

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса:
уроки новых исследований

Г.И. Баренблатт, А.Дж. Корин, В.М. Простокишин

Универсальный (не зависящий от числа Рейнольдса) логарифмический закон Кармана–Прандтля для распределения скорости в основной промежуточной области турбулентного сдвигового потока считается одним из фундаментальных законов инженерной науки и повсеместно преподаётся в курсах гидродинамики и гидравлики. В обзоре показано, что этот закон основан на предположении, которое не может быть признано правильным и не соответствует эксперименту. Вывод этого закона, предложенный Л.Д. Ландау, не является вполне корректным. Обсуждается альтернативный скейлинговый (степенной) закон, явно отражающий влияние числа Рейнольдса, и соответствующий закон сопротивления. Исследование основано на идеях промежуточной асимптотики и неполной автомодельности по параметру подобия, в формировании которых Яков Борисович Зельдович сыграл выдающуюся роль. Работа посвящается его памяти.

PACS numbers: 47.10. – g, 47.27. – i, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403d.0265

Содержание

1. Введение: проблема турбулентности (265).
2. Развитая турбулентность. Основное предположение Кармана. Универсальный логарифмический закон (266).
3. Универсальный логарифмический закон не соответствует экспериментальным данным (266).
4. Причина несоответствия: анализ и альтернативные предположения (267).
5. Альтернативный неуниверсальный закон (267).
6. Сравнение универсального логарифмического закона и альтернативного степенного закона (268).
7. Огибающая семейства степенных законов и промежуточные не-универсальные логарифмические законы (269).
8. Анализ турбулентных течений в пограничном слое (269).

9. Локальная структура развитых турбулентных потоков. Степенные законы Колмогорова – Обухова (270).

10. Заключение (271).

Список литературы (271).

1. Введение: проблема турбулентности

Турбулентность — состояние вихревого течения вязкой жидкости, в котором скорость, давление и другие свойства поля течения меняются во времени и пространстве резко и нерегулярно, можно считать, случайно. Основным безразмерным параметром, управляющим турбулентным потоком, является число Рейнольдса $Re = UL/\nu$. Здесь U — характерная скорость течения, L — характерный линейный масштаб, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Впервые осознанная Леонардо да Винчи, турбулентность в последние полтора столетия интенсивно изучалась инженерами, математиками и физиками. Однако следует признать, что даже в простейшем случае несжимаемой жидкости в том, что касается создания замкнутой в себе теории турбулентных течений, почти ничего не было получено исходя из первых принципов: уравнений Навье – Стокса и неразрывности.

Турбулентность при очень больших числах Рейнольдса ($\ln Re \gg 1$) традиционно рассматривается как одна из благополучных провинций королевства турбулентности. Считалось, и многими считается до сих пор, что два основных результата, полученных в этой области, надёжно установлены, и войдут, в основном в нетронутом виде, в будущую полную, замкнутую в себе теорию турбулентности. Эти результаты суть следующие: универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля для поля скоростей в пристеночной (промежуточной) области турбулентного сдвигового течения и "закон $2/3$ "

Г.И. Баренблатт. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 380-41-52

E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com

University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

А.Дж. Корин. University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

E-mail: chorin@math.berkeley.edu

В.М. Простокишин. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,

Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",

Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация

E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com

Статья поступила 5 ноября 2013 г.

Колмогорова – Обухова для локальной структуры "развитых" ($\ln Re \gg 1$) турбулентных течений. Указанные законы, в основном первый из них, обсуждаются в предлагаемой работе.

2. Развитая турбулентность.

Основное предположение Кармана.

Универсальный логарифмический закон

Начало фундаментальных исследований развитых турбулентных течений ($\ln Re \gg 1$) может быть датировано точно: это был пленарный доклад фон Кармана "Механическое подобие и турбулентность" на Третьем международном съезде по прикладной механике 25 августа 1930 г. Фон Карман рассматривал сдвиговые (по его терминологии — гидравлические) стационарные течения, однородные в направлении средней скорости, ограниченные твердой стенкой. Скорость в таких течениях зависит только от расстояния до стенки. К таким течениям относятся практически важные течения в длинных цилиндрических трубах, в пограничных слоях вдоль обтекаемой однородным потоком пластины вдали от входа, в каналах.

Основная гипотеза, принятая фон Карманом, была сформулирована им в следующей форме:

"На основе этих хорошо установленных экспериментальных фактов мы делаем предположение, что вне близкой окрестности стенки распределение скорости не зависит от вязкости".

Для точности приведём это предположение на языке оригинала [1]:

"Wir gründen auf diese experimentell festgestellten Tatsachen die Annahme, dass, abgesehen von der Wandnähe, die Geschwindigkeitsverteilung der mittleren Strömung von der Zähigkeit unabhängig ist."

