

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Идеи Я.Б. Зельдовича
и современная космология Бранса – Дикке

И.Д. Новиков, А.А. Шацкий, С.О. Алексеев, Д.А. Третьякова

Сравниваются идеи Я.Б. Зельдовича по теории Бранса – Дикке и принципы Маха, изложенные в книгах, ставших классическими, с современными результатами по этим вопросам. Мы приводим недавно полученные нами результаты по космологии в теории гравитации Бранса – Дикке с космологическим членом. Уравнения Фридмана – Бранса – Дикке записываются для плоской Вселенной. В качестве начальных условий модели выбираются известные из современных наблюдений данные для постоянной Хаббла, её производной по времени (параметра замедления) и плотности материи. Аналитически рассчитан космологический сценарий, при котором масштабный фактор не обращается в нуль при рассмотрении эволюции назад во времени. Это соответствует отсутствию в прошлом космологической сингулярности, вместо которой появляются "отскок" масштабного фактора и всегда регулярное решение. Обсуждаются также некоторые идеи, связанные с принципом Маха.

PACS numbers: 04.60.Bc, 04.60.Pp, 98.80.Cq, 98.80.Qc

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201404c.0379

Содержание

1. Введение (379).
 2. Уравнения Эйнштейна – Фридмана (381).
 3. Определение параметров модели (382).
 4. Решение для холодной Вселенной (382).
 5. Космология без сингулярности (383).
 6. Решение для горячей Вселенной (384).
 7. Заключение (384).
- Список литературы (385).

1. Введение

Яков Борисович Зельдович был выдающимся физиком XX столетия. Он всегда уделял особое внимание новым физическим теориям и их следствиям для астрономии. В книгах [1–3] Яков Борисович обсуждал космологические следствия теории Бранса – Дикке и идеи, связанные с

принципом Маха. Один из авторов этой статьи, И.Д.Н., много обсуждал эти вопросы с Яковом Борисовичем. Результаты этих обсуждений изложены в вышеупомянутых монографиях. Насколько нам известно, отдельных статей по этим вопросам Яков Борисович не публиковал (см., впрочем, работу [4]).

Напомним идеи Якова Борисовича, касающиеся теории Бранса – Дикке (ТБД) и принципа Маха. В работе [1] говорится о принципе Маха: "В литературе непрерывно появляются статьи, обсуждающие с разных точек зрения принцип Маха... Суть этого принципа состоит в следующем: инерция тела определяется его взаимодействием (гравитационно-инерционным) с другими телами Вселенной. Этот принцип сыграл большую эвристическую роль в создании Эйнштейном ОТО. Но после создания теории относительности выяснилось, что принцип Маха в ней не содержится... С этой точки зрения, каждое подтверждение теории относительности есть удар по принципу Маха".

И далее: "Прямолинейное применение принципа Маха может привести к идее, что инерциальной является система, связанная с разбегающимися галактиками. Но тогда, казалось бы, уже движение с постоянной скоростью (и не обязательно с ускорением относительно этой системы) должно вести к физическим отличиям. Однако этого нет".

В работе [2] Зельдович писал: "Скалярная теория тяготения даёт результаты, существенно отличающиеся от тензорной теории, а значит, и от эксперимента — для быстро движущихся тел... Различны предсказания для световых лучей, проходящих мимо Солнца. Опыт в последние годы систематически улучшает совпадения с ОТО, оставляет всё меньше места для возможной примеси скалярного взаимодействия... В настоящее время

И.Д. Новиков. Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,

ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация;
The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute,
Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark

А.А. Шацкий. Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

С.О. Алексеев, Д.А. Третьякова. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
Университетский просп. 13, 119991 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 4 сентября 2013 г.,
после доработки 8 октября 2013 г.

можно утверждать, что вклад скалярной теории меньше 10 % от вклада ОТО в гравитацию".

Заметим, что, согласно современным данным, точность этого утверждения значительно выше (см. далее). В монографии [3] Зельдович писал: "...есть и другая гипотеза — предположение об определённой роли Вселенной в локальных законах. Эта гипотеза называется принципом Маха... Таким образом, система, связанная с реликтовым излучением, с общей массой далёкого вещества, действительно физически преимущественна, и она инерциальна в каждой точке. Может быть, это как-то можно трактовать в духе принципа Маха? Мы думаем, что этого делать нельзя. Прямолинейное применение принципа Маха в такой редакции ведёт к следующему. Раз выделена преимущественная система, то даже движение по инерции по отношению к ней (а необязательно с ускорением или вращением) должно вести к отличию в новой системе физических законов от законов в системе преимущественной. Но этого нет..."

Далее Зельдович рассматривает ТБД, которая тесно связана с принципом Маха: «...наряду с известными частицами и полями, рассматривается ещё гипотетическое... скалярное безмассовое поле, так называемое ϕ -поле... "Соответствие" принципу Маха, с точки зрения авторов ТБД, является достоинством теории. Но принцип Маха не доказан... и "соответствие" ему не есть доказательство правильности ТБД...

Отметим, что в ТБД, наряду с "обычными" решениями с начальным условием $t = 0$, $\phi = 0$, можно также рассматривать условие $\phi_0 \neq 0$ или $\phi a^3 = \text{const} \neq 0$, т.е. со "свободным" ϕ -полем. Эти решения обладают любопытными особенностями. Поле ведёт себя в определённых условиях как предельно жёсткое... вещество. При определённом выборе параметров... возможен плавный переход от сжатия к расширению в изотропной фридмановской модели...

...Однако, избавившись от сингулярности, мы сталкиваемся с новыми вопросами: как происходит нуклеосинтез? каким образом получилось равновесное планковское реликтовое излучение? Бесконечная плотность, может быть, и не является необходимой, но плотность порядка $10^6 - 10^8 \text{ г см}^{-3}$ и температура выше 10^{10} К нужны для понимания наблюдаемой картины Вселенной.

...Подведём итог обсуждению ТБД. Разнообразие решений оказалось значительно большим, чем предполагали авторы теории. Появились новые, не связанные с идеями Маха, варианты, рассматриваются свободные поля. Появляется значительное число публикаций по ТБД».

В настоящей статье мы рассматриваем развитие идей, обсуждаемых Я.Б. Зельдовичем, в свете успехов современной космологии [5].

Наблюдательные данные, накопленные к началу XXI в., свидетельствуют о том, что Вселенная расширяется с ускорением [6–11], хотя приводящие к этому физические основания пока не понятны. Таким образом, построение непротиворечивой космологической модели с минимальным количеством предположений и подгоночных параметров, объясняющей наблюдательные данные, представляется весьма актуальной задачей. В настоящее время простейшей (и поэтому наиболее хорошо проработанной) из предложенных моделей является теория холодной тёмной материи с космологической

постоянной (Λ CDM-теория). Эта модель, давая хорошее количественное согласие с наблюдательными данными, не объясняет физической природы тёмной материи и тёмной энергии. Другой недостаток Λ CDM-модели — это отсутствие в её рамках объяснений причин малости космологической постоянной (в предположении, что последняя характеризует так называемую энергию вакуума). Всё это приводит к необходимости построения более широкой динамической теории тёмной энергии (см., например, обзор [12]). Наиболее обсуждаемыми в литературе кандидатами в настоящий момент являются модели гравитации с членами высших порядков по кривизне (например, $f(R)$ -гравитация, впервые предложенная в [13]) и квинтэссенция (медленно меняющееся скалярное поле) [14]. Кроме того, $f(R)$ -теории гравитации теснейшим образом связаны с теорией Бранса–Дикке (которой и посвящена настоящая статья (см., например, [15])).

Модель Бранса и Дикке (Brans and Dicke — BD) — это первая расширенная версия теории гравитации со скалярным полем [16], предложенная в 1961 г. Модель BD содержит дополнительный произвольный параметр w , определяемый из наблюдений. Чем больше значение этого параметра, тем сильнее вклад тензорной части (скалярной кривизны), и, наоборот, чем меньше его значение, тем больше влияние скалярного поля. Теория BD переходит в общую теорию относительности (ОТО) в пределе $|w| \rightarrow \infty$. В данной модели гравитационная постоянная обратно пропорциональна величине скалярного поля ($G \approx 1/\Phi$), т.е. устанавливается дополнительная связь между параметрами. Наиболее точная на сегодняшний день оценка параметра w , следующая из данных космического аппарата "Кассини–Гюйгенс" для постньютоновского параметра γ , составляет $|w| > 50\,000$ (см. [17]).

Теория BD является одним из наиболее естественных расширений ОТО. Интерес к ней не ослабевает, ввиду того что, во-первых, эта модель может являться эффективным низкоэнергетическим пределом теорий Великого объединения и Суперобъединения (которые, судя по новейшим данным Большого адронного коллайдера [18], не закрыты). Более того, скалярное поле в модели BD можно интерпретировать как дилатон теории струн. Во-вторых, модель BD — это простейшее расширение ОТО. Поэтому при исследовании свойств общей теории именно эта модель является наилучшим кандидатом для поиска отличий от ОТО (см. [19]).

Далее, модель BD активно используется в космологии, так как для процесса инфляции необходимо наличие скалярного поля, а в обсуждаемой модели оно является наиболее естественным образом. Многие модели инфляции [20–22] основаны как на теории BD, так и на более общих скалярно-тензорных теориях.

В 1973 г. Гуревич, Финкельштейн и Рубан аналитически рассчитали [23] космологию с отскоком в стандартной теории BD. В те годы ещё не был известен факт ускоренно расширяющейся Вселенной. В своей стандартной версии теория BD не приводит к ускоренно расширяющейся Вселенной, поэтому актуальным становится исследование расширенных версий теории BD. Одно из наиболее распространённых обобщений — это модель BD с потенциалом скалярного поля (см. [24]). Так как точная форма этого потенциала пока не установлена, вместо него в качестве эффективного вклада

можно рассмотреть Λ -член (далее $\text{BD}\Lambda$). Объяснение малости космологической постоянной в рамках теории $\text{BD}\Lambda$ уже возможно, и оно было предложено в работе [25]. В работе [26] также с помощью скалярного поля в теории $\text{BD}\Lambda$ моделируется гало тёмной материи вокруг галактик.

Теория $\text{BD}\Lambda$ математически оказывается существенно более сложной, чем теория BD . Впервые точное решение уравнений Эйнштейна–Фридмана в теории $\text{BD}\Lambda$ было получено в работе [27], авторы которой предполагали положительную величину w и нулевое начальное условие для масштабного фактора, $a(t_m) = 0$, где t_m — момент Большого взрыва. Частные решения в предположении степенной зависимости скалярного поля от масштабного фактора получены в [28–31]. Вакуумные решения представлены в [32–34]. В ряде работ рассмотрены модели с зависимостью Λ -члена от скалярного поля (см., например, [35]). Численное интегрирование и анализ стабильности обширного семейства решений $\text{BD}\Lambda$ с материей проведены в [36]. В работе [37] представлено решение в рамках теории $\text{BD}\Lambda$, приводящее к так называемому Большому разрыву.

В нашей работе мы исследовали решение уравнений Эйнштейна–Фридмана в теории $\text{BD}\Lambda$ с параметром $w < 0$ и масштабным фактором $a(t)$, минимальное значение которого остаётся большим нуля, $a_m > 0$. Уравнения Фридмана записаны для плоской Вселенной, а в качестве граничных условий выбраны современные значения постоянной Хаббла и её производной по времени (параметра замедления). При решении уравнений поля мы применяем подход, разработанный в [27]. Однако авторы работы [27] рассматривали только положительные значения w , поэтому наше решение представляет собой новую, не описанную в работе [27] ветвь. Масштабный фактор в принятой нами модели может, в отличие от такового в стандартной ΛCDM -модели, не обращаться в нуль при рассмотрении эволюции назад во времени. Этой ситуации соответствует так называемый отскок от минимального значения a_m масштабного фактора. Выражение (24) (см. раздел 4), приводящее к отскоку, получено для "холодной" Вселенной, $p = 0$, и оно неприменимо в "горячей" Вселенной. Поэтому в области отскока полученные результаты имеют качественный характер, и они могут быть использованы с целью получения начальных значений всех функций перед переходом Вселенной в горячую фазу (при рассмотрении эволюции назад во времени) (см. раздел 6, в котором выполнено соответствующее исследование).

Статья организована следующим образом:

- в разделе 2 записывается метрика пространства-времени и уравнения поля;
- в разделе 3 определяются значения космологических параметров в настоящий момент времени для решения уравнений поля;
- в разделе 4 дано аналитическое решение с отскоком для "холодной" Вселенной (при $p = 0$);
- в разделе 5 проводится предварительное обсуждение полученных результатов для холодной Вселенной;
- в разделе 6 проведено исследование для горячей Вселенной (для ультрарелятивистского уравнения состояния материи);
- в разделе 7 приводятся выводы и сравнение идей Я.Б. Зельдовича с современными космологическими моделями.

2. Уравнения Эйнштейна–Фридмана

Метрику полагаем равной метрике Фридмана¹:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1)$$

здесь $\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. В космологии параметр плоскостности $k = 0, \pm 1$.

Действие в теории $\text{BD}\Lambda$ записывается в виде

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi(R + 2\Lambda) - \frac{w}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + 16\pi L_{\text{matter}} \right]. \quad (2)$$

Здесь w — параметр теории BD , $\Phi(t)$ — скалярное поле, Λ — лямбда-член² (константа).

Варьирование действия по $g_{\mu\nu}$ и по Φ даёт уравнения Эйнштейна–Фридмана и Клейна–Гордона соответственно:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{w}{\Phi^2} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \Phi), \quad (3)$$

$$\frac{8\pi}{\Phi} T^\mu_\mu + 2\Lambda = \frac{3 + 2w}{\Phi} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \Phi, \quad (4)$$

где ∇_μ — ковариантная производная,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \Phi = \delta'_\mu \partial_t \Phi. \quad (5)$$

Здесь $\rho(t)$ и $p(t)$ — плотность материи и её давление, тензор энергии-импульса соответствует идеальной жидкости.

Введём новые безразмерные переменные³:

$$\Phi(t) \equiv \frac{\phi(t)}{G_0}, \quad \epsilon(t) \equiv \frac{\partial_t \phi}{\sqrt{\Lambda} \phi}, \quad (6)$$

$$\tilde{H}(t) \equiv \frac{H(t)}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{\partial_t a}{\sqrt{\Lambda} a}, \quad \tilde{\rho}(t) = \frac{4\pi G_0 \rho}{\Lambda}, \quad \tilde{p}(t) = \frac{4\pi G_0 p}{\Lambda}. \quad (7)$$

Здесь H — функция Хаббла, $\tilde{H}$ — её безразмерная величина.

Тогда безразмерные уравнения Фридмана для плоской Вселенной (при $k = 0$) в сопутствующей материи системе отсчёта ($u_\mu = [1, 0, 0, 0]$) принимают вид

$$\frac{G'_t}{\Lambda} = 3\tilde{H}^2 = \frac{2\tilde{\rho}}{\phi} + 1 + \frac{w}{2} \epsilon^2 - 3\tilde{H}\epsilon, \quad (8)$$

$$\frac{G'_r}{\Lambda} = 2\tilde{H} + 3\tilde{H}^2 = -\frac{2\tilde{p}}{\phi} + 1 - \frac{w}{2} \epsilon^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2\tilde{H}\epsilon, \quad (9)$$

¹ Далее полагаем, что скорость света $c = 1$.

² Здесь величина Λ может отличаться от её значения в ΛCDM -теории.

³ Здесь и далее настоящий момент времени отмечается нижним индексом 0, соответственно, G_0 — гравитационная постоянная в настоящий момент времени (который далее считается равным нулю). Новые обозначения приводят к $\phi_0 = 1$.

а уравнение Клейна–Гордона (4) преобразуется в следующее уравнение:

$$\frac{2\ddot{\rho} - 6\ddot{p}}{\phi} + 2 = (3 + 2w) \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\ddot{H}\epsilon \right). \quad (10)$$

Здесь и далее точка обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{t} \equiv \sqrt{\Lambda}t$.

Уравнения (8)–(10) приводят к уравнению непрерывности (содержащему в себе принцип эквивалентности)

$$\frac{\dot{\tilde{\rho}}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + 3\tilde{H} = 0. \quad (11)$$

3. Определение параметров модели

Введём параметр замедления Вселенной q и параметр β безразмерной плотности материи в настоящий момент времени:

$$\dot{\tilde{H}} \equiv -(1 + q) \tilde{H}^2, \quad \beta \equiv \frac{4\pi G_0(\rho_0 - p_0)}{H_0^2} = \frac{\tilde{\rho}_0 - \tilde{p}_0}{\tilde{H}_0^2}. \quad (12)$$

Исключая из уравнений (8)–(10) величины ϵ и $\ddot{\phi}/\phi$, в настоящий момент времени получаем при нулевом давлении ($p = 0$)

$$w[\tilde{H}_0^2(2 - q_0 - \beta z) - z]^2 - 2\tilde{H}_0^2(3z - 1) + \tilde{H}_0^4(6 - 6q_0 - 6\beta z + 4\beta) = 0, \quad z \equiv \frac{2 + 2w}{3 + 2w}. \quad (13)$$

В приближении $|w| \gg 1$ уравнение (13) в главном порядке по $1/w$ даёт⁴:

$$\frac{1}{\tilde{H}_0^2} \rightarrow (2 - q_0 - \beta) \pm \sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta)}{w}}. \quad (14)$$

В главном приближении вторым слагаемым в выражении (14) можно пренебречь.

