

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.Я. ПОМЕРАНЧУКА

Предельные циклы в ренормгрупповой динамике

К.М. Булычева, А.С. Горский

Рассматривается понятие предельного цикла в ренормализационной группе. Обсуждаются различные примеры этого явления в квантовой механике и теории поля.

PACS numbers: 11.10.Hi, 11.25.Uv, 12.60.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402g.0182

Содержание

1. Введение (182).
 2. Ренормгрупповые циклы в нерелятивистской квантовой механике (184).
 3. Ренормгрупповой цикл в графене (185).
 4. Аномалия в $so(2,1)$ алгебре (186).
 5. Ренормгрупповые циклы в моделях сверхпроводимости (187).
5.1. Модель Ричардсона и модель Годена. 5.2. Модель матрёшки и ХХХ спиновая цепочка. 5.3. Циклическая ренормгруппа в модели матрёшки.
 6. Триальность в интегрируемых моделях и циклическая ренормгруппа (189).
 7. Ренормгрупповые циклы в Ω -деформированных суперсимметричных калибровочных теориях (190).
7.1. Четырёхмерная Ω -деформированная калибровочная теория.
7.2. Трёхмерные калибровочные теории и теории на мировой поверхности бран.
 8. Заключение (192).
- Список литературы (193).

1. Введение

В стандартном примере ренормгрупповой (РГ) поток соединяет критические точки системы. Начинаясь в отталкивающей точке в ультрафиолетовой (УФ) области спектра и заканчиваясь в притягивающей точке в инфракрасной (ИК) области, РГ поток образует откры-

тую РГ траекторию, которая, однако, не является единственно возможной.

Уже в первых работах, посвящённых РГ, была отмечена возможность существования циклов. Этот вопрос не привлекал особого внимания теоретиков, до тех пор пока в [1] не был найден первый явный квантовомеханический пример нетривиального РГ цикла. Эта работа инициировала поиск других примеров циклических РГ как в системах с конечным числом степеней свободы [2–6], так и в теории поля [7–9].

Поскольку наличие критических точек отвечает фазовым переходам второго рода, в [8] явление циклического РГ потока было интерпретировано как некоторое обобщение фазового перехода в двумерных системах. Чтобы проиллюстрировать аргументы работы [8], возьмём стандартный пример РГ потока, соединяющего УФ и ИК критические точки, и рассмотрим движение в пространстве параметров, приводящее к слиянию критических точек. В момент слияния β -функция системы обращается в нуль. В [8] было отмечено, что, когда после слияния один из параметров переходит в комплексную область, появляется щель в спектре, а поведение РГ становится циклическим. Это явление аналогично фазовому переходу Березинского–Костерлица–Таулесса (БКТ), когда при критической температуре происходит деконфайнмент вихрей и при низкой температуре восстанавливается конформная симметрия.

Появление РГ цикла также можно понимать как некоторую аномалию в классической конформной группе [10–13]. Эта аномалия возникает в результате явления "падения на центр", которое может иметь довольно универсальный характер.

Подчеркнём, что циклическая РГ обычно возникает в системах, имеющих не менее двух констант связи. Одна из них претерпевает циклическую РГ динамику, а другая определяет величину периода цикла.

Столкновение УФ и ИК критических точек можно проиллюстрировать следующим образом. Предположим, в системе есть две константы связи (α, g) , и мы занимаемся перенормировкой константы со следующей β -функцией для константы g :

$$\beta_g = (\alpha - \alpha_0) - (g - g_0)^2, \quad (1)$$

К.М. Булычева. Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова", ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация. E-mail: bulychева@itep.ru

А.С. Горский. Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова", ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация. E-mail: gorsky@itep.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный,
Московская область, Российская Федерация

Статья поступила 17 декабря 2013 г.

которая зануляется на поверхности в пространстве параметров:

$$g = g_0 \pm \sqrt{\alpha - \alpha_0}. \quad (2)$$

В [8] было отмечено, что столкновение двух корней при $\alpha = \alpha_0$ можно интерпретировать как столкновение УФ и ИК критических точек. После столкновения точки уходят в комплексную область и появляется цикл в ренормгруппе. Период РГ можно оценить как

$$T \propto \int_{g_{UV}}^{g_{IR}} \frac{dg}{\beta(g; \alpha)} \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha - \alpha_0}}. \quad (3)$$

Для β -функции вида (1) наличие цикла в ренормгруппе является общим.

Нарушение конформной симметрии приводит к образованию массового масштаба, имеющего непертурбативную природу. Из-за наличия РГ цикла появляется целая башня так называемых ефимовских состояний:

$$E_{n+1} = \lambda E_n, \quad (4)$$

где λ определяется периодом цикла.

Наличие в задаче двух констант связи — довольно общее явление, хотя в данном контексте присутствует некоторая специфика. Одна константа связи не нарушает конформную симметрию, которая является точной в некоторой области пространства параметров. Вторая константа связи возникает при введении УФ регуляризации и нарушает конформную симметрию до дискретной подгруппы. Эта подгруппа и проявляется в циклической динамике. УФ регуляризация имеет различную реализацию в рассматриваемых примерах: конечный размер ядра, контактное взаимодействие в моделях сверхпроводимости, конечное расстояние между бранами в суперсимметричных моделях.

Первый пример циклической ренормгруппы был найден В.Н. Ефимовым [14, 15] в контексте ядерной физики. Рассматривалась система трёх тел: две частицы в окрестности порога образования связанного состояния в притягивающем потенциале третьей частицы. В такой системе отсутствуют двухчастичные связанные состояния, но появляется башня трёхчастичных связанных состояний, соответствующая $\lambda \approx 22,7$. РГ интерпретацию этого явления можно найти в [16].

В системах с конечным числом степеней свободы для РГ потока вводится некоторое УФ обрезание. Так, в [1] шаг ренормгруппы соответствует отщеплению верхнего уровня энергии. Этот подход имеет много общего с процедурой перенормировки в матричных моделях (см., например, [17]). Аналогичное УФ обрезание используется также для введения перенормировки в модели матрёшки (Russian Doll model), описывающей одну из моделей сверхпроводимости [18]. В этом случае константа связи, ответственная за образование куперовских пар, претерпевает РГ динамику, а СР-нарушающий параметр определяет период цикла.

УФ обрезание может вводиться не по высоким энергиям, а на малых расстояниях. РГ цикл был обнаружен в нерелятивистской модели Калоджеро с потенциалом $1/r^2$, обладающей конформной симметрией [3–6]. РГ поток вводится через регуляризацию модели в окрестности начала координат. Предполагается, что волновая

функция основного состояния на больших расстояниях не зависит от параметра обрезания. Это условие даёт уравнение на параметр потенциала в окрестности нуля. Уравнение имеет множество решений, что отражает появление башни связанных состояний ефимовского типа в системе Калоджеро с притяжением. Отношение последовательных энергий в спектре определяется константой связи в модели Калоджеро, что отражает дискретную подгруппу конформной группы, остающуюся после регуляризации.

Примеры в теории поля хотя и немногочисленны, но довольно показательны. В двумерии явный пример РГ цикла может быть найден в некоторой области пространства параметров в модели синус-Гордона. Цикл проявляется в структуре полюсов S-матрицы. Башня ефимовских состояний соответствует полюсам со следующим поведением масс резонансов [7]:

$$m_n = m_s \exp \frac{n\pi}{h}, \quad (5)$$

где h — один из параметров модели. Утверждается, что поведение S-матрицы при циклической РГ динамике в двумерных теориях универсально. Общее поведение ефимовских состояний полностью аналогично квантово-механическому случаю.

Возникновение циклического РГ поведения в модели синус-Гордона неудивительно. С одной стороны, фазовый переход БКТ в XY-системе принадлежит к тому же классу универсальности [8]. С другой стороны, XY-система при температуре T может быть отождествлена с системой синус-Гордона с параметрами:

$$L_{SG} = T(\partial\phi)^2 - 4z \cos \phi. \quad (6)$$

При этом β -функции для параметров выглядят как

$$\beta_u = -2v^2, \quad \beta_v = -2uv, \quad (7)$$

где

$$u = 1 - \frac{1}{8\pi T}, \quad v = \frac{2z}{T\Lambda^2}, \quad (8)$$

а Λ — параметр УФ обрезания, который вводится для регуляризации внутренней области вихря. Вид β -функции подразумевает существование предельного цикла выше точки фазового перехода со следующей корреляционной длиной:

$$\xi_{BKT} \Lambda \propto \exp \frac{c}{\sqrt{|T - T_c|}}. \quad (9)$$

Это РГ поведение отвечает циклу в модели синус-Гордона.

Пример ефимовской башни в $(2+1)$ -размерностях был найден в [19] в голографическом описании. Модель основана на D3–D5 бранной конфигурации и соответствует трёхмерной калибровочной теории в пределе больших N с $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией в присутствии магнитного поля и конечной плотности сохраняющегося заряда. В режиме сильной связи калибровочная теория описывается через N_f пробных флейворных бран в нетривиальной $AdS_5 \times S^5$ геометрии с дополнительным $U(1)$ калибровочным полем, отвечающим магнитному полю в теории на голографической границе.

Образование башни ефимовских состояний происходит при некотором значении "чисел заполнения" ν во внешнем магнитном поле. Фазовый переход соответствует изменению минимального вложения пробной D5-браны в объемлющее пространство с критическим поведением типа БКТ по параметру порядка. В этом случае параметр порядка идентифицируется с конденсатом σ , который ведёт себя как

$$\sigma \propto \exp\left(-\frac{1}{\nu}\right). \quad (10)$$

Выше точки фазового перехода геометрия вложения меняется, и брана становится протяжённой вдоль ещё одной координаты. Масштаб, ассоциированный с этой координатой, — не что иное, как непертурбативный масштаб, приводящий к появлению массовой щели. Явление цикла в ренормгруппе в этом случае соответствует неустойчивости Брайтелонера — Фридмана со стороны гравитации.

В четырёхмерии наиболее известный пример ефимовской башни — так называемый скейлинг Миранского для конденсата в магнитном поле. В [20, 21] показано, что во внешнем магнитном поле в абелевой теории появляется конденсат со следующим поведением:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \propto \Lambda^3 \exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\alpha - \alpha_{\text{cr}}}}\right), \quad (11)$$

где α — постоянная тонкой структуры в квантовой электродинамике, а c — постоянная величина, зависящая от деталей модели.

Более свежий пример [22] башни ефимовских состояний в четырёхмерии касается предела Венециано в квантовой хромодинамике (КХД), где $N_f, N_c \rightarrow \infty$, но отношение $x = N_f/N_c$ остаётся постоянным. Этот параметр можно рассматривать как переменную РГ динамики, что выглядит аналогом конечномерных примеров. При некотором значении этого параметра образуется башня конденсатов с геометрическим ефимовским скейлингом. Период ренормгруппы определяется как

$$T \propto \frac{\kappa}{\sqrt{x_c - x}}, \quad (12)$$

где x_c — некоторое критическое значение параметра x .

Наконец, приведём четырёхмерный пример с циклом в ренормгруппе в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории в присутствии Ω -деформации [9]. В этом случае константа связи в калибровочной теории претерпевает периодическую РГ динамику, причём период определяется параметром Ω -деформации,

$$T \propto \epsilