

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Атом водорода в сильном магнитном поле

В.С. Попов, Б.М. Карнаков

Рассмотрены свойства спектра энергий атома водорода, находящегося в сильном ($B > B_a \sim 10^9$ Гс) или сверхсильном ($B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ Гс) магнитном поле, когда движение электрона становится релятивистским и существенны эффекты квантовой электродинамики. С использованием адиабатического приближения получены аналитические формулы для энергии уровней, обладающие высокой точностью в полях $B > 10^{10}$ Гс. Проведено сравнение этих формул с известными из литературы асимптотиками и с результатами численных расчётов. Отмечается характерная особенность движения электрона в сильных магнитных полях: при $B \gtrsim B_{cr}$ поперечное движение электрона становится релятивистским, а продольное (вдоль \mathbf{B}) движение описывается формулами нерелятивистской теории и к нему применимо адиабатическое приближение. Обсуждаются следующие вопросы: качественное различие в поведении чётных и нечётных уровней в полях $B \gg B_a$; снятие вырождения между чётными и нечётными состояниями атома водорода; соотношения скейлинга в спектре атома водорода при различных значениях квантовых чисел (n, n_p, m) и напряжённости магнитного поля; размеры, форма и квадрупольный момент атома водорода при $B \gg B_a$; радиационные переходы $pr \rightarrow 1s$ в сильном магнитном поле; релятивистские эффекты и эффекты квантовой электродинамики: влияние поляризации вакуума и аномального магнитного момента электрона на положение атомных уровней; экранировка кулоновского потенциала и "замерзание" энергий атомного спектра при $B \rightarrow \infty$; проявление эффекта Зельдовича в спектре уровней атома водорода в сильном магнитном поле. Кратко обсуждается проблема критического заряда ядра; предложены простые асимптотические формулы для Z_{cr} , справедливые для нижних уровней электронного спектра. Приведены некоторые сведения об экстремальных магнитных полях, полученных в лабораторных экспериментах и встречающихся в космосе. Рассмотрена кулоновская перенормировка длины рассеяния в резонансной ситуации, когда в энергетическом спектре системы имеется мелкий уровень.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 32.30.-r

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403e.0273

Содержание

1. Введение (273).
2. Постановка задачи и основные уравнения (274).
3. Асимптотические формулы для спектра чётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле (276).
4. Сравнение уравнения (3.7) с другими приближениями и с численными расчётами (279).
 - 4.1. Основной уровень $1s$.
 - 4.2. Возбуждённые уровни.
5. Нечётные уровни (281).
6. Размеры, квадрупольный момент атома и вероятности радиационных переходов при $B \gg B_a$ (282).
7. Релятивистские эффекты (283).
8. Эффекты квантовой электродинамики (284).
9. Об эффекте Зельдовича в атомных спектрах (286).

В.С. Попов. Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова,
ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация
E-mail: markina@itep.ru

Б.М. Карнаков. Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: karnak@theor.mephi.ru

Статья поступила 6 июля 2013 г.

10. Заключительные замечания (289).

11. Приложения (290).

А. О критическом заряде ядра. Б. Экстремальные магнитные поля. В. О кулоновских поправках к длине рассеяния.

Список литературы (295).

1. Введение

Квантово-механическая задача о спектре атома водорода в сильном магнитном поле $B \gg B_a \sim 10^9$ Гс представляет значительный интерес для астрофизики¹ [1–4], физики твёрдого тела и атомной физики, она рассматривалась многими авторами (начиная с пионерской работы Шиффа и Снайдера [5], в которой было введено адиабатическое приближение, использованное всеми последующими авторами). Этой задаче посвящены десятки работ (см., например, [6–26] и приведённые там ссылки). Поскольку переменные в уравнении Шрёдингера не разделяются, применялись различные численные

¹ Магнитные белые карлики (поля до 350 МГс на поверхности звезды) и в особенности нейтронные звёзды: пульсары с $B \gtrsim 10^{12}$ Гс и магнитары — специальный класс нейтронных звёзд, в которых магнитные поля могут достигать рекордных значений вплоть до 10^{15} Гс.

методы решения уравнений Шрёдингера и Дирака [13–16], имеются также аналитические аппроксимации. Мы рассмотрим приближённые асимптотические формулы (как известные из литературы, так и полученные авторами статьи) для энергии уровней атома водорода в сильном магнитном поле. Обсуждаются следующие вопросы: точность этих формул в зависимости от поля B ; существенное различие в поведении чётных и нечётных уровней при $B \gg B_a$; сжатие и деформация атома в сильном магнитном поле; влияние поляризации вакуума в сверхсильном магнитном поле и аномального магнитного момента электрона на положение атомных уровней; "замерзание" энергии уровней в полях $B \gg 10^{16}$ Гс; проявление эффекта Зельдовича (или "перестройки атомного спектра") в спектре атома водорода. В приложениях А, Б, В обсуждаются проблемы критического заряда ядра, $Z > 137$, и приводятся краткие сведения о максимальных магнитных полях, полученных в лаборатории и известных из астрофизики.

Приведём формулы и численные значения основных величин в рассматриваемой задаче (ниже $e = 4,80 \times 10^{-10}$ ед. CGSE — заряд электрона, $m_e = 9,11 \times 10^{-28}$ г — его масса, $a_B = \hbar^2/m_e e^2 = 0,529 \times 10^{-8}$ см — радиус Бора). Атомная единица напряжённости магнитного поля $B_a = m_e^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,349 \times 10^9$ Гс; $\mathcal{H} = B/B_a$ — безразмерное приведённое поле; $B_{cr} = m_e^2 c^3 / e \hbar = 4,414 \times 10^{13}$ Гс — "критическое" (или характерное) [27–29] поле в квантовой электродинамике (КЭД) [30], при этом $B_a/B_{cr} = \alpha^2 = 5,325 \times 10^{-5}$ ($\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$); $a_H = \sqrt{\hbar/eB}$ — магнитная длина, или радиус Ландау,

$$a_H = \frac{a_B}{\sqrt{\mathcal{H}}} = \begin{cases} a_B & \text{при } B = B_a, \\ \alpha a_B = l_C & \text{при } B = B_{cr}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $l_C = \hbar/m_e c = 3,861 \times 10^{-11}$ см — комптоновская длина волны электрона; $\omega_H = eB/m_e c$ — круговая частота вращения классического нерелятивистского электрона в магнитном поле B . Расстояние между соседними уровнями Ландау составляет

$$\hbar\omega_H = \frac{e\hbar}{m_e c} B = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \mathcal{H} = \begin{cases} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = 2 \text{ Ry} = 27,21 \text{ эВ}, & B = B_a, \\ m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}, & B = B_{cr}, \end{cases} \quad (1.2)$$

а энергии атомных уровней равны

$$E_n = -\lambda_n^2 \text{ Ry}, \quad (1.3)$$

где $\text{Ry} = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13,61$ эВ (ридберг), λ_n — безразмерный импульс связанного состояния.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Отметим следующие закономерности задачи о движении электрона в центральном поле притяжения $U(r)$ при наличии однородного магнитного поля B , направленного вдоль оси z , и её особенности в случае кулоновского потенциала $U_C = -e^2/r$. Гамильтониан системы в нер-

лятивистском приближении, гамильтониан Паули

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\sigma} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right)^2 + U(r), \quad (2.1)$$

в цилиндрических координатах имеет вид (в атомных единицах $e = \hbar = m_e = 1$)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} + \frac{1}{8} \mathcal{H}^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \mathcal{H}(\hat{l}_z + \hat{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(\sqrt{\rho^2 + z^2}), \quad (2.2)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A} = [\mathbf{Br}]/2$. Этот гамильтониан аксиально симметричен, что позволяет записать его собственные функции в виде

$$\Psi_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi) \varphi_{\sigma_z}(\sigma) \psi(\rho, z), \quad (2.3)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \sigma_z = \pm 1,$$

где $\varphi_{\sigma_z}(\sigma)$ — спиновая функция. Функции $\psi(\rho, z)$ имеют определённую чётность при отражении в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} , т.е. при преобразовании $z \rightarrow -z$, однако переменные ρ и z не разделяются.

В том случае, когда на фоне магнитного поля потенциал $U(r)$ может рассматриваться как возмущение, для решения уравнения Шрёдингера может быть использовано адиабатическое приближение [2, 5, 6]. При этом волновые функции $\psi(\rho, z)$ в (2.3) записываются в виде (как для чётных, так и для нечётных состояний)

$$\psi(\rho, z) = R_{n_\rho m}(\rho) \chi_{m_\rho m}(z), \quad n_\rho = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где $R_{n_\rho m}(\rho)$ — известные функции для радиального поперечного движения электрона в чисто магнитном поле [6], а спектр связанных состояний гамильтониана имеет вид

$$E_{n_\rho m \sigma_z} = N \mathcal{H} - \frac{1}{2} \lambda_{m_\rho m}^2, \quad (2.5)$$

$$N = n_\rho + \frac{1}{2} (|m| + m + \sigma_z + 1).$$

Здесь $N = 0, 1, 2, \dots$ — номер зоны Ландау, $\sigma_z = \pm 1$ — удвоенная проекция спина электрона на направление магнитного поля, $n = 0, 1, 2, \dots$ — квантовое число для продольного движения, а $\lambda_n^2/2$ определяет энергии соответствующих уровней, обязанные действию потенциала $U(r)$. Их значения находятся из уравнения Шрёдингера для продольной части волновой функции электрона:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_{\text{eff}}(|z|) + \frac{\lambda^2}{2} \right\} \chi_n(z) = 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (2.6)$$

в котором эффективная потенциальная энергия (потенциал $U(r)$, усреднённый по быстрому поперечному движению электрона в магнитном поле) даётся выражением [2, 5, 6]

$$U_{\text{eff}}(|z|) = \int_0^\infty U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) |R_{n_\rho m}(\rho)|^2 \rho d\rho. \quad (2.7)$$

Конкретный вид энергии U_{eff} зависит от квантовых чисел n_ρ и $|m|$ поперечного движения.

² Энергия взаимодействия магнитного момента $\mu = e\hbar/m_e c$ с таким полем совпадает с энергией кулоновского взаимодействия $e^2/a_B = m_e e^4/\hbar^2 = 27,21$ эВ. Характерные значения напряжённости магнитного поля в атоме водорода $B \sim B_{at} \sim \alpha^2 B_a \sim 10^5$ Гс.

Таким образом, в адиабатическом приближении происходит разделение переменных ρ и z . При этом область локализации электрона в поперечном направлении, определяемая $|R_{n\rho m}(\rho)|^2$, по порядку величины равна $\rho \sim a_H \sim a_B/\sqrt{\mathcal{H}}$ (для нижних уровней Ландау). Поэтому если радиус действия потенциала $r_0 \gg a_H$, то магнитное поле сильно сжимает электрон в поперечном направлении и распределение электронной плотности $|\psi(\mathbf{r})|^2$ принимает спицеобразную форму (вдоль оси z) с центром в точке $r = 0$. Соответственно, если центральный потенциал $U(r)$ не слишком сингулярен в нуле, так что $r|U(r)| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то в интеграле в формуле (2.7) можно заменить $U(\sqrt{\rho^2 + z^2})$ на $U(|z|)$. Таким образом, в этом случае одномерный эффективный потенциал совпадает с исходным центральным потенциалом и уже не зависит от напряжённости магнитного поля. Поэтому распределение электронной плотности вдоль оси z и спектр продольного движения перестают зависеть от напряжённости поля.

Сравним энергетический спектр одномерного движения в симметричном потенциале $U(|z|)$ на всей оси $-\infty < z < +\infty$ со спектром ns -состояний в таком же центральном потенциале $U(r)$, $r \geq 0$. Как известно, если записать волновую функцию ns -состояния в виде $\psi_{ns} = \chi_{nr}(r)/(\sqrt{4\pi}r)$, то уравнение Шрёдингера для $\chi_{nr}(r)$ принимает вид, аналогичный уравнению (2.6). Однако теперь $r \geq 0$ и функция $\chi_{nr}(r)$ удовлетворяет граничному условию $\chi_{nr}(0) = 0$. Поскольку в случае нечётных состояний функции $\chi(z)$ в уравнении (2.6) также удовлетворяют условию $\chi_n^{(-)}(0) = 0$, отсюда следует совпадение спектров:

$$E_n^{(-)} = E_{ns}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В случае чётных состояний подобная аналогия неприменима, поскольку теперь $\tilde{\psi}_{ns}(r) = \chi_n^{(+)}(r)/r \propto 1/r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, а такие сингулярные решения уравнения Шрёдингера обычно исключаются из рассмотрения (поскольку для них $\Delta\psi_{ns}(r) \propto \delta(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow 0$), кроме случая трёхмерного потенциала нулевого радиуса. Такой потенциал, локализованный в точке $r = 0$, определяется наложением на волновую функцию граничного условия вида [31, 32]

$$\frac{d \ln \chi(r)}{dr} = -\frac{1}{a_s}, \quad \text{или} \quad \tilde{\psi}_{ns}(r) \approx \text{const} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_s} \right) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Здесь a_s является длиной s -рассеяния на короткодействующем потенциале $U_s(r)$ с радиусом действия r_0 , который моделируется таким потенциалом нулевого радиуса. При этом параметр $\kappa_0 = 1/a_s$ определяет энергию мелкого реального (при $a_s > 0$) или виртуального (при $a_s < 0$) s -уровня, $E_0 = -\hbar^2 \kappa_0^2 / 2m$, существующего в рассматриваемой системе в случае $|E_0| \ll \hbar^2 / m r_0^2$ ($|a_s| \gg r_0$).

Поэтому легко заметить, что с чётными решениями $\chi_n^{(+)}(|z|)$ уравнения Шрёдингера (2.6) на всей оси z для одномерного потенциала $U(|z|)$, для которых $\chi_n^{(+)}(0) = \text{const} \neq 0$ и $\chi_n^{(+)}(0) = 0$, однозначно связаны решения $\tilde{\psi}_{ns}(r) = \chi^{(+)}(r)/(\sqrt{2\pi}r)$ трёхмерного уравнения Шрёдингера для s -состояний с тем же потенциалом $U(r)$, которые удовлетворяют граничному условию (2.9) с $a_s = \infty$, т.е. $\kappa_0 = 0$. Это означает, что сферически-симметричный потенциал является суперпозицией потенциала $U(r)$ (в рассматриваемой задаче это — эффективный потенциал

$U_{\text{eff}}(r)$) и потенциала нулевого радиуса (в точке $r = 0$), для которого $\kappa_0 = 0$, т.е. в момент появления связанного состояния в таком потенциале.

Существенно, что случай $\kappa_0 = 0$ означает, что такой потенциал нулевого радиуса моделирует "сильный" короткодействующий потенциал с радиусом r_0 в момент возникновения в нём связанного состояния (с нулевой энергией связи). При этом рассеяние медленных частиц, $\kappa r_0 \ll 1$, на таком потенциале носит резонансный характер³, сечение рассеяния $\sigma \approx 2\pi\hbar^2/mE$ (E — энергия электрона) [6].

Под влиянием такого потенциала происходит перестройка спектра s -уровней в дальнедействующем потенциале $U_L(r)$ с радиусом действия $r_L \gg r_0$, что видно из квазиклассического правила квантования⁴ в этом случае:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^b \sqrt{2m_e[E_{n,0} - U(r)]} dr = \pi \left(n_r + \frac{3}{4} + \tilde{\gamma} \right), \quad (2.10)$$

где b — точка остановки. Уровням в изолированном потенциале $U(r)$ отвечает $\tilde{\gamma} = 0$, а их сдвигам под влиянием потенциала нулевого радиуса с $\kappa_0 = 0$ — значение $\tilde{\gamma} = -1/2$ (уровни сильно сдвинуты вниз: для них $n_r \rightarrow n_r - 1/2$).

Однако в случае атома водорода замена в (2.7) кулоновского потенциала $U_C = -e^2/\sqrt{\rho^2 + z^2}$ на одномерный кулоновский потенциал $U_{\text{eff}}(|z|) = -e^2/|z|$ не оправдана. Дело в том, что в двумерном и трёхмерном случаях кулоновский потенциал на малых расстояниях выступает как малая поправка. Это проявляется, в частности, в том, что структура ядра с зарядом $Z \lesssim 10$ слабо влияет на сдвиги атомных уровней. В одномерном случае, когда $U = -e^2/|z|$ на всей оси z , ситуация совершенно иная. Два независимых решения уравнения Шрёдингера при $z \rightarrow \pm 0$ имеют вид⁵ (справа и слева от точки $z = 0$):

$$\begin{aligned} \psi_E^{\pm}(z) \approx & C_{E,1}^{\pm} \left[1 - \frac{2|z|}{a_B} \ln \frac{|z|}{a_B} + O\left(\frac{z^2}{a_B^2} \ln \frac{|z|}{a_B}\right) \right] + \\ & + C_{E,2}^{\pm} \left[|z| + O\left(\frac{z^2}{a_B}\right) \right], \quad z \rightarrow \pm 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и обычные для регулярных потенциалов условия непрерывности волновой функции и её производной не могут быть выполнены в точке $z = 0$, поскольку в этом случае $|d\psi_E(z)/dz| \rightarrow \infty$ (исключая случай нечётных состояний). Поэтому энергетический спектр чётных состояний существенным образом зависит от характера "обрезания" потенциала на расстояниях $\sim a_H$, т.е. от вида $U_{\text{eff}}(|z|)$ при $|z| \ll a_B$.

Отметим важные для дальнейшего рассмотрения свойства эффективного кулоновского потенциала. На расстояниях $|z| \lesssim L$, где

$$a_H \ll L \ll \sqrt{a_H a_B} = \mathcal{H}^{1/4} a_H = \mathcal{H}^{-1/4} a_B, \quad (2.12)$$

³ Как отмечено в разделе 9, аналогичный характер искажения кулоновского потенциала $U(r)$ на малых расстояниях приводит к возникновению эффекта Зельдовича.

⁴ Оно является простым обобщением правила квантования Бора — Зоммерфельда. Отметим, что в случае сферического осциллятора из уравнения (2.10) следует точное выражение для спектра.

⁵ Обратим внимание на выбор аргумента в логарифмическом слагаемом и независимость его от энергии; от последней зависят лишь поправочные члены в асимптотике (2.11).

для него $|U_{\text{eff}}| \lesssim e^2/a_H$ и поэтому выполняется соотношение

$$|U_{\text{eff}}| \ll \frac{\hbar^2}{m_e L^2}, \quad (2.13)$$

т.е. на таких расстояниях $U_{\text{eff}}(|z|)$ представляет собой мелкую одномерную потенциальную яму и решение уравнения (2.6) может быть получено с помощью теории возмущений. При этом для логарифмической производной χ'/χ при $|z| \sim L$ получается простое замкнутое выражение с использованием явного вида эффективного потенциала, см. ниже (3.3). С другой стороны, на расстояниях $|z| \gtrsim L \gg a_H$ эффективный потенциал уже имеет кулоновский вид, $U_{\text{eff}} \approx -e^2/|z|$, и экспоненциально убывающим решением уравнения Шрёдингера является функция Уиттекера. Сшивание логарифмических производных в области их перекрытия (2.12) приводит к уравнению, определяющему энергетический спектр чётных уровней.

Отметим, что в других работах, использующих адиабатическое приближение, при решении уравнения Шрёдингера (2.6) делаются дополнительные предположения о свойствах эффективного потенциала, что приводит к потере точности результата. Так, в работе [6] применяется конкретный выбор обрезания кулоновского потенциала $U_{\text{eff}}(|z|) = -e^2/(|z| + a_H)$. Поэтому корректное использование адиабатического приближения на расстояниях $|z| \lesssim L$ позволяет получить простые аналитические выражения для спектра чётных уровней, имеющие высокую точность при сравнении их с результатами численных решений.

Что же касается нечётных уровней, то в нулевом приближении для их вычисления в (2.6) можно воспользоваться неискажённым кулоновским потенциалом, т.е. положить $U_{\text{eff}} = -1/r$, так что их спектр для состояний с различными значениями квантовых чисел n_ρ и m совпадает со спектром невозмущённых кулоновских ns -уровней в центральном потенциале $U(r) = -1/r$:

$$E_n^{(-)} \approx -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Учитывая отличие эффективного потенциала от чисто кулоновского по теории возмущений, можно уточнить этот результат:

$$\begin{aligned} E_{nm\rho}^{(-)} &\equiv -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} (\lambda_{nm\rho}^{(-)})^2 = \\ &= -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} + \int \left(U_{\text{eff}}(r) + \frac{e^2}{r} \right) \psi_{ns}^2(r) d^3r, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\psi_{ns}(r)$ — невозмущённые волновые функции ns -состояний в кулоновском потенциале. При этом уровни слегка сдвинуты вверх относительно невозмущённых кулоновских уровней, поскольку подынтегральное выражение в (2.15) положительно.

