

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

"Далёк астральный лад..." (воспоминания о Я.Б. Зельдовиче)

В.С. Попов

Воспоминания о крупнейшем советском физике-теоретике, академике Я.Б. Зельдовиче и его влиянии на научную деятельность автора статьи и его сотрудников.

PACS numbers: 01.60.+q, 01.65.+g, 03.65.-w

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201404i.0451

Это была эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учёности. Люди, основавшие современное господство буржуазии, были всем, чем угодно, но только не людьми буржуазно-ограниченными.

Ф. Энгельс. *Диалектика природы* (М.: Политиздат, 1975). С. 7

Яков Борисович Зельдович (1914–1987) внёс выдающийся вклад во многие области теоретической и прикладной физики: теорию горения и детонации, физику взрыва и ударных волн, атомную и ядерную физику, теорию слабого взаимодействия (сохраняющийся векторный ток), релятивистскую астрофизику и космологию... и этот список нетрудно было бы продолжить [1–3]. В наш век узкой специализации он был, вероятно, одним из последних (наряду с Ферми, Фейнманом, Гамовым и Ландау) универсалов во всей области физики и астрофизики.

Сразу должен сказать, что я не был учеником или близким сотрудником Якова Борисовича — мне не довелось в молодые годы слушать его лекции или работать под его непосредственным руководством, и у нас имеется только одна совместная работа [4]. Наши тесные научные контакты относятся к 1970–1973 гг., они касались специальных вопросов теоретической физики — в первую очередь квантовой электродинамики сверхсильных полей. Яков Борисович был яркой и многогранной личностью, и мои воспоминания неизбежно несут отрывочный и несколько односторонний характер. Решаюсь всё же изложить их в надежде, что они могут дать какие-то дополнительные штрихи к образу этого замечательного учёного.

Моё непосредственное знакомство с Яковом Борисовичем произошло вскоре после появления статьи Гер-

штейна и Зельдовича [5] (см. также [6]), в которой рассматривались свойства атомного спектра в зависимости от заряда ядра Z в сверхтяжёлых ($Z > \alpha^{-1} = 137$) атомах и спонтанное рождение позитронов из вакуума при сближении тяжёлых ядер на расстоянии $R < R_{\text{cr}} \ll l_C$. При этом ими было высказано предположение о том, что при приближении энергии дискретного электронного уровня ε_0 к границе нижнего континуума решений уравнения Дирака ($\varepsilon_0 \rightarrow -mc^2$) "имеет место патологическое поведение волновой функции связанного электрона и происходит делокализация поляризации вакуума" [5], т.е. плотность вакуумного заряда уходит на большие расстояния от ядра. При этом авторы исходили из главного члена асимптотики волновой функции электрона¹

$$\psi_0(r) \propto \exp(-\lambda r), \quad \lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon_0^2}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Заинтересовавшись этим вопросом, я внимательно изучил работы [5–7] и заметил, что из уравнения Дирака в кулоновском поле $V(r) = -Z\alpha/r$ следует, что помимо экспоненты (1) в волновой функции имеется ещё и существенный предэкспоненциальный множитель:

$$\psi_0(r) \approx r^v \exp(-\lambda r), \quad v = \frac{Z\alpha\varepsilon_0}{\lambda}, \quad (2)$$

который в пределе $\varepsilon_0 \rightarrow -m$ убывает на бесконечности быстрее любой конечной степени r и приводит к поведению

$$\psi_0(r) \propto \exp\left(-\sqrt{8Z_{\text{cr}}\alpha}\frac{r}{l_C}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (3)$$

(при $\varepsilon_0 = -m$ и $Z = Z_{\text{cr}}$), так что волновая функция уровня на краю нижнего континуума остаётся локализо-

¹ Здесь и далее m и $l_C = \hbar/mc$ — масса и комптоновская длина для электрона, $a_B = \hbar^2/me^2 = \alpha^{-1}l_C$ — радиус Бора, r — расстояние между электроном и ядром, λ — безразмерный импульс связанного состояния, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, Z_{cr} и R_{cr} — критический заряд ядра и соответствующее расстояние между сталкивающимися ядрами, при котором электронный уровень опускается до границы нижнего континуума $\varepsilon_0 = -mc^2$. Мы используем релятивистские единицы $\hbar = c = 1$.

В.С. Попов. Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова, ул. Б. Черёмушkinsкая 25, 117218 Москва, Российская Федерация E-mail: markina@itep.ru

Статья поступила 29 апреля 2013 г.

ванной (хотя при этом $\lambda \rightarrow 0$), а средний радиус электронного облака $\langle r \rangle \ll l_C$. Тем самым отпадает аргументация [5] в пользу делокализации связанного состояния и перестройки поляризации вакуума при $Z \rightarrow Z_{cr}$.

Кратко поясним вывод этих формул. Энергия уровня ε_0 включает в себя энергию покоя электрона m и зависит от Z , причём для состояний дискретного спектра $-m \leq \varepsilon_0(Z) < m$. Значение $\varepsilon_0 = m$ соответствует покоящемуся свободному электрону, $\varepsilon_0 > m$ — верхнему континууму, $\varepsilon_0 = -m$ — критическому заряду ядра², а $\varepsilon_0 < -m$ — состояниям нижнего континуума (так называемое море Дирака, заполненное ненаблюдаемыми вакуумными электронами; дырка, т.е. незаполненное состояние в этом море, соответствует позитрону [21, 22]).