Из наблюдательных данных [38, 39] известны следующие значения космологических параметров: $H_0 \approx 2,3 \times 10^{-18} \text{ с}^{-1}$, $\rho_0 \approx 0,27 \times 10^{-29} \text{ г см}^{-3}$ (с учётом вклада от барионной и тёмной материй), $q_0 \approx -0,6$; давлением в настоящий момент пренебрегают, предполагая, что Вселенная наполнена пылеподобной материей (холодная Вселенная).

Отсюда для космологической постоянной получаем

$$\Lambda \rightarrow (2 - q_0) H_0^2 - 4\pi G_0(\rho_0 - p_0) \approx 11,3 \times 10^{-36} \text{ с}^{-2}. \quad (15)$$

Данные экспериментов по лазерной локации Луны [40] позволяют оценить: $|\partial_t G/G|_{(0)} \leq 4 \times 10^{-20} \text{ с}^{-1}$, что приводит к следующему ограничению на $|\epsilon_0|$ (в наших обозначениях): $|\epsilon_0| < 0,01$.

При $|w| \gg 1$ имеем следующие значения космологических параметров:

$$\tilde{H}_0 \approx 0,68, \quad \tilde{\rho}_0 \approx 0,2, \quad \beta \approx 0,4. \quad (16)$$

Сложим уравнения (8) и (9), домножим результат на $1/\tilde{H}_0^2$ и, выражая величину $\ddot{\phi}/\phi$ из уравнения (10), для

настоящего момента времени получим

$$\frac{\epsilon_0}{\tilde{H}_0} = \frac{1}{\tilde{H}_0^2} - (2 - q_0 - \beta) + \frac{\beta + 1/\tilde{H}_0^2}{3 + 2w}. \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражение (14), в главном приближении по $1/w$ получаем⁵

$$\epsilon_0 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta)}{w(2 - q_0 - \beta)}}. \quad (18)$$

4. Решение для холодной Вселенной

Рассмотрим задачу для случая холодной Вселенной, т.е. при $p = 0$. Введём обозначение: $f \equiv \phi a^3$, тогда из (11) имеем $\dot{\tilde{\rho}}/\phi = \dot{\tilde{\rho}}_0/f$.

Учитывая соотношение $\dot{f}/f = \ddot{\phi}/\phi + 6\tilde{H}\epsilon + 3\dot{\tilde{H}} + 9\tilde{H}^2$ и записывая следующую комбинацию уравнений (8)–(10): $(3/2)[(8) + (9)] + (10)/(6 + 4w)$, получаем

$$\ddot{f} - \eta^2(f + \tilde{\rho}_0 f_0) = 0, \quad \eta^2 \equiv \frac{8 + 6w}{3 + 2w}. \quad (19)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{f(\tilde{t})}{f_0} = c^+ E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0, \quad E(\tilde{t}) \equiv \exp(\eta \tilde{t}). \quad (20)$$

Здесь c^+ и c^- — константы, определяемые через параметры нашей модели.

Уравнение (10) перепишем в виде

$$2f + 2\tilde{\rho}_0 f_0 = (3 + 2w)(\dot{\phi} a^3). \quad (21)$$

Из уравнения (21) с учётом (20) можно найти выражение для функции Хаббла⁶:

$$\begin{aligned} 3\tilde{H} &= \frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\dot{f}}{f} - \frac{2f_0}{f(3 + 2w)} \int_{\text{const}} \left(\frac{f}{f_0} + \tilde{\rho}_0 \right) d\tilde{t} = \\ &= \frac{\dot{f}}{f} - \frac{2(c^+ E - c^-/E + c_H)}{\eta(3 + 2w)(c^+ E + c^-/E - \tilde{\rho}_0)} = \\ &= \frac{6(1 + w)(c^+ E - c^-/E) - 2c_H}{\eta(3 + 2w)(c^+ E + c^-/E - \tilde{\rho}_0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь c_H — ещё одна постоянная, определяемая через параметры нашей модели.

Из соотношений (20) и (22) можно выразить значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} c^+ &= \frac{1 + \tilde{\rho}_0}{2} + \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{2\eta}, \quad c^- = \frac{1 + \tilde{\rho}_0}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{2\eta}, \\ c_H &= \frac{\eta\epsilon_0(3 + 2w)}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\tilde{H}_0}{\eta}. \end{aligned} \quad (23)$$

⁴ Здесь и далее (если не оговорено отдельно) стрелка обозначает приближение $|w| \gg 1$.

⁵ При получении данного выражения в первом слагаемом правой части (17) были учтены члены порядка $1/\sqrt{w}$ из выражения (14), последнее слагаемое в (17) было отброшено с учётом требуемой точности, т.е. до величин порядка $1/\sqrt{w}$ включительно.

⁶ Было учтено, что $d\tilde{t} = dE/(\eta E)$.