Опираясь на это предположение, Л.Д. Ландау дал вывод универсального логарифмического закона в 1944 г. в книге *Механика сплошных сред* [2], впоследствии разделённой на две книги: *Гидродинамика* [3] и *Теория упругости*. Для течения в гладкой трубе (рис. 1) этот вывод может быть представлен следующим образом. Градиент

продольной скорости $\partial_y u$ на расстоянии y от стенки зависит от следующих управляющих параметров: диаметр трубы d , расстояние до стенки y , напряжение трения на стенке τ и свойства жидкости — её плотность ρ и кинематическая вязкость ν :

$$\partial_y u = f(y, \tau, d, \rho, \nu). \quad (1)$$

Введём "динамическую скорость" — величину $u_* = (\tau/\rho)^{1/2}$, которая будет в дальнейшем играть роль масштаба скорости. Анализ размерностей [4, 5] показывает, что параметр $u_* d/\nu$ представляет собой функцию одного безразмерного параметра — традиционного "глобального" числа Рейнольдса $Re = Ud/\nu$. Здесь U — средняя скорость потока — отношение объёмного потока (расхода) жидкости к площади поперечного сечения трубы. Далее, анализ размерностей приводит к соотношению

$$\partial_y u = \frac{u_*}{y} \Phi \left(Re, \frac{u_* y}{\nu} \right), \quad (2)$$

или в безразмерной форме

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\eta} \Phi(Re, \eta). \quad (3)$$

Здесь $\varphi = u/u_*$ и $\eta = u_* y/\nu$ — локальное число Рейнольдса. Соотношения (2), (3) — бесспорны. Независимость от вязкости, предположенная фон Карманом, буквально означает, что, поскольку вязкость входит в оба числа Рейнольдса, глобальное и локальное, функция Φ представляет собой универсальную константу, обычно обозначаемую как $1/\kappa$; в свою очередь, κ получила название константы Кармана. Соотношение (3) предстаёт в форме

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\kappa \eta}. \quad (4)$$

Интегрирование (4) даёт

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + B, \quad (5)$$

где B также полагается универсальной постоянной. Для констант κ и B Ландау выбрал значения $\kappa = 0,4$, $B = 5,1$, так что в размерном виде закон (5) представляется в форме

$$u = u_* \left(2,5 \ln \frac{u_* y}{\nu} + 5,1 \right). \quad (6)$$

Соотношение (6) в литературе называется универсальным логарифмическим законом Кармана – Прандтля [6]. Закон Кармана – Прандтля традиционно рассматривается как одно из фундаментальных соотношений инженерной науки: фон Карман и Прандтль сумели убедить инженерный, а также научный мир, что этот закон фундаментален, а применявшиеся ранее инженерами-практиками степенные законы с коэффициентами, зависящими от числа Рейнольдса, суть не более чем эмпирические соотношения. Ниже будет показано, что на самом деле имеет место обратная ситуация.

3. Универсальный логарифмический закон не соответствует экспериментальным данным

Обратимся к экспериментальным фактам. Согласно универсальному логарифмическому закону, входящие в

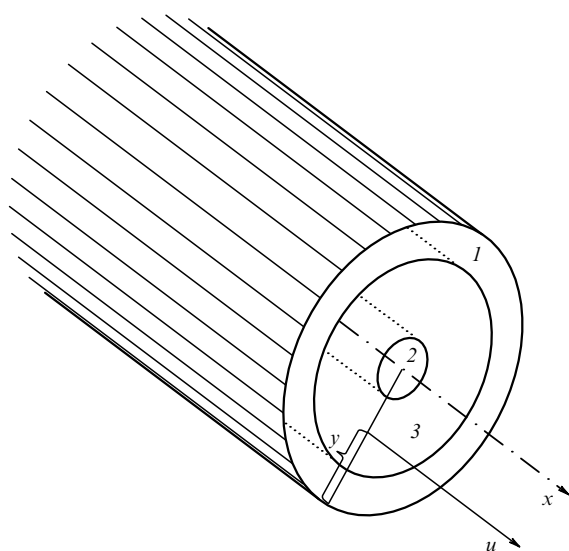


Рис. 1. Структура потока в длинной цилиндрической трубе при очень больших числах Рейнольдса.

него константы κ и B должны быть одинаковыми для всех экспериментов, проведённых на гладких трубах. Однако анализ имеющихся экспериментальных данных, полученных в авторитетных лабораториях, этого не подтверждает. Действительно, обнаружено, что логарифмическая зависимость безразмерной скорости от локального числа Рейнольдса на определённых интервалах наблюдалась во многих сериях опытов. Тем не менее при самом либеральном отношении найденные из опытов значения констант κ и B не могут быть признаны универсальными. Так, константа κ , принятая Ландау равной 0,4, в различных опытах получалась равной от 0,3 до 0,45; значение константы B , принятое Ландау равным 5,1, в различных опытах получалось равным от 3,5 до 6,3. Иными словами, можно утверждать, что универсальный логарифмический закон (6) не имеет места.

