в энергетическом каскаде и уменьшается инерционный интервал. Свойства анизотропии МГД-турбулентности космической плазмы в слабо сжимаемом режиме могут быть эффективно изучены предложенным методом крупных вихрей. Показано, что крупномасштабное магнитогиродинамическое течение является анизотропным, а мелкомасштабное — изотропным.

В работе обсуждается метод линейной внешней силы для исследования сжимаемой МГД-турбулентности плазмы в инерционном интервале. В этом методе предполагается, что вынуждающая сила прямо пропорциональна скорости в уравнении сохранения импульса. Рассматривается сжимаемая МГД-турбулентность, поэтому в систему МГД-уравнений входит уравнение сохранения магнитной индукции, и в этом случае вынуждающая сила пропорциональна магнитному полю в уравнении магнитной индукции. В отличие от спектрального представления внешней силы, линейная вынуждающая сила действует на все масштабы физического пространства и тем самым может более точно воспроизвести картину взаимодействия мод в сжимаемом турбулентном МГД-течении. Фактически, линейное представление внешней накачки соответствует турбулентности с вынуждающей силой, вызванной средним градиентом скорости, т.е. сдвигом. В уравнении магнитной индукции линейная внешняя сила может интерпретироваться как генерация магнитной энергии вследствие взаимодействия между

магнитным полем и средним сдвигом. Приведён вывод выражений для внешней силы, обеспечивающих нахождение статистически стационарного режима турбулентности. Найденные выражения использованы для формулировки метода крупных вихрей. Изучены потенциальные возможности метода крупных вихрей воспроизводить физику изучаемого течения в стационарном режиме как для политропной, так и для теплопроводящей плазмы. Показано, что для случая, когда в начальный момент времени кинетическая энергия течения намного больше магнитной энергии, наблюдается спектр Колмогорова с показателем степени $k^{-5/3}$, в то же время если в начальный момент времени магнитная энергия больше кинетической энергии, то имеет место спектр Ирошника — Крейчана с показателем $k^{-3/2}$. Таким образом, продемонстрирована эффективность метода LES для изучения масштабно-инвариантных свойств сжимаемой МГД-турбулентности.

Полученные результаты могут быть использованы для изучения турбулентных течений в других задачах космической и астрофизической плазмы, термоядерной плазмы, в задачах плазменной аэродинамики и в инженерных приложениях.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 22 Президиума Российской академии наук "Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы", грантов Президента РФ (МК-1349.2011.2, МК-267.2014.5), фонда "Династия", Российского фонда фундаментальных исследований (08-08-00687-а, 11-02-00805-а, 13-05-90436, 14-02-31848).

Список литературы

1. Hawley J F, Gammie C F, Balbus S A *Astrophys. J.* **440** 742 (1995)
2. Balbus S A, Hawley J F, Stone J M *Astrophys. J.* **467** 76 (1996)
3. Schramkowski G P, Torkelsson U *Astron. Astrophys. Rev.* **7** 55 (1996)
4. Low M-M M et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 2754 (1998)
5. Boldyrev S, Nordlund Å, Padoan P *Astrophys. J.* **573** 678 (2002)
6. Колесниченко А В, Маров М Я *Астрон. вестн.* **41** 3 (2007); Kolesnichenko A V, Marov M Ya *Solar Syst. Res.* **41** 1 (2007)
7. Zank G P *Space Sci. Rev.* **89** 413 (1999)
8. Каплан С А *Межзвёздная газодинамика* (М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958); Kaplan S A *Interstellar Gas Dynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1966)
9. Elmegreen B G, Scalo J *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **42** 211 (2004)
10. Зелёный Л М, Веселовский И С (Ред.) *Плазменная гелиогеофизика* (М.: Физматлит, 2008)
11. Priest E R *Solar Magneto-Hydrodynamics* (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1984); Прист Э Р *Солнечная магнитогиродинамика* (М.: Мир, 1985)
12. Zhou Y, Matthaeus W H, Dmitruk P *Rev. Mod. Phys.* **76** 1015 (2004)
13. Mangeney A, Grappin R, Velli M, in *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics* (Eds E R Priest, A W Hood) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991) p. 327
14. Petrosyan A et al. *Space Sci. Rev.* **156** 135 (2010)
15. Goldstein M L *Nature* **436** 782 (2005)
16. Usmanov A V et al. *Astrophys. J.* **727** 84 (2011)
17. Зелёный Л М, Милованов А В *УФН* **174** 809 (2004); Zelenyi L M, Milovanov A V *Phys. Usp.* **47** 749 (2004)
18. Фортгов В Е и др. *УФН* **174** 495 (2004); Fortov V E et al. *Phys. Usp.* **47** 447 (2004)
19. Будаев В П, Савин С П, Зелёный Л М *УФН* **181** 905 (2011); Budaev V P, Savin S P, Zelenyi L M *Phys. Usp.* **54** 875 (2011)
20. Krause F, Rädler K-H *Phys. Earth Planet. Inter.* **20** 158 (1979)
21. Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983)

22. Frick P, Stepanov R, Sokoloff D *Phys. Rev. E* **74** 066310 (2006)
23. Размайкин А А, Соколов Д Д, Шукуров А М *Магнитные поля галактик* (М.: Наука, 1988); Ruzmaikin A A, Shukurov A M, Sokoloff D D *Magnetic Fields of Galaxies* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988)
24. Соколов Д Д, Фрик П Г *Астрон. журн.* **80** 556 (2003); Sokoloff D D, Frick P G *Astron. Rep.* **47** 511 (2003)
25. Berger T W et al. *Phys. Fluids* **12** 631 (2000)
26. Lee C, Kim J *Phys. Fluids* **14** 2523 (2002)
27. Lee D, Choi H J. *Fluid. Mech.* **439** 367 (2001)
28. Satake S-I, Kunugi T, Smolentsev S J. *Turbulence* **3** 020 (2002)
29. Biskamp D *Magnetohydrodynamic Turbulence* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2003)
30. Yokoi N et al. *J. Turbulence* **9** 37 (2008)
31. Brandenburg A *Astrophys. J.* **550** 824 (2001)
32. Rogallo R S, Moin P *Annu. Rev. Fluid Mech.* **16** 99 (1984)
33. Reynolds O *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **186** 123 (1895)
34. Фрик П Г *Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций* (Пермь: ПГТУ, 1998)
35. Chkhietiani O G, Moiseev S S, Petrosyan A S, Sagdeev R Z *Phys. Scripta* **49** 214 (2004)
36. Ezau I "An Introductory Essay" (Uppsala: Uppsala Univ., 2001)
37. Meneveau C, Katz J *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32** 1 (2000)
38. Piomelli U *Prog. Aerospace Sci.* **35** 335 (1999)
39. Glazunov A V, Lykosov V N *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **18** 279 (2003)
40. Deardorff J W J. *Fluid Mech.* **41** 453 (1970)
41. Lilly D K, in *IBM Scientific Computing Symp. on Environmental Sciences* (1967) number 320-1951, 195–210
42. Speziale G et al. *Phys. Fluids* **31** 940 (1988)
43. Moin P et al. *Phys. Fluids A* **3** 2746 (1991)
44. El-Hady N M, Zang T A, Piomelli U *Phys. Fluids* **6** 1299 (1994)
45. Zang T A, Dahlburg R B, Dahlburg J P *Phys. Fluids A* **4** 127 (1992)
46. Erlebacher G et al. *J. Fluid. Mech.* **238** 155 (1992)
47. Vreman B "Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer", PhD Thesis (Netherlands: Univ. of Twente, 1995)
48. Vreman B, Geurts B, Kuerten H *Appl. Sci. Res.* **54** 191 (1995)
49. Martin P, Piomelli U, Candler G *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **13** 361 (2000)
50. Yoshizawa A *Phys. Fluids* **30** 1089 (1987)
51. Agullo O et al. *Phys. Plasmas* **8** 3502 (2001)
52. Müller W-C, Carati D *Comput. Phys. Commun.* **147** 344 (2002)
53. Müller W-C, Carati D *Phys. Plasmas* **9** 824 (2002)
54. Zhou Y, Vahala G J. *Plasma Phys.* **45** 239 (1991)
55. Gomez T et al. *Phys. Fluids* **19** 032304 (2007)
56. Knaepen B, Moin P *Phys. Fluids* **16** 1255 (2004)
57. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Plasmas* **13** 032304 (2006)
58. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Plasmas* **13** 104501 (2006)
59. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **21** 1 (2006)
60. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Fluids* **19** 055106 (2007)
61. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Flow Turbulence Combust.* **80** 21 (2008)
62. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Fluids* **20** 085106 (2008)
63. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **23** 451 (2009)
64. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Scripta* **2010** (T142) 014029 (2010)
65. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Plasmas* **17** 102307 (2010)
66. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *J. Phys. Conf. Ser.* **318** 072036 (2011)
67. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Flow Turbulence Combust.* **89** 563 (2012)
68. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S, arXiv:1311.1922
69. Balsara D *Astrophys. J. Suppl.* **132** 83 (2001)
70. Куликовский А Г, Погорелов Н В, Семенов А Ю *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений* (М.: Физматлит, 2001); Kulikovskii A G, Pogorelov N V, Semenov A Yu *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2001)
71. Ustyugov S D, Andrianov A N, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 281 (2002)
72. Gilman P A, Glatzmaier G A *Astrophys. J. Suppl.* **45** 335 (1981)
73. Glatzmaier G A *J. Comput. Phys.* **55** 461 (1984)
74. Lantz S R, Fan Y *Astrophys. J. Suppl.* **121** 247 (1999)
75. Marsch E, in *Physics of the Inner Heliosphere II* (Eds R Schwenn, E Marsch) (Heidelberg: Springer-Verlag, 1991)
76. Goldstein M, Roberts D, Matthaeus W *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **33** 283 (1995)
77. Brandenburg A, Subramanian K *Phys. Rep.* **417** 1 (2005)
78. Cho J, Lazarian A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **345** 325 (2003)
79. Shaikh D, Zank G P *Nonlin. Processes Geophys.* **4** 351 (2007)
80. Picone J M, Dahlburg R B *Phys. Fluids B* **3** 29 (1991)
81. Dahlburg R B, Picone J M *Phys. Fluids B* **1** 2153 (1989)
82. Ghosh S, Matthaeus W H *Phys. Fluids B* **2** 1520 (1990)
83. Ladeinde F, Gaitonde D *Phys. Fluids* **16** 2097 (2004)
84. Orszag S, Tang C-M *J. Fluid Mech.* **90** 129 (1979)
85. Mininni P D, Pouquet A G, Montgomery D C *Phys. Rev. Lett.* **97** 244503 (2006)
86. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005); Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
87. Dastgeer S, Zank G P *Astrophys. J.* **604** L125 (2004)
88. Dastgeer S, Zank G P *Nonlin. Processes Geophys.* **12** 139 (2005)
89. Dastgeer S, Zank G P *Astrophys. J.* **602** L29 (2004)
90. Armstrong J W, Rickett B J, Spangler S R *Astrophys. J.* **443** 209 (1995)
91. Spangler S *Space Sci. Rev.* **99** 261 (2001)
92. Zank G P, Matthaeus W H *Phys. Fluids A* **3** 69 (1991)
93. Zank G P, Matthaeus W H *Phys. Fluids A* **5** 257 (1993)
94. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Astrophys. J.* **686** 1137 (2008)
95. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S, in *Advances in Plasma Astrophysics* (IAU Symp., Vol. 274, Eds A Bonanno, E G dal Pino, A G Kosovichev) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011) p. 80
96. Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *AIP Conf. Proc.* **1242** 197 (2010)
97. Leonard A *Adv. Geophys.* **18** 237 (1974)
98. Sagaut P *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction* (Berlin: Springer, 2002)
99. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности* (М.: Наука, 1965–1967); Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971–1975)
100. Favre A J. *Mecanique* **4** 361 (1965)
101. Sagaut P, Grohens R *Int. J. Numer. Mech. Fluids* **31** 1195 (1999)
102. Haugen N E L, Brandenburg A *Phys. Rev. E* **70** 026405 (2004)
103. Brandenburg A, in *Advances in Nonlinear Dynamos* (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Vol. 9, Eds A Ferriz-Mas, M Núñez) (London: CRC Press, 2003) p. 269
104. Theobald M, Fox P, Sofia S *Phys. Plasmas* **1** 3016 (1994)
105. Vreman B, Geurts B, Kuerten H J. *Fluid Mech.* **278** 351 (1994)
106. Smagorinsky J *Mon. Weather Rev.* **91** 99 (1963)
107. Bardina J, Ferziger J H, Reynolds W C, in *AIAA 13th Fluid and Plasma Dynamics Conf., Snowmass, CO, USA, July 14–16, 1980*, p. 10
108. Liu S, Meneveau C, Katz J J. *Fluid Mech.* **275** 83 (1994)
109. Zang Y, Street R L, Koseff J R *Phys. Fluids A* **5** 3186 (1993)
110. Germano M et al. *Phys. Fluids A* **3** 1760 (1991)
111. Germano M *J. Fluid Mech.* **238** 325 (1992)
112. Lilly D *Phys. Fluids A* **4** 633 (1992)
113. Eidson T M J. *Fluid Mech.* **158** 245 (1985)
114. Knight D et al., AIAA Paper 98-0535 (1998)
115. Williamson J H J. *Comput. Phys.* **35** 48 (1980)
116. Brandenburg A, Dobler W *Comput. Phys. Commun.* **147** 471 (2002)
117. Müller W-C, Biskamp D *Phys. Rev. Lett.* **84** 475 (2000)
118. Knaepen B, Kassinos S, Carati D J. *Fluid Mech.* **513** 199 (2004)
119. Müller W-C, Grappin R *Phys. Rev. Lett.* **95** 114502 (2005)