Аналогичным образом, если для энергии ε_0 основного терма системы двух ядер с зарядами Z_1 и Z_2 выполняется условие $\varepsilon_0(R; Z_1, Z_2) = -m$, где R — расстояние между ядрами, то этим определяется "критическое" межъядерное расстояние $R_{cr}(Z_1, Z_2)$. При сближении этих ядер на расстояние $R < R_{cr}$ связанный уровень исчезает из дискретного спектра, превращаясь в квазистационарный уровень и уходя в нижний континуум, и начинается спонтанное рождение e^+e^- -пар из вакуума, причём электроны "салятся" на К-орбиту (если при $R > R_{cr}$ она не была занята электронами), а позитроны, просачиваясь сквозь кулоновский барьер, уходят на бесконечность, где могут быть зарегистрированы. В пороговой области ($Z - Z_{cr} \ll Z_{cr}$) вероятность спонтанного рождения позитронов экспоненциально мала [9–11], поскольку барьер в эффективном потенциале $U \approx \varepsilon V - V^2/2$ является широким и имеет малую проницаемость.

После этих пояснений перейдём к формулам (1)–(3). Первые две из них следуют из квазиклассического выражения для волновой функции электрона $\psi_0(r) \propto \exp\{i \int^r p(r') dr'\}$, где в случае векторной связи³ импульс под барьером выражается как

$$p(r) = \sqrt{(\varepsilon_0 - V(r))^2 - m^2}$$

(считаем, что потенциал $V(r) \rightarrow 0$ на бесконечности). Для кулоновского поля, когда $V(r) = -Z\alpha/r$ при $r > r_N$, имеем

$$ip(r) = -\lambda + \frac{Z\alpha\varepsilon_0}{\lambda r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (4)$$

что сразу даёт формулу (2), а для короткодействующего ($Z = 0$) потенциала приводит к (1). В общем случае

$$\psi_0(r) \propto \exp(-\lambda r) \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int^r V(r') dr' + \dots\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

² Точная величина критического заряда $Z_{cr} > 137$ зависит от радиуса ядра r_N и в меньшей степени от распределения электрического заряда по объёму ядра, от степени ионизации внешних электронных оболочек атома, диффузности края ядра и тому подобных факторов [8–18]. Первая оценка Z_{cr} принадлежит Померанчуку и Смородинскому [7], которые учли в уравнении Дирака обрезание кулоновского потенциала на малых расстояниях, однако их оценка оказалась завышенной. Расчёты показывают [8–11], что $Z_{cr} \approx 170$ для основного уровня $1s_{1/2}$, $Z_{cr} = 185$ и 230 для возбуждённых состояний $2p_{1/2}$ и $2s_{1/2}$ и т.д. Вычисление R_{cr} , которое требует численного решения "задачи двух центров" для уравнения Дирака, было выполнено в [14–20].

³ То есть для электромагнитного (кулоновского) взаимодействия электрона с ядром.

откуда видно, что наличие степенной функции r^v в предэкспоненциальном множителе формулы (2) связано именно с кулоновским "хвостом" атомного потенциала $V(r)$.

Что касается асимптотики (3) на краю нижнего континуума, то её вывод более сложен и не может быть получен непосредственно из (2), а требует точного решения уравнения Дирака при энергии $\varepsilon_0 = -m$, которое в случае кулоновского поля притяжения находится аналитически и имеет вид⁴

$$\psi_0(r) = \text{const } K_{iv}(\sqrt{8Z\alpha r}), \quad v = 2\sqrt{(Z\alpha)^2 - 1}, \quad Z\alpha > 1, \quad (6)$$

где $K_{iv}(x)$ — функция Макдональда, известная из теории специальных функций. Поскольку $K_{iv}(x) \propto \exp(-x)$ при $x \gg 1$, отсюда сразу следует асимптотика (3). Отметим специфический характер убывания волновой функции уровня: $\psi_0(r) \propto \exp(-c_1\sqrt{r})$ при $\varepsilon_0 = -m$ и $r \rightarrow \infty$, отличный от привычного поведения $\psi_0(r) \propto \exp(-\lambda r)$ в случаях короткодействующих потенциалов.

Имеется существенное различие в поведении атомных волновых функций при $\varepsilon_0 \rightarrow m$ и $\varepsilon_0 \rightarrow -m$, хотя в обоих случаях $\lambda \rightarrow 0$. В первом случае (водородоподобный атом) энергия уровней $\varepsilon_n = m(1 - (Z\alpha)^2/2n^2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число уровня и

$$\lambda = \frac{Z}{n}, \quad v = n, \quad \psi_n(r) \propto r^n \exp\left(-\frac{Z}{n}r\right) \quad (7)$$

(в атомных единицах $\hbar = m = e = 1$). При этом электронная плотность достигает максимума на расстояниях $\langle r \rangle \sim n^2 Z^{-1} a_B$ от ядра и при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\varepsilon_n \rightarrow m$, происходит делокализация связанного состояния⁵. Напротив, при $Z \rightarrow Z_{cr}$ и $\varepsilon_0 \rightarrow -m$ атомное состояние сжимается, его средний радиус $\langle r \rangle$ убывает с возрастанием Z . При $Z = Z_{cr}$ имеем: $\langle r \rangle \sim \alpha^{1/2} l_C \approx 0,001 a_B$, причём численное значение $\langle r \rangle$ зависит от радиуса ядра r_N [9–11]. Таким образом, при наличии кулоновского поля симметрия решений уравнения Дирака по знаку энергии ε уже не имеет места.

Выяснив всё это, я с некоторым волнением позвонил Якову Борисовичу и изложил свои соображения. Его первая реакция была отрицательной: "Вы где-то ошиблись". Однако, выслушав меня, сказал, что "надо подумать". И буквально через 2–3 дня сам позвонил мне: "Да, по-видимому, Вы правы. Приезжайте, и обсудим всё подробнее". А в конце нашей беседы сказал: "Вам надо встретиться с Мигдалом — у него есть идеи о позитронных уровнях, выходящих из нижнего континуума. Попробуйте в этом разобраться".