В заключение этого раздела приведём радиальные функции поперечного движения [6]:

$$\begin{aligned} R_{n_\rho m}(\rho) &= \frac{1}{a_H^{1+|m|}} \left[\frac{(|m| + n_\rho)!}{2^{|m|} n_\rho! (|m|)!} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a_H^2}\right) \times \\ &\times \rho^{|m|} F\left(-n_\rho, |m| + 1, \frac{\rho^2}{2a_H^2}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

($F(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция), нормированные условием $\int_0^\infty R_{n_\rho m}^2(\rho) \rho d\rho = 1$, а также явный вид эффективного кулоновского потенциала для состояний с $m = n_\rho = 0$:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(|z|) &= -\frac{\sqrt{2}}{a_H} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|z|x}{a_H} - x^2\right) dx = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}a_H}\right) \exp\left(\frac{z^2}{2a_H^2}\right) \frac{1}{a_H}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и его предельные выражения

$$U_{\text{eff}}(|z|) = \begin{cases} -\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{|z|}{a_H} + \dots\right) \frac{1}{a_H}, & |z| \ll a_H, \\ -\left(1 - \frac{a_H^2}{z^2} + \dots\right) \frac{1}{|z|}, & |z| \gg a_H. \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь $\operatorname{erfc}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^\infty \exp(-t^2) dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Приведём также значение потенциала в нуле для состояний с $n_\rho = 0$:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}; n_\rho=0, m}(0) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2|m| - 1)!!}{2^{|m|} |m|!} \frac{1}{a_H} = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a_H} \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 1/2, & m = 1, \\ 3/8, & m = 2, \\ 63/256, & m = 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

С ростом $|m|$ глубина ямы уменьшается⁶, поэтому наиболее глубокие уровни отвечают значению $m = 0$.

3. Асимптотические формулы для спектра чётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле

Как было отмечено в разделе 2, эффективный одномерный кулоновский потенциал в области расстояний $|z| \lesssim L$ имеет вид мелкой одномерной потенциальной ямы и решение уравнения (2.6) может быть получено по теории возмущений. Волновые функции чётных уровней на таких расстояниях почти не изменяются: $\chi(z) \approx \text{const}$. Поэтому, пренебрегая в уравнении (2.6) слагаемым с энергией, полагая $\chi(z) = \text{const}$ в члене с U_{eff} и интегрируя по z , для логарифмической производной волновой функции получаем

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \approx 2 \int_0^z U_{\text{eff}}(z') dz', \quad z > 0, \quad \chi'(0) = 0. \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) выражение (2.7) для $U_{\text{eff}}(z')$ с $U = -(\rho^2 + z'^2)^{-1/2}$, меняя порядок интегрирования по ρ и z' и используя формулы (при $z \gg \rho \sim a_H$)

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + \rho^2}} = \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\rho} = \ln \frac{2z}{\rho} + O\left(\frac{\rho^2}{z^2}\right), \quad (3.2)$$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x) \ln x dx = \Gamma'(s) = \Gamma(s) \psi(s), \quad (3.2')$$

⁶ Это связано с тем, что с ростом $|m|$ из-за центробежной энергии $\hbar^2 m^2 / 2m_e \rho^2$, носящей отталкивательный характер, растёт область локализации электрона в поперечном направлении, а это приводит к уменьшению величины U_{eff} . По этой же причине с ростом $|m|$ (а также и с увеличением n_ρ) применимость адиабатического приближения предполагает увеличение магнитного поля.

$\psi(s)$ — логарифмическая производная гамма-функции, получаем

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \approx -2 \ln \frac{z}{a_H} + A_{n_\rho|m|}, \quad (3.3)$$

где

$$A_{n_\rho|m|} = 2 \int_0^\infty \rho \ln \frac{\rho}{2a_H} R_{n_\rho|m|}^2(\rho) d\rho; \quad (3.4)$$

подчеркнём, что $A_{n_\rho|m|}$ не зависит от магнитного поля и знака m .

С другой стороны, на расстояниях $z \gtrsim L$, где эффективный потенциал уже совпадает с кулоновским, экспоненциально убывающее на бесконечности решение уравнения (2.6) выражается через функцию Уиттекера:

$$\chi_v(z) = \text{const } W_{v,1/2}(x), \quad x = 2\lambda z, \quad v = \frac{1}{\lambda}, \quad z > 0, \quad (3.5)$$

для которой справедливо разложение

$$W_{v,1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \times \\ \times \{1 - c_1 x \ln x - c_2 x + c_3 x^2 \ln x + O(x^2)\}, \quad x \rightarrow 0, \\ c_1 = v, \quad c_2 = \frac{1}{2} + v[\psi(1-v) + 2\gamma - 1], \quad c_3 = \frac{1}{2} v^2, \dots \quad (3.5')$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} = -\left\{ \lambda + 2[\ln(\lambda|z|) + \psi(1-\lambda^{-1}) + 2\gamma + \ln 2] \right\} + \\ + O(z \ln^2(\lambda z)), \quad (3.6)$$

где $z \ll 1$, $\lambda = \sqrt{-2E}$, E — энергия уровня, $\gamma = -\psi(1) = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

При сшивании логарифмических производных (3.3) и (3.6) в области (2.12) их совместной применимости ($z \sim L$) пропадает зависимость от координаты z и мы приходим к уравнению для спектра чётных уровней продольного движения электрона:

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda) + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + 4\gamma + A_{n_\rho|m|}. \quad (3.7)$$

Сделаем несколько замечаний о свойствах спектра чётных уровней $E = -\lambda^2/2$, следующих из этого уравнения в случае сильного магнитного поля (формально при $\ln \mathcal{H} \gg 1$).

1. Для каждой пары квантовых чисел поперечного движения электрона, n_ρ и m (независимо от знака m), имеется один уровень, для которого $\lambda \sim \ln \mathcal{H} \gg 1$, глубокий в атомном масштабе (с увеличением $|m|$ глубина его уменьшается). Подчеркнём, что при $m \neq 0$ их энергия связи не зависит от знака m , но они залегают ниже различных уровней Ландау (см. (2.5)).

2. Кроме этого глубокого уровня имеется бесконечное число уровней, расположенных между соседними несмещёнными кулоновскими n' -s-уровнями, $E_{n'} = -1/(2(n')^2)$, с главными квантовыми числами n' , равными⁷ n и $n+1$ при $n \geq 1$. В пределе $\ln \mathcal{H} \rightarrow \infty$ для

⁷ Наличие таких сдвинутых кулоновских уровней легко понять, если заметить следующее свойство функции $\psi(z)$ в (3.7): на интервале $(-n-1, -n)$ значений z с $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $\psi(z)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; значения $z = -n$ являются её полюсами.

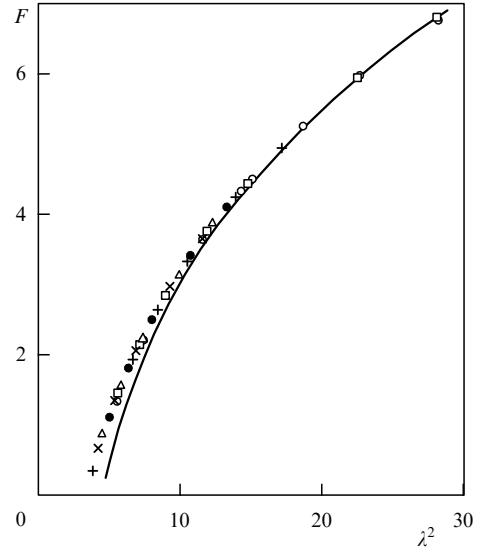


Рис. 1. Проверка соотношений скейлинга: сплошная кривая — функция $F(\lambda)$ из (3.8); точки (\circ , $+$, \square , \bullet , \times) представляют результаты численных расчётов [13–16] для состояний с квантовыми числами $n_\rho = 0$ и $m = 0, -1, -2, -3, -4, -5$.

них $n' \rightarrow n$, однако переход в асимптотический режим происходит крайне медленно (см. ниже раздел 4).

3. При известном значении $\lambda_{m_\rho|m|}$ формула (3.7) непосредственно определяет величину соответствующего магнитного поля.

4. Записав (3.7) в виде $F(\lambda) = F_{n_\rho m}(\mathcal{H})$, где

$$F(\lambda) \equiv \lambda + 2 \ln \lambda + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), \quad (3.8)$$

$$F_{n_\rho m}(\mathcal{H}) = \ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_\rho m},$$

отметим следующее следствие этого уравнения.

Как видно из (3.7) и (3.8), зависимость от энергии уровня в этом уравнении определяется универсальной функцией $F(\lambda)$, которая не зависит ни от магнитного поля, ни от квантовых чисел n_ρ , m , n (даётся функцией $F_{n_\rho m}(\mathcal{H})$ в правой части уравнения). Это означает, что в адиабатическом приближении весь чётный спектр $E_{m_\rho|m|}(\mathcal{H}) = -\lambda^2/2$ при различных значениях квантовых чисел и магнитного поля лежит на этой универсальной кривой.

Рисунок 1 иллюстрирует выполнение скейлинга [24] для основного 1s-уровня с квантовым числом $n_\rho = 0$ при различных значениях m и магнитного поля. На рисунке 1 построен график функции $F(\lambda)$ и указаны значения $F_{0m}(\mathcal{H})$ для соответствующих уровней при численном решении уравнения Шрёдингера. Как видно из рисунка, такой скейлинг выполняется с высокой точностью для состояний с различными m при $\lambda^2 > 12$. При $\lambda^2 < 10$ наблюдается отклонение⁸ от кривой $F(\lambda)$, однако и в этой области положения уровней по-прежнему группируются вдоль плавной кривой, близкой к $F(\lambda)$.

⁸ Это неудивительно, поскольку при увеличении m условие применимости адиабатического приближения из-за увеличения центробежной энергии сдвигается в область больших значений магнитного поля.

5. Для чётных состояний вблизи основной зоны Ландау $N = 0$ ($n_p = 0$, $m = -|m| = 0, -1, -2, \dots$, $\sigma_z = -1$)

$$A_{0|m|} = -\ln 2 + \psi(1 + |m|), \quad A_{00} = -(\ln 2 + \gamma), \quad (3.9)$$

$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$; для таких, наиболее глубоких, состояний мы будем использовать обозначения LLL (the Lowest Landau Levels) [33–35].

6. Полученное значение логарифмической производной (3.3) для чётных решений уравнения (2.6) на расстояниях $r_0 \ll z \ll a_B$, где потенциал имеет кулоновский вид, можно экстраполировать к точке $z = +0$, заменяя при этом эффективный потенциал $U_{\text{eff}}(|z|)$ на одномерный кулоновский потенциал $U_C(|z|) = -e^2/|z|$. Такой приём соответствует моделированию короткодействующего искажения этого потенциала точечным взаимодействием⁹ (в точке $z = 0$). Использование в этом случае значения логарифмической производной (3.3) при $z \rightarrow 0$ для чётных решений (2.11) уравнения Шрёдингера с кулоновским потенциалом приводит к следующим соотношениям:

$$C_1^- = C_1^+, \quad \frac{C_2^+}{C_1^+} = \beta, \quad (3.10)$$

где β — не зависящий от энергии параметр с размерностью обратной длины, равный в рассматриваемой задаче

$$\beta = \frac{1}{a_B} \left(2 \ln \frac{a_H}{a_B} + 2 + A_{n_p|m|} \right). \quad (3.11)$$

Зависимость параметра β от квантовых чисел n_p и m связана с соответствующей зависимостью характера искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях (см. $U_{\text{eff}}(|z|)$ в (2.7)), которая сохраняется и при предельном переходе $r_0 \rightarrow 0$.

Условия (3.10) сшивания решения в точке $z = 0$ в случае сингулярного кулоновского потенциала $U_C(|z|)$ заменяют обычные условия непрерывности волновой функции и её производной для регулярных потенциалов. С математической точки зрения эти условия задают самосопряжённое расширение эрмитова гамильтониана с одномерным кулоновским потенциалом (более подробное обсуждение этого вопроса см. в задаче¹⁰ 8.61 в [36]). Необходимость введения в случае сингулярных потенциалов дополнительных условий, обеспечивающих взаимную ортогональность собственных функций гамильтониана и их полноту, была впервые отмечена в работе [37] в связи с так называемым "падением на центр" в квантовой механике [6, 38].

Отметим, что в предельном случае выключения кулоновского потенциала, т.е. при $a_B \rightarrow \infty$, условия сшивания решения (3.10) в точке $z = 0$ принимают вид

$$\psi(+0) = \psi(-0), \quad \psi'(+0) - \psi'(-0) = 2\beta\psi(0)$$

⁹ То обстоятельство, что на расстояниях $|z| \lesssim r_0$ решения с искажённым и неискажённым кулоновскими потенциалами имеют совершенно разный вид, не играет существенной роли ввиду малости вклада в нормировочный интеграл этой области расстояний.

¹⁰ Пользуясь случаем, отметим опечатку в формуле (14) из этой задачи (аналогичной (3.10)): в ней следует заменить $\beta \rightarrow 2\beta$. Формула (18) определяет спектр атома водорода в сильном магнитном поле.

и моделируются точечным взаимодействием в виде дельта-потенциала $U(z) = \alpha\delta(z)$ при $\alpha = \hbar^2\beta/m$.

7. Как отмечено в разделе 2, с чётными решениями уравнения Шрёдингера с ограниченным при $|z| \rightarrow 0$ потенциалом $U(|z|)$ на всей оси z непосредственно связаны решения этого уравнения для s-состояний в таком же центральном потенциале $U(r)$, но с наложением граничного условия (2.9), моделирующего потенциал нулевого радиуса действия. Однако в случае кулоновского потенциала притяжения $U_C = -e^2/r$ (на малых расстояниях) такое граничное условие согласно (3.10) должно быть записано в виде

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} \approx -\frac{2}{a_B} \left(\ln \frac{r}{a_B} + 1 \right) + \beta, \quad r \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Параметр β имеет наглядный физический смысл в случае, когда кулоновский потенциал сохраняет свой вид при всех значениях $r > 0$. В этом случае решение уравнения Шрёдингера записывается как

$$\chi(r) = \text{const} (F_0(kr) \cot \delta_0(k) + G_0(kr)), \quad (3.13)$$

где $F_0(z)$ и $G_0(z)$ — регулярная и иррегулярная кулоновские волновые функции [6], а δ_0 — искажение кулоновской фазы рассеяния, обязанное короткодействующему потенциалу, который моделируется граничным условием (3.12). Переходя в (3.13) к пределу $r \rightarrow 0$ и используя приближение эффективного радиуса действия в случае кулоновского потенциала, искажённого на малых расстояниях, $r_0 \ll a_B$, получаем при $k \rightarrow 0$:

$$\beta = -\frac{2}{a_B} (\ln 2 + 2\gamma - 1) - \frac{1}{a_{cs}}. \quad (3.14)$$

Здесь a_{cs} — длина s-рассеяния на короткодействующем потенциале, перенормированная из-за кулоновского взаимодействия на малых расстояниях. В рассматриваемой задаче значение β даётся формулой (3.11). Граничное условие (3.12) принимает вид

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} \approx -\frac{2}{a_B} \left(\ln \frac{2r}{a_B} + 2\gamma \right) - \frac{1}{a_{cs}}, \quad r \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

При выключении кулоновского взаимодействия, т.е. в пределе $a_B \rightarrow \infty$, формула (3.12) переходит в (2.9); при этом $\beta = -1/a_s$ и согласно (3.14) $a_{cs} = a_s$, как и следовало ожидать.

Изложенные выше результаты для спектра гамильтониана (2.1) с кулоновским потенциалом являются асимптотически точными при $B \rightarrow \infty$. Однако при этом скорость поперечного движения электрона неограниченно возрастает¹¹, уравнение Шрёдингера становится неприменимым и следует использовать уравнение Дирака. Как показано в разделе 7, адиабатический подход допускает непосредственное обобщение на случай уравнения Дирака. Более того, формула (3.7) для спектра оказывается применимой и в релятивистской области, вплоть до значений магнитного поля $B \sim 10^{16}$ Гс, при которых становятся существенными эффекты квантовой электродинамики (см. ниже раздел 8).

¹¹ Так, при $B = B_{\text{cr}}$ кинетическая энергия поперечного движения электрона $T = m_e c^2/2$ (см. (1.2)).

Естественно, возникает вопрос об области применимости и точности уравнения (3.7), при получении которого использовалось условие $\ln \mathcal{H} \gg 1$.

4. Сравнение уравнения (3.7) с другими приближениями и с численными расчётами

В литературе предложено несколько приближённых аналитических формул для энергии уровней атома водорода в зависимости от сильного магнитного поля, связанных с использованием адиабатического приближения. Перечислим их и сравним с уравнением (3.7) и результатами численных расчётов.

4.1. Основной уровень 1s

В книге Ландау и Лифшица [6] (§ 112, задача 3) для энергии связи основного уровня приведено значение¹²

$$\varepsilon_0 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \ln^2 \frac{\hbar^3 B}{m_e^2 e^3 c} = \lambda_0^2 \text{Ry}, \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \ln \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

Эта формула определяет энергию связи лишь по порядку величины. Так, при $B = B_{\text{cr}}$ (т.е. при $\mathcal{H} = \alpha^{-2}$) согласно (4.1) $\lambda_0 = 2 \ln(1/\alpha) = 9,840$ и $\varepsilon_0 \approx 1320$ эВ, в то время как численный расчёт [13] даёт значения $\lambda_0 = 5,735$ и $\varepsilon_0 = 448$ эВ.

Уравнение (4.1) является упрощённой формулой из статьи Лоудона [17] (см. также [18, 19]), согласно которой

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda). \quad (4.2)$$

Эта формула была уточнена в работе [20]:

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda) + \gamma - \ln 2 \quad (4.3)$$

(отличие в слагаемом $\gamma - \ln 2 = -0,116$ в правой части уравнения).

В статье [21] приведено уравнение (см. формулу (6) в работе [21]) с $v = 1/\lambda$

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2\psi(1 - \lambda^{-1}), \quad (4.4)$$

которое для глубокого, $\lambda \gg 1$, уровня принимает вид

$$\ln \mathcal{H} = \lambda - 2\gamma \quad (4.5)$$

и отличается от (4.1) фактически только сдвигом.

Наконец, согласно формуле (3.7) раздела 3 имеем [22–24]

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \left[\ln \lambda + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] + 3\gamma + \ln 2. \quad (4.6)$$

Сравним теперь эти приближения с результатами точных (вплоть до 10 значащих цифр в работе [13]) численных расчётов [13–16]. На рисунке 2 представлены зависимости $\lambda_0(\mathcal{H})$ для значений \mathcal{H} от ~ 10 до 10^6 . Видно, что формула Лоудона (4.2), хотя и не является прецизионной, всё же качественно описывает зависимость $\lambda_0(\mathcal{H})$ для значений \mathcal{H} от $\sim 10^3$ до 10^6 . С другой стороны, выражения (4.1) и (4.5) фактически не имеют области применимости.

Наиболее высокую точность имеет уравнение (4.6): при $B \gtrsim 5 \times 10^{11}$ Гс кривые 1 и 2 уже неразличимы в

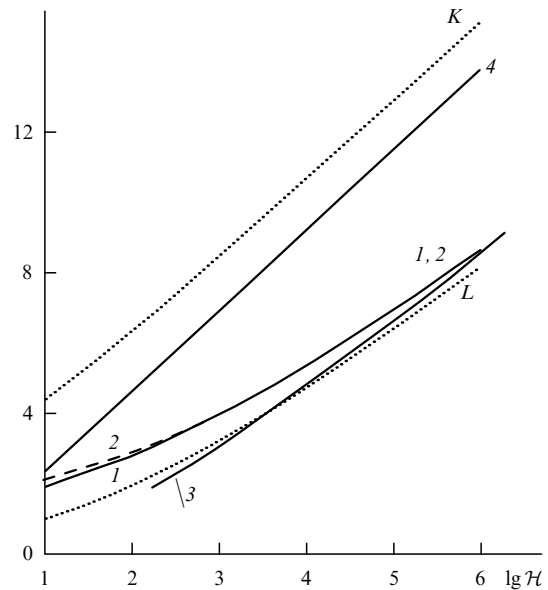


Рис. 2. Зависимость импульса $\lambda(\mathcal{H})$ для основного состояния. Кривая 1 — результаты численных расчётов [13, 15, 16], штриховая кривая 2 — расчётов по уравнению (4.6), кривая 3 — асимптотика (4.7). Формулам (4.1), (4.5) и (4.2) соответствуют кривая 4 и пунктирные кривые K и L. Здесь и далее на рисунках $\lg \mathcal{H} \equiv \log_{10} \mathcal{H}$.