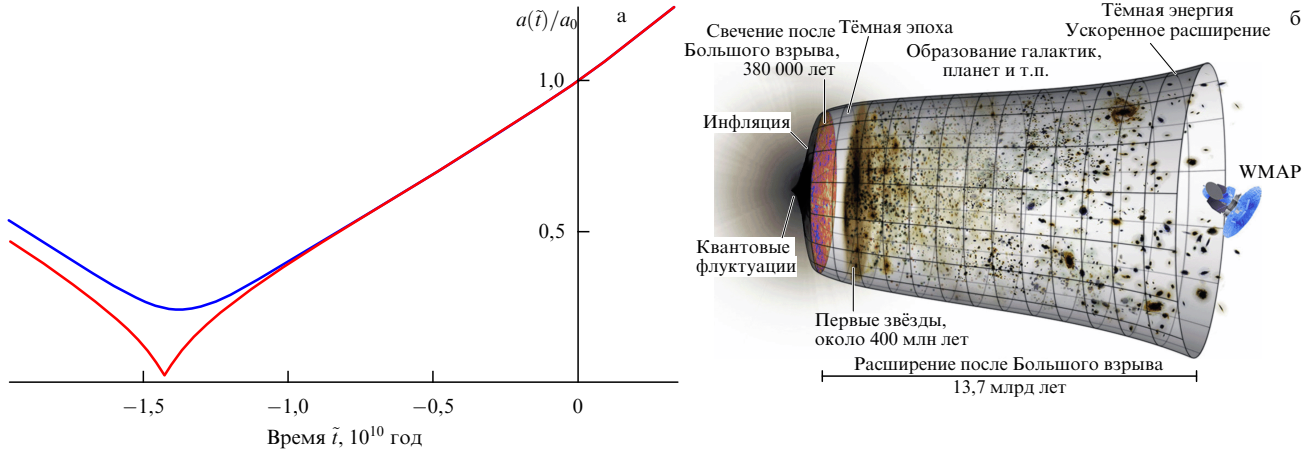


Рисунок. (а) Масштабный фактор $a(\tilde{t})/a_0$ — выражение (24) в модели холодной Вселенной с отскоком для значений параметров: $w = -1000$, $q = -0,6$ и $\beta = 0,45$ (для верхней кривой), $\beta = 0,43653$ (для нижней кривой). (б) Иллюстрация (рисунок взят с сайта НАСА: <http://map.gsfc.nasa.gov>) масштабного фактора в Λ CDM-модели, соответствующая решению Фридмана. (WMAP — космический аппарат НАСА — Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.)

Проинтегрировав уравнение (22), получим следующее выражение для масштабного фактора (см. рисунок):

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_0} &= \left(c^+ E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0 \right)^{1/3} \times \\ &\times \exp \left[\frac{-1}{3(4+3w)} \int_1^E \left(\frac{c^+ E^2 + c_H E - c^-}{c^+ E^2 - \tilde{\rho}_0 E + c^-} \right) \frac{dE}{E} \right] = \\ &= \left(c^+ E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0 \right)^{(1+w)/(4+3w)} \exp \frac{-2c_H(A-A_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}, \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv 4c^+c^- - \tilde{\rho}_0^2 = 1 + 2\tilde{\rho}_0 - \frac{(3\tilde{H}_0 + \epsilon_0)^2}{\eta^2} = \\ &= -\frac{3}{8+6w} [\tilde{H}_0 - \epsilon_0(1+w)]^2, \\ A(E) &\equiv \arctan \frac{2c^+E - \tilde{\rho}_0}{\sqrt{\Delta}}. \quad (25) \end{aligned}$$

Важно отметить, что при $|w| \gg 1$ решение существует только при $^7 w < 0$.

Для поля ϕ из (20) и (24) получаем

$$\phi = \left(c^+ E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0 \right)^{1/(4+3w)} \exp \frac{2c_H(A-A_0)}{(4+3w)\sqrt{\Delta}}. \quad (26)$$

В пределе $|w| \rightarrow \infty$ выражение (24) стремится к стандартному решению Фридмана:

$$H_{\text{Fr}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E + E_{\text{cr}}}{E - E_{\text{cr}}}, \quad E_{\text{cr}} \equiv \frac{\sqrt{3}\tilde{H}_0 - 1}{\sqrt{3}\tilde{H}_0 + 1}, \quad \eta_{\text{Fr}} = \sqrt{3}, \quad (27)$$

$$\frac{a_{\text{Fr}}}{a_0} = \frac{(\sqrt{3}\tilde{H}_0 + 1)^{2/3} (E - E_{\text{cr}})^{2/3}}{(4E)^{1/3}}, \quad (28)$$

причём в модели Фридмана в точке $E = E_{\text{cr}}$ величины $\Delta = 0$ и $a = 0$, а функция $a(t)$ испытывает излом (которого

нет при $\Delta > 0$). Момент Большого взрыва соответствует времени $t_1 \approx -1,46\Delta^{-1/2}$, $\Delta^{-1/2} \approx 10^{10}$ лет.

5. Космология без сингулярности

Масштабный фактор в теории BD Λ , в отличие от масштабного фактора в стандартной Λ CDM-модели, может не обращаться в нуль при рассмотрении эволюции назад во времени. Этой ситуации соответствует отскок от минимального значения a_m масштабного фактора.

Область параметров, начиная с которой отскок становится возможным, соответствует совпадению с нулём локального минимума масштабного фактора: $a_m(E_m) = 0$ (т.е. когда минимум "касается" оси абсцисс).

Из формулы (24) можно получить следующее условие существования отскока при рассмотрении эволюции назад во времени:

$$\Delta > 0, \quad (29)$$

и оценка E в точке локального минимума (отскока):

$$E_m \approx \sqrt{\frac{c^-}{c^+}}. \quad (30)$$

Точное равенство $E_m = \sqrt{c^-/c^+}$ выполняется при $\Delta = 0$, т.е. когда масштабный фактор в точке своего локального минимума равен нулю, $a_m(E_m) = 0$. При сценарии с $\Delta > 0$ Вселенная в своей эволюции не достигает точки сингулярности, причём масштабный фактор остаётся всюду гладкой функцией времени (в том числе и в момент отскока (см. (22))).