Так началось моё знакомство и сотрудничество с Яковом Борисовичем Зельдовичем и Аркадием Бенедиктовичем Мигдалом (ЯБ и АБ, как обычно называли их между собой ученики и сотрудники). Оглядываясь назад, вижу, что это были наиболее яркие события в моей научной биографии. Хотя непосредственное сотрудниче-

⁴ Решение, убывающее на бесконечности. Подробности вычислений можно найти в работах [8] (численный расчёт) и [9–11] (аналитическое решение) (см. также [4, 14–17]). Заметим, что выражение (6) относится к верхней компоненте дираковского биспинора; нижняя компонента имеет несколько иной вид, но асимптотика (3) сохраняется и для неё.

⁵ По-видимому, именно этот случай имели в виду авторы работы [5].

ство с ними заняло не так уж много времени и уклады-вается в 1970–1977 годы, оно принесло мне неоценимую пользу. Я многому научился у этих замечательных физиков, в том числе стремлению к наглядному качественному объяснению ("на пальцах") физических эффектов и результатов громоздких вычислений. Работы по квантовой электродинамике сверхсильных кулоновских полей, критическому заряду ядра, свойствам электронной оболочки сверхкритического атома, спонтанному рождению позитронов из вакуума при $Z > Z_{\text{cr}}$, или $R < R_{\text{cr}}$, и в столкновениях тяжёлых ядер⁶, теории аномальных и сверхзаряженных ядер подробно обсуждались с ЯБ и (или) с АБ, что имело для нас большое значение. В сущности, вся моя работа в области $Z > 137$ началась с изучения статей [5–7], в которых была дана постановка задачи. Следует отметить, что ясное и непротиворечивое изложение проблемы поляризации вакуума и сверхсвязанных электронов в нижнем континууме при $Z > Z_{\text{cr}}$ и $\varepsilon < -m$ впервые было дано в работах [4, 14–16, 23].

Мне хотелось бы ещё остановиться на обсуждении вопроса о позитронных уровнях, которые, по мнению АБ, с возрастанием заряда ядра $Z > 137$ могли бы появляться из нижнего континуума. По совету ЯБ я исследовал этот вопрос на основе релятивистского уравнения Дирака (описывающего как электроны, так и позитроны) и таких уровней не нашёл⁷. Это явилось предметом дискуссии, происходившей в начале 1970 г.; в обсуждении участвовали ЯБ, АБ и автор этих строк. В то время АБ твёрдо верил в существование таких состояний, а мы с ЯБ возражали ему. Очевидно, наши возражения постепенно стали раздражать АБ, обсуждение стало темпераментным и пошло "в разнос". Наконец, ЯБ заметил: "Кады! Ты забыл про принцип Паули!" — на что последовала мгновенная и бурная реакция АБ, после чего ЯБ оборвал дискуссию, сказав: "Давайте сегодня закончим на этом, но не думай, Кады, что я не мог бы ответить тебе достойно и в том же стиле. Просто присутствие Владимира Степановича меня несколько стесняет". Я поспешил регироваться из квартиры ЯБ, где происходило это обсуждение. Хотя с тех пор минуло уже свыше 40 лет, я хорошо помню эту сцену и ручаюсь за точный, если не буквальный, смысл изложенного выше.

Данный эпизод нашёл известное отражение в статье "Электронная структура сверхтяжёлых атомов" [4], в которую ЯБ вставил "двустиишие Велимира Хлебникова"⁸:

⁶ При сверхкритическом суммарном заряде ядер $Z_1 + Z_2 > Z_{\text{cr}} \approx 170$ [8–11], который реально возникает в случае столкновения двух ядер урана, — замечание ЯБ и Герштейна [5], из которого выросли многочисленные работы (как нашей группы [9–13], так и Грейнера с сотрудниками [14–16]) по расчёту критического расстояния $R_{\text{cr}}(Z_1, Z_2)$ в системе двух ядер, сечения спонтанного и вынужденного рождения позитронов при $R < R_{\text{cr}}$, их импульсного спектра и т.д. Для голых (полностью ободранных) ядер урана критическое расстояние $R_{\text{cr}} \approx 0,1 l_C \approx 35$ фм. Зависимость Z_{cr} и R_{cr} от степени заполнения внешних электронных оболочек атома подробно обсуждается в [12–20].

⁷ Характерным свойством уравнения Дирака является то [4, 14–16], что всякий уровень дискретного спектра $\varepsilon_0(Z)$ монотонно опускается с возрастанием заряда ядра Z до тех пор, пока при $Z = Z_{\text{cr}}$ не достигнет границы нижнего континуума. Для других релятивистских волновых уравнений ситуация уже не столь проста (в связи с этим см., например [4, раздел 5]).

⁸ При этом "поэт-словотворец называет теорию микромира атомоскладом" [4].



В этом доме в квартире Зельдовича происходило описанное выше бурное обсуждение. Видно, что сегодня этот дом, в котором многие годы проживал не только Зельдович, но и другие выдающиеся учёные, в частности Нобелевский лауреат по химии Н.Н. Семёнов, Н.М. Эмануэль, находится в плачевном состоянии (хотя имелись планы создать в этом доме музей — может быть, когда-нибудь эти планы и осуществляются).

Могучий и громадный, далёк астральный лад.
Желаешь объяснения — познай атомосклад.