пределах точности рис. 2, причём с ростом \mathcal{H} точность этого уравнения только увеличивается. Что касается асимптотики (4.3), то она приближается к точному решению, хотя и довольно медленно. Следует подчеркнуть, что приведённые выше уравнения, за исключением (4.4) и (4.6), относятся только к основному уровню 1s и неприменимы для возбуждённых состояний атома водорода.

Отметим свойства формальной асимптотики уравнения (4.6):

$$\tilde{\lambda}_0 \approx \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\tilde{\lambda}_0^2}{2} \quad \text{при} \quad \mathcal{H} \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

которая отличается от (4.1) функционально, причём

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} = 1 - 4 \frac{\ln \ln \mathcal{H}}{\ln \mathcal{H}} + O\left(\frac{1}{\ln \mathcal{H}}\right), \quad \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_0 \approx 4 \ln \ln \mathcal{H}. \quad (4.8)$$

Формально $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 \rightarrow 1$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, однако переход к этому пределу происходит чрезвычайно медленно, в полях, не имеющих реального физического смысла (так, например, различие между ε_0 и $\tilde{\varepsilon}_0$ порядка 30 % даже при $B = 10^8 B_{\text{cr}} \sim 10^{22}$ Гс).

В недавней работе [35] приведены значения $\lambda_0(\mathcal{H})$ для основного состояния, $n_p = m = 0$, полученные при численном решении уравнений Шрёдингера и Дирака. Сравнение их с асимптотической формулой (4.6) показывает (табл. 1), что эта формула сохраняет высокую точность и в области сверхсильных полей $B \gtrsim B_{\text{cr}}$, вплоть до $B \sim m_e^2/e^5 \sim 10^{18}$ Гс. Так, при $B = 10^5 B_{\text{cr}} \approx 4 \times 10^{18}$ Гс её погрешность составляет $\delta \approx 0,2$ %, и даже при $B = 10^{10} B_{\text{cr}}$ погрешность $\delta \approx 0,5$ %. Отметим, что в полях $B \lesssim 10^{15}$ Гс экранировкой кулоновского потенциала [35] можно пренебречь, но при $B > 10^{17}$ Гс она становится существенной и приводит к "замерзанию" энергии основного уровня при $\lambda_\infty = 11,3$, или $E_0(\infty) = -1,71$ кэВ. Этим определяется область применимости уравнения (4.6).

¹² Как отмечено в книге [6], с "логарифмической точностью".

Таблица 1. Безразмерный импульс $\lambda_0(B)$ для основного уровня атома водорода [35]

B/B_{cr}	KP	S	D	\bar{D}
10^{-2}	3,108	3,032	3,032	—
10^{-1}	4,289	4,272	4,272	—
10^0	5,737	5,735	5,734	5,7
10^1	7,374	7,374	7,371	7,4
10^2	9,141	9,141	9,135	9,1
10^3	11,00	11,00	10,99	10,6
10^4	12,93	12,93	12,91	11,2
10^5	14,91	14,91	14,88	11,3
10^6	16,93	16,93	16,89	11,3
10^8	21,06	21,05	20,98	11,3

Примечание. Приведены значения [35] λ_0 без учёта эффекта экранировки: KP — согласно уравнению (4.6), S — по уравнению Шрёдингера (8.9), D — численный расчёт по уравнению Дирака. Столбец \bar{D} рассчитан по уравнению Дирака с учётом экранировки (8.1) кулоновского потенциала, $B/B_{\text{cr}} = \alpha^2 \mathcal{H}$.

Таблица 2. Вычисление магнитного поля по энергии связи основного уровня LLL (1s)

λ_0^2	$H = B/B_a$			$ E_0 , \text{эВ}$
	a	b	c	
3,4956	10	3,50	6,49	47,5
7,5796	100	79,6	15,7	103
11,875	425,5*	388	36,6	161
15,325	1000	962	50,1	208
28,282	1,0(4)	0,9991(4)	204	385
32,92	1,878(4)**	1,880(4)	310	448
47,783	1,0(5)	1,003(5)	1,005(3)	650
65,84	5,0(5)***	5,017(5)	3,334(3)	896
74,84	1,0(6)	1,0014(6)	5,69(3)	1017

Примечание. а — результаты численных расчётов [13–15], b — по уравнению (4.6), c — по уравнению (4.1). Используется обозначение $x(y) \equiv x \times 10^y$.

* $B = 10^{12}$ Гс.

** $B = B_{\text{cr}} = 4,414 \times 10^{13}$ Гс.

*** $B = 2,35 \times 10^{15}$ Гс.

Особый интерес для астрофизики нейтронных звёзд может представлять не $\lambda(\mathcal{H})$, а обратная зависимость $\mathcal{H}(\lambda)$, определяющая магнитное поле на поверхности звезды по измеренному сдвигу атомного уровня (т.е. $\lambda_0^2/2$). Соответствующие данные приведены в табл. 2. В полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс погрешность уравнения (4.6) при определении \mathcal{H} не превышает 0,3 %, и даже при $B \sim 10^{12}$ Гс (характерное значение для нейтронных звёзд) ошибка порядка 10 %, что, по-видимому, достаточно для многих астрофизических приложений. В то же время уравнения (4.1) и (4.5) приводят здесь к значительным ошибкам (на 2–3 порядка величины), которые возрастают с увеличением магнитного поля, и не могут конкурировать с уравнением (4.6).

В предыдущих уравнениях считалось, что $n_p = m = 0$ (основное, безузельное состояние). К числу уровней типа LLL относятся также состояния с $n_p = 0$ и $m = -|m|$. Энергии связи таких уровней даются уравнением (3.7), в котором константа $A_{0|m|}$ определена в (3.9). В таблице 3 приводится сравнение результатов численных расчётов [13–16] с решением уравнения (3.7) для состояний с квантовыми числами $n_p = 0$ и $m = 0, -1, -2, -3, -4$ и -5 . С ростом $|m|$ энергии связи этих состояний умень-

Таблица 3. Энергии связи для нижних LLL-уровней, $n_p = 0$ и $m = -|m|$

\mathcal{H}	$m = 0$		$m = -1$		$m = -2$	
	a	b	a	b	a	b
10^2	7,580	8,082	5,270	6,132	4,376	5,374
10^3	15,32	15,49	11,28	11,70	9,610	10,15
10^4	28,28	28,29	21,83	21,97	19,05	19,26
10^5	47,78	47,76	38,41	38,42	34,22	34,26
∞	—	125,7	—	108	—	99,7

\mathcal{H}	$m = -3$		$m = -4$		$m = -5$	
	a	b	a	b	a	b
10^2	3,860	4,938	3,510	4,643	3,251	4,425
10^3	8,617	9,230	7,929	8,598	7,412	8,125
10^4	17,35	17,61	16,16	16,45	15,25	15,57
10^5	31,60	31,68	29,74	29,84	28,32	28,42
∞	—	94,4	—	90,6	—	87,6

Примечание. Приведены значения λ_m^2 : а — согласно численным расчётам [13, 16], b — по уравнению (4.6), предел при $\mathcal{H} = \infty$ рассчитан по уравнению (8.8).

шаются, что понятно: из-за увеличения центробежной энергии $\hbar^2 m^2 / 2m_e \rho^2$ электрон удаляется от ядра в поперечном к \mathbf{B} направлении, что приводит к уменьшению эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(z)$ (при данном \mathcal{H}).

4.2. Возбуждённые уровни

Как было отмечено выше, уравнение (3.7) описывает весь дискретный спектр чётных состояний. При этом возбуждённые уровни (как чётные, так и нечётные) лежат в области энергий невозмущённого атома водорода $\lambda = \lambda_n(\mathcal{H}) < 1$, причём $\lambda_n \rightarrow 1/n$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ (здесь $n = 1, 2, \dots$ — полюсы функции $\psi(1 - 1/\lambda) = \psi(1 - n)$). Сделаем следующее замечание. В отсутствие магнитного поля кулоновские состояния характеризуются квантовыми числами n, l, m . При включении магнитного поля l уже не является "хорошим" квантовым числом, за исключением его чётности $(-1)^l$. Тем не менее, в статье [13] для классификации состояний и в этом случае используется обозначение (nl) вместо n^\pm , удобного при адиабатическом приближении. Таким образом уровню приписывается значение l в порядке его расположения по значению энергии при изменении магнитного поля. Не входя в детали [22–25], укажем соответствие между обозначениями для нижних уровней: $1s \rightarrow 0^+(\text{LLL})$, $2s \rightarrow 1^+$, $3d$ (а не $3s(!)$) $\rightarrow 2^+$, $2p \rightarrow 1^-$ и т.д. (см., в частности, рис. 8 в работе [24]).

Сравнение с численными расчётами для 2s- и 3d-состояний показывает (см. рис. 3 и подробности в табл. 4), что энергии связи этих уровней $\lambda_n^2/2$ при $\mathcal{H} \gtrsim 100$ определяются уравнением (3.7) с процентной или даже с ещё более высокой точностью. На рисунке 3 видно также существенное различие в поведении $\lambda_{nl}(\mathcal{H})$ и $\varepsilon_{nl}(\mathcal{H})$ для чётных и нечётных уровней (см. также раздел 5).

В литературе имеется несколько асимптотических формул для энергии чётных возбуждённых уровней атома водорода. Согласно уравнению (3.24) из [19],

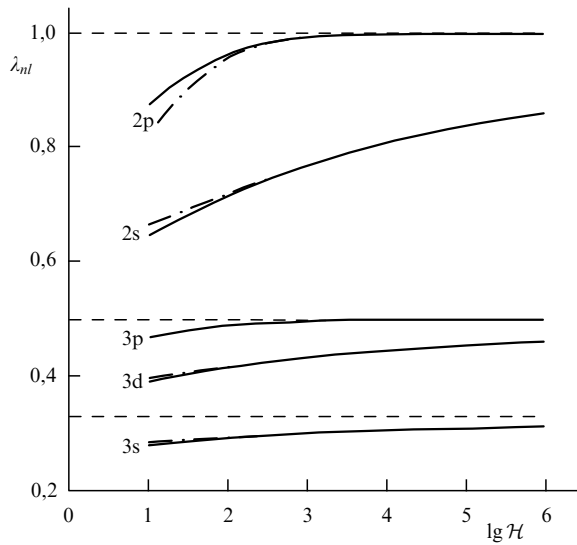
$$\ln \mathcal{H} = 2[\ln(2\lambda) + \psi(1 - \lambda^{-1})], \quad 0 < \lambda < 1, \quad (4.9)$$

при $\mathcal{H} \lesssim 10^3$ эта формула применима только качественно.

Таблица 4. Значения λ_{nl}^2 для возбуждённых уровней

\mathcal{H}	2s		3d		2p		3p	
	a	b	a	b	a	b	a	b
0	0,2500	—	0,1111	—	0,2500	—	0,111	—
10	0,4179	0,4429	0,1543	0,1594	0,7653	0,6708	0,2197	0,2122
10^2	0,5124	0,5176	0,1738	0,1747	0,9272	0,9162	0,2419	0,2400
10^3	0,5917	0,5921	0,18870	0,18876	0,9850	0,9843	0,2482	0,2481
10^4	0,6554	0,6552	0,19986	0,19983	0,9976	0,9976	0,2497	0,2497
10^5	0,7054	0,7053	0,20814	0,20812	0,9996	0,9997	0,2499	0,2500
10^6	0,7444	0,7443	—	0,21433	0,9999	1,0000	0,2500	0,2500

Примечание. Приведены результаты: а — численных расчётов [13, 14, 16], б — по уравнениям (4.6) и (5.6) соответственно для чётных и нечётных состояний. Относительно взаимного расположения 3s- и 3d-уровней см. рис. 8 в [24].

**Рис. 3.** Безразмерный импульс $\lambda_{nl}(\mathcal{H})$ для возбуждённых s-, p- и d-уровней: сплошные кривые — численные расчёты [13, 16], штрихпунктирные — по уравнениям (3.7) и (5.6) для чётных и нечётных уровней. Штриховыми линиями показаны предельные ($\mathcal{H} \rightarrow \infty$) значения λ_{nl} .

Недавно [25, 34] была получена асимптотика

$$\lambda_n = \frac{1}{n} - \frac{2/n^2}{\ln \mathcal{H} - \ln 2 - \gamma + 1/n + 2[\ln n - \sum_{k=1}^{n-1} (1/k)]}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4.10)$$

применимая при условии $\ln \mathcal{H} \gg 1$. Для первого возбуждённого уровня сумму по k в (4.10) следует опустить:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2}{\ln \mathcal{H} - 0,2704} + O\left(\frac{1}{(\ln \mathcal{H})^2}\right), \quad n = 1. \quad (4.11)$$

Точность этих асимптотических формул в области $\mathcal{H} = 10^2 - 10^4$, типичной для нейтронных звёзд, ещё недостаточна, однако они могут быть использованы в области сверхсильных полей $\mathcal{H} > 10^5$, или $B \gtrsim 10^{14}$ Гс.

В заключение этого раздела укажем характерные значения радиуса Ландау $a_H = \sqrt{\hbar c / eB}$: 4×10^{-11} см и 1×10^{-12} см для полей $B_{cr} \approx 4 \times 10^{13}$ Гс и $B = 6 \times 10^{16}$ Гс соответственно. Эти значения a_H велики по сравнению с радиусом протона, $r_p \approx 10^{-13}$ см, и поэтому приближение точечного заряда ядра оправданно. Однако, как будет отмечено в разделе 8, в полях напряжённостью $B \gtrsim$

$\gtrsim \alpha^{-1} B_{cr} \sim 5 \times 10^{15}$ Гс возникает искажение (экранировка) кулоновского потенциала точечного заряда на малых расстояниях из-за поляризации вакуума магнитным полем, что существенно изменяет зависимость спектра чётных уровней от величины поля B по сравнению со случаем точечного заряда.

5. Нечётные уровни

Как отмечено в конце раздела 2, спектр нечётных уровней (2p, 3p, 4f и т.д. по классификации работы [13]) описывается формулой (2.15), в которой $\psi_{ns}(r)$ — невозмущённые волновые функции в кулоновском потенциале [6]:

$$\begin{aligned} \psi_{ns}(r) &= \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \exp\left(-\frac{r}{n}\right) F\left(1-n, 2; \frac{2r}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \left(1 - r + \frac{2n^2 + 1}{6n^2} r^2 + \dots\right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$F(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При этом уровни слегка сдвинуты вверх относительно невозмущённых кулоновских уровней $E_n^{(0)} = -(1/n^2) \text{ Ry}$. Качественное различие спектров чётных и нечётных уровней в сильном магнитном поле $\mathcal{H} \gg 1$ иллюстрирует рис. 3.

Из уравнения (2.15) следует асимптотическое разложение для энергии связи [24]:

$$(\lambda_{nmnp}^-)^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \left\{ a_{nmnp} \frac{\ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}} + \frac{a_{nmnp}^{(1)}}{\mathcal{H}} + \frac{a_{nmnp}^{(3/2)}}{\mathcal{H}^{3/2}} + \dots \right\}, \quad \mathcal{H} \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

Логарифмически главное слагаемое в выражении для сдвига уровня определяется областью интегрирования $a_H \lesssim r \lesssim a_B$ в формуле (5.1), при этом можно положить

$$U_{\text{eff}}(r) \approx -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 \bar{\rho}_{nmnp}^2}{2r^3}, \quad \psi_{ns}^2(r) \approx \psi_{ns}^2(0) = \frac{1}{\pi n^3 a_B^3} \quad (5.3)$$

и получить с логарифмической точностью оценку для сдвига нечётного уровня:

$$\begin{aligned} \delta E_{nmnp}^- &\approx \int \left(U_{\text{eff}} + \frac{e^2}{r} \right) \psi_{ns}^2(r) d^3r \approx \frac{2e^2 \bar{\rho}_{nmnp}^2}{a_B^3 n^3} \int_{a_H}^{a_B} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{e^2 \bar{\rho}_{nmnp}^2}{a_B^3 n^3} (\ln \mathcal{H} + O(1)). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таблица 5. Поправки Ридберга Δ_{nl}^{\pm} для чётных и нечётных уровней

\mathcal{H}	$\Delta_{nl}^{+}(\mathcal{H})$				$\Delta_{nl}^{-}(\mathcal{H})$		
	1s	2s	3s	3d	2p	3p	4f
1	0,7756	0,7652	0,7407	0,7476	0,3867	0,3541	0,3435
10	0,5349	0,5469	0,5452	0,5456	0,1431	0,1335	0,1312
10 ²	0,3632	0,3970	0,3994	0,3989	0,0385	0,0368	0,036
10 ³	0,255	0,300	0,303	0,302	0,0076	0,0074	—
10 ⁴	0,188	0,235	0,237	0,237	0,0012	0,0012	—
10 ⁵	0,145	0,191	0,192	0,192	0,0002	0,0002	0
10 ⁶	0,116	0,159	0,160	0,160	0	0	0

Примечание. Значения Δ_{nl}^{\pm} [13, 14, 16] относятся к основному уровню Ландау 1s и к башне примыкающих к нему состояний: 2s, 3s и т.д.

Поскольку

$$\overline{\rho_{mm}^2} = \iint \rho^2 |R_{nm}(\rho)|^2 d^2\rho = 2(2n_{\rho} + |m| + 1)a_H^2,$$

для коэффициента a_{mm} (не зависящего от n) получаем

$$a_{mm} = 2n_{\rho} + |m| + 1. \quad (5.5)$$

Определение следующих коэффициентов разложения в (5.2) связано с более громоздкими вычислениями, которые можно найти в работе [25]. В простейшем случае $m = n_{\rho} = 0$ имеем

$$(\lambda_{n0}^{-})^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \left[\frac{\ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}} - \frac{k_n}{\mathcal{H}} + \frac{4\sqrt{2\pi}}{\mathcal{H}^{3/2}} + \dots \right], \quad (5.6)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — квантовое число для продольного движения электрона, а значения k_n равны:

$$k_1 = 2 + \ln 2 + \gamma = 3,270, \quad k_2 = 3,384, \quad (5.7)$$

$$k_3 = 3,407, \quad k_4 = 3,417, \dots$$

Подчеркнём существенное различие между энергиями чётных и нечётных уровней, $E_n^{\pm} = -(\lambda_n^{\pm})^2/2$, в сверхсильном магнитном поле (см. табл. 4). Это различие наглядно проявляется, если перейти от энергий E_{nl}^{\pm} к поправкам Ридберга Δ_{nl}^{\pm} , используемым в атомной физике (см. табл. 5 и более подробное её обсуждение в разделе 9).

Для чётных уровней 2s, 3s и 3d при $\mathcal{H} \gtrsim 100$ значения $\Delta_{nl}^{+}(\mathcal{H})$, полученные из численных расчётов [13, 14, 16] и вычисленные по формуле (3.7), практически совпадают между собой и медленно убывают с ростом \mathcal{H} : $\Delta_{nl}^{+} \propto 1/\ln \mathcal{H}$, поэтому даже при $\mathcal{H} = 10^5$ (т.е. в полях $B \gtrsim 10^{14}$ Гс) они ещё достаточно далеки от своего предела при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, так что спектр чётных уровней сильно возмущён по сравнению с кулоновским спектром $E_n^{(0)} = -1/2n^2$. В то же время для нечётных уровней 2p, 3p, 4f и т.д. поправки Ридберга $\Delta_{nl}^{-}(\mathcal{H})$ численно весьма малы при $\mathcal{H} \gtrsim 100$, где $\Delta_{nl}^{-} \propto (\ln \mathcal{H})/\mathcal{H} \ll \Delta_n^{+}$ и $E_n^{-} \approx E_{n-1}^{(0)}$. Поэтому утверждение в работах [6, 19] о двукратном вырождении чётных и нечётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле нуждается в уточнении.

В случае возбуждённых чётных состояний асимптотическая формула (3.7) обеспечивает более высокую точность, чем для основного уровня. Это имеет простое физическое объяснение: для возбуждённых состояний

возрастает размер области локализации волновых функций в продольном направлении пропорционально n^2 , что приводит к уменьшению кулоновского взаимодействия и расширению области применимости адиабатического приближения для меньших значений магнитного поля.