4. Причина несоответствия: анализ и альтернативные предположения

Возникает вопрос: в чём состоит дефект приведённого выше вывода? На самом деле здесь имеется математическая тонкость, которая не была принята во внимание. Действительно, функция Φ (см. формулу (3)) зависит от двух безразмерных аргументов: глобального и локального чисел Рейнольдса. Однако между ними имеется существенное различие: в каждом данном эксперименте глобальное число Рейнольдса ($Re = Ud/\nu$) постоянно и фиксированно, в то время как локальное число Рейнольдса ($\eta = u_*y/\nu$) меняется в широких пределах — от единиц до многих тысяч — поскольку оно соответствует локальному значению осреднённой скорости, которая измеряется экспериментатором по всему сечению. В приведённом выводе влиянием глобального числа Рейнольдса пренебрегалось и неявно предполагалось, что существует конечный предел функции Φ при $\eta \rightarrow +\infty$, так что при больших значениях локального числа Рейнольдса η функция Φ может быть заменена на константу. По существующей терминологии это называется *полной автомодельностью по локальному числу Рейнольдса*.

В наших работах мы отказались от гипотезы независимости градиента скорости от глобального числа Рейнольдса. Была принята гипотеза *неполной автомодельности по локальному числу Рейнольдса*, так что функция Φ при больших значениях η представляется в виде

$$\Phi = A(Re) \eta^{\alpha(Re)}. \quad (7)$$

Здесь A и α — некоторые функции Re , которые предстояло определить. В частном случае полной автомодельности, который привёл к несогласию с экспериментом, $A = \text{const}$, $\alpha = 0$. Очевидно, что существуют два возможных типа поведения функции Φ при больших η : существование или несуществование конечного предела при $\eta \rightarrow +\infty$. Частным случаем поведения второго типа является неполная автомодельность, существование которой связано с инвариантностью относительно дополнительной ренормализационной группы (см. [7, 8]).

Далее была принята гипотеза, названная "принципом исчезающей вязкости": *при $\nu \rightarrow 0$ градиент скорости стремится к конечному пределу*. Гипотеза неполной автомодельности по локальному числу Рейнольдса

$\eta = u_*y/\nu$ и гипотеза исчезающей вязкости дают возможность определить функцию Φ с точностью до трёх констант, универсальность которых была проверена на большом (порядка тысячи) числе экспериментов, выполненных в различных лабораториях, на различных установках, и подтверждена.

5. Альтернативный неуниверсальный закон

Согласно принятым предположениям, функция Φ при очень больших Re может быть представлена в виде

$$\Phi = (A_0 + A_1\alpha) \exp(\alpha \ln \eta), \quad \eta = \frac{u_*y}{\nu}, \quad (8)$$

и $\alpha = \alpha(Re)$ стремится к нулю при $Re \rightarrow \infty$. Здесь A_0 и A_1 — универсальные постоянные. Далее, возможны три случая. В первом случае $\alpha(Re)$ стремится к нулю быстрее, чем $1/\ln Re$, тогда функция Φ стремится к постоянной при $Re \rightarrow \infty$, так что имеет место полная автомодельность по обоим параметрам, Re и η , стремящимся к бесконечности. Как было показано выше, это приводит к противоречию с экспериментом. Если $\alpha(Re)$ стремится к нулю медленнее, чем $1/\ln Re$, то при $\nu \rightarrow 0$ функция Φ стремится к бесконечности, что противоречит принципу исчезающей вязкости. Остаётся принять, что при $Re \rightarrow \infty$ имеет место исключительный случай,

$$\alpha = \frac{A_2}{\ln \eta}, \quad (9)$$

где A_2 — также универсальная постоянная. В сделанных предположениях асимптотическое соотношение для безразмерного градиента скорости принимает вид

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\eta} \left(A_0 + \frac{A_1 A_2}{\ln Re} \right) \eta^{A_2/\ln Re}. \quad (10)$$

Интегрируя (10) и принимая дополнительное предположение,

$$\varphi(0) = 0, \quad (11)$$

которое обосновано экспериментально, мы приходим к степенному (нелогарифмическому) закону, включающему в себя зависимость от глобального числа Рейнольдса, т.е. не являющемуся универсальным:

$$\varphi = \left(\frac{A_0}{A_2} \ln Re + A_1 \right) \eta^{A_2/\ln Re}, \quad (12)$$

или в размерном виде

$$u = u_* \left(\frac{A_0}{A_2} \ln Re + A_1 \right) \left(\frac{u_*y}{\nu} \right)^{A_2/\ln Re}. \quad (13)$$

Проведённая обработка экспериментальных данных (см. [9] и указанные там ссылки на другие работы авторов) подтвердила универсальность констант A_0 , A_1 , A_2 и привела к следующим значениям:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_1 = \frac{5}{2}, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad (14)$$

так что предлагаемый нами неуниверсальный степенной закон для распределения скорости по сечению трубы (вне

малых окрестностей стенки и оси) имеет вид

$$u = u_* \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) \left(\frac{u_* y}{v} \right)^{3/(2 \ln \text{Re})}, \quad (15)$$

или в безразмерной форме

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2\alpha} \right) \eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (16)$$

Подчеркнём, что скейлинговый (степенной) закон (15) не может быть получен только из анализа размерностей: существование этого закона связано с инвариантностью относительно дополнительной ренормализационной группы.

6. Сравнение универсального логарифмического закона и альтернативного степенного закона

Подведём промежуточные итоги.

Универсальный логарифмический закон представляется в виде

$$u = u_* (2,5 \ln \eta + 5,1), \quad \varphi = \frac{u}{u_*}, \quad \eta = \frac{u_* y}{v} \quad (17)$$

(Ландау и Лифшиц [2, 3], Монин и Яглом [6] и многие другие).

Неуниверсальный степенной закон представляется в виде

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2\alpha} \right) \eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (18)$$

Константы (14) степенного закона (15), (18) были определены нами в результате обработки опытов Никурадзе [10], выполненных в лаборатории Л. Прандтля в Геттингенском университете (Германия); данные этих опытов представлены автором экспериментов в цифровой форме. Подчеркнём, что значения констант (14) считаются фиксированными и никакому подбору для различных экспериментов не подлежат. Степенной закон (18) может быть, очевидно, записан в виде

$$\psi = \ln \eta, \quad \text{где} \quad \psi = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2\alpha\varphi}{\sqrt{3} + 5\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (19)$$

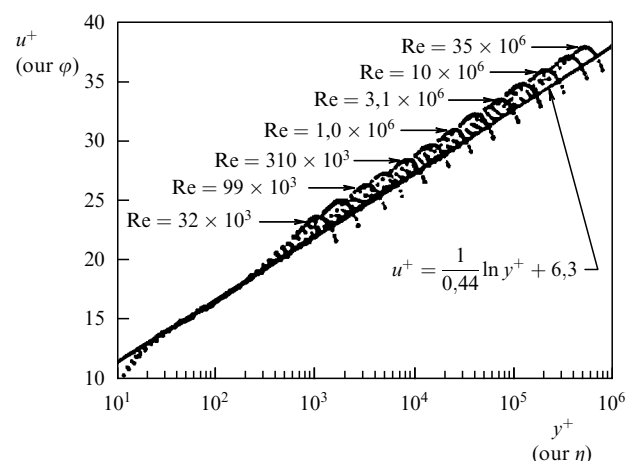


Рис. 2. Универсальный логарифмический закон не подтверждается данными экспериментов Загаролы.

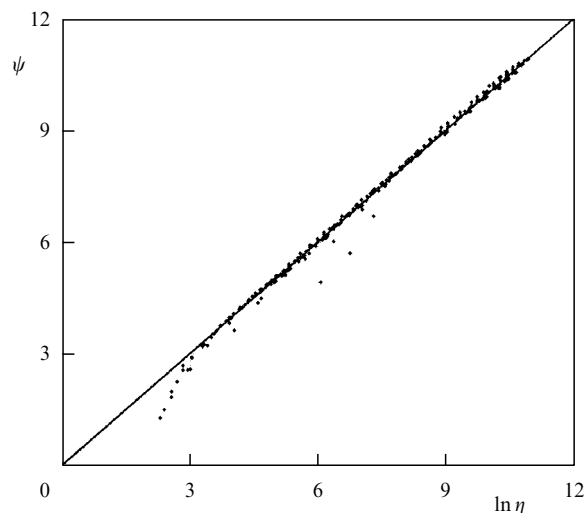


Рис. 3. Данные Никурадзе подтверждают новый степенной закон.

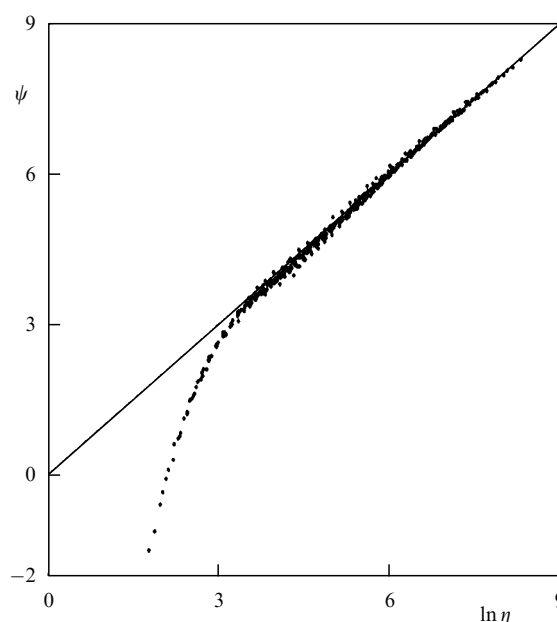


Рис. 4. Данные Загаролы подтверждают новый степенной закон.

В 1996 г., более чем через 60 лет после Никурадзе, в Принстонском университете (США) Загарола [11] выполнил на принципиально новой установке Supercipe большую серию экспериментов по турбулентному течению в трубах, по качеству сравнимых с экспериментами Никурадзе 1932 г. Идея этой установки была предложена выдающимся экспериментатором Г. Брауном. В отличие от Никурадзе, работавшего с течением воды, Загарола использовал течение газа высокого давления. Результаты экспериментов Загаролы на Supercipe воспроизведены на рис. 2 [11]. Видно, что они не подтверждают универсальный логарифмический закон: чётко обнаруживается расщепление экспериментальных кривых по числу Рейнольдса, экспериментальные точки не ложатся на прямую $\varphi = (1/0,44) \ln \eta + 6,3$, соответствующую, по мнению автора, универсальному логарифмическому закону; константы выбранной прямой существенно отличаются от повсеместно принятых в литературе (см. выше).