Именно так было в рукописи и даже в корректуре статьи, но в последний момент ЯБ заменил "желаешь" на более нейтральное "ты ищешь", как и было напечатано в журнале. Эти стихи вызвали у меня недоумение, и я уговаривал ЯБ убрать их, но спорить с ним было бесполезно (аналогичный эпизод описан также в воспоминаниях Л.Б. Окуня [24]). Должен сознаться, что их скрытый смысл дошёл до меня лишь позднее⁹. Таким образом ЯБ ответил на грубость, допущенную Мигдалом в ходе описанной выше дискуссии. Нужно сказать, что данный

⁹ Меня, однако, удивило, что в редакции *УФН* не потребовали ссылки на В. Хлебникова с точным указанием названия, издательства и года (что в те времена было, по-видимому, обязательным условием для публикации в советских журналах) и ограничились ссылкой на "разыскания Я.Б. Зельдовича". В других случаях это требование строго соблюдалось (см., например, в работе [4] ссылки [37], [54] и [57] на стихи Валерия Брюсова, на выражение "в пиквическом смысле" и приписываемое Н. Бору высказывание о том, что такое "настоящий специалист в данной области" (излишне говорить, что все эти "лирические отступления" были включены в статью Яковом Борисовичем).

эпизод не отразился на тёплых, дружеских отношениях, которые связывали этих двух выдающихся физиков.

В дальнейшем ЯБ проявлял неизменный интерес к нашим с М.С. Мариновым расчётам критического межъядерного расстояния R_{cr} [19, 20] и спонтанного рождения позитронов в медленных (адиабатических) столкновениях двух тяжёлых ядер, а также к проблеме рождения e^+e^- -пар из вакуума переменным электрическим полем или интенсивным лазерным излучением [25–27] (так называемый эффект Швингера).

Постепенно основные теоретические проблемы в области сверхсильных кулоновских полей были решены, и мои контакты с ЯБ ослабели. В 1975–1976 гг. Дима Воскресенский (в то время аспирант АБ) и я развивали, под руководством АБ, теорию сверхзаряженных ядер (для которых $Ze^3 = Z/1600 \gtrsim 1$), электродинамика которых обладала бы своеобразными особенностями [28–30]. Так, например, электрический заряд такого сверхъядра концентрируется вблизи его поверхности¹⁰, а внутри ядра образуется электронейтральная плазма из p , e и n , что существенно уменьшает кулоновскую энергию ядра, препятствующую его стабильности. ЯБ к этой деятельности относился скептически и, как показало время, он был прав — такие ядра неустойчивы. В эти годы я часто встречался с АБ и мог наблюдать отличие его стиля работы от стиля работы ЯБ, но это — уже другая тема [31]...

Влияние ЯБ заметно сказывается и в других работах нашей группы, не относящихся к "проблеме $Z > 137$ ". Так, в статье "Уровни энергии в искажённом кулоновском поле" [32] (см. также [2, с. 83]) им был указан красивый физический эффект перестройки атомного спектра близким "квазизядерным" уровнем (на примере уровней электрона в примесном полупроводнике). В дальнейшем он был переоткрыт в релятивистской кулоновской задаче с $Z > 137$ [33], в теории легчайших адронных атомов [34, 35], изучен в деталях [36–38] и получил название "эффекта Зельдовича" [36, 38]. Этот эффект может проявляться в спектрах квантовых систем, для которых потенциал взаимодействия состоит из двух частей с сильно несоизмеримыми радиусами, например короткодействующий ("сильный") потенциал V_s с радиусом r_0 и дальнодействующий кулоновский потенциал $U = -Ze^2/r$, причём $r_0 \ll a_B = \hbar^2/Zme^2$. При этом условии можно получить безмодельное уравнение [35], определяющее энергии s -уровней атомного спектра через длину s -рассеяния a_s на сильном потенциале. Это позволяет по энергии одного из уровней (взятой из эксперимента либо из численного расчёта) восстановить, не решая уравнения Шрёдингера, весь спектр атомных со-

стояний с $l = 0$. Специфические особенности эффекта Зельдовича для состояний с угловым моментом $l \neq 0$ рассмотрены в [37, 38]. Недавно было замечено [39, 40], что в спектре атома водорода, находящегося в сверхсильном магнитном поле $B \sim 10^{12} - 10^{15}$ Гс (такие поля существуют на поверхности пульсаров (нейтронных звёзд) и в так называемых магнитарах), эффект Зельдовича проявляется для чётных (относительно отражения $z \rightarrow -z$ вдоль магнитного поля) уровней.

ЯБ интересовался теорией нестабильных (квазистационарных) состояний и предложил для них способ нормировки гамовских волновых функций¹¹ и оригинальную форму [41, 42] теории возмущений (ТВ). Этот подход (метод регуляризации Зельдовича) применялся в задачах квантовой механики и атомной физики, в том числе для вычисления вероятности фотоионизации отрицательных ионов (H^- , Na^- и т.д.) в лазерном поле с циркулярной поляризацией [43, 44]. В простейшем (дискретном) варианте метод Зельдовича состоит в том, что расходящемуся ряду приписывается обобщённая сумма S :

$$S \equiv \sum_n a_n = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \sum_n a_n \exp(-\alpha n^2), \quad \alpha \rightarrow +0, \quad (8)$$

и аналогично для интегралов. Этот метод — более мощный, чем известные из математики методы суммирования расходящихся рядов Чезаро, Абеля и Бореля. Как правило, он достаточен для придания физического смысла расходимостям, возникающим в теории квазистационарных состояний [42–45].