Наблюдения указывают на существование в прошлом горячей (радиационно-доминированной) стадии эволюции Вселенной. Свидетельством тому является наличие космического микроволнового фона со средней температурой $T_0 \approx 2,7$ К (см. [43]). Используя соотношение $^8 a_{\text{hot}}/a_0 = 4 \times 10^{-5}$ (соответствующее адиабатическому расширению Вселенной (см. [3])), при $|w| \gg 1$

⁷ Интересно, что именно при $w < 0$ в теории BD возможно существование кротовых нор без нарушения энергетических условий (см. [41, 42]).

⁸ Здесь a_{hot} — масштабный фактор в момент перехода Вселенной из радиационно-доминированной фазы в холодную фазу.

можно получить верхнюю оценку величины Δ :

$$\Delta \approx \frac{2\bar{\rho}_0 a_m^3}{a_0^3} < \frac{2\bar{\rho}_0 a_{\text{hot}}^3}{a_0^3} \approx 2,6 \times 10^{-14}. \quad (31)$$

Эта аномально малая величина при $|w| \gg 1$ может быть достигнута только за счёт свойства плоскостности Вселенной, т.е. при $1 + q_0 - \beta \approx 0$. Таким образом, очень малым значениям $|\dot{G}_0/G_0|$ соответствуют очень большие значения $|w|$ и, как следствие, практически плоская Вселенная. Поэтому данные наблюдений $|\dot{G}_0/G_0|$ в солнечной системе находятся в согласии с космологическими данными для нашей модели.

Рассмотренная выше модель, так же как и космология без отскока⁹ в [27], не учитывает давление и, следовательно, количественно неприменима для горячей Вселенной. Поэтому в области отскока приведённые выше результаты имеют только качественный характер, и они могут быть использованы для получения граничных значений всех функций перед переходом Вселенной в горячую фазу (при рассмотрении эволюции назад во времени).

6. Решение для горячей Вселенной

Количественные результаты в области отскока могут быть получены только с учётом ультрарелятивистского уравнения состояния материи. Для горячей Вселенной с давлением $p = \rho/3$ уравнения (8)–(10) приводят к выражению

$$\dot{H} + 2\tilde{H}^2 = \frac{1}{6} \left(-w\epsilon^2 + \frac{6+8w}{3+2w} \right) \equiv Q(\tilde{t}). \quad (32)$$

При $w < -1,5$ величина Q положительна.

В случае Вселенной Фридмана (т.е. при $\epsilon = 0$ и $|w| \rightarrow \infty$) из (32) можно легко получить аналог выражений (27), (28), но уже для горячей Вселенной:

$$H_{\text{Fr}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U+1}{U-1}, \quad U(\tilde{t}) \equiv \exp\left(\frac{4\tilde{t}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{a_{\text{Fr}}}{a_{\text{hot}}} = \left[\frac{(U-1)^2 U_{\text{hot}}}{(U_{\text{hot}}-1)^2 U} \right]^{1/4}. \quad (33)$$

Здесь индекс hot соответствует моменту перехода в холодную фазу Вселенной из горячей фазы и введено безразмерное время $\tilde{t}$, которое отсчитывается от момента минимума масштабного фактора, связь $\tilde{t}$ со временем t определяется выражением $\tilde{t} - \tilde{t}_1 = \text{возраст Вселенной} \times \sqrt{\Lambda}$.

Выражение (33) для масштабного фактора имеет сингулярные производные (так же как и в случае холодной Вселенной Фридмана (см. (27), (28))). Характерно также, что в случае холодной Вселенной при $\Delta \rightarrow 0$ вторая производная $\ddot{a}$ в точке отскока стремится к $+\infty$, а в близкой окрестности от точки отскока стремится уже к $-\infty$. То есть функция Хаббла в случае холодной Вселенной в области отскока оказывается при $\Delta \rightarrow 0$ быстропеременной.

Аналогичная ситуация в области отскока должна быть и в горячей Вселенной. Поскольку эпоха горячей Все-

ленной соответствует очень малым (относительно a_0) значениям масштабного фактора и достаточно большим величинам $\tilde{H}$, следовательно, эта область занимает малый промежуток безразмерного времени $\tilde{t}$. Из предыдущего рассмотрения следует, что при $|w| \gg 1$ и $\epsilon \ll 1$ решение в теории ВДА почти не отличается от фридмановского (за исключением области, близкой к отскоку).

Будем искать решение для горячей Вселенной в виде разложения масштабного фактора $a(\tilde{t})$ вблизи его локального минимума (отскока) в степенной ряд по времени $\tilde{t}$. Тогда с точностью до членов четвёртого порядка имеем

$$a = a_m + \frac{1}{2} a_m \dot{H}_m \tilde{t}^2 - \frac{1}{12} a_m b^2 \dot{H}_m^2 \tilde{t}^4 + \dots \quad (34)$$

Здесь $\dot{H}_m$ и b — константы, причём величина $\dot{H}_m$ соответствует второй производной масштабного фактора в момент отскока, и поэтому должна быть положительной, $\dot{H}_m > 0$, при $a_m > 0$. Членом третьего порядка пренебрегаем, так как он принципиально не влияет на результаты.

Тогда функция Хаббла и её производная с точностью до второго порядка по $\tilde{t}$ имеют вид

$$\tilde{H}^2 = \dot{H}_m^2 \tilde{t}^2, \quad \dot{\tilde{H}} = \frac{\dot{H}_m(1 - b^2 \dot{H}_m \tilde{t}^2)}{1 + \dot{H}_m \tilde{t}^2/2} - \dot{H}_m^2 \tilde{t}^2. \quad (35)$$

Подставляя эти выражения в (32), получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{H}_m [1 + \tilde{t}^2 \dot{H}_m (3/2 - b^2)]}{(1 + \dot{H}_m \tilde{t}^2/2)^2} = Q > 0. \quad (36)$$

Это обязательное неравенство (см. (32)) остаётся справедливым в любой момент времени только при $0 < b^2 < 3/2$.

Из (34) видно, что в момент времени $\tilde{t}_1 = 1/(\dot{H}_m b^2)^{1/2}$ вторая производная масштабного фактора меняет знак ($\tilde{t}_1$ — точка перегиба), т.е. существует ещё одна дополнительная точка перегиба кривой масштабного фактора, отсутствующая во фридмановском решении. В момент времени $\tilde{t}_2 = \sqrt{3}/(\dot{H}_m b^2)^{1/2} = \sqrt{3}\tilde{t}_1$ первая производная масштабного фактора меняет знак. Таким образом, сшивание решений для горячей и холодной Вселенной должно происходить в области между точками $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$.

После момента времени $\tilde{t}_1$ при больших¹⁰ $\dot{H}_m$ и малых b вторая производная масштабного фактора примерно за время порядка $\tilde{t}_1$ становится большой по модулю отрицательной величиной, в то время как функция Хаббла ещё положительна (вплоть до момента $\tilde{t}_2$). Поэтому на интервале времени от $\tilde{t}_1$ до $\tilde{t}_2$ решение для радиационно-доминированной Вселенной можно сшить с решением для холодной Вселенной, причём, подбирая величины параметров a_m , $\dot{H}_m$ и b , можно добиться гладкого сшивания этих функций на стыке горячей и холодной фаз Вселенной.

7. Заключение

Итак, было показано, что решение Фридмана с космологическим членом является вырожденным случаем для более общей космологии (например, в теории ВДА).

⁹ В работе [27] было найдено аналитическое решение для случая $\Delta < 0$ и $w > 0$.

¹⁰ Здесь понятия "большой" или "малый" подразумевают сравнение с единицей.

Введение в теорию ВД космологической постоянной позволяет не только достигнуть согласия с наблюдательными данными, но и объяснить необходимость в этой постоянной, и оценить её величину. Дело в том, что принципиально невозможно точно измерить размерную величину (например, расстояние). Человек может измерить только "штуки" (в данном случае "штуки" метров или парсеков). Однако определение размера "штук" всегда сопряжено с дополнительной погрешностью. Введение космологического члена позволяет сделать безразмерными расстояния (и не только расстояния). Таким образом, в единицах $\Lambda^{-1/2}$ размеры метagalктики оказываются порядка единицы. Поэтому любые рассуждения о том, почему космологическая постоянная в теории оказывается такой большой (или такой малой) сразу лишаются всякого смысла! По этой причине мы глубоко убеждены, что истинная фундаментальная физическая теория должна оперировать только безразмерными величинами!

Во фридмановской космологии функция масштабного фактора $a(t)$ подходит к нулю вертикально (после чего возможен отскок), тогда как в случае теории ВДА с $w > 0$ функция $a(t)$ проходит через нуль с конечным наклоном (величина первой производной в точке $a = 0$ конечна), а при $w < 0$ масштабный фактор не доходит до нуля и испытывает гладкий отскок, все функции при этом остаются регулярированными.

Количественную теорию с отскоком можно рассматривать только численно ввиду неприменимости теории холодной Вселенной в области отскока, а также ввиду того, что в области отскока (вследствие малости масштабного фактора) большую роль может играть параметр k (отвечающий за "неплоскостность" Вселенной, принятый равным нулю в нашем рассмотрении). Поэтому для количественных оценок в области отскока необходимо рассматривать уравнения с разными $k = 0, \pm 1$, а также $p \neq 0$, что сопряжено с большими математическими трудностями и может быть выполнено только численно.

Космологическое решение с отскоком позволяет избавиться от многочисленных (пока нерешённых) проблем квантовой гравитации и квантовой сингулярности.

Параметр теории $|w| > 10^{40}$ — много это или мало?

Противники теории Бранса – Дикке говорят, что даже 10^4 — это слишком много для параметра в теории, но мы считаем, что в современной космологии число 10^{40} является вполне нормальным числом. Соответствующее число $|1/w| \ll 1$ говорит только об экстремально малом отличии теории ВД от ОТО. И это хорошо! Ведь в качестве результата мы избавляемся от сингулярности! Но отскок Вселенной (если он и был) должен был произойти при крайне малых значениях (по сравнению с сегодняшним значением) масштабного фактора — для того чтобы обеспечить возможность нуклеосинтеза и фазы горячей Вселенной. Это требование и приводит к ограничению $|w| > 10^{40}$.

Теория гравитации Бранса – Дикке тесно связана с принципом Маха. Согласно одной из возможных формулировок принципа Маха величина инерции (массы) любого физического тела зависит от распределения массы всех остальных тел во Вселенной. Идеи принципа Маха имеют много разных аспектов. Я.Б. Зельдович в книгах [1–3] называл эту множественность "множеством Махом". В формулировке, приведённой выше, связь теории Бранса – Дикке с принципом Маха определяется

гравитационной "постоянной" $G = 1/\Phi(t)$, здесь эта величина зависит от времени.

Причём из условия $|w| > 10^{40}$ следует, что $\epsilon_0 \sim 10^{40}$ или $|\partial_t G/G|_0 \sim 10^{-56} \text{ с}^{-1}$. Эта экстремально малая величина говорит об экспериментальной невозможности наблюдать данную связь (с принципом Маха)!

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (проекты 12-02-00276-а, 11-02-00244-а, 11-02-12168-офи-м-2011, 13-02-00757-а), грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (2915.2012.2 — "Образование крупномасштабной структуры Вселенной и космологические процессы"), программой "Нестационарные явления в объектах Вселенной 2012" и Федеральной целевой программой "Научно-педагогические кадры инновационной России 2009-2013" (16.740.11.0460).

Список литературы

1. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967) [Zeldovich Ya B, Novikov I D *Relativistic Astrophysics* Vols 1, 2 (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1971, 1983)]
2. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Теория тяготения и эволюция звезд* (М.: Наука, 1971)
3. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Строение и эволюция Вселенной* (М.: Наука, 1975)
4. Зельдович Я Б *Письма в ЖЭТФ* **20** 338 (1974) [Zel'dovich Ya B *JETP Lett.* **20** 151 (1974)]
5. Tretyakova D A, Shatskiy A A, Novikov I D, Alexeyev S *Phys. Rev. D* **85** 124059 (2012)
6. Riess A G et al. *Astron. J.* **116** 1009 (1998)
7. Riess A G et al. *Astrophys. J.* **607** 665 (2004)
8. Perlmutter S et al. *Astrophys. J.* **517** 565 (1999)
9. Schmidt B P et al. *Astrophys. J.* **507** 46 (1998)
10. Steinhart P J, Wang L, Zlatev I *Phys. Rev. D* **59** 123504 (1999)
11. Persic M, Salucci P, Stel F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **281** 27 (1996)
12. Copeland E J, Sami M, Tsujikawa S *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 1753 (2006)
13. Buchdahl H A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **150** 1 (1970)
14. Peebles P J E, Ratra B *Rev. Mod. Phys.* **75** 559 (2003)
15. Starobinsky A A *Письма в ЖЭТФ* **86** 183 (2011) [*JETP Lett.* **86** 157 (2007)]
16. Brans C, Dicke R H *Phys. Rev.* **124** 925 (1961)
17. Bertotti B, Iess L, Tortora P *Nature* **425** 374 (2003)
18. Wittich P, ATLAS Collab., CDF Collab., CMS Collab., D0 Collab. *AIP Conf. Proc.* **1441** 13 (2012); arXiv:1111.1169
19. Tamaki T, Maeda K, Torii T *Phys. Rev. D* **57** 4870 (1998)
20. Mathiazhagan C, Johri V B *Class. Quantum Grav.* **1** L29 (1984)
21. La D, Steinhart P J *Phys. Rev. Lett.* **62** 376 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **62** 1066 (1989)
22. Linde A *Phys. Lett. B* **238** 160 (1990)
23. Gurevich L E, Finkelstein A M, Ruban V A *Astrophys. Space Sci.* **22** 231 (1973)
24. Lee H W, Kim K Y, Myung Y S *Eur. Phys. J. C* **71** 1585 (2011)
25. Smolyakov M N, arXiv:0711.3811
26. Kim H J *Korean Phys. Soc.* **51** 453 (2007)
27. Uehara K, Kim C W *Phys. Rev. D* **26** 2575 (1982)
28. Ahmadi-Azar E, Riazi N *Astrophys. Space Sci.* **226** 1 (1995)
29. Pimentel L O *Astrophys. Space Sci.* **112** 175 (1985)
30. Ram S, Singh C P *Astrophys. Space Sci.* **254** 143 (1997)
31. Pandey S N *Astrophys. Space Sci. Suppl.* **277** 403 (2001)
32. Romero C, Barros A *Gen. Relat. Grav.* **25** 491 (1993)
33. Romero C, Barros A *Astrophys. Space Sci.* **192** 263 (1992)
34. Cerveró J M, Estévez P G *Gen. Relat. Grav.* **15** 351 (1983)
35. Etoh T et al. *Astron. Astrophys.* **325** 893 (1997)
36. Kolitch S J *Ann. Physics* **246** 121 (1996)
37. El-Nabulsi A R *Astrophys. Space Sci.* **327** 155 (2010)
38. Cai R-G, Tuo Z-L, arXiv:1105.1603

39. Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 18 (2011)
40. Williams J G, Turyshev S G, Boggs D H *Phys. Rev. Lett.* **93** 261101 (2004)
41. Agnese A G, La Camera M *Phys. Rev. D* **49** 2126 (1994)
42. Алексеев С О, Ранну К А, Гареева Д В *ЖЭТФ* **140** 722 (2011) [Alexeyev S O, Rannu K A, Gareeva D V *JETP* **113** 628 (2011)]
43. Naselsky P D, Novikov D I, Novikov I D *The Physics of the Cosmic Microwave Background* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)

Ya.B. Zeldovich's ideas and modern Brans – Dicke cosmology

I.D. Novikov

*Astro Space Center, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation;
The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute, Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark*

A.A. Shatskii

*Astro Space Center, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru*

S.O. Alekseev, D.A. Tret'yakova

*P.K. Sternberg State Astronomical Institute, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Universitetskii prosp. 13, 119991 Moscow, Russian Federation*

We compare Ya.B. Zeldovich's ideas about Brans – Dicke theory and Mach's principles, contained in now-classical books, with modern results in this field. Our recent results on the Brans – Dicke cosmology with cosmological term are presented. The Friedmann – Brans – Dicke equations are written for a flat Universe. The initial conditions for the model are provided by the presently observed Hubble constant, its first time derivative (the deceleration parameter), and matter density. The cosmological scenario with the scale factor not vanishing in the past, corresponding to the absence of the cosmological singularity, is analytically calculated. Instead of the singularity, the scale factor experiences a "bounce" and demonstrates the regular behavior at all times. Some ideas related to Mach's principle are also discussed.

PACS numbers: 04.60.Bc, 04.60.Pp, 98.80.Cq, 98.80.Qc

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201404c.0379

Bibliography — 43 references

Received 4 September 2013, revised 8 October 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (4) 379–386 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (4) (2014)