В то же время обработка экспериментальных данных по степенному закону (19) в обоих случаях (как в экспериментах Никурадзе, так и в экспериментах Загаролы) обнаруживает показательное совпадение: начиная с $\ln \eta \sim 3$ опытные точки (кроме четырёх из более чем 250 в опытах Никурадзе) ложатся на единую кривую $\psi = \ln \eta$ степенного закона — биссектрису (рис. 3) первого квадранта. Заметим (см. [9]), что при больших числах Рейнольдса нами на установке Supergripe была выявлена роль шероховатости.

Подчеркнём ещё одно принципиальное различие универсального и степенного законов: в координатах $\ln \eta$, φ экспериментальные точки, согласно универсальному логарифмическому закону, должны ложиться на единую прямую линию $\varphi = (1/0,4) \ln \eta + 5,1$. Это не подтверждается опытными данными (см. рис. 2 [11]). В то же время в координатах $\ln \eta$, ψ опытные точки должны, согласно степенному закону, ложиться на единую прямую, что подтверждается как опытами Никурадзе, так и опытами Загаролы (рис. 3, 4). В координатах $\ln \eta$, φ опытные точки должны занимать некоторую область, что подтверждается данными рис. 2.

7. Огибающая семейства степенных законов и промежуточные неуниверсальные логарифмические законы

Семейство кривых степенного закона (15) имеет, как показывает анализ (см., например, [12] и ссылки там на предыдущие работы авторов), огибающую. В диапазоне чисел Рейнольдса, исследованном Никурадзе, эта кривая в координатах $\ln \eta$, φ близка к прямой $\varphi = 2,5 \ln \eta + 5,1$. По-видимому, в работе Никурадзе были проведены измерения (или представлены данные), только близкие к огибающей, что и привело автора и его последователей к выводу о справедливости универсального логарифмического закона. В действительности дело обстоит следующим образом (рис. 5, участок II): в плоскости $\ln \eta$, φ кривые семейства степенных законов имеют промежуточно асимптотические прямолинейные участки, описываемые формулой

$$\varphi = \exp\left(\frac{3}{2}\right) \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{4 \ln \text{Re}} \right) \ln \eta - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \text{Re} - \frac{5}{4} \right], \quad (20)$$

т.е. соотношениями, имеющими вид логарифмического закона (12),

$$\varphi = \frac{1}{\kappa_{\text{eff}}(\text{Re})} \ln \text{Re} + B_{\text{eff}}(\text{Re}), \quad (21)$$

но с константами

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{eff}}(\text{Re}) &= \frac{\exp(-3/2)}{(\sqrt{3}/2 + 15/(4 \ln \text{Re}))}, \\ B_{\text{eff}}(\text{Re}) &= -\exp\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\ln \text{Re}}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

зависящими от глобального числа Рейнольдса.

При $\text{Re} \rightarrow \infty$ значение константы $\kappa(\text{Re})$ стремится очень медленно к пределу $\kappa_{\infty} = 2/(\sqrt{3} \exp(3/2)) \approx 0,2776$, а аддитивная постоянная $B(\text{Re})$ стремится к $-\infty$. Таким

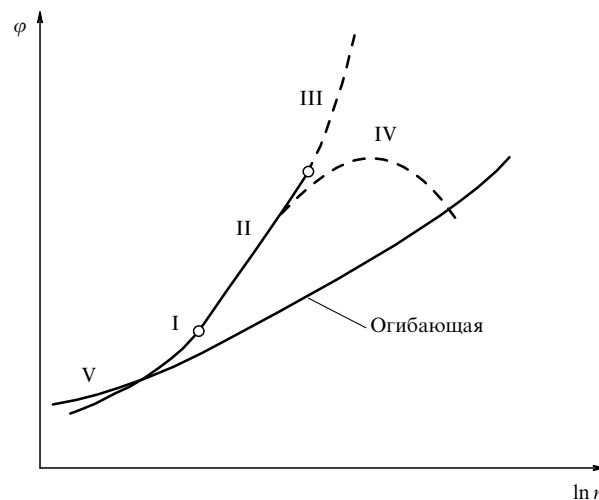


Рис. 5. Огибающая степенных законов и неуниверсальные логарифмические законы.

образом, если проводить измерения в точках, далёких от огибающей, то на графиках в координатах $\ln \eta$, φ должны появляться прямолинейные участки с наклоном, существенно отличающимся от наклона огибающей, положение которых зависит от числа Рейнольдса. Это на самом деле и было выявлено Загаролой в опытах на установке Supergripe (см. рис. 2). Однако Загарола по не вполне понятной причине счёл свои результаты подтверждением логарифмического закона Кармана–Прандтля, хотя и с другими значениями констант: $\kappa = 0,44$, $B = 6,3$; мы же видим здесь чёткое подтверждение неуниверсальности.