6. Размеры, квадрупольный момент атома и вероятности радиационных переходов при $B \gg B_a$

Как отмечено в разделах 2 и 3, волновая функция продольного движения электрона $\chi(z)$ в уравнении (2.4) в основной области его локализации $|z| \gtrsim a_H$ описывается функцией Уиттекера (3.5). Поскольку вклад в нормировочный интеграл расстояний $|z| \lesssim a_H$ мал, при вычислении пространственных характеристик электронного облака можно воспользоваться формулой (3.5) на всей оси z . Нормировочный интеграл для $\psi_v(z)$ и средний радиус этого состояния можно вычислить, используя результаты, полученные ранее [39, 40] в теории рр-атома. В итоге для атома водорода в сильном магнитном поле имеем

$$\frac{a_{\parallel}}{a_B} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}(\lambda - 1/2)(\lambda - 1/3)} \times \left\{ \frac{{}_3F_2(-\lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, 3; 4 - \lambda^{-1}, 4 - \lambda^{-1}; 1)}{{}_3F_2(-\lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, 1; 2 - \lambda^{-1}, 2 - \lambda^{-1}; 1)} \right\}^{1/2}, \quad (6.1)$$

где ${}_3F_2$ — обобщённый гипергеометрический ряд [41]. В случае глубокого уровня $v \rightarrow 0$ имеем $\psi_0(z) \approx \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda|z|)$ и

$$\frac{a_{\parallel}}{a_B} = (2\lambda)^{-1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} \right)^{-1}, \quad (6.2)$$

где мы воспользовались асимптотикой (4.7). С ростом \mathcal{H} продольный размер атома a_{\parallel} уменьшается значительно медленнее, чем a_{\perp} :

$$\frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}} = \frac{\sqrt{\mathcal{H}}}{2\lambda} \sim \frac{\sqrt{\mathcal{H}}}{\ln \mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} \gg 1 \quad (6.3)$$

(поэтому атом водорода принимает спицеобразную, или игольчатую, форму (табл. 6)).

Отмеченное выше сокращение продольного размера атома $a_{\parallel} \propto 1/\ln \mathcal{H}$ имеет наглядное физическое объяснение. Оно связано с тем обстоятельством, что рассматриваемое 1s-состояние является, как это подчёркивалось в разделе 2, состоянием с малой энергией связи, $\lambda^2 \sim (\ln \mathcal{H})^2$ ("мелкий" уровень) в потенциальной яме (описывающей искажение кулоновского потенциала) радиусом $r_0 \sim a_H = 1/\sqrt{\mathcal{H}} \ll 1/\lambda$. В этом случае экспоненци-

Таблица 6. Характерные размеры атома водорода в сильном магнитном поле

\mathcal{H}	a_{\perp}/a_B	a_{\parallel}/a_{\perp}	
		1s	2s
10 ²	0,100	3,52	32,5
10 ³	0,032	7,12	89,6
10 ⁴	0,010	15,7	257
10 ⁵	3,16 (−3)	36,7	759

альное убывание волновой функции вне ямы, $\psi \propto \exp(-\lambda|x|)$, происходит на расстояниях $|x| \sim 1/\lambda \gg r_0$, существенно превышающих ширину ямы. Поэтому здесь проявляется "антиклассическое" квантово-механическое свойство связанных состояний частицы с малой энергией связи в короткодействующем потенциале: хотя частица связана ямой, но в области ямы находится с малой вероятностью $w \sim \lambda r_0 \ll 1$ (т.е. большую часть времени частица проводит вне ямы). Системами с такими свойствами являются дейтрон¹³ и отрицательный ион водорода H^- . Энергия связи внешнего электрона в этом ионе $\varepsilon = 0,75$ эВ (он движется в электростатическом поле протона, полностью экранируемого на расстояниях $r \gtrsim a_B$ внутренним атомным электроном).

Деформация электронного облака $|\psi(\mathbf{r}, z)|^2$ магнитным полем приводит к появлению квадрупольного момента атома. В сильно замагниченной водородной плазме, помимо обычного ван-дер-ваальсова притяжения, возникает также квадруполь-квадрупольное взаимодействие между атомами. Квадрупольный момент Q основного состояния атома водорода был рассчитан численно [26] с помощью вариационного метода. Мы дадим простую асимптотическую формулу для Q , справедливую при $\mathcal{H} \gtrsim 100$.

Ввиду аксиальной симметрии только диагональные компоненты тензора квадрупольного момента отличны от нуля:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2} Q, \quad Q_{zz} = -Q, \quad Q = 2\langle z^2 \rangle - \langle \rho^2 \rangle \quad (6.4)$$

(ось z выбрана вдоль магнитного поля; $Q_{zz} < 0$, поскольку заряд электрона отрицателен). Отсюда

$$Q(\mathcal{H}) = 2\{a_{\parallel}^2(\mathcal{H}) - \mathcal{H}^{-1}\}, \quad m = n_p = 0, \quad (6.5)$$

или асимптотически

$$Q = A^{-2} + \left[2(\gamma + \ln 2) + \frac{5}{3}\right] A^{-3} + \dots, \quad (6.6)$$

$$A = \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} \gg 1$$

(здесь мы положили $a_B = 1$). Как видно из рис. 4, аналитические формулы (6.1)–(6.4) практически не отличаются от результатов численного расчёта [26], если $\mathcal{H} \gtrsim 10$. Что же касается разложения (6.6), то при $\mathcal{H} < 1000$ оно передаёт зависимость $Q(\mathcal{H})$ только качественно, однако с ростом \mathcal{H} его точность увеличивается. Уменьшение квадрупольного момента с ростом $\mathcal{H} \gg 1$ объясняется тем, что сверхсильное магнитное поле сжимает атом как в поперечном направлении, так и в продольном.

Кратко рассмотрим вопрос о радиационных переходах $n\mathbf{p} \rightarrow 1s$ вблизи основной зоны Ландау при $\mathcal{H} \gg 1$, когда $a_H \ll a_{\parallel} \ll a_B$. В этом пределе можно пренебречь сдвигом нечётного $n\mathbf{p}$ -уровня:

$$E_n^- = -\frac{1}{2n^2}, \quad \psi_n^-(z) = \sqrt{\frac{2}{n^3}} \exp\left(-\frac{z}{n}\right) F\left(1-n, 2; \frac{2z}{n}\right),$$

¹³ Дейтрон (ядро тяжёлого изотопа водорода) — слабосвязанная ядерным взаимодействием система из протона и нейтрона. Его энергия связи $\varepsilon_d = 2,23$ МэВ, характерная величина потенциала взаимодействия $U_0 \approx 50$ МэВ, радиус $R \sim 2 \times 10^{-13}$ см.

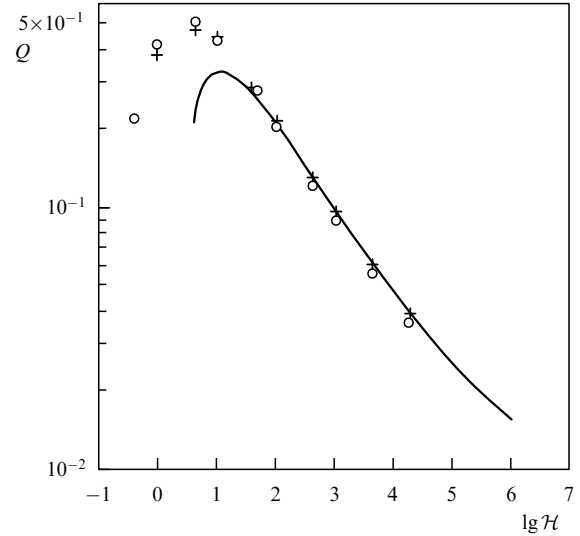


Рис. 4. Квадрупольный момент Q для основного состояния атома водорода. Сплошная кривая построена по формулам (6.4) и (6.1); точки (O и +) обозначают результаты численных расчётов [22].

а для волновой функции глубокого основного состояния использовать аппроксимацию $\chi_\lambda(z) \approx \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda|z|)$, соответствующую одномерному δ -потенциалу. В итоге для вероятности перехода получаем оценку

$$w(n\mathbf{p} \rightarrow 1s) = \frac{16\alpha^3}{9n^3\lambda} \left[1 - \frac{2}{3\lambda} + O(\lambda^{-2})\right] \omega_0, \quad (6.7)$$

где $\omega_0 = m_e e^4 / \hbar^3 = 4,13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, а $\lambda = \lambda(\mathcal{H})$ определяется из уравнения (3.7). При $B \sim 10^{13}$ Гс имеем $|E_{1s}| \approx 300$ эВ, $\lambda \approx 5$ и $w(2\mathbf{p} \rightarrow 1s) \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, что на несколько порядков превышает вероятность аналогичного перехода в свободном ($\mathcal{H} = 0$) атоме водорода: $w_0 = 6,27 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$.

В дипольном приближении угловое распределение вылетающих фотонов имеет вид

$$w(\theta) \propto [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_{fi}]^2 \sim \sin^2 \theta, \quad (6.8)$$

где θ — угол между магнитным полем и импульсом фотона \mathbf{k} (в частности, фотоны не испускаются вдоль магнитного поля \mathbf{B}). Можно показать (замечание М.И. Высоцкого), что эти фотоны имеют 100%-ную линейную поляризацию в плоскости (\mathbf{k}, \mathbf{B}) .

Подробное численное исследование вероятностей радиационных переходов можно найти в [16] и цитированных там работах.

7. Релятивистские эффекты¹⁴

Как отмечено в разделе 3, в полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс поперечное движение электрона становится релятивистским и для решения задачи следует использовать уравнение Дирака.

Прежде всего обратим внимание на следующее свойство связанных состояний в этом случае. Имеется широкая область сильных магнитных полей, $B \gtrsim B_{\text{cr}} \sim 10^{14}$ Гс, в которой по-прежнему применимо адиабати-

¹⁴ В разделах 7, 8 используются релятивистские единицы $\hbar = 1, c = 1$; при этом $e^2 = \alpha = 1/137$.

ческое приближение и переменные поперечного и продольного движений разделяются. При этом поперечное движение электрона является релятивистским (и может быть даже ультрарелятивистским), в то время как продольное движение сохраняет нерелятивистский характер и может быть исследовано в рамках подхода, изложенного в разделах 2 и 3. Это наглядно видно на примере связанных LLL-состояний, возникающих из основного уровня Ландау поперечного движения электрона под действием кулоновского потенциала.

Гамильтониан Дирака для электрона в рассматриваемой задаче имеет вид [30]

$$\hat{H}_D = \alpha \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) + \beta m_e + U(r), \quad (7.1)$$

где $U(r) = -e\varphi(r)$ — центральный электростатический потенциал. Из уравнения Дирака $\hat{H}_D \Psi_\varepsilon = \varepsilon \Psi_\varepsilon$ для биспинора

$$\Psi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varphi_D(\mathbf{r}) \\ \chi_D(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

имеем уравнения для двухкомпонентных спиноров:

$$\sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \chi_D = (\varepsilon - m_e - U(r)) \varphi_D, \quad (7.2')$$

$$\sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \varphi_D = (\varepsilon + m_e - U(r)) \chi_D, \quad (7.2'')$$

ε — собственное значение энергии для уравнения Дирака (ε включает энергию покоя m_e).

Характерные значения магнитного поля равны

$$B_a = m_e^2 e^3, \quad B_{cr} = \frac{m_e^2}{e}, \quad B_\infty = 3\pi\alpha^{-1} B_{cr} = 5,70 \times 10^{16} \text{ Гс}. \quad (7.3)$$

В пренебрежении потенциалом $U(r)$ из уравнений (7.2) следует уравнение

$$\frac{1}{2m_e} \left(\hat{\sigma} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \right)^2 \varphi_D = \frac{1}{2m_e} [\varepsilon^2 - m_e^2] \varphi_D \quad (7.4)$$

и аналогичное уравнение для спинора χ_D (уравнения одинакового вида, но для разных спиноров; связь между спинорами даётся уравнениями (7.2)). Уравнение (7.4) совпадает с уравнением Паули для нерелятивистского электрона при замене нерелятивистской энергии E на $(\varepsilon^2 - m_e^2)/2m_e$. Отсюда сразу следует известный спектр релятивистского электрона в однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_p m \sigma_z p_z} &= \sqrt{m_e^2 + 2m_e \left(\hbar \omega_H N + \frac{1}{2m_e} p_z^2 \right)} = \\ &= \sqrt{m_e^2 \left(1 + \frac{2NB}{B_{cr}} \right) + p_z^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

(см. формулы (2.5) и (2.6) с $U \equiv 0$ и с кинетической энергией $p_z^2/2m_e$ свободного продольного движения), где значения N даются формулой (2.5) и поперечная часть φ_D совпадает с нерелятивистским спинором в формулах (2.3) и (2.4).

Согласно (7.5) нижняя граница спектра ($N = 0$, $p_z = 0$) совпадает с энергией покоя электрона (при этом $n_p = 0$, $m = 0, -1, -2, \dots$, $\sigma_z = -1$; LLL-состояния). Отсюда в первом порядке теории возмущений по потенциалу

$U(r) = -e^2/r$ следует формула для спектра LLL-состояний, совпадающая с нерелятивистской формулой (3.7). Действительно, как видно из (7.2'), в этом случае спинор χ_D мал по сравнению с φ_D и, опуская в (7.2'') потенциал $U(r)$, получаем

$$\chi_D \approx \frac{1}{2m_e} \sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \varphi_D. \quad (7.6)$$

Подставляя это выражение в (7.2'), приходим к уравнению Паули с энергией $E = \varepsilon - m_e$ и к прежнему уравнению (3.7) для спектра нерелятивистских LLL-состояний:

$$\varepsilon_{n_p=0, m, \sigma_z=-1} = m_e - \frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2 = m_e \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 \right). \quad (7.7)$$

Отсюда видно, что релятивистские поправки к формуле (3.7) чрезвычайно малы вплоть до значений поля B , намного превышающих B_{cr} (см. табл. 1). Это объясняется тем, что

$$\frac{|U_{\text{eff}}(0)|}{m_e c^2} = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{B}{B_{cr}}}, \quad (7.8)$$

поэтому при $B < 5 \times 10^{17}$ глубина потенциальной ямы в U_{eff} меньше, чем $m_e c^2$. При этом поперечные размеры атома водорода a_H сокращаются до комптоновской длины λ_C при $\mathcal{H} = \alpha^{-2}$ (или $B = B_{cr}$) и до радиуса протона $r_p \approx 10^{-13}$ см при $\mathcal{H} \sim (a_H/r_p)^2 \sim 10^{10}$, т.е. $B \sim 10^{19}$ Гс.

Таким образом, в полях $B \lesssim 10^{18}$ Гс ещё можно не учитывать конечные размеры ядра.

8. Эффекты квантовой электродинамики

Рассмотрим теперь, как влияют сверхсильные магнитные поля $B \gtrsim B_\infty = 5,7 \times 10^{16}$ Гс на положения атомных уровней.

Недавно был замечен интересный эффект действия таких полей на атомные спектры: в них возникает искажение (экранировка) кулоновского потенциала точечного заряда из-за поляризации вакуума сильным магнитным полем, приводящее к замедлению углубления уровня с увеличением магнитного поля и к "замерзанию" положений уровней при $B \rightarrow \infty$ на конечных предельных значениях $E_\infty = -\lambda_\infty^2/2$.

Этот неожиданный эффект впервые заметили Шабат и Усов [42, 43], затем он был рассмотрен Высоцким, Маше и Годуновым [33–35, 44]. Результаты этих авторов качественно близки, однако различаются деталями и численными оценками. Так, например, в случае основного уровня атома водорода согласно [42, 43] имеем $E_\infty = -4,0$ кэВ, а в [34] получено значение $E_\infty = -1,7$ кэВ. Причины этого расхождения разъясняются в разделе 4.2 работы [34]. В дальнейшем мы следуем работам [34, 35].

С учётом экранировки эффективный кулоновский потенциал (2.7) для состояний с $n_p = 0$ принимает вид (см. [34], ур. (52))

$$\tilde{U}_{\text{eff}}(z) = U_{\text{eff}} + \delta U_{\text{eff}}, \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{eff}}(z) &= e^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} R_{0m}^2(\rho) \times \\ &\times \left[\exp(-\mu|z|) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu|z|) \right] \rho d\rho, \end{aligned}$$

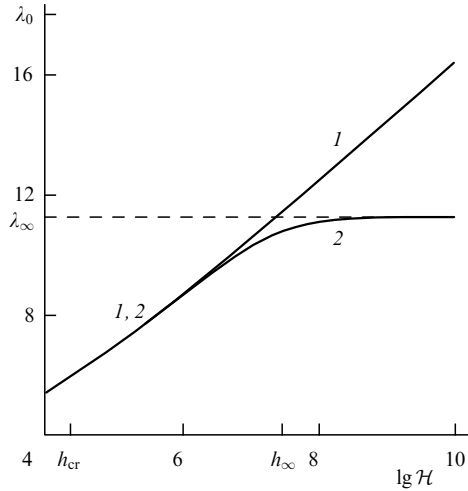


Рис. 5. Зависимость $\lambda_0(\mathcal{H})$ для основного уровня в области сверх- сильных магнитных полей без учёта (1) и с учётом (2) поляризации вакуума; предельное значение $\lambda_\infty = 11,2$ ($E_\infty = -1,71$ кэВ). На оси абсцисс отмечены значения $h_{cr} = \lg(B_{cr}/B_a)$ и $h_\infty = \lg \mathcal{H}_\infty$.

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $U_{eff}(z)$ описывается прежним выражением (2.7),

$$\mu = \sqrt{6} m_e, \quad b = \frac{\alpha^3}{3\pi} \mathcal{H} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_\infty}, \quad \mathcal{H}_\infty = 2,423 \times 10^7 \quad (8.2)$$

(или $b = B/B_\infty$, где $B_\infty = 3\pi\alpha^{-1}B_{cr} \sim 10^{17}$ Гс). Согласно (8.1), $\delta U_{eff}(z) > 0$, поэтому при учёте экранировки уровни сдвигаются вверх.

Отметим следующие свойства потенциала $\delta U_{eff}(z)$. Благодаря разности экспонент в (8.1) экранировка потенциала наиболее существенна при $|z| \sim 1/\mu$ (на больших расстояниях она экспоненциально мала). С другой стороны, в интеграле по ρ существенно расстояние $\rho \sim a_H$. Поэтому в случае $1/\mu \gg a_H$, т.е. при $\mathcal{H} \gg \alpha^{-2} \sim 10^4$, в (8.1) под радикалом можно опустить ρ^2 и получить¹⁵

$$\delta U_{eff}(z) \approx \frac{e^2}{|z|} \left[\exp(-\mu|z|) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu|z|) \right]. \quad (8.3)$$

Экранировка потенциала приводит к изменению логарифмической производной в формуле (3.3), равному согласно (3.1) (в атомных единицах)

$$\delta \left(\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \right) \approx 2 \int_0^z \delta U_{eff}(z) dz \quad (z \gtrsim L) \\ \approx 2 \int_0^\infty \frac{e^2}{z} \left[\exp(-\mu z) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu z) \right] dz, \quad (8.4)$$

которое в области сшивания логарифмических производных, выполненного в разделе 3, не зависит от z . Отсюда имеем

$$\delta \left(\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \right) = -2 \ln \mu + 2 \ln(\mu\sqrt{1+b}) = \\ = \ln \left(1 + \frac{\alpha^3}{3\pi} \mathcal{H} \right), \quad z \sim L. \quad (8.5)$$

¹⁵ В полях $\mathcal{H} \lesssim 10^4$ это выражение не выполняется. Однако экранировка потенциала существенна лишь в полях $\mathcal{H} \gtrsim 10^7$.

Таблица 7. "Замерзание" атомных уровней при учёте поляризации вакуума

LLL-состояния, $n_p = 0, m \leq 0$			Возбуждённые уровни, $n_p = m = 0, n = 1, 2, \dots$		
m	λ_∞	ε_∞ , кэВ	n	λ_∞	$\varepsilon_\infty^{(n)}$, эВ
0	11,21	1,71	1	0,877	10,7
-1	10,39	1,47	2	0,470	3,00
-2	9,986	1,36	3	0,320	1,39
-3	9,718	1,28	4	0,242	0,798
-4	9,518	1,23	5	0,195	0,517
-5	9,359	1,19	10	0,0985	0,132

Примечание. Приведены предельные (при $B \rightarrow \infty$) значения λ_∞ и энергии связи ε_∞ для уровней атома водорода с учётом экранировки потенциала; расчёты для LLL-состояний выполнены по формуле (8.8) (без учёта релятивистских поправок).