120. Anderson J D (Jr.) *Computational Fluid Dynamics: the Basics with Applications* (New York: McGraw-Hill, 1995)
121. Park N, Yoo J, Choi H *J. Comput. Phys.* **198** 580 (2004)
122. Ferziger J, in *Simulation and Modeling of Turbulent Flows* (Eds T Gatski, Y Hussami, J Lumley) (New York: Oxford Univ. Press, 1996) p. 109
123. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941); Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)
124. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **31** 19 (1941)
125. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **32** 16 (1941)
126. Обухов А М *ДАН СССР* **32** 19 (1941)
127. Low M-M M *Astrophys. Space Sci.* **289** 323 (2004)
128. Porter D H, Pouquet A, Woodward P R *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **4** 13 (1992)
129. Low M-M M *Astrophys. J.* **524** 169 (1999)
130. Armstrong J W, Cordes J M, Rickett B J *Nature* **291** 561 (1981)
131. Montgomery D, Brown M R, Matthaeus W H *J. Geophys. Res.* **92** 282 (1987)
132. Lesieur M *Turbulence in Fluids* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
133. Shebalin J V, Matthaeus W H, Montgomery D J *Plasma Phys.* **29** 525 (1983)
134. Kritsuk A G et al. *J. Phys. Conf. Ser.* **180** 012020 (2009)
135. Kitsionas S et al. *Astron. Astrophys.* **508** 541 (2009)
136. Lee H et al. *Astrophys. J.* **594** 627 (2003)
137. Cho J, Lazarian A *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **19** 127 (2005)
138. Sridhar S *Astron. Nachrichten* **331** 93 (2010)
139. Lundgren T S, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs (2003) p. 461
140. Rosales C, Meneveau C *Phys. Fluids* **17** 095106 (2005)
141. De Stefano G, Vasilyev O V *J. Fluid Mech.* **646** 453 (2010)
142. Frisch U *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Фриш У *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: Фазис, 1998)
143. Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* **5** 4 (1941)
144. Ирошников П С *Астрон. журн.* **40** 742 (1963); Iroshnikov P S *Sov. Astron.* **7** 566 (1964)
145. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **8** 1385 (1965)
146. Grappin R, Leorat J, Pouquet A *Astron. Astrophys.* **126** 51 (1983)
147. Verma M K, Bhattacharjee J K *Europhys. Lett.* **31** 195 (1995)
148. Müller W, Biskamp D *Lecture Notes Phys.* **614** 3 (2003)
149. Müller W-C, Grappin R *Plasma Phys. Control. Fusion* **45** B91 (2004)
150. Müller W-C, Biskamp D *Phys. Rev. Lett.* **83** 2195 (1999)
151. Perez J C et al. *Phys. Rev. X* **2** 041005 (2012)
152. Carbone V, Pouquet A *Lecture Notes Phys.* **778** 71 (2009)
153. Hatori T *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** 2539 (1984)
154. Biskamp D, Müller W *Phys. Plasmas* **7** 4889 (2000)
155. Wisniewski M, Kissmann R, Spanier F *J. Plasma Phys.* **79** 597 (2013)
156. Зыбин К П и др. *ЖЭТФ* **132** 510 (2007); Zybin K P et al. *JETP* **105** 455 (2007)
157. Зыбин К П и др. *ЖЭТФ* **134** 1024 (2008); Zybin K P et al. *JETP* **107** 879 (2008)
158. Dobrowolny M, Mangeney A, Veltri P *Phys. Rev. Lett.* **45** 144 (1980)
159. Elsasser W M *Phys. Rev.* **79** 183 (1950)
160. Marsch E, in *Reviews in Modern Astronomy* (Ed. G Klare) (Berlin: Springer, 1990)
161. Verma M K *Phys. Plasmas* **6** 1455 (1999)
162. Ghosal S et al. *J. Fluid Mech.* **286** 229 (1995)
163. Carati D, Ghosal S, Moin P *Phys. Fluids* **7** 606 (1995)
164. Eswaran V, Pope S B *Comput. Fluids* **16** 257 (1988)
165. Fureby C et al. *Phys. Fluids* **9** 1416 (1997)
166. Alvelius K *Phys. Fluids* **11** 1880 (1999)
167. Kowal G et al. *Astrophys. J.* **700** 63 (2009)
168. Siggia E D, Patterson G S *J. Fluid Mech.* **86** 567 (1978)
169. Chasnov J R *Phys. Fluids* **3** 188 (1991)
170. Sullivan N P, Mahalingam S, Kerr R M *Phys. Fluids* **6** 1612 (1994)
171. Seror C et al. *Phys. Fluids* **13** 476 (2001)
172. She Z S, Jackson E, Orzag S A, in *New Perspectives in Turbulence* (Ed. L Sirovich) (Berlin: Springer-Verlag, 1991)
173. She Z-S et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 3251 (1993)
174. Wang L et al. *J. Fluid Mech.* **309** 113 (1996)
175. Chen S, Shan X *Comput. Phys.* **6** 643 (1992)
176. Mosheni K et al. *Phys. Fluids* **15** 524 (2003)
177. Overholt M R, Pope S B *Comput. Fluids* **27** 11 (1998)
178. Brandenburg A, Petrosyan A *Astron. Nachrichten* **333** 195 (2012)
179. Pope S B *New J. Phys.* **6** 35 (2004)
180. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **8** 1385 (1965)
181. Benzi R et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 234503 (2008)
182. Morinishi Y, Vasilyev O V *Phys. Fluids* **13** 3400 (2001)
183. Speziale G J *Fluids Mech.* **156** 55 (1985)