8. Анализ турбулентных течений в пограничном слое

Проведённый анализ распределения осреднённой продольной скорости в промежуточной области гладких труб должен, по идее его вывода, быть справедливым для любых сдвиговых потоков, ограниченных твёрдой гладкой стенкой, при очень больших числах Рейнольдса. Точнее, наше предсказание формулируется следующим образом: в промежуточной области любого сдвигового потока, примыкающей к вязкому подслою, должен выполняться неуниверсальный (зависящий от числа Рейнольдса) степенной закон (18). Наиболее подходящим для проверки этого утверждения в важном частном случае представляется течение в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой свободным потоком с постоянной скоростью U . Подчеркнём, что константы, заданные соотношениями (14), остаются фиксированными. Здесь возникает, однако, следующий вопрос: что такое Re для течения в пограничном слое¹?

Традиционно в экспериментальных исследованиях течений в турбулентном пограничном слое в качестве масштаба длины берётся "толщина потери импульса"

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\infty u(U - u) dy, \quad (23)$$

¹ Как говорил ЯБ: "Если вы просите бармена налить вам воду без сиропа, то он не спрашивает, без какого сиропа вам налить. Если — с сиропом, то вопрос: "с каким?" — естествен".

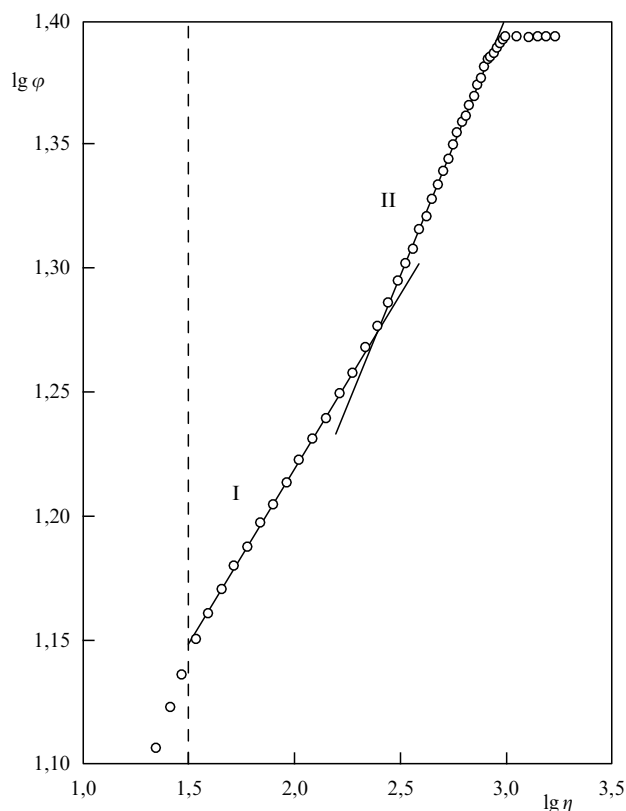


Рис. 6. Структура течения в пограничном турбулентном слое: два степенных закона, резко переходящих один в другой.

и соответствующее число Рейнольдса $Re_\theta = U\theta/\nu$. Однако при сравнении с не универсальным законом мы не можем взять за основу это определение, так как оно содержит в себе элемент произвола. Поэтому был избран следующий путь [13]: полученное экспериментально распределение скорости было представлено в билигарифмической системе координат $\lg \eta$, $\lg \varphi$. Во всех случаях получилось, что это распределение вне вязкого подслоя имеет форму ломаной линии (рис. 6). Таким образом, течение в промежуточном слое, примыкающем к вязкому подслою (I на рис. 6), описывается автомодельным законом $\varphi = A\eta^\alpha$, где коэффициенты A и α могут быть вычислены независимо статистической обработкой опытных данных; при этом разброс оказывается достаточно малым. Выберем выражение для числа Рейнольдса в форме $Re = UA/\nu$, где A — некоторый линейный масштаб. Далее вычисляются два значения числа $\ln Re$ — $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ — путём решения двух уравнений, соответствующих закону (18):

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re_1 + \frac{5}{2} = A, \quad \frac{3}{2 \ln Re_2} = \alpha. \quad (24)$$

Если предлагаемый степенной закон для сдвиговых течений (18), (19) справедлив, то значения $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ должны быть близкими.