ЯБ получил [46] своеобразную формулу 2-го порядка ТВ, которая, в отличие от стандартной формулы, не требует знания всего энергетического спектра системы. Предложенный в [46–49] приём¹² оказался удобным и применялся при вычислении высших порядков ТВ для ангармонического осциллятора, потенциала воронки и эффекта Штарка в атоме водорода [47–49]. Соответствующие ряды ТВ расходятся факториально, и они могут быть непосредственно использованы только в области слабых полей. Применяя методы суммирования расходящихся рядов, в том числе метод Зельдовича, удалось вычислить штарковские сдвиги и ширины уровней атома водорода в сильном электрическом поле [47–49], далеко за пределами области применимости обычной ТВ.

ЯБ ввёл [50, 51] (одновременно с В.И. Ритусом [52]) понятие о квазиэнергии E_α для атома, находящегося в поле световой волны:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}, t + T) = \exp\left(-i \frac{E_\alpha T}{\hbar}\right) \psi_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad -\infty < t < \infty \quad (9)$$

($T = 2\pi/\omega$ — период волны, ψ_α — периодическая функция времени), и рассмотрел вопрос о вынужденном излуче-

¹⁰ Согласно [28–30], вблизи поверхности сверхъядра в узком (по сравнению с радиусом этого ядра) слое толщиной $\sim 12 - 15$ фм расположен нескомпенсированный заряд и имеется огромное электрическое поле, превышающее критическое, или швингеровское, поле $\mathcal{E}_{cr} = m_e^2 c^3 / e \hbar$ в квантовой электродинамике. Для стабильности сверхзаряженных ядер требуется дополнительное притягивательное взаимодействие между нуклонами, которое, по мнению Мигдала, может возникнуть при уплотнении ядерного вещества и образовании пионного конденсата. Идея о π -конденсации, которая принадлежит Мигдалу, развивалась многими авторами. Сейчас принято считать (замечание Д.Н. Воскресенского), что π -конденсат может существовать в плотных сердцевинах нейтронных звёзд. В литературе обсуждается также возможность π -конденсации в кварковой материи.

¹¹ Гамовские волновые функции экспоненциально возрастают на бесконечности, поэтому обычное условие нормировки не может быть выполнено, а формулы теории возмущений требуют модификации.

¹² Замена уравнения Шрёдингера нелинейным уравнением типа Риккати для логарифмической производной волновой функции даёт возможность эффективно вычислять высокие порядки ТВ в случае простых аналитических потенциалов. Таким способом в задаче о штарк-эффекте в атоме водорода были вычислены 160 порядков ТВ для энергии основного уровня и 100 порядков — для возбуждённых состояний [47–49].

нии фотонов из квазиэнергетического состояния¹³. Квазиэнергия аналогична квазиимпульсу электрона в периодическом потенциале кристаллической решётки (волны Блоха). В настоящее время подход с использованием квазиэнергий является стандартным в атомной и лазерной физике. Определение спектра квазиэнергий для конкретной атомной системы представляет собой достаточно сложную задачу. В работе [54] был найден спектр квазиэнергий для модельной задачи о нестационарном гармоническом осцилляторе, допускающей точное решение (см. также [42, с. 268]). На этом примере видно, что даже в случае "запирающего" осциллятора потенциала $V(x) = (1/2)\omega^2(t)x^2$ спектр квазиэнергий может быть как дискретным, так и непрерывным — в зависимости от конкретного вида частоты $\omega(t)$.

Отметим, что ЯБ привлек наше внимание к "парадоксу гармонического осциллятора" в квантовой теории излучения. Как известно, вероятность дипольного излучения при переходе между уровнями E_i и E_f имеет вид

$$w_{if} = \frac{4\omega_{if}^3}{3\hbar c^3} |\langle f | \mathbf{er} | i \rangle|^2, \quad \omega_{if} = \frac{E_i - E_f}{\hbar}. \quad (10)$$

В случае гармонического осциллятора с частотой ω все разности $\omega_n - \omega_{n-1} = \omega$ не зависят от номера уровня n , а матричный элемент $\langle n | \hat{x} | n-1 \rangle \propto \sqrt{n}$. Казалось бы, отсюда следует, что вероятность перехода $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ пропорциональна n , а ширина спектральной линии должна убывать $\propto 1/n$. Между тем при $n \gg 1$ справедливо квазиклассическое приближение, поэтому ширина линии определяется постоянной затухания осциллятора и не зависит от n . В этом (кажущемся) противоречии и состоит "парадокс гармонического осциллятора", который был разъяснён в работах [55, 56], где были получены квантовые кинетические уравнения для матрицы плотности в случае систем с эквидистантным спектром. В этом специальном случае амплитуды всех переходов соответствуют одной и той же энергии $\hbar\omega$ и интерферируют между собой. В итоге для вероятностей перехода получаются те же выражения (при любом n), что и в классической электродинамике, и "парадокс гармонического осциллятора" разрешается сам собой. По этому поводу ЯБ как-то сказал мне (возможно, в шутку): "Парадоксы — это движущая сила науки". Здесь уместно вспомнить заметку "Как квантовая механика помогает понять выводы классической механики", опубликованную под именем П. Парадоксова [57], но принадлежащую, несомненно, самому ЯБ.

Перечисленные выше работы Якова Борисовича составляют малую, притом не главную часть его научного наследия [1–3]. Однако уже из них видно, как широк был диапазон его научных интересов и насколько значительны полученные им результаты (см., в частности, [58–82]). Надо отметить, что характерной чертой ЯБ, так же как и АБ, был демократизм: каждый из них готов был обсуждать научные проблемы и со студентом, и с академиком, а несогласие с иной точкой зрения, выражавшееся порой в достаточно резкой форме, не переходило в плоскость личных отношений. Обсуждение с ними различных аспектов квантовой электродинамики сильных полей, как и более широкого круга физических, и не только физических, вопросов всегда было интересным и поучительным для меня [31].

Следует сказать, что Яков Борисович находил время, чтобы вникать в вопрос математического образования, необходимого для будущих физиков и инженеров [82, 83]. Он считал, что принятый во многих руководствах по высшей математике формальный аксиоматический ме-

тод, основанный на "отточенной ε - δ -технике" [83], неудобен для приложений и не приводит к активному усвоению этой науки студентами. Свою точку зрения ЯБ в яркой форме выразил в книгах [82–84] (см. также [42]).

Я благодарен судьбе, давшей мне возможность в те, уже далёкие от нас, 1980-е годы встречаться и работать с такими корифеями теоретической физики, как Яков Борисович Зельдович и Аркадий Бенедиктович Мигдал, свои впечатления о встречах с которыми я попытался изложить выше.

Настоящая статья основана на выступлении автора на Международной конференции "The Sun, the Stars, the Universe and General Relativity", посвящённой 95-й годовщине со дня рождения Я.Б. Зельдовича (Zel'dovich Meeting, Минск, 20–23 апреля 2009 г.). Я благодарен Р. Руффини за предложение записать эти воспоминания, а также С.И. Блиникову, Д.Н. Воскресенскому, М.И. Высоцкому, С.И. Годунову, В.С. Имшенику, В.Д. Муру, Л.Б. Окуню и В.А. Рубакову, прочитавшим статью в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний. Я выражаю благодарность В.М. Вайнбергу и Д.В. Попову за помощь в подготовке рукописи к печати.

Список литературы

1. Зельдович Я Б *Химическая физика и гидродинамика: Избранные труды* (Под ред. Ю Б Харитона) (М.: Наука, 1984) [Zeldovich Ya B *Chemical Physics and Hydrodynamics: Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* (Eds J P Ostriker, G I Barenblatt, R A Sunyaev) (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]
2. Зельдович Я Б *Частицы, ядра, Вселенная: Избранные труды* (Под ред. Ю Б Харитона) (М.: Наука, 1985) [Zeldovich Ya B *Particles, Nuclei, and the Universe: Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* (Eds J P Ostriker, G I Barenblatt, R A Sunyaev) (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]
3. Александров А П и др. *УФН* **155** 729 (1988) [Aleksandrov A P et al. *Sov. Phys. Usp.* **31** 778 (1988)]
4. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971) [Zeldovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)]
5. Герштейн С С, Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **57** 654 (1969) [Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **30** 358 (1969)]
6. Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Nuovo Cimento Lett.* **1** 835 (1969)
7. Pomeranchuk I Ya, Smorodinsky Ya A *J. Phys. USSR* **9** 97 (1945)
8. Pieper W, Greiner W *Z. Phys.* **218** 327 (1969)
9. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **11** 254 (1970) [Popov V S *JETP Lett.* **11** 162 (1970)]
10. Попов В С *ЯФ* **12** 429 (1970) [Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 235 (1971)]
11. Попов В С *ЖЭТФ* **59** 956 (1970) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **32** 526 (1971)]
12. Gershtein S S, Popov V S *Lett. Nuovo Cimento* **6** 593 (1973)
13. Попов В С *ЖЭТФ* **65** 35 (1973) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **38** 18 (1974)]
14. Greiner W, Müller B, Rafelski J *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
15. Rafelski J, Müller B, Greiner W *Nucl. Phys. B* **68** 585 (1974)
16. Rafelski J, Müller B *Phys. Lett. B* **65** 205 (1976)
17. Попов В С *Природа* (10) 14 (1981)
18. Попов В С *ЯФ* **64** 421 (2001) [Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **64** 367 (2001)]
19. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **69** 141 (1977)
20. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **91** 20 (1980)
21. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **117** 610 (1928)
22. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press, 1958)
23. Okun L *Comm. Nucl. Part. Phys.* **6** 25 (1974)
24. Окунь Л Б, в сб. *Знакомый незнакомый Зельдович в воспоминаниях друзей, коллег, учеников* (Отв. ред. С С Герштейн, Р А Сюняев, Сост. Н Д Морозова) (М.: Наука, 1993) с.182
25. Попов В С *ЖЭТФ* **61** 1334 (1971) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **34** 709 (1972)]
26. Попов В С *ЯФ* **19** 1140 (1974) [Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **19** 584 (1974)]
27. Marinov M S, Popov V S *Fortschr. Phys.* **25** 373 (1977)
28. Мигдал А Б, Воскресенский Д Н, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **24** 186 (1976) [Migdal A B, Voskresenskii D N, Popov V S *JETP Lett.* **24** 163 (1976)]
29. Мигдал А Б, Попов В С, Воскресенский Д Н *ЖЭТФ* **72** 834 (1977) [Migdal A B, Popov V S, Voskresenskii D N *Sov. Phys. JETP* **45** 436 (1977)]
30. Popov V *AIP Conf. Proc.* **1205** 127 (2010)
31. Попов В С, Препринт № 34-01 (М.: ИТЭФ, 2001)
32. Зельдович Я Б *ФТТ* **1** 1637 (1959) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Solid State* **1** 1497 (1959)]

¹³ Следует отметить, что при рассмотрении релятивистского электрона в поле сильной электромагнитной волны Никишов и Ритус [53] ввели четырёхмерный квазиимпульс, временная компонента которого совпадает с квазиэнергией.