Subgrid-scale modeling for the study of compressible magnetohydrodynamic turbulence in space plasmas

A.A. Chernyshov, K.V. Karelsky

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
E-mail: achernyshov@iki.rssi.ru, kkarelsk@iki.rssi.ru

A.S. Petrosyan

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation;
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation
E-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

A state of the art review is given of research on compressible magnetohydrodynamic turbulence in space plasmas. The presence of magnetic fields and compressibility in this case makes space plasma turbulence much less amenable to direct numerical simulations compared to a neutral incompressible fluid. The large eddy simulation method is discussed, which was developed as an alternative to direct modeling and which filters the initial magnetohydrodynamics equations and uses the subgrid-scale modeling of universal small-scale turbulence. A detailed analysis is made of both the method itself and different subgrid-scale parametrizations for compressible magnetohydrodynamic turbulent flows in polytropic or heat-conducting plasmas. The use of large eddy simulations to study turbulence in local interstellar medium and the scale-invariant spectra of magnetohydrodynamic turbulence are discussed.

PACS numbers: 47.27.E-, 47.27.ep, 47.27.Gs, 52.35.Ra, 52.65.Kj

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201405a.0457

Bibliography — 183 references

Received 28 March 2013, revised 13 September 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (5) 457–492 (2014)

Physics–Uspekhi **57** (5) (2014)