Поэтому экранировка потенциала сводится к добавлению к логарифмической производной (3.3) этого слагаемого, т.е. к замене в ней

$$\mathcal{H} \rightarrow \frac{\mathcal{H}}{1 + (\alpha^3/3\pi)\mathcal{H}}. \quad (8.6)$$

В результате уравнение для спектра чётных уровней принимает вид [34, 35] (ср. с (3.7))

$$\ln \left(\frac{\mathcal{H}}{1 + \mathcal{H}/\mathcal{H}_\infty} \right) = \lambda + 2 \left[\ln(2\lambda) + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] + 4\gamma + A_{0m}, \quad (8.7)$$

где $\alpha = 1/137$, $n_p = 0$ и $A_{0m} = -\ln 2 + \psi(1 + |m|)$.

Из (8.7) следует, что в полях $\mathcal{H} \ll \mathcal{H}_\infty$ влияние поляризации вакуума пренебрежимо мало. С увеличением поля, при $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_\infty$, поляризация приводит к замедлению углубления уровней и к их "замерзанию" в полях $\mathcal{H} \gg \mathcal{H}_\infty$ [35] (см. рис. 5 для основного уровня, на котором хорошо виден эффект "замерзания" энергии уровня при $B \rightarrow \infty$).

Предельные значения $\lambda = \lambda_\infty$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ следуют из уравнения (8.7):

$$\lambda_\infty + 2 \left[\ln(2\lambda_\infty) + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda_\infty} \right) \right] = \ln \mathcal{H}_\infty - 4\gamma - A_{0m}. \quad (8.8)$$

Значения λ_∞ и предельные энергии связи ε_∞ для ряда глубоких (в атомных масштабах) LLL-уровней и примыкающих к ним возбуждённых уровней, входящих в "башню" [33–35] состояний с $n = 1, 2, 3, \dots$ и данным магнитным квантовым числом $m \leq 0$, приведены в табл. 7.

В работе [35] был выполнен численный расчёт спектра на основе уравнения Дирака, усреднённого по поперечному движению электрона. Кроме того, был использован приём, предложенный в теории критического заряда ядра [45–50] (относительно Z_{cr} см. приложение А), с помощью которого уравнения Дирака для двухкомпонентных спиноров сводятся к уравнению второго порядка типа уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} + 2m_e [E - V(z)] \chi = 0, \quad E = \frac{\varepsilon^2 - m_e^2}{2m_e} = -\frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2. \quad (8.9)$$

В этом уравнении потенциал $V(z)$ выражается через \bar{U} (или \bar{U}) в явном, хотя и в несколько громоздком, виде

[45–47]:

$$V = \frac{\varepsilon}{m_e} U - \frac{1}{2m_e} U^2 + \frac{U_{zz}}{4m_e(\varepsilon + m_e - U)} + \frac{3}{8} \frac{U_z^2}{m_e(\varepsilon + m_e - U)^2}, \quad (8.10)$$

где $U_z = dU/dz$ и т.д.

Сравним точность асимптотических формул (3.7) и (8.7) с результатами численных расчётов [35], основанных, в частности, на решении уравнения Дирака с учётом экранировки кулоновского потенциала в сильном магнитном поле (см. табл. 1). Как видно, уже в полях $B/B_{cr} \approx 10^{-2}$ (при этом $a_H \approx 0,1a_B$) погрешность формулы (3.7) порядка одного процента и быстро убывает с увеличением B вплоть до значений $B \approx 10^2 B_{cr} \approx 4 \times 10^{15}$ Гс, которые превышают максимальные магнитные поля, известные из астрофизики (см. приложение Б). В этой области магнитных полей влиянием экранировки кулоновского потенциала на положение атомных уровней можно пренебречь. Однако она становится существенной при дальнейшем увеличении магнитного поля. В этом случае вместо (3.7) следует использовать формулу (8.7), которая при $B \gtrsim 10^5 B_{cr}$ приводит к "замерзанию" атомного спектра в согласии с уравнением Дирака \bar{D} (см. табл. 1). При этом $\lambda_0 = 11,2$ согласно (8.7) и $\lambda_0 = 11,3$ из уравнения Дирака \bar{D} .

До сих пор мы пренебрегали аномальным магнитным моментом электрона $\Delta\mu$, возникающим вследствие радиационных поправок в КЭД [30], однако при $B \gtrsim B_{cr}$ его вклад становится существенным. В столь сильных полях магнитный момент сам зависит от поля; так, в первом порядке по α [51, 52]

$$\Delta\mu(B) = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_B \begin{cases} 1 + \frac{8}{3} L \ln L, & L \ll 1, \\ -L^{-1} \ln^2 L, & L \gg 1, \end{cases} \quad (8.11)$$

где $L = B/B_{cr} = \alpha^2 \mathcal{H}$ и $\mu_B = |e\hbar/2m_e c|$ — магнетон Бора. Значение $\Delta\mu/\mu_B = \alpha/2\pi$ при $B \rightarrow 0$ было получено Швингером [30], с ростом B аномальный магнитный момент электрона меняет знак [51, 52].

Энергия основного уровня Ландау при $B \gg B_{cr}$ равна

$$E_0 = m_e + \frac{1}{2} \omega_H + (\mu_B + \Delta\mu)B - \frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2 = m_e + \left(\frac{1}{2\pi\alpha} \ln^2 L - \lambda^2 \right) \frac{m_e e^4}{2}, \quad L \gg 1. \quad (8.12)$$

В случае "дираковского" электрона, т.е. при $\Delta\mu \equiv 0$, для LLL-состояний ($N = 0$, $\sigma_z = -1$) энергия нулевых колебаний в плоскости (x, y) полностью сокращается с магнитной энергией спина,

$$\frac{\omega_H}{2} = \mu_B B = \frac{1}{2} \frac{m_e L}{2}, \quad (8.13)$$

но аномальный магнитный момент приводит к сдвигу энергии $\Delta E_0 = -\Delta\mu B$, универсальному для всех атомных уровней. При $L \gg 1$ вклад в (8.12) от аномального момента $\Delta\mu$ растёт пропорционально $\ln^2 L$ и сравнивается с энергией связи уровня при $\ln L = \sqrt{2\pi\alpha} \lambda$ или ¹⁶

$$L = L_*,$$

$$L_* = \exp \frac{2 \ln(1/\alpha)}{(2\pi\alpha)^{-1/2} - 1} \approx 15. \quad (8.14)$$

При $L > L_*$, т.е. $B \gtrsim 10^{15}$ Гс, сдвиг уровня превышает его энергию связи λ^2 . Однако этот сдвиг определяется КЭД, а не атомной физикой, он одинаков для всех уровней атомного спектра и не входит в разности энергий. Поэтому энергии радиационных переходов $n\rho \rightarrow 1s$ в атоме водорода, которые могли бы наблюдаться экспериментально, при учёте $\Delta\mu$ практически не меняются.

9. Об эффекте Зельдовича в атомных спектрах

В статье Зельдовича "Уровни энергии в искажённом кулоновском поле" [53] (см. также [54]) был рассмотрен вопрос об уровнях энергии валентного электрона в примесном полупроводнике с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \gg 1$ и указан своеобразный физический эффект, который может наблюдаться в тех случаях, когда потенциал взаимодействия разделяется на две части с сильно несоизмеримыми радиусами: $V(r) = V_{sh} + U_L$. При тех значениях константы связи ($g = g_0$), при которых в короткодействующем ("сильном") потенциале $V_{sh}(r) = -g(\hbar^2/2mr_0^2) v(r/r_0)$ возникает связанный s-уровень (или имеется резонанс в рассеянии частиц малой энергии, т.е. реальный или виртуальный уровень с угловым моментом $l = 0$ и энергией, близкой к нулю), при небольшом изменении g происходит резкое изменение атомного спектра: кулоновские уровни E_{ns} с $n = 1, 2, \dots$ опускаются на место $E_{(n-1),s}$, а основной уровень E_{1s} "проваливается" глубоко вниз (в атомном масштабе). При этом относительная ширина области перестройки (по константе g сильного потенциала) составляет $\Delta g/g_0 \sim r_0/a_B \ll 1$, где r_0 — радиус действия сил для потенциала $V_{sh}(r)$, $r_0 \ll a_B$.

В дальнейшем этот эффект был переоткрыт в релятивистской кулоновской задаче с зарядом $Z > 137$ [55], в теории легких адронных атомов ("перестройка" атомного спектра [39, 40, 56, 57]) и получил название эффекта Зельдовича [58–60]. В этих работах использовались конкретные модели "сильного" потенциала $V_{sh}(r)$: прямоугольная яма [53], параболический потенциал, соответствующий постоянной плотности заряда протонов внутри ядра [55] и сепарабельные потенциалы конечного ранга [56].

В работе [57] получено безмодельное уравнение, описывающее эффект Зельдовича для s-состояний:

$$F(\lambda) \equiv \lambda + 2[\ln \lambda + \psi(1 - \lambda^{-1})] = \frac{a_B}{a_{cs}}. \quad (9.1)$$

Здесь $l = 0$, $a_B = \hbar^2/m_e e^2$, a_{cs} — перенормированная кулоновским взаимодействием длина s-рассеяния для короткодействующего потенциала. Параметр a_B/a_{cs} определяет не только спектр связанных состояний в искажённом кулоновском потенциале, но и изменение кулоновской фазы s-рассеяния в радиальной функции

$$\chi_0(r) \approx \sin \left[kr + \frac{1}{ka_B} \ln(2kr) + \delta_0^{\text{Coul}}(k) + \delta_0(k) \right], \quad (9.2)$$

$$\delta_0^{\text{Coul}}(k) = \arg \Gamma \left(1 - \frac{i}{ka_B} \right), \quad r \rightarrow \infty,$$

¹⁶ Здесь мы положили для оценки $\lambda \approx \ln \mathcal{H} = \ln L - 2 \ln \alpha$.

в случае медленных частиц, $kr_0 \ll 1$. В частности,

$$\delta_0(k) \approx -\operatorname{arccot} \frac{a_B}{2\pi a_{cs}}, \quad k \rightarrow 0. \quad (9.3)$$

Уравнение (3.7) совпадает с уравнением (9.1) при длине рассеяния

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = (\ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_{p,m}})^{-1} a_B, \quad (9.4)$$

или

$$\frac{1}{a_{cs}(\mathcal{H})} = (\ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_{p,m}}) a_B^{-1}. \quad (9.5)$$

Заметим, что аналогия между расположением уровней для этих двух задач (атом водорода при $B \gg B_a$, $a_H \ll a_B$ и кулоновская задача с короткодействием при $r_0 \ll a_B$) впервые была отмечена, по-видимому, в [22–24]. Для состояний с $n_p = 0$

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = [\ln \mathcal{H} - 4\gamma - \ln 2 - \psi(1 + |m|)]^{-1} a_B, \quad (9.6)$$

при этом роль радиуса обрезания r_0 кулоновского потенциала на малых расстояниях играет величина $a_H = a_B/\sqrt{\mathcal{H}}$.

В работе [57] показано, что подходящими переменными для описания сдвигов кулоновских ns -уровней в эффекте Зельдовича для атома водорода являются эффективное главное квантовое число n^* и связанная с ним поправка Ридберга A_n , известные из атомной физики [6] ($\hbar = m_e = e = 1$):

$$E_{ns} = -\frac{1}{2} \lambda_n^2 \equiv -\frac{1}{2(n^*)^2} = -\frac{1}{2(n + A_n)^2}, \quad (9.7)$$

или $n^* = \frac{1}{\lambda_n} = n + A_n$.

При этом, независимо от характера искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях, для возбуждённых уровней $A_n \approx \text{const}$ слабо зависит от n . Условиями применимости уравнения (9.1) являются следующие: $r_0 \ll a_B$ и $\lambda r_0 \ll 1$ при любом значении длины рассеяния a_{cs} . В задаче, рассмотренной Зельдовичем [53], это условие обеспечивается тем, что радиус Бора $a_B = \varepsilon(m_e/m_{\text{eff}}) \gg r_0$, где m_e — масса электрона, $m_{\text{eff}} \ll m_e$ — его эффективная масса в решётке, а r_0 (радиус иона) порядка a_B .

Обсудим основные закономерности сдвигов уровней, следующие из уравнения (9.1), когда длина рассеяния $a_{cs}(\mathcal{H})$ даётся формулой (9.6) с $m = 0$, и отметим особенности влияния искажения кулоновского потенциала по сравнению со случаем произвольного сильного короткодействующего потенциала. Приведём таблицу, в которой представлена связь численных значений магнитного поля и длины рассеяния:

\mathcal{H}	10	11,25	$\mathcal{H}^* \approx 11,30$	11,33	20	100	10^4	10^6
a_{cs}/a_B	-8,1773	-224	∞	339	1,7514	0,4587	0,1474	0,0878

(9.8)

$a_{cs}(\mathcal{H}^*) = \infty$, $\ln \mathcal{H}^* = 3\gamma + \ln 2 = 2,4248$. При этом длина рассеяния (9.6) может быть записана в виде

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\ln(\mathcal{H}/\mathcal{H}^*)} a_B. \quad (9.9)$$

Отсюда видна её резкая зависимость от \mathcal{H} вблизи \mathcal{H}^* : $a_{cs}(\mathcal{H}) \approx [\mathcal{H}^*/(\mathcal{H} - \mathcal{H}^*)] a_B$, а также и медленное убывание при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$: $a_{cs}(\mathcal{H}) \propto 1/\ln \mathcal{H}$.

Начнём с наиболее яркого проявления эффекта Зельдовича, когда длина рассеяния $a_{cs} = \infty$. В представленной ниже таблице приведены значения поправок Ридберга в этом (резонансном) случае:

Уровень	1s	2s	3s	4s	5s	∞s
A_n	0,4696	0,4964	0,4987	0,4993	0,4996	0,5

(9.10)

Как видно, в области невозмущённого кулоновского спектра, $E_n^{(0)} = -1/2n^2$, в терминах n^* происходит максимальный сдвиг уровней: они расположены посередине между соседними уровнями с квантовыми числами n и $n + 1$, для них $A_n \approx 0,5$. Интересно, что в этом случае для сдвига основного ("глубокого") 1s-уровня также $A_{1s} \approx 0,5$, для него $\lambda_{1s}^2 = 4,535$, т.е. он тоже находится вблизи невозмущённого кулоновского спектра, как это подчёркивалось Зельдовичем. Наконец, именно в этом случае согласно (9.3) происходит наиболее сильное искажение кулоновской фазы s -рассеяния: $\delta_0(0) = \pm\pi/2$.

С уменьшением значения a_{cs} (при увеличении поля \mathcal{H}) уровни понижаются. При этом в случае $\ln \mathcal{H} \gg 1$ основной уровень "проваливается" глубоко вниз (для него $\lambda_{1s} \approx \ln \mathcal{H}$), а атомные уровни $\lambda_n(\mathcal{H})$ с $n \geq 2$ приближаются к нижним соседним кулоновским уровням $(n - 1)$ с одинаковыми значениями $A_n \rightarrow 0$.

Это наглядно видно в случае малых длин рассеяния, $a_{cs} \ll a_B$, и, соответственно, больших значений правой части уравнения (9.1). Как уже отмечалось, функция $\psi(1 - 1/\lambda)$ в области кулоновского спектра, $\lambda \leq 1$, имеет полюсы в точках $\lambda_n = n$ с $n = 1, 2, \dots$ (невозмущённый спектр при $a_{cs} = 0$). Используя в (9.1) формулу

$$\psi\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + \pi \cot \frac{\pi}{z} \quad (9.11)$$

и полагая в ней $z = 1/\lambda_n = n^* = n + A_n$, получаем

$$A_n \approx 2a_{cs} = \text{const}, \quad |a_{cs}| \ll 1. \quad (9.12)$$

Согласно формулам (9.7) и (9.12), для сдвинутых кулоновских ns -уровней имеем

$$E_{ns} = -\frac{1}{2(n + A)^2} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{A}{n^3} + \dots, \quad (9.13)$$

и если учесть, что для невозмущённых кулоновских функций ns -состояний [6] $\psi_{ns}(0) = 1/\sqrt{\pi n^3}$, то для сдвига уровней получаем

$$E_{ns} - E_n^{(0)} \approx \frac{A}{n^3} = 2\pi\psi_{ns}^2(0)a_{cs}. \quad (9.14)$$

Как отметил Зельдович [53], хотя в этом случае теория возмущений по искажающему сильному короткодействующему потенциалу в области $r \sim r_0 \ll a_B$ неприменима, тем не менее сдвиг уровня пропорционален плотности вероятности нахождения электрона в этой области в невозмущённом состоянии $\psi_{ns}^2(0)$. В связи с этим напомним, что сдвиг ns -уровней под действием слабого короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ в первом

порядке теории возмущений равен [6]

$$\begin{aligned} \Delta E_{ns} &= \int V_{sh}(r) \psi_{ns}^2(r) d^3r \approx \psi_{ns}^2(0) \int V_{sh}(r) d^3r = \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{m} \psi_{ns}^2(0) \tilde{a}_B, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где

$$\tilde{a}_B = -f_B(E=0) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V_{sh}(r) d^3r. \quad (9.16)$$

Здесь \tilde{a}_B и $f_B(E=0)$ — длина рассеяния и амплитуда рассеяния с энергией $E=0$ в борновском приближении [6].

В работе Зельдовича дано обоснование обобщения формулы теории возмущений (9.15) на нерезонансный случай (9.14) короткодействующего искажения кулоновского потенциала, состоящего в замене борновской длины s-рассеяния \tilde{a}_B на точное значение a_{cs} (не использующее её вычисление по теории возмущений) (см. также [61–63]).

Формулу (9.14) называют *теорией возмущения по длине рассеяния*. Она применима и в тех случаях, когда с короткодействующим искажением потенциала связана возможность протекания неупругих процессов: например, аннигиляция в рр-адронном атоме в пионы или аннигиляция позитрония e^-e^+ в два или три γ -кванта. В этих случаях длина рассеяния a_{cs} и сдвиг уровня ΔE являются комплексными величинами, а соответствующие состояния являются квазистационарными с временем жизни, равным $\tau = \hbar/\Gamma$, $\Gamma = -2\text{Im}(\Delta E)$. При этом формула (9.14) позволяет связать время жизни состояния с поведением соответствующего неупругого сечения (аннигиляции) в пределе малых энергий, $kr_0 \ll 1$ (см. её применения в [36]).

В таблице 5 приведены поправки Ридберга $\Delta_{nl} \equiv \Delta_n^\pm$ для спектра атома водорода в сверхсильном магнитном поле, полученные из численных расчётов энергий связи уровней [13–16]. Здесь надо сделать уточнение, связанное с используемой в [13] классификацией состояний атома в магнитном поле в терминах состояний nl (2s, 3d, 2p и т.д.) невозмущённого атома водорода вместо соответствующих обозначений их как n^\pm с $n=1, 2, \dots$ для чётных и нечётных состояний в присутствии магнитного поля ($1^+ \equiv 1s$ — глубокий уровень) (см. замечание по этому вопросу в разделе 4). Поэтому для энергии уровня вместо (9.7) имеем¹⁷

$$n^* = \frac{1}{\lambda_{nl}} = n - 1 + \Delta_n, \quad (9.17)$$

т.е. значение n сдвинуто на 1.

Как видно из табл. 5 и (9.8), даже в полях $\mathcal{H} \approx 10$ формула (9.1) с длиной рассеяния (9.5) (для чётных состояний) правильно отражает проявление эффекта Зельдовича в рассматриваемой задаче (хотя в этом случае радиус обрезания кулоновского потенциала, $r_0 \approx 0,3 a_B$, не так уж мал).

¹⁷ На рисунке 6 представлено графическое решение уравнения (9.1), на котором отмечены положения основного 1s и серии кулоновских уровней 2s, 3s, 4s, ..., сдвинутых из-за искажения кулоновского потенциала. Из рисунка видно, что при наличии эффекта Зельдовича спектр атомных уровней обладает, с хорошей точностью, периодичностью по переменной n^* .