Действительно [9, 13], во всех случаях значения $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ оказались близкими, так что естественно было выбрать значение эффективного числа Re в виде

$$\ln Re = \frac{\ln Re_1 + \ln Re_2}{2}, \quad Re = \sqrt{Re_1 Re_2}. \quad (25)$$

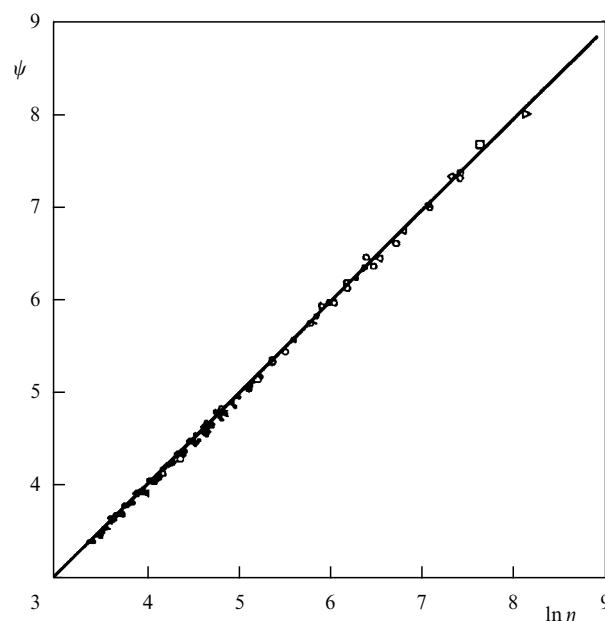


Рис. 7. Течение в нижней промежуточной области пограничного слоя удовлетворяет новому степенному закону.

В плоскости $\ln \eta$, ψ (см. [13]) получилось (рис. 7), что, в соответствии со степенным законом (19), экспериментальные точки с удовлетворительной точностью ложатся на биссектрису первого квадранта.

Полученные результаты являются достаточным подтверждением того, что универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля не может быть признан правильным и не может служить основой для преподавания и инженерных расчётов.

Мы рекомендуем для использования в расчётах течений в гладких трубах степенной закон (18)

$$\varphi = \frac{u}{u_*} = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2} \right) \eta^\alpha, \quad \eta = \frac{u_* y}{\nu}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln Re}, \quad Re = \frac{\bar{u} d}{\nu}, \quad (26)$$

и соответствующий закон сопротивления (см. его вывод в [9]):

$$\lambda = 8 \frac{u_*^2}{\bar{u}^2} = \frac{8}{\psi^{2/(1+\alpha)}}, \quad \psi = \frac{\exp(3/2)(\sqrt{3} + 5\alpha)}{2^\alpha \alpha (1 + \alpha)(2 + \alpha)}. \quad (27)$$

9. Локальная структура развитых турбулентных потоков. Степенные законы Колмогорова – Обухова

Основным законом локальной структуры турбулентных течений при очень больших числах Рейнольдса Re считается "закон двух третей" Колмогорова – Обухова [14–17],

$$D_{LL} = C\varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (28)$$

и его спектральный аналог — "закон пяти третей". Здесь

$$D_{LL}(r) = \overline{[u_L(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_L(\mathbf{x})]^2}$$

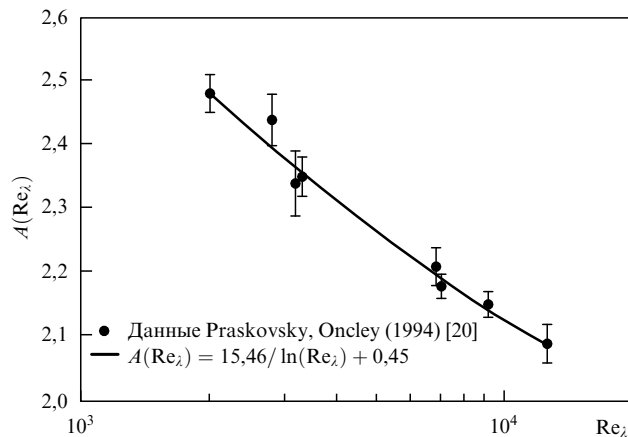


Рис. 8. Экспериментальные данные демонстрируют зависимость константы в законе Колмогорова – Обухова от числа Рейнольдса.

— продольная структурная функция, через которую для несжимаемой жидкости выражаются все компоненты тензора вторых моментов разностей скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{x}$, u_L — компонента скорости в направлении вектора $\mathbf{r}$, ε — средняя скорость диссипации энергии на единицу массы. Аналогия законов локальной структуры и сдвиговых течений при очень больших числах Re отмечалась ранее [18].

Естественно возникает вопрос об универсальности "закона двух третей", т.е. о независимости константы C и показателя степени от числа Рейнольдса. Соображения, аналогичные изложенным выше для сдвиговых течений, подсказывают форму зависимости от Re :

$$D_{LL} = A(Re) (\varepsilon r)^{2/3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^\alpha, \quad (29)$$

где $\lambda = \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$ — колмогоровский масштаб,

$$A(Re) = A_0 + \frac{A_1}{\ln Re}, \quad \alpha = \frac{A_2}{\ln Re} \quad (30)$$

(см. также [19]). В отличие от сдвиговых потоков, количество надёжных экспериментальных данных для локальной структуры очень мало. Однако в экспериментах уже давно была отмечена (см. [17]) неуниверсальность константы C (зависимость от числа Рейнольдса!).