33. Попов В С *ЖЭТФ* **60** 1228 (1971) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **33** 665 (1971)]
34. Кудрявцев А Е, Маркушин В Е, Шапиро И С *ЖЭТФ* **74** 432 (1978) [Kudryavtsev A E, Markushin V E, Shapiro I S *Sov. Phys. JETP* **47** 225 (1978)]
35. Кудрявцев А Е, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **29** 311 (1979) [Kudryavtsev A E, Popov V S *JETP Lett.* **29** 280 (1979)]
36. Badalyan A M, Kok L P, Polikarpov M I, Simonov Yu A *Phys. Rep.* **82** 31 (1982)
37. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ДАН СССР* **279** 345 (1984) [Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. Dokl.* **29** 938 (1984)]
38. Карнаков В М, Кудрявцев А Е, Мур В Д, Попов В С *ЖЭТФ* **94** 65 (1988) [Karnakov B M, Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **67** 1333 (1988)]
39. Карнаков В М, Попов В С *ЖЭТФ* **124** 996 (2003) [Karnakov B M, Popov V S *JETP* **97** 890 (2003)]
40. Попов В С, Карнаков Б М *ЖЭТФ* **141** 5 (2012) [Popov V S, Karnakov B M *JETP* **114** 1 (2012)]
41. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **39** 776 (1960) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **12** 542 (1961)]
42. Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1971) [Baz' A I, Zel'dovich Ya B, Perelomov A M *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* 1st ed. (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)]
43. Мур В Д, Поздняков С Г, Попов В С, Попруженко С В *Письма в ЖЭТФ* **75** 294 (2002) [Mur V D, Pozdnyakov S G, Popov V S, Popruzenko S V *JETP Lett.* **75** 249 (2002)]
44. Мур В Д, Попруженко С В, Поздняков С Г, Попов В С *Phys. Lett. A* **316** 226 (2003)
45. Мур В Д, Поздняков С Г, Попруженко С В, Попов В С *ЯФ* **68** 708 (2005) [Mur V D, Pozdnyakov S G, Popruzenko S V, Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **68** 677 (2005)]
46. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **31** 1101 (1956) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **4** 142 (1956)]
47. Popov V S, Mur V D, Shchelykin A V, Weinberg V M *Phys. Lett. A* **124** 77 (1987)
48. Popov V S, Mur V D, Sergeev A V, Weinberg V M *Phys. Lett. A* **149** 418 (1990); Popov V S, Mur V D, Sergeev A V *Phys. Lett. A* **149** 425 (1990)
49. Mur V D, Popov V S *Laser Phys.* **3** 462 (1993)
50. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **51** 1492 (1966) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **24** 1006 (1967)]
51. Зельдович Я Б *УФН* **110** 139 (1973) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **16** 427 (1973)]
52. Ритус В И *ЖЭТФ* **51** 1544 (1966) [Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **24** 1041 (1967)]
53. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **46** 776 (1964) [Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **19** 529 (1964)]
54. Переломов А М, Попов В С *ТМФ* **3** 377 (1970) [Perelomov A M, Popov V S *Theor. Math. Phys.* **3** 582 (1970)]
55. Зельдович Я Б, Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **55** 589 (1968) [Zel'dovich Ya B, Perelomov A M, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **28** 308 (1969)]
56. Белавин А А, Зельдович Б Я, Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **56** 264 (1969) [Belavin A A, Zel'dovich B Ya, Perelomov A M, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **29** 145 (1969)]
57. Парадоксов П *УФН* **89** 707 (1966) [Paradoksov P *Sov. Phys. Usp.* **9** 618 (1967)]
58. Альтшулер Л В, Зельдович Я Б, Стяжкин Ю М "Исследование изэнтропической сжимаемости и уравнений состояния делящихся материалов" *УФН* **167** 107 (1997) [Altshuler L V, Zel'dovich Ya B, Styazhkin Yu M "Investigation of isentropic compression and equations of state of fissionable materials" *Phys. Usp.* **40** 101 (1997)]
59. Зельдович Я Б, Харитон Ю Б "Деление и цепной распад урана" *УФН* **163** (4) 107 (1993) [Zeldovich Ya B, Khariton Yu B "Fission and chain decay of uranium" *Phys. Usp.* **36** 311 (1993)]
60. Гуревич И И, Зельдович Я Б, Померанчук И Я, Харитон Ю Б "Использование ядерной энергии легких элементов" *УФН* **161** (5) 171 (1991) [Khariton Yu B, Zeldovich Ya B, Gurevich I I, Pomeranchuk I Ya "Utilization of the nuclear energy of the light elements" *Sov. Phys. Usp.* **34** 445 (1991)]
61. Зельдович Я Б, Бучаченко А Л, Франкевич Е Л "Магнитно-спиновые эффекты в химии и молекулярной физике" *УФН* **155** 3 (1988) [Zel'dovich Ya B, Buchachenko A L, Frankevich E L "Magnetic-spin effects in chemistry and molecular physics" *Sov. Phys. Usp.* **31** 385 (1988)]
62. Зельдович Я Б, Михайлов А С "Флуктуационная кинетика реакций" *УФН* **153** 469 (1987) [Zel'dovich Ya B, Mikhailov A S "Fluctuation kinetics of reactions" *Sov. Phys. Usp.* **30** 977 (1987)]
63. Зельдович Я Б, Рузмайкин А А "Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма" *УФН* **152** 263 (1987) [Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A "The hydromagnetic dynamo as the source of planetary, solar, and galactic magnetism" *Sov. Phys. Usp.* **30** 494 (1987)]