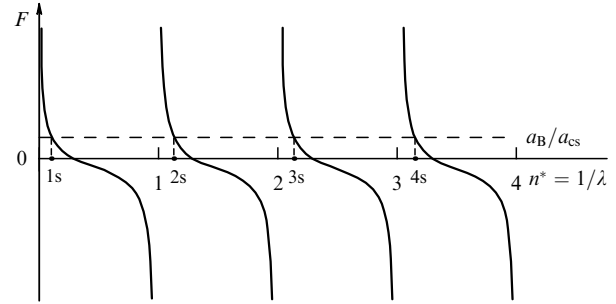


Рис. 6. Эффект Зельдовича. Возмущение атомного спектра близким к нему резонансным ("квазизядерным" [46–48]) уровнем. Использован рис. 1 из работы [57].

С другой стороны, может показаться странным, что при значительном увеличении поля, до значений $\mathcal{H} \sim 10^6$, когда радиус обрезания кулоновского потенциала $r_0 \sim a_B/\sqrt{\mathcal{H}} \sim 10^{-3} a_B$, длина рассеяния a_{cs} и поправки Ридберга Δ_n для возбуждённых чётных состояний (слабо зависящие от n) уменьшаются очень медленно, вплоть до значений $\Delta_n \approx 0,16$. В то же время поправка Ридберга для основного 1s-уровня отличается от них уже существенно, в полтора раза (ср. с резонансным случаем \mathcal{H}^* , рассмотренным выше). В этом случае формула теории возмущений по длине рассеяния (9.14) описывает сдвиги уровней лишь качественно. Так, при $\mathcal{H} = 10^6$ согласно табл. 5 $\Delta_n = 0,160$, а согласно (9.8) и формуле (9.12) $\Delta_n = 0,176$ (конечно, при дальнейшем увеличении поля эти значения сближаются и обращаются в нуль).

Отмеченное поведение a_{cs} и Δ_n имеет простое объяснение. Дело в том, что с ростом \mathcal{H} искажение кулоновского потенциала на малых расстояниях приводит не только к увеличению глубины ямы, но и к уменьшению её ширины. В результате резонансный 1s-уровень также понижается, однако его глубина, пропорциональная $\ln^2(1/a_H)$, много меньше глубины ямы $\propto 1/a_H$, т.е. уровень по-прежнему остаётся слабосвязанным состоянием в короткодействующем потенциале¹⁸; для него

$$|E_{1s}| \ll \frac{\hbar^2}{m_e r_0^2} \quad (9.18)$$

и длина рассеяния a_{cs} много больше радиуса r_0 этого потенциала.

Существенно, что этот уровень отвечает слабосвязанному состоянию не только в искажённом потенциале $U(r) = V_{sh}(r) + U_C(r)$, но также и в изолированном короткодействующем потенциале $V_{sh}(r)$, с "выключенным" U_C . Обозначив как a_s длину s-рассеяния в потенциале V_{sh} , для a_{cs} и a_s в резонансном случае имеем

$$\frac{1}{a_{cs}(\mathcal{H})} - \frac{1}{a_s} = -\frac{2}{a_B} \left[\ln \frac{r_0(\mathcal{H})}{a_B} + O(1) \right]. \quad (9.19)$$

Это — формула Швингера [64] для перенормировки длины s-рассеяния a_s в короткодействующем потенциале $V_{sh}(r)$ кулоновским потенциалом притяжения. Отметим, что её вывод с логарифмической точностью

¹⁸ Поэтому естественная оценка $a_{cs} \sim r_0$ для нерезонансного случая сильного искажения кулоновского потенциала в рассматриваемой задаче в полях $\mathcal{H} \sim 10^6$ ещё не реализуется.

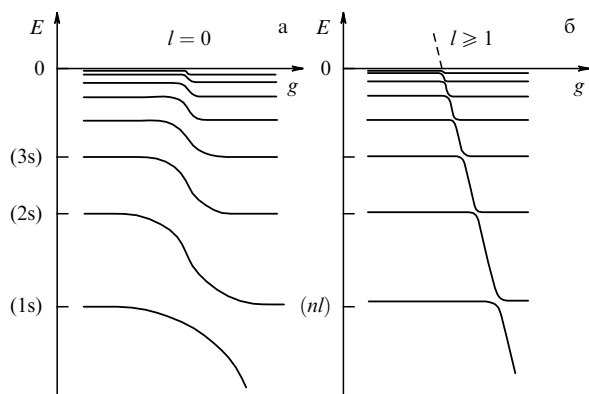


Рис. 7. Перестройка атомного спектра: (а) для s-уровней, (б) при $l \neq 0$.

основан на учёте кулоновского потенциала в области действия короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ по теории возмущений (см. приложение В о длинах рассеяния a_s и a_{cs} в резонансном случае ($E_l \rightarrow 0$, $g \approx g_l$)).

Применение формулы (9.19) в рассматриваемой задаче особенно эффективно по той причине, что известна зависимость $r_0(\mathcal{H}) \propto 1/\sqrt{\mathcal{H}}$. Поэтому, применив (9.19) к значениям поля \mathcal{H} и \mathcal{H}^* , можно исключить невычисляемые константы в этой формуле и получить результат (9.9) для длины рассеяния a_{cs} . В частности, при $\ln \mathcal{H} \gg \ln \mathcal{H}^*$ из (9.19) следует $a_{cs} \approx a_B / \ln \mathcal{H}$ — результат (9.14) теории возмущений по длине рассеяния.

Уравнение (9.1) можно обобщить на состояния с произвольным угловым моментом $l \neq 0$ [65, 66]. В этом случае влияние короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ на состояния в дальнедействующем потенциале U_L не может быть учтено наложением на волновую функцию граничного условия при $r \rightarrow 0$, как это было в случае s-состояний согласно (2.9) и (3.1) (когда дальнедействующий потенциал имел кулоновскую особенность в нуле). Это связано с тем, что общее решение радиального уравнения Шрёдингера при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$R_l(r) = c_1 r^l + c_2 r^{-l-1}$$

и при $l \geq 1$ сингулярное решение должно быть опущено ввиду его квадратичной неинтегрируемости. Обобщение метода потенциалов нулевого радиуса действия [31, 32] на случай $l \neq 0$ дано в работах [67, 68].

Приведём рис. 7, который иллюстрирует различие в проявлении эффекта Зельдовича в случаях s-состояний ($l = 0$) и при орбитальном моменте $l \geq 1$. На оси абсцисс указаны значения константы связи g в короткодействующем потенциале $V_{sh}(r) = -(g/2r_0^2) v(r/r_0)$, определяющей положение резонансного уровня, когда он находится в атомной области; на оси ординат отмечены положения невозмущённых кулоновских уровней $E_{nl}^{(0)} = -1/2n^2$ с соответствующими значениями момента l (для нижнего $n = l + 1$). В резонансном случае все возбуждённые ns -уровни¹⁹ сдвинуты вниз с одинаковым значением поправки Ридберга Δ (см. табл. 5).

В случае $l \neq 0$ проявление эффекта Зельдовича носит совершенно иной характер [65, 66]. Теперь спектр состоит из слабо смещённых атомных nl -уровней и резонансного уровня в потенциале $V_{sh}(r)$. Перестройка такого спектра возникает только в том случае, когда при увеличении

константы связи g резонансный уровень сближается²⁰ с одним из атомных уровней. При этом в узкой области значений g взаимодействие уровней носит характер *кватересечения термов*.

Такое различие в проявлении эффекта Зельдовича в случаях $l = 0$ и $l \neq 0$ объясняется наличием при $l \neq 0$ малопроницаемого центробежного барьера $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$, разделяющего две области с потенциалами притяжения. В первой из них — короткодействующий потенциал $V_{sh}(r)$ с мелким резонансным уровнем, во второй — кулоновский потенциал с nl -уровнями. Пока энергии резонансного и nl -уровней не близки друг к другу, их взаимное влияние несущественно из-за малой проницаемости барьера.

10. Заключительные замечания

Рассмотрены различные подходы к исследованию энергетического спектра атома водорода в сильном магнитном поле $B \gg B_a$. Показано, что использование явного вида эффективного потенциала в адиабатическом приближении при решении уравнения Шрёдингера (или уравнения Дирака в случае $B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ Гс) приводит к простым аналитическим выражениям для спектра уровней. Подробно исследованы атомные уровни, примыкающие к нижней зоне Ландау с $n_p = 0$ и магнитными квантовыми числами $m = 0, -1, -2, \dots$. Сравнение с результатами имеющихся численных расчётов показывает, что уравнение (3.7) при $\mathcal{H} = B/B_a \gtrsim 100$ имеет процентную или ещё более высокую точность.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Имеется существенное различие между энергиями возбуждённых чётных и нечётных уровней, $E_n^\pm = -(\lambda_n^\pm)^2/2$, что качественно видно уже из асимптотических формул (без учёта поляризации вакуума):

$$\begin{aligned} \lambda_n^+ &\approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n \ln \mathcal{H}} + \dots \right), \\ \lambda_n^- &\approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2 \ln \mathcal{H}}{n \mathcal{H}} + \dots \right), \quad \mathcal{H} \gg 1, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$n = 1, 2, \dots$. Как видно, возбуждённые чётные уровни расположены значительно выше нечётных, для них соответствующие поправки Ридберга равны

$$\Delta^+ \approx \frac{2}{\ln \mathcal{H}}, \quad \Delta^- \approx \frac{2 \ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}}. \quad (10.2)$$

2. При значениях $\mathcal{H} \sim 10^3 - 10^4$ нечётные уровни уже близки к невозмущённым кулоновским значениям $E_n = -1/2n^2$, в то время как чётные ещё далеки от этого предела. Поэтому утверждение о приближённом двукратном вырождении возбуждённых чётных и нечётных уровней (см. [6] и [19]) нуждается в уточнении.

3. В разделе 3 отмечен своеобразный скейлинг в энергетическом спектре, согласно которому в адиабатическом приближении для любого уровня, $E = -\lambda^2/2$, зависимость $F(\lambda)$ (см. (3.8)) является универсальной функцией (т.е. её значение не зависит от величины магнитного поля и квантовых чисел уровня).

Как видно из рис. 1, такой скейлинг хорошо выполняется при $\lambda^2 > 12$. Интересно, что при уменьшении λ^2 , когда применимость адиабатического приближения на-

¹⁹ Уровень 1s сдвигается более резко.

²⁰ Его траектория обозначена штриховой линией.

рушается, уровни по-прежнему группируются вдоль плавной кривой, близкой к $F(\lambda)$.

4. Уравнение (3.7) для спектра уровней было получено из решения уравнения Шрёдингера. Однако в полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс поперечное движение электрона становится релятивистским. Решение уравнения Дирака с точечным зарядом ядра показало, что уравнение (3.7) для энергии связи электрона остаётся применимым и в сверхсильных полях вплоть до $B > 10^{17}$ Гс (см. табл. 1).

5. В работах [33–35, 42, 43] был замечен интересный эффект влияния сильного магнитного поля $B > 10^{16}$ Гс на спектр атома водорода, связанный с поляризацией вакуума и экранировкой кулоновского потенциала протона в таких полях.

С учётом поляризации вакуума при $B \rightarrow \infty$ энергии нижних чётных LLL-уровней с различными m не уменьшаются до $-\infty$, а стремятся к конечным предельным значениям ("замораживание" уровней), величина которых $E_{\infty}^+ = -\lambda_{\infty}^2/2$ зависит от магнитного квантового числа m и велика по сравнению с уровнями дискретного спектра невозмущённого атома водорода. Однако их энергия связи остаётся нерелятивистской и (в пренебрежении релятивистскими поправками) определяется уравнением (8.7), учитывающим экранировку эффективного кулоновского потенциала. Так, согласно [34] $\epsilon_{\infty} = \lambda_{\infty}^2 \text{ Ry} = 1,71 \text{ кэВ}$.

Аналогичным образом в случае возбуждённых чётных уровней асимптотика энергий E_n^+ при $B \rightarrow \infty$ отличается от $E_n^0 = -1/2n^2$ (см. табл. 7).

6. Обычно учёт поляризации вакуума в КЭД даёт малые поправки (например, вклад в лэмбовский сдвиг $\Delta_{\text{LS}} = 1058 \text{ МГц}$ уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода [30]). В случае сверхсильного магнитного поля $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_{\infty}$ поляризация вакуума приводит к качественному изменению спектра чётных уровней.

7. До сих пор мы полагали, что атом водорода находится в покое в статическом магнитном поле. Однако в астрофизике при движении нейтронных звёзд (обладающих магнитными полями $B \sim 10^{11} - 10^{13}$ Гс и более) сквозь облако межзвёздного газа встречаются случаи, когда надо учитывать движение атома. Вопросы о влиянии этого движения (при наличии сильного магнитного поля) на характеристики атомных спектров: энергию уровней, вероятности радиационных переходов, сечения фотоионизации и т.д. — рассматривались в литературе. Однако они лежат в стороне от основной темы нашей статьи, поэтому ограничимся указанием на работы [69–72] и содержащиеся в них дальнейшие ссылки.

8. В работе "Взаимодействие и аннигиляция антикулонов с нуклонами", выполненной в 1957 г., но неопубликованной, Л.Д. Ландау, И.Я. Померанчук и К.А. Тер-Мартirosян исследовали вопрос о спектре протон-антипротонного атома. Учитывая искажение кулоновского поля из-за сильного взаимодействия между \bar{p} и p на малых расстояниях и сшивая внутренние и внешние волновые функции в области, где уже можно пренебречь сильным взаимодействием, эти авторы получили результаты, аналогичные результатам [39, 40, 57]. Один из авторов настоящей статьи (В.П.) вспоминает с благодарностью обсуждение этих вопросов с К.А. Тер-Мартirosяном (который рассказал о работе трёх авторов и ознакомил с соответствующим манускриптом) и с Е.М. Лифшицем, сделавшими ряд полезных замечаний.

Следует, однако, иметь в виду, что во время выполнения работ [39, 40, 57] работа Ландау, Померанчука и Тер-Мартirosяна была нам неизвестна, чем и объясняется отсутствие ссылок на неё.

Авторы искренне благодарны М.И. Высоцкому и С.И. Годунову за информацию о статьях [33–35] до их опубликования и полезные замечания, Б.О. Кербику, А.Е. Кудрявцеву, В.Д. Муру, С.В. Попруженко, Ю.А. Симонову за обсуждение результатов работы. Один из авторов (В.П.) хотел бы поблагодарить также Л.С. Минкину и Д.В. Попова за поддержку и помощь во время работы над этой статьёй.

11. Приложения

А. О критическом заряде ядра

Уравнение Дирака с точечным кулоновским потенциалом притяжения

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad 0 < r < \infty, \quad (\text{A.1})$$

решается аналитически [30] и приводит к известной формуле Зоммерфельда:

$$\epsilon_{nj} = m_e \left\{ 1 + \frac{\zeta^2}{\left[n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \zeta^2} \right]^2} \right\}^{-1/2}, \quad 0 < \zeta < j + \frac{1}{2}, \quad (\text{A.2})$$

где $0 \leq \epsilon_{nj} < m_e$, $n = n_r + l + 1 = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число, а $j = l \pm 1/2 = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ — полный угловой момент уровня.

В частности, энергия ϵ_0 (включающая массу покоя m_e) основного состояния $1s_{1/2}$ равна²¹

$$\epsilon_0(Z) = m_e \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \zeta = Z\alpha = \frac{Z}{137}, \quad (\text{A.3})$$

а для $j = 1/2$ при $\zeta \rightarrow 1$

$$\epsilon_{n,1/2} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} + \frac{1}{N^3} \sqrt{1 - \zeta^2} + O(1 - \zeta^2),$$

где

$$N = \sqrt{n^2 - 2n + 1}.$$

При $Z > 137$ значения энергии ϵ_0 становятся мнимыми, что указывает на то, что дираковский гамильтониан с точечным зарядом (А.1) уже не является самосопряжённым оператором и потому физически неприемлем. Это связано с тем, что при $Z > 137$ в кулоновской задаче для уравнения Дирака возникает известное из квантовой механики "падение на центр" (см. [6, 36–38]). Как указали Померанчук и Смородинский [73, 74], возникающая трудность устраняется при учёте конечных размеров ядра.

Критическим зарядом ядра Z_{cr} в КЭД называется [45–50, 75–78] то значение Z , при котором дискретный уровень атомного спектра опускается до границы ниж-

²¹ При $\zeta \rightarrow 1$ у функции $\epsilon_0(\zeta)$ возникает особенность, причём кривая уровня (А.3) обрывается, не дойдя до границы нижнего континуума. Подобные особенности имеются для всех возбуждённых состояний.

него континуума ("море Дирака"):

$$\varepsilon_0(Z_{\text{cr}}) = -m_e c^2. \quad (\text{A.4})$$

Величина Z_{cr} зависит от радиуса ядра r_N , квантовых чисел уровня (njl) , формы распределения электрического заряда протонов по объёму ядра, степени ионизации внешних электронных оболочек атома (см. [48, 50, 77, 78]).

Приведём простые асимптотические оценки для Z_{cr} , позволяющие избежать громоздких численных расчётов. При учёте радиуса ядра $r_N > 0$ корневая особенность в формуле (A.3) исчезает и мы получаем [48, 79]:

$$\varepsilon_0(\zeta) = m_e \sqrt{1 - \zeta^2} \coth \left(A \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (\text{A.5})$$

где $A = \ln(1/m_e r_N) \gg 1$. В отличие от (A.3), формула (A.5) допускает аналитическое продолжение в область $\zeta > 1$:

$$\varepsilon_0(\zeta) = m_e g \cot(Ag), \quad g = \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \zeta > 1, \quad (\text{A.6})$$

так что, например, при $Z = 137$ имеем $\varepsilon_0(\zeta = 1) = m_e/A > 0$.

Согласно (A.6), нижний уровень $\varepsilon_0(\zeta)$ находится посередине между границами верхнего и нижнего континуумов при $Ag_0 = \pi/2$, или

$$\zeta = \zeta_0 = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4A^2}} = 1 + \frac{\pi^2}{8A^2} + \dots, \quad A \gg 1, \quad (\text{A.7})$$

(при $r_N \rightarrow 0$ отсюда получаем $\zeta_0 = 1$, в соответствии с (A.3)). Замечая, что функция (A.6) имеет полюс при $g = g_1 = \pi/A$, приходим к оценке²²

$$\zeta_{\text{cr}} = Z_{\text{cr}} \alpha = \sqrt{1 + g_1^2} \approx 1 + \frac{\pi^2}{2A^2} + \dots \quad (\text{A.8})$$

Эту формулу можно уточнить, вычислив следующий член ($\propto A^{-3}$) асимптотического разложения ζ_{cr} по степеням $1/A$. Для этого подставим (A.6) в граничное условие (A.4), что даёт $\tan(Ag)/Ag = -1/A$, откуда следует $g = \pi/(A+1) + O(A^{-3})$,

$$\zeta_{\text{cr}}(1s_{1/2}) = 1 + \frac{\pi^2}{2A(A+2)} + O(A^{-4}), \quad n = 1, \quad (\text{A.9})$$

и для возбуждённых ns -уровней [79]:

$$\zeta_{\text{cr}}(ns_{1/2}) = 1 + \frac{n^2 \pi^2}{2A(A+2n)} + \dots \quad (\text{A.10})$$

Аналогичным образом в случае $2p_{1/2}$ -уровня имеем

$$\varepsilon_{2p} = m_e \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}{2}} \xrightarrow{(\zeta > 1)} \frac{m_e}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} g \cot(Ag) + \dots \right), \quad (\text{A.11})$$

откуда $g \cot(Ag) = -2(1 + \sqrt{2})$, или

$$\zeta_{\text{cr}}(2p_{1/2}) = 1 + \frac{\pi^2}{2A(A + \sqrt{2} - 1)} + O(A^{-4}) \quad (\text{A.12})$$

²² Хотя эта формула качественно передаёт зависимость Z_{cr} от радиуса обрезания кулоновского поля, точность её невысока. Так, при $r_N = 10$ Фм ($A = 3,653$) из (A.8) получаем $Z_{\text{cr}} \approx 190$, в то время как уточнённая асимптотика (A.9) даёт $\zeta_{\text{cr}} = 1,24$ и $Z_{\text{cr}} = 170$, что уже близко к точному численному значению (для основного уровня).

Таблица 8. Критический заряд сверхтяжёлого ядра для нижних уровней

Уровень	r_N , Фм	A	$Z_{\text{cr}}^{(0)}$	Z_{cr}	$Z_{\text{cr}}^{(\text{as})}$	$\zeta_{\text{cr}}/(j+1/2)$
$1s_{1/2}$	9,14	3,743	168,8	172	169	1,23
$2p_{1/2}$	9,38	3,717	181,3	184	181	1,32
$2s_{1/2}$	10,1	3,643	232	239	234	1,69
$3p_{1/2}$	10,5	3,604	254	263	—	1,85

Примечание. Радиус ядра $r_N = 1,2A^{1/3}$ Фм, $A = 2,6Z$, $A = \ln(1/m_e r_N)$, $1/m_e = 386$ Фм; $Z_{\text{cr}}^{(0)}$ — критический заряд для "голого" (полностью ободранного) ядра, Z_{cr} — с учётом экранировки кулоновского потенциала внешними электронными оболочками атома, $Z_{\text{cr}}^{(\text{as})}$ — полученный по асимптотическим формулам (A.8), (A.11). Значения $Z_{\text{cr}}^{(0)}$ и Z_{cr} взяты из численных расчётов [46, 75, 80].

(здесь считается, что $A \gg n$, поэтому асимптотики применимы только для нижних уровней; при этом они имеют неплохую точность (табл. 8), хотя параметр разложения $1/A \approx 0,25$ не так уж мал). Следующие члены этих разложений зависят не только от радиуса r_N , но и от формы обрезания кулоновского потенциала внутри ядра.

Отметим, что значения Z_{cr} слабо зависят от деталей обрезания кулоновского потенциала. Так, например, если все оболочки сверхтяжёлого атома, кроме $1s_{1/2}$, заполнены электронами, то расчёт экранировки по методу Томаса–Ферми даёт значение [80] $Z_{\text{cr}} \approx 171,5$ вместо $Z_{\text{cr}} = 170$ (см. также [77]).

Согласно (A.2) для возбуждённых состояний с $j = n - 1/2$ (максимально возможное значение j при данном n) имеем

$$\varepsilon_{n,n-1/2} = m_e \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{n^2}}, \quad 0 < \zeta < n. \quad (\text{A.13})$$

С учётом обрезания кулоновского потенциала при $r < r_N$ энергии уровней плавно продолжаются в область $\varepsilon < 0$, достигая границы нижнего континуума при $\zeta = \zeta_{\text{cr}}(njl)$ и входя в нижний континуум с конечным наклоном:

$$\frac{d\varepsilon_0}{d\zeta} = m_e \zeta_{\text{cr}} \left[\frac{1}{g} \cot(Ag) - \frac{A}{\sin^2(Ag)} \right] \approx -\frac{m_e}{\pi^2} A(A+1)(A+2) \quad (\text{A.14})$$

(здесь $g = \sqrt{\zeta_{\text{cr}}^2 - 1} = \pi/\sqrt{A(A+2)} \ll 1$; см. (A.6) и (A.9)).

Аналогичная задача о критическом расстоянии R_{cr} между сталкивающимися ядрами с $Z_1 + Z_2 > Z_{\text{cr}} \approx 170$ была рассмотрена в работах [81–87]. Отсылая за подробностями к этим работам, приведём здесь несколько характерных чисел²³. Для двух ядер урана $R_{\text{cr}} = 35$ Фм, для системы (См+U) имеем $R_{\text{cr}} \approx 43$ Фм, для (См+См) расстояние $R_{\text{cr}} \approx 51$ Фм и, наконец, $R_{\text{cr}} \approx 70$ Фм для (Fm+Fm). Значения R_{cr} превышают сумму радиусов ядер системы, что позволяет, в принципе, надеяться на постановку экспериментов по спонтанному рождению позитронов при медленных (адиабатических) столкновениях тяжёлых ядер [48, 50, 77]. Заметим ещё, что в работе [81] приведена приближённая аналитическая формула

²³ Поскольку $Z_{1,2} < 137$, в кулоновском поле каждого из ядер нет "падения на центр" и ядра можно рассматривать как точечные (релятивистская задача двух центров), вводя поправку на конечные размеры ядер по теории возмущений.

для $R_{cr}(Z)$, полученная методом сшивания асимптотик волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ на малых и больших расстояниях от ядер и достаточно точная при $Z_{1,2} < 100$. Так, для $Z_1 = Z_2 = 92$ эта формула даёт $R_{cr}^{cs} = 35,5$ Фм, а согласно точным численным расчётам по уравнению Дирака [83, 86] $R_{cr} = 34,3$ Фм (соответственно $R_{cr}^{cs} = 42,8$ и $42,6$ Фм при $Z_1 = Z_2 = 94$, а также близкие значения для системы $U + Cf$, $Z_1 + Z_2 = 188$).

Проблема критического заряда ядра и другие вопросы КЭД сильных полей подробно обсуждаются в работах [48–50, 75–77]. Физически наглядное описание сверхзаряженных электронов в нижнем континууме ($Z > Z_{cr}$, $\varepsilon < -m$) дано в работах [48, 50, 77, 87]. Приведём также значение $Z_{cr}^H \approx 2300$ для мюонного иона [88].

Заметим, что спонтанное рождение позитронов при $Z > Z_{cr}$ возможно только в том случае, когда уровень с энергией $E_0 < -m_e c^2$, опустившийся в нижний континуум, не заполнен электронами. Ионизация этого уровня может быть, в принципе, достигнута при столкновении двух тяжёлых ионов с суммарным зарядом $Z_1 + Z_2 > Z_{cr} \approx 170$ благодаря конечной скорости сближения ядер (процесс, известный в атомной физике). В поле "голового"²⁴ ядра с $Z > Z_{cr}(1s_{1/2}) \approx 170$ возможно спонтанное рождение e^+e^- -пар из вакуума, после чего электроны попадают на вакантный уровень $1s_{1/2}$, заполняя его ($s_z = \pm 1/2$), а два позитрона, просачиваясь сквозь кулоновский барьер, вылетают в бесконечность, где могут быть зарегистрированы. При этом заряд ядра уменьшается на две единицы: $Z \rightarrow Z - 2$ (для внешнего наблюдателя). С ростом Z новые позитроны возникают только при $Z > Z_{cr}(n/l)$, когда в нижний континуум опускается очередной уровень (n/l) дискретного спектра (см. табл. 8).

В работах [34, 44, 78, 89] поставлен вопрос о влиянии сверхсильного магнитного поля на критический заряд ядра $Z_{cr}(B)$. Было отмечено, что с увеличением магнитного поля значение $Z_{cr}(B)$ понижается: $Z_{cr} = 92$ (уран) при $B \approx 5,5 \times 10^{15}$ Гс [89], $Z_{cr} = 80$ при $B \approx 10^{16}$ Гс [78], $Z_{cr} = 41$ при $B = 10^{18}$ Гс [34, 35] и т.д. Этот вывод был основан на свойстве энергетического спектра дираковской частицы в однородном магнитном поле. Как было отмечено в разделе 8, нижняя граница верхнего континуума в случае уравнения Дирака остаётся равной $m_e c^2$, как и для свободной частицы, что связано с компенсацией для "дираковского" электрона (а соответственно, и для позитрона) энергии нулевых колебаний в плоскости (x, y) с магнитной энергией спина.

Этот эффект был рассмотрен в работах [78, 89] без учёта экранирования кулоновского потенциала за счёт поляризации вакуума. С другой стороны, поляризация вакуума приводит к экранированию кулоновского потенциала и к "заморозанию" энергии уровня, не позволяя ему дойти до границы нижнего континуума, пока предельная энергия $E_{\infty}^Z(B \rightarrow \infty) > -m_e$, что выполняется [35] для $Z < 52$. Для таких ядер основной уровень остаётся докритическим в сколь угодно сильном магнитном поле, и спонтанное рождение позитронов в поле заряда Z отсутствует. Если же $Z > 52$, то "критическое" состояние электрона на краю нижнего континуума может быть достигнуто с ростом B , но для этого требуются более сильные магнитные поля, чем без учёта экранирования.

²⁴ То есть ядра с ободранной (полностью ионизованной) К-оболочкой.

Б. Экстремальные магнитные поля

Приведём краткие сведения о максимальных полях, полученных в земной лаборатории или встречающихся в космосе.

1. Атомная единица магнитного поля B_a определяется из условия $\mu_B B_a = m_e c^4 / 2\hbar^2 = 1$ Ру, откуда²⁵ $B_a = m_e^2 c e^3 / \hbar^3 = 2,349 \times 10^9$ Гс. Постоянное магнитное поле не приводит к рождению e^+e^- -пар из вакуума [29], поэтому (в отличие от электрического поля) получение сколь угодно сильных, $B \gtrsim B_{cr}$, магнитных полей не противоречит КЭД и, в принципе, возможно.

2. Постоянные магнитные поля, полученные в лаборатории, не превышают сотен килогауссов.

А.Д. Сахаров в 1951 г. предложил [90–92] метод магнитной кумуляции: обжатие магнитного поля, заключённого в хорошо проводящую оболочку (цилиндрическую трубку из металла с высокой проводимостью, например, меди), с помощью ударной волны, возникающей при взрыве взрывчатого вещества, окружающего оболочку. Из условия сохранения магнитного потока $\Phi = \pi R^2 B$ следует, что $B/B_0 \approx (R_0/R)^2 \gg 1$, где $R(t)$ — радиус оболочки, B_0 — начальное значение магнитного поля (которое создаётся обычными методами). Экспериментально было достигнуто [90] рекордное (в земных условиях) поле $B \approx 25$ МГс ($\mathcal{H} = B/B_a \approx 0,01$), и возможен дальнейший прогресс в этой области [93].

Уравнения, описывающие динамику процесса магнитной кумуляции, рассмотрены в работе [94]. Используя закон сохранения энергии и уравнения Максвелла для квазистационарного поля в хорошо проводящей среде, приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{K\xi^3} \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{-\xi\dot{\xi}}} \right)^2, \quad 0 < \tau < \tau_m, \quad (\text{Б.1})$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = -\dot{\xi}(0) = 1, \quad (\text{Б.2})$$

$$\xi(\tau) = 1 - \tau + \frac{(1+\mu)^2}{2K} \tau^2 + \dots, \quad \tau \rightarrow 0,$$

где $\xi = R/R_0$, $R_0 = R(t=0)$, $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$, K — отношение кинетической энергии оболочки к заключённой в ней (в начальный момент взрыва $t=0$) магнитной энергии, $\mu = c/\sqrt{2\pi\sigma R_0 v_0}$ — коэффициент (безразмерный) омических потерь в веществе оболочки, σ — её проводимость, точка означает производную по безразмерному времени $\tau = v_0 t / R_0$, значения ξ_m и τ_m относятся к моменту наибольшего сжатия²⁶. В идеальном случае, т.е. без омических потерь, при $\sigma = \infty$ (сверхпроводник) и $\mu = 0$ уравнение (Б.1) имеет интеграл энергии

²⁵ Для сравнения: в случае электрического поля $\mathcal{E}_a = m_e^2 c^5 / \hbar^4 = 5,142 \times 10^9$ В см⁻¹, что совпадает с напряжённостью электрического поля на К-орбите (1s) атома водорода: $\mathcal{E}_a = e/a_B^2 = \alpha B_a$.

²⁶ Уравнение (Б.1) относится к цилиндрической геометрии и справедливо только на стадии сжатия, когда $\dot{\xi} < 0$. При $\tau > \tau_m$ оболочка разлетается из-за давления магнитного поля, $\dot{\xi} > 0$ и это уравнение уже неприменимо. В этом случае при расчёте магнитного поля требуется решение уравнения теплопроводности (или диффузии магнитного поля), которое не сводится к простому уравнению типа (Б.1). В таком рассмотрении, однако, нет особой необходимости, если интересоваться максимально достижимым магнитным полем B_m , а не (специально) движением оболочки в стадии разлёта.

$$\xi^2 = 1 + K^{-1} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (\text{Б.3})$$

и решается аналитически:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt{\xi_m^2 + (1 + K^{-1})(\tau - \tau_m)^2}.$$

В этом приближении в момент наибольшего сжатия оболочки и максимума магнитного поля имеем $\tau = \tau_m^{(0)}$,

$$\begin{aligned} \xi_m^{(0)} &= (K + 1)^{-1/2} \approx K^{-1/2}, \\ \tau_m^{(0)} &= \frac{K}{K + 1} \approx 1 - \frac{1}{K}, \\ B_m^{(0)} &= (K + 1)B_0, \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где $B_m^{(0)}$ — максимальное поле (реально на эксперименте $K \gg 1$). С учётом омических потерь последнее из этих уравнений принимает вид

$$\frac{B_m}{B_0} = (K + 1) \left[1 + 2\mu \int_0^{\tau_m} \left(1 + \frac{2}{K\xi^2} \right) \sqrt{-\frac{\xi}{\xi^3}} d\tau \right]^{-1}. \quad (\text{Б.5})$$

Численные расчёты по этим уравнениям были выполнены в работе [95]. Отсылая за подробностями к этой работе, приведём некоторые оценки. При начальном радиусе оболочки $R_0 = 3$ см, начальной скорости сжатия $v_0 = 10$ км с⁻¹ и $K = 1000$ имеем $\mu = 0,01$ и $\mu = 0,037$ соответственно для $\sigma = 6 \times 10^5$ Ом⁻¹ см⁻¹ (проводимость меди при комнатной температуре) и $\sigma = 4 \times 10^4$ Ом⁻¹ см⁻¹ при $T = 1500$ °С (металл находится уже в жидком состоянии). Считая, что исходное поле $B_0 \sim 10^5$ Гс (что может быть создано обычными методами), при $K = 100, 10^4, 10^8$ находим соответственно

$$B_{\max} \sim 10^7 \text{ Гс}, \quad 10^9 \text{ Гс} \sim B_a, \quad 10^{13} \text{ Гс} \sim B_{\text{cr}} \quad (\text{Б.6})$$

(последнее значение коэффициента K отвечает использованию для сжатия магнитного поля уже не заряда взрывчатого вещества, а подземного ядерного взрыва сравнительно небольшой мощности — см. замечание на с. 85 в [92]). Заметим, что в уравнении (Б.5) учтены омические потери (на токи Фуко) в процессе сжатия оболочки, в результате чего, например, для $K \sim 1000$ и $\mu \approx 0,05$ магнитный поток Φ в процессе сжатия уменьшается в 1,5–2 раза, а максимально достижимое поле B_{\max} — в 2–3 раза по сравнению с идеальным случаем $\Phi(t) = \text{const}$, $\mu = 0$; эти оценки соответствуют кратким замечаниям, приведённым в работах [90, 91].

Таким образом, получение полей $B > B_a$ методом магнитной кумуляции в принципе возможно, однако требует чрезвычайно большой начальной энергии ударной волны, сжимающей оболочку; к тому же этот метод является импульсным: поле порядка B_{\max} создаётся на короткое время $\Delta t < 2R_0/v \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ с, что усложняет постановку физических экспериментов. Заметим, однако, что время существования магнитного поля в этом эксперименте на много порядков превышает характерное атомное время $t_a = a_B/v_a = \hbar^3/m_e e^4 = 2 \times 10^{-17}$ с. Поэтому с точки зрения атомной физики (в частности, для процессов лоренцевой ионизации атомов и ионов [95]) такое поле может рассматриваться как постоянное (в адиабатическом приближении).

3. Максимальными магнитными полями, которые в настоящее время могут быть получены в лаборатории, являются, по-видимому, поля, возникающие при стол-

кновениях релятивистских тяжёлых ионов на коллайдерах RHIC и LHC [96]: $B_{\text{st}} \sim m_\pi^2 c^3 / e\hbar \sim 10^{18}$ Гс. Излишне говорить, что время существования таких полей чрезвычайно мало, $\tau \lesssim \hbar/m_e c^2 \sim 10^{-21}$ с.

Сильные магнитные поля могут быть получены также с помощью мощных лазеров, чему посвящены в последние годы многочисленные исследования. Ограничимся двумя примерами. В работе [97] сообщается о достижении значений $B \sim 50$ МГс у поверхности плазменных ступок в вакууме (время существования поля $\tau \sim 10^{-10}$ с), а в [98] — о генерации квазистатических, $\tau \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ с (что сравнимо с длительностью лазерного импульса), полей $B \lesssim 700$ МГс в лазерной плазме. Авторы выражают благодарность С.В. Попруженко за указание на работы [97, 98].

4. Сверхсильные магнитные поля встречаются в астрофизике. Здесь можно упомянуть о магнитных белых карликах, на поверхности которых существуют поля вплоть до ~ 1000 МГс ($\mathcal{H} \sim 1$).

Нейтронные звёзды, наблюдаемые как радиопульсары, обладают значительно более сильными полями $B \sim 10^{12} - 10^{13}$ Гс [2, 3] и более, а в так называемых магнитарах²⁷ поля, по-видимому, ещё больше, вплоть до $10^{14} - 10^{15}$ Гс на поверхности. Такие поля недостижимы в земных экспериментах, что делает нейтронные звёзды уникальными природными лабораториями для проверки теоретических представлений о свойствах вещества в экстремальных условиях.

В моделях некоторых космологических объектов (gamma-ray bursters) предсказывается существование полей $B \sim 10^{16} - 10^{17}$ Гс. При этих значениях B обсуждавшиеся нами асимптотические формулы для спектра уровней атома водорода имеют высокую точность.

Другой возможной областью применимости указанных выше формул является физика твёрдого тела — теория экситонов и мелких уровней в полупроводниках (см., например, [19, 20]). В этом случае эффективная масса электрона в решётке $m_{\text{eff}} \ll m_e$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon \gg 1$, поэтому характерные магнитные поля значительно меньше B_a и вполне достижимы в эксперименте. Именно для таких систем и был предсказан эффект Зельдовича [53].

5. Критическое (или характерное) поле [27–29] в КЭД равно

$$F_{\text{cr}} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = \begin{cases} 1,32 \times 10^{16} \text{ В см}^{-1} \equiv \mathcal{E}_{\text{cr}}, \\ 4,41 \times 10^{13} \text{ Гс} \equiv B_{\text{cr}} \end{cases}$$

соответственно в случае электрического или магнитного поля. При этом $eF_{\text{cr}}l_C = m_e c^2$ и $\mathcal{E}_a = \alpha B_a$. Полезно иметь в виду, что $\mathcal{E} [\text{В см}^{-1}] = 300B [\text{Гс}]$.

Характерное для КЭД поле \mathcal{E}_{cr} впервые, по-видимому, ввёл Заутер [27], который нашёл (в связи с "парадоксом Клейна", см. [30]) решение уравнения Дирака в присутствии постоянного и однородного электрического поля и показал²⁸, что вероятность для числа рождения e^+e^- -пар, образованных в единице объёма в единицу времени, $w \propto \exp(-\pi\mathcal{E}_{\text{cr}}/\mathcal{E})$.

²⁷ Особый класс нейтронных звёзд. В настоящее время из обнаруженных в астрофизике объектов самым сильным магнитным полем обладает, по-видимому, магнитар SGR 1806-20 (Soft Gamma Repeater), на поверхности которого магнитное поле составляет 2×10^{15} Гс.
²⁸ С экспоненциальной точностью, в квазиклассическом приближении.

6. Наконец, оценим энергию W , заключённую в сверхсильном магнитном поле. Учитывая, что $B_a^2 a_B^3 = m_e c^2$, и переходя к безразмерным величинам $\mathcal{H} = B/B_a$ и $l = L/a_B$ (где L^3 — объём, занимаемый магнитным полем), находим

$$W \sim B^2 L^3 = \mathcal{H}^2 l^3 m_e c^2, \quad \mathcal{H} \gg 1, \quad (\text{Б.7})$$

где $m_e c^2 = 511 \text{ кэВ} \equiv 9,11 \times 10^{-28} \text{ г}$. Отсюда при $B = B_a$ и $L = a_B$ имеем $W \sim m_e c^2 \approx 10^4 \text{ Ру}$ (напомним, что характерные энергии атомных уровней меньше 1 Ру), а при $B = B_{\text{кр}} = \alpha^{-2} B_a$ магнитная энергия составляет $W \approx 137 m_e c^2$ для $L = 1/m_e = \alpha a_B$ и $W \approx 3 \times 10^8 m_e c^2$ для $L = a_B$. Наконец, для замагниченной нейтронной звезды с параметрами $B \sim B_{\text{кр}}$, $L \sim 10 \text{ км}$ ($l \sim 10^{14}$) получаем оценку $W \approx 10^{50} m_e c^2$, что соответствует метеориту массой $M \sim 10^{23} \text{ г}$ (для сравнения — масса Земли $M \approx 6 \times 10^{27} \text{ г}$), и даже при более скромном значении $B \sim B_a$, но при том же радиусе порядка 10 км, имеем $W \approx 10^{42} m_e c^2 \sim 10^{15} \text{ г}$.

7. Отметим в заключение, что в работе [99] получено решение задачи о системе двух взаимодействующих между собой релятивистских частиц ($q\bar{q}$) в сверхсильных магнитных полях.