Показательный пример. На графике рис. 8 построена зависимость C от числа Рейнольдса, полученная по экспериментальным данным [20] на трубе ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского). В отличие от сдвиговых течений, поправка α в этом случае может остаться незамеченной по сравнению с $2/3$, поскольку $\alpha \sim 1/\ln Re$, $\ln Re \gg 1$.

Историческое замечание. В примечании к своей статье [16], переизданной в его собрании трудов [21], А.М. Обухов упоминает доклад А.Н. Колмогорова, состоявшийся уже в конце 1939 г., вскоре после начала их занятий турбулентностью. В этом докладе, согласно Обухову, было высказано утверждение, эквивалентное на самом деле гипотезе неполной автомодельности (29). Однако,

как пишет Обухов, Колмогорову в 1939 г. не удалось определить показатель степени — константу α : это было сделано Колмогоровым "на основании соображений подобия" после независимо (специально подчеркнуто Колмогоровым) полученного Обуховым подсчёта баланса распределения энергии пульсаций по спектру. Очевидно, что "соображения подобия" потребовали пренебречь влиянием вязкости.

10. Заключение

Наряду с лордом Рэлеем, Яков Борисович Зельдович был уникален в классической физике XX в. Турбулентность была областью его непреходящих активных интересов. Авторы глубоко сожалеют, что судьба не дала им возможности доложить ЯБ эту работу, во многом созвучную его идеям.

Список литературы

1. von Kármán Th "Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz", in *Proc. of the 3rd Intern. Congress Applied Mechanics, Stockholm, 24–29 August 1930* Vol. 1 (Eds C W Oseen, W Weibull) (Stockholm: Aktiebolaget Sveriges Litografiska Tryckerier, 1931) pp. 85–93
2. Ландау Л, Лифшиц Е *Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости* (Теоретическая физика, Т. 3, Под общ. ред. Л Д Ландау) (М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1944)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (Теоретическая физика, Т. 6) Учеб. пособие для физ. спец. ун-тов: В 10 т., 3-е изд., перераб. (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Course of Theoretical Physics, Vol. 6) 2nd ed., rev. (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
4. Bridgman P W *Dimensional Analysis* (New Haven: Yale Univ. Press, 1931) [Бриджмен П У *Анализ размерностей* (М. – Ижевск: РХД, 2001)]
5. Баренблатт Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Л.: Гидрометеиздат, 1982) [Barenblatt G I *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)]
6. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности Ч. 1* (М.: Наука, 1965) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence* Vol. 1 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971)]
7. Goldenfeld N *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1992)
8. Barenblatt G I *Scaling* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003) [Баренблатт Г И *Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг* (Долгопрудный: Интеллект, 2009)]
9. Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Appl. Mech. Rev.* **50** 413 (1997)
10. Nikuradse J "Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren", VDI (Verein Deutscher Ingenieure)-Forschungsheft 356, Supplement to "Engineering Research" ("Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens") Edition B, Vol. 3 (Berlin: VDI-Verlag, 1932) [Translated into English: "Laws of turbulent flow in smooth pipes", NASA TT F-10,359 (Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1966)]
11. Zagarola M V "Mean flow scaling of turbulent pipe flow", Ph.D. Thesis (Princeton: Princeton Univ., 1996)
12. Barenblatt G I *Flow, Deformation and Fracture* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014)
13. Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *J. Fluid Mech.* **410** 263 (2000)
14. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Translated into English: Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)]

15. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **31** 19 (1941)
16. Обухов А М *Изв. АН СССР Сер. геогр. и геофиз.* **5** 4 (1941)
17. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности Ч. 2* (М.: Наука, 1967) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence* Vol. 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975)]
18. Chorin A "Theories of turbulence" *Lecture Notes Math.* **615** 36 (1977)
19. Barenblatt G I, Goldenfeld N *Phys. Fluids* **7** 3078 (1995)
20. Praskovsky A S, Oncley S *Phys. Fluids* **6** 2886 (1994)
21. Обухов А М *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1988)

Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned

G.I. Barenblatt

*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation;
University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
Tel. +7 (499) 380 41 52
E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com*

A.J. Chorin

*University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
E-mail: chorin@math.berkeley.edu*

V.M. Prostokishin

*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA;
National Research Nuclear University "MEPhI",
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com*

The universal (Reynolds number independent) von Kármán–Prandtl logarithmic law for the velocity distribution in the basic intermediate region of turbulent shear flow is generally considered to be one of the fundamental laws of engineering science and is taught universally in fluid mechanics and hydraulics courses. In the present review it is shown that this law is based on an assumption which cannot be considered as a correct one and which does not correspond to experiment. Nor is L.D. Landau's derivation of this law quite correct. In this paper, an alternative scaling law explicitly incorporating the influence of the Reynolds number is discussed, as well as the corresponding drag law. The study uses the concept of intermediate asymptotics and that of incomplete similarity in the similarity parameter. In the formation of these ideas Yakov Borisovich Zeldovich played an outstanding role. This work is a tribute to his glowing memory.

PACS numbers: **47.10. – g**, **47.27. – i**, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403d.0265

Bibliography — 21 references

Received 5 November 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 265–272 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)