64. Зельдович Я Б, Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д "Перемежаемость в случайной среде" *УФН* **152** 3 (1987) [Zel'dovich Ya B, Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokolov D D "Intermittency in random media" *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)]
65. Зельдович Я Б, Гришук Л П "Тяготение, общая теория относительности и альтернативные теории" *УФН* **149** 695 (1986) [Zel'dovich Ya B, Grishchuk L P "Gravitation, the general theory of relativity, and alternative theories" *Sov. Phys. Usp.* **29** 780 (1986)]
66. Зельдович Я Б, Соколов Д Д "Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика" *УФН* **146** 493 (1985) [Zel'dovich Ya B, Sokolov D D "Fractals, similarity, intermediate asymptotics" *Sov. Phys. Usp.* **28** 608 (1985)]
67. Шандарин С Ф, Дорошкевич А Г, Зельдович Я Б "Крупномасштабная структура Вселенной" *УФН* **139** 83 (1983) [Shandarin S F, Doroshkevich A G, Zel'dovich Ya B "The large-scale structure of the universe" *Sov. Phys. Usp.* **26** 46 (1983)]
68. Зельдович Я Б, Хлопов М Ю "Масса нейтрино в физике элементарных частиц и космологии ранней Вселенной" *УФН* **135** 45 (1981) [Zel'dovich Ya B, Khlopov M Yu "The neutrino mass in elementary-particle physics and in big bang cosmology" *Sov. Phys. Usp.* **24** 755 (1981)]
69. Зельдович Я Б "Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии" *УФН* **133** 479 (1981) [Zel'dovich Ya B "Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology" *Sov. Phys. Usp.* **24** 216 (1981)]
70. Высоцкий М И, Долгов А Д, Зельдович Я Б "Космические ограничения на массы нейтральных лептонов" *УФН* **123** 703 (1977) [Vysotskii M I, Dolgov A D, Zel'dovich Ya B "Cosmological limitations on the mass of neutral leptons" *Sov. Phys. Usp.* **20** 1031 (1977)]
71. Зельдович Я Б, Манаков Н Л, Рапопорт Л П "Квазиэнергия системы, подвергнутой периодическому внешнему воздействию" *УФН* **117** 563 (1975) [Zel'dovich Ya B, Manakov N L, Rapoport L P "Quasienergy of a system subjected to a periodic external disturbance" *Sov. Phys. Usp.* **18** 920 (1975)]
72. Зельдович Я Б "Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением" *УФН* **115** 161 (1975) [Zel'dovich Ya B "Interaction of free electrons with electromagnetic radiation" *Sov. Phys. Usp.* **18** 79 (1975)]
73. Зельдович Я Б "Космологическая постоянная и теория элементарных частиц" *УФН* **95** 209 (1968) [Zel'dovich Ya B "The cosmological constant and the theory of elementary particles" *Sov. Phys. Usp.* **11** 381 (1968)]
74. Зельдович Я Б "'Горячая' модель Вселенной" *УФН* **89** 647 (1966) [Zel'dovich Ya B "The 'hot' model of the Universe" *Sov. Phys. Usp.* **9** 602 (1966)]
75. Зельдович Я Б, Окунь Л Б, Пикельнер С Б "Кварки: астрофизический и физико-химический аспекты" *УФН* **87** 113 (1965) [Zel'dovich Ya B, Okun L B, Pikel'ner S B "Quarks: astrophysical and physicochemical aspects" *Sov. Phys. Usp.* **8** 702 (1966)]
76. Зельдович Я Б, Новиков И Д "Релятивистская астрофизика. I" *УФН* **84** 377 (1964) [Zel'dovich Ya B, Novikov I D "Relativistic astrophysics. I" *Sov. Phys. Usp.* **7** 763 (1965)]
77. Зельдович Я Б, Новиков И Д "Релятивистская астрофизика. II" *УФН* **86** 447 (1965) [Zel'dovich Ya B, Novikov I D "Relativistic astrophysics. II" *Sov. Phys. Usp.* **8** 522 (1966)]
78. Базь А И, Гольдманский В И, Зельдович Я Б "Систематика легчайших ядер" *УФН* **85** 445 (1965) [Baz' A I, Gol'danskii V I, Zel'dovich Ya B "Systematics of the lightest nuclei" *Sov. Phys. Usp.* **8** 177 (1965)]
79. Герштейн С С, Зельдович Я Б "Ядерные реакции в холодном водороде. I. Мезонный катализ" *УФН* **71** 581 (1960) [Zel'dovich Ya B, Gershtein S S "Nuclear reactions in cold hydrogen I. Mesonic catalysis" *Sov. Phys. Usp.* **3** 593 (1961)]
80. Зельдович Я Б, Райзер Ю П "Ударные волны большой амплитуды в газах" *УФН* **63** 613 (1957)
81. Зельдович Я Б, Лукьянов С Ю, Смородинский Я А "Свойства нейтрино и двойной β -распад" *УФН* **54** 361 (1954)
82. Зельдович Я Б *Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике* 5-е изд. (М.: Наука, 1970)
83. Зельдович Я Б, Яглом И М *Высшая математика для начинающих физиков и техников* (М.: Наука, 1982)
84. Зельдович Я Б, Мышкис А Д *Элементы прикладной математики* 3-е изд. (М.: Наука, 1972)

"The host of heaven is far..." (my recollections of Ya.B. Zeldovich)

V.S. Popov, Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation

Recollections about the prominent Soviet theoretical physicist Academician Ya.B. Zeldovich and his influence on the scientific work of the author and the author's colleagues.

PACS numbers: **01.60. + q**, **01.65. + g**, **03.65. – w**

Bibliography — 84 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (4) 451 – 456 (2014)

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201404i.0451

Received 29 April 2013

Physics – Uspekhi **57** (4) (2014)