В. О кулоновских поправках к длине рассеяния

Кулоновское взаимодействие $U_C(r) = -\zeta e^2/r$ приводит к перенормировке параметров a_l и r_l низкоэнергетического рассеяния на "сильном" (короткодействующем) потенциале

$$V_{\text{sh}}(r) = -\frac{g}{2r_0^2} v\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad \hbar = m = 1, \quad (\text{В.1})$$

с радиусом действия $r_0 \ll a_B = \hbar^2/m_e^2$. Проблема кулоновской перенормировки, $a_s^{(l)} \rightarrow a_{\text{cs}}^{(l)}$, требует решения уравнения Шрёдингера с потенциалом $U(r) = V_{\text{sh}}(r) + U_C$ и орбитальным моментом l , что может быть выполнено только численно. Однако в интересующем нас случае, когда в потенциале $V_{\text{sh}}(r)$ имеется мелкий уровень (реальный, виртуальный или квазистационарный с $l \geq 1$), возмущающий кулоновский спектр²⁹, а низкоэнергетическое рассеяние носит резонансный характер [6], общие формулы [29, 100, 101] для перенормировки значительно упрощаются. Так, в случае s-состояний [102]

$$\frac{1}{a_{\text{cs}}} - \frac{1}{a_s} = -\frac{2\zeta}{a_B} \left[\ln \frac{r_s}{a_B} + c_0 + O\left(\frac{r_s}{a_B}, \frac{r_s}{a_s}\right) \right], \quad (\text{В.2})$$

$$c_0 = 2\gamma + \ln \frac{2r_C}{r_s}, \quad \gamma = 0,5772 \dots$$

(предполагается, что эффективный радиус $r_s \ll a_B$, $r_s \ll a_s$). Отметим, что линейные по r_s поправки в уравнении (В.2) были вычислены в [103]. Обобщение (В.2) на случай моментов $l \neq 0$ получено в работе [102]:

$$\frac{1}{a_{\text{cs}}^{(l)}} - \frac{1}{a_s^{(l)}} = -\frac{2\zeta}{a_B} \left[\frac{(2l)!}{2^l l!} \right]^2 \int_0^\infty \chi_l^2(r) \frac{dr}{r} + \dots \quad (\text{В.3})$$

В приведённых формулах³⁰ $\zeta = -\text{sgn}(Z_1 Z_2)$, а r_s и r_C — эффективный [6] и кулоновский [40, 103] радиусы системы

в момент возникновения связанного s-состояния ($l = 0$, $g = g_0$):

$$r_0 = 2 \int_0^\infty [1 - \chi_0^2(r)] dr, \quad \chi_0(0) = 0, \quad \chi_0(\infty) = 1, \\ r_C = \exp \left\{ \ln R + \int_0^\infty [\Theta(r - R) - \chi_0^2(r)] \frac{dr}{r} \right\} \quad (\text{В.4})$$

(нетрудно убедиться, что от выбора $R > 0$ значение r_C не зависит). В связи с формулами (В.3) и (В.4) отметим, что длина рассеяния имеет размерность длины $[L]$ только в случае s-волны, а в общем случае размерности равны

$$[a_l] = L^{2l+1}, \quad [r_l] = L^{1-2l}, \quad [\chi_l] = L^{-l}. \quad (\text{В.5})$$

Входящие в формулы (В.3) и (В.4) функции $\chi_l(r)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют уравнению Шрёдингера в момент возникновения связанного l -уровня ($E_l = 0$, $g = g_l$):

$$\frac{d^2 \chi_l}{dx^2} + \left[g_l v(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_l = 0, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad (\text{В.6})$$

с граничными условиями

$$\chi_l(r) \propto r^{l+1} \text{ при } r \rightarrow 0, \\ \lim (r^l \chi_l(r)) = 1 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (\text{В.7})$$

При значениях константы связи g , существенно отличных от g_l , перенормировка имеет более сложный вид.

В случае s-состояний согласно (В.2) основными параметрами, определяющими перенормировку a_s , являются значения r_C и r_s , а также их отношение $\rho = r_C/r_s$ в формуле для c_0 . Приведём их численные значения для нескольких модельных потенциалов, часто встречающихся в физике.

Для потенциала Юкавы имеем

$$v(x) = \frac{\exp(-x)}{x}, \quad g_0 = 1,680, \quad r_s = 2,12 r_0, \\ \rho = 0,364, \quad c_0 = 0,837.$$

Для потенциала Хюльтена

$$v(x) = (\exp x - 1)^{-1}, \quad g_0 = 1, \quad r_s = 3r_0, \\ \rho = 0,374, \quad c_0 = 0,865.$$

Для гауссова потенциала

$$v(x) = \exp(-x^2), \quad g_0 = 2,684, \\ r_s = 1,44 r_0, \quad \rho = 0,418, \quad c_0 = 0,976.$$

Дальнейшие примеры см. в работах [103, 104].

В случае $l = 0$ кулоновская перенормировка длины рассеяния содержит "большой" логарифм $\ln(r_s/a_B)$, который отсутствует при $l \neq 0$, поэтому она особенно велика для s-состояний. В качестве примера можно указать на нуклон-нуклонное pp- и pp-рассеяние в синглетном 1S_0 -состоянии, где [105]

$$a_s(\text{pn}) = -23,75, \quad a_{\text{cs}} = -7,84, \quad (\text{В.8})$$

$$r_s = 2,75, \quad r_{\text{cs}} = 2,77, \quad a_B = 57,8,$$

все значения даны в единицах Фм. Большое различие в длинах рассеяния в случаях pp- и pp-рассеяния не

²⁹ То есть имеет место эффект Зельдовича.

³⁰ При этом $\zeta = 1$ для адронного pp-атома, $\zeta = -1$ для системы pp. В случае s-состояний мы всюду опускаем индекс $l = 0$ у длины рассеяния.

означает сильного нарушения изотопической инвариантности ядерного взаимодействия нуклонов и может быть естественно объяснено учётом кулоновского взаимодействия в рр-системе. Процентное различие значений эффективных радиусов взаимодействия для рассматриваемых систем связано с малым нарушением изотопической инвариантности кулоновским взаимодействием протонов.

В заключение заметим, что в случае $l \neq 0$ сингулярный при $r \rightarrow 0$ член, пропорциональный $\ln(r_0/a_B)$, содержится в разности $1/a_{cs}^{(l)} - 1/a_s^{(l)}$ в более высоких порядках разложения. Например, в правую часть формулы (В.3) он входит в виде [106]

$$\frac{1}{(l!)^2} \zeta^{2l+1} \ln(\zeta r_0) \sim \frac{1}{(l!)^2} \left(\frac{r_0}{a_B}\right)^{2l+1} \ln \frac{r_0}{r_B}. \quad (\text{В.9})$$

Перенормировка эффективного радиуса $r_s \rightarrow r_{cs}$ даже в случае s-волны содержит логарифм $\ln(r_0/a_B)$ лишь в поправочном члене (см. (В.8)).

Список литературы

- Garstang R H *Rep. Prog. Phys.* **40** 105 (1977)
- Lai D *Rev. Mod. Phys.* **73** 629 (2001)
- Harding A K, Lai D *Rep. Prog. Phys.* **69** 2631 (2006)
- Lattimer J M, Prakash M *Phys. Rep.* **442** 109 (2007)
- Shiff L I, Snyder H *Phys. Rev.* **55** 59 (1939)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2002) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
- Буреева Л А, Лисица В С *Возмущенный атом* (М.: ИздАТ, 1997)
- Либерман М А, Йоханссон Б У *ФН* **165** 121 (1995) [Lieberman M A, Johansson B *Phys. Usp.* **38** 117 (1995)]
- Lindgren K A U, Virtamo J T *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **12** 3465 (1979)
- Virtamo J T, Lindgren K A U *Phys. Lett. A* **71** 329 (1979)
- Goldman S P, Chen Z *Phys. Rev. Lett.* **67** 1403 (1991)
- Chen Z, Goldman S P *Phys. Rev. A* **48** 1107 (1993)
- Wang J-H, Hsue C-S *Phys. Rev. A* **52** 4508 (1995)
- Lai D, Salpeter E E *Phys. Rev. A* **53** 152 (1996)
- Kravchenko Yu P, Liberman M A, Johansson B *Phys. Rev. A* **54** 287 (1996)
- Потехин А Ю, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (СПб.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, 2009)
- Loudon R *Am. J. Phys.* **27** 649 (1959)
- Andrews M *Am. J. Phys.* **34** 1194 (1966)
- Elliott R J, Loudon R *J. Phys. Chem. Solids* **15** 196 (1960)
- Hasegawa H, Howard R E *J. Phys. Chem. Solids* **21** 179 (1961)
- Khriplovich I B, Ruban G Yu *Laser Phys.* **14** 426 (2004)
- Карнаков Б М *Письма в ЖЭТФ* **77** 73 (2003) [Karnakov B M *JETP Lett.* **77** 68 (2003)]
- Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **77** 79 (2003) [Popov V S *JETP Lett.* **77** 74 (2003)]
- Карнаков Б М, Попов В С *ЖЭТФ* **124** 996 (2003) [Karnakov B M, Popov V S *JETP* **97** 890 (2003)]
- Попов В С, Карнаков Б М *ЖЭТФ* **141** 5 (2012) [Popov V S, Karnakov B M *JETP* **114** 1 (2012)]
- Potekhin A Y, Turbiner A V *Phys. Rev. A* **63** 065402 (2001)
- Sauter F Z *Phys.* **69** 742 (1931)
- Heisenberg W, Euler H Z *Phys.* **98** 714 (1936)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
- Ахизер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1981) [Translated from 2nd Russ. ed.: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1965)]
- Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1971) [Translated from 1st Russ. ed.: Baz' A I, Zel'dovich Ya B, Perelomov A M *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)]
- Демков Ю Н, Островский В Н *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1975) [Demkov Yu N, Ostrovskii V N *Zero-range Potentials and Their Applications in Atomic Physics* (New York: Plenum Press, 1988)]
- Vysotsky M I *Письма в ЖЭТФ* **92** 22 (2010) [*JETP Lett.* **92** 15 (2010)]
- Machet B, Vysotsky M I *Phys. Rev. D* **83** 025022 (2011)
- Godunov S I, Machet B, Vysotsky M I *Phys. Rev. D* **85** 044058 (2012)
- Галицкий В М, Карнаков Б М, Коган В И *Задачи по квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1992); 3-е изд. (М.: УРСС, 2001); Galitski V, Karnakov B, Kogan V, Galitski V (Jr.) *Exploring Quantum Mechanics: A Collection of 700+ Solved Problems for Students, Lectures, and Researches* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2013)
- Case K M *Phys. Rev.* **80** 797 (1950)
- Переломов А М, Попов В С *ТМФ* **4** (1) 48 (1970) [Perelomov A M, Popov V S *Theor. Math. Phys.* **4** 664 (1970)]
- Попов В С, Кудрявцев А Е, Мур В Д *ЖЭТФ* **77** 1727 (1979) [Popov V S, Kudryavtsev A E, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **50** 865 (1979)]
- Попов В С и др. *ЖЭТФ* **80** 1271 (1981) [Popov V S et al. *Sov. Phys. JETP* **53** 650 (1981)]
- Bateman H *Higher Transcendental Functions* (Director A Erdelyi) Vol. 1 (New York: McGraw-Hill, 1953) [Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 1 (М.: Наука, 1973)]
- Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. Lett.* **98** 180403 (2007)
- Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. D* **77** 025001 (2008)
- Высоцкий М И, Годунов С И *УФН* **184** 206 (2014) [Vysotsky M I, Godunov S I *Phys. Usp.* (2) (2014), DOI: 10.3367/UFNe.0184.201402j.0206]
- Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **11** 254 (1970) [Popov V S *JETP Lett.* **11** 162 (1970)]
- Попов В С *ЯФ* **12** 429 (1970) [Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 235 (1971)]
- Попов В С *ЖЭТФ* **59** 965 (1970) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **32** 526 (1971)]
- Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971) [Zeldovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)]
- Gershtein S S, Popov V S *Lett. Nuovo Cimento* **6** 593 (1973)
- Попов В С *ЯФ* **64** 421 (2001) [Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **64** 367 (2001)]
- Тернов И М и др. *ЖЭТФ* **55** 2273 (1968) [Ternov I M et al. *Sov. Phys. JETP* **28** 1206 (1969)]
- Newton R G *Phys. Rev. D* **3** 626 (1971)
- Зельдович Я Б *ФТТ* **1** 1637 (1959) [Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Solid State* **1** 1497 (1960)]
- Зельдович Я Б *Частицы, ядра, Вселенная: Избранные труды* (М.: Наука, 1985) [Zeldovich Ya B *Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* Vol. 2 *Particles, Nuclei, and the Universe* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]
- Попов В С *ЖЭТФ* **60** 1228 (1971) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **33** 665 (1971)]
- Кудрявцев А Е, Маркушин В Е, Шапиро И С *ЖЭТФ* **74** 432 (1978) [Kudryavtsev A E, Markushin V E, Shapiro I S *Sov. Phys. JETP* **47** 225 (1978)]
- Кудрявцев А Е, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **29** 311 (1979) [Kudryavtsev A E, Popov V S *JETP Lett.* **29** 280 (1979)]
- Karnakov B M, Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Nuovo Cimento B* **98** 63 (1987)
- Карнаков Б М, Кудрявцев А Е, Мур В Д, Попов В С *ЖЭТФ* **94** 65 (1988) [Karnakov B M, Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **67** 1333 (1988)]
- Badalyan A M et al. *Phys. Rep.* **82** 31 (1982)
- Deser S et al. *Phys. Rev.* **96** 744 (1954)
- Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **87** 1150 (1984) [Karnakov B M, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **60** 657 (1984)]
- Karnakov B M, Krainov V P *WKB Approximation in Atomic Physics* (Heidelberg: Springer, 2013)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **78** 135 (1950)

65. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ДАН СССР* **279** 345 (1984) [Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. Dokl.* **29** 938 (1984)]
66. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **41** 1258 (1985)
67. Андреев С П, Карнаков Б М, Мур В Д *Письма в ЖЭТФ* **37** 155 (1983) [Andreev S P, Karnakov B M, Mur V D *JETP Lett.* **37** 187 (1983)]
68. Андреев С П, Карнаков Б М, Мур В Д, Полунин В А *ЖЭТФ* **86** 866 (1984) [Andreev S P, Karnakov B M, Mur V D, Polunin V A *Sov. Phys. JETP* **59** 506 (1984)]
69. Горьков Л П, Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **53** 717 (1967) [Gor'kov L P, Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **26** 449 (1968)]
70. Potekhin A Y *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **27** 1073 (1994)
71. Potekhin A Y *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **31** 49 (1998)
72. Potekhin A Y, Pavlov G G *Astrophys. J.* **483** 414 (1997)
73. Pomeranchuk I, Smorodinsky Ya J. *Phys. USSR* **9** 97 (1945)
74. Померанчук И, Смородинский Я, в кн. Померанчук И Я *Собрание научных трудов* Т. 2 (М.: Наука, 1972) с. 21
75. Pieper W, Greiner W Z. *Phys.* **218** 327 (1969)
76. Brodsky S J *Comm. Atom. Mol. Phys.* **4** 109 (1973)
77. Greiner W, Müller B, Rafelski J *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
78. Schluter P et al. *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **18** 1685 (1985)
79. Popov V S *AIP Conf. Proc.* **1205** 132 (2010)
80. Маринов М С, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **17** 511 (1973) [Marinov M S, Popov V S *JETP Lett.* **17** 368 (1973)]
81. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **16** 355 (1972) [Popov V S *JETP Lett.* **16** 251 (1972)]
82. Müller B, Rafelski J, Greiner W *Phys. Lett. B* **47** 5 (1973)
83. Rafelski J, Müller B *Phys. Lett. B* **65** 205 (1976)
84. Маринов М С, Попов В С, Столин В Л *Письма в ЖЭТФ* **19** 76 (1974) [Marinov M S, Popov V S, Stolin V L *JETP Lett.* **19** 49 (1974)]
85. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **69** 141 (1977)
86. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **91** 20 (1980)
87. Okun' L B *Comments Nucl. Part. Phys.* **6** 25 (1974)
88. Попов В С, Елецкий В Л, Мур В Д *ЖЭТФ* **71** 856 (1976) [Popov V S, Eletsckii V L, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **44** 451 (1976)]
89. Ораевский В Н, Рез А И, Семикоз В Б *ЖЭТФ* **72** 820 (1977) [Oraevskii V N, Rex A I, Semikoz V B *Sov. Phys. JETP* **45** 428 (1977)]
90. Сахаров А Д и др. *ДАН СССР* **165** 65 (1965) [Sakharov A D *Sov. Phys. Dokl.* **10** 1045 (1966)]
91. Сахаров А Д *УФН* **88** 725 (1966) [Sakharov A D *Sov. Phys. Usp.* **9** 294 (1966)]
92. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995)
93. *Pulsar Power Conf.* **2** 746 (1999)
94. Павловский А И, в сб. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995) с. 85
95. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **115** 1642 (1999) [Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *JETP* **88** 902 (1999)]
96. *Proc. of Intern. Conf. on Physics in Intense Fields, PIF 2010, 24–26 November 2010, KEK, Thukuba, Japan* (KEK Proc. 2010-13, Eds K Itakura, S Iso, T Takahashi) (Tsukuba, Japan: KEK, 2011)
97. Sarri G et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 205002 (2012)
98. Wagner U et al. *Phys. Rev. E* **70** 026401 (2004)
99. Kerbikov B O, Andreichikov M A *Письма в ЖЭТФ* **96** 397 (2012) [*JETP Lett.* **96** 361 (2012)]
100. Ландау Л Д, Смородинский Я А *ЖЭТФ* **14** 269 (1944); Landau L, Smorodinskii Ya J. *Phys. USSR* **8** 154 (1944)
101. Goldberger M L, Watson K M *Collision Theory* (New York: Wiley, 1964) [Гольдбергер М, Ватсон К *Теория столкновений* (М.: Мир, 1967)]
102. Кудрявцев А Е, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **37** 1417 (1983) [Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **37** 844 (1983)]
103. Мур В Д, Попов В С, Сергеев А В *ЯФ* **59** 68 (1996) [Mur V D, Popov V S, Sergeev A V *Phys. Atom. Nucl.* **59** 62 (1996)]
104. Мур В Д, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (М.: МИФИ, 1991)
105. Dumbrajs O et al. *Nucl. Phys. B* **216** 277 (1983)
106. Мур В Д, Попов В С *ДАН СССР* **284** 586 (1985) [Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. Dokl.* **20** 782 (1985)]

Hydrogen atom in a strong magnetic field

V.S. Popov

*Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
E-mail: markina@itep.ru*

B.M. Karnakov

*National Research Nuclear University "MEPhI",
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: karnak@theor.mephi.ru*

The paper examines the energy spectrum of atomic hydrogen in strong ($B > B_a \sim 10^9$ G) and ultra-strong ($B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ G) magnetic fields, in which the hydrogen electron starts to move relativistically and quantum electrodynamics effects become important. Using the adiabatic approximation, highly accurate energy level values are obtained analytically for $B > 10^{11}$ G, which are then compared with asymptotic and numerical results available in the literature. A characteristic feature noted in electron motion in a strong magnetic field is that for $B \gtrsim B_{cr}$, the transverse motion becomes relativistic while the longitudinal motion (along \mathbf{B}) can be described by nonrelativistic theory and is amenable to the an adiabatic approximation. Topics discussed include: the qualitative difference in the way odd and even levels change with magnetic field (for $B \gg B_a$); the removal of degeneracy between odd and even atomic states; spectral scaling relations for different quantum numbers (n, n_p, m) and different field strengths; the shape, size, and quadruple moment of the atom at $B \gg B_a$; radiative transitions $n p \rightarrow 1s$ in a strong magnetic field; relativistic QED effects, including: the effects of vacuum polarization and of the electron's anomalous magnetic moment on the energy level positions; Coulomb potential screening and energy level freezing at $B \rightarrow \infty$; the possibility of the Zeldovich effect in the hydrogen spectrum in a strong magnetic field. The critical nuclear charge problem is briefly discussed. Simple asymptotic formulas for Z_{cr} , valid for low-lying levels, are proposed. Some of the available information on extreme magnetic field produced in the laboratory and occurring in space is given. The Coulomb renormalization of the scattering length is considered for the resonance situation with a shallow level in the spectrum.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Pm, **32.30. – r**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403e.0273

Bibliography — 106 references

Received 6 July 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 273–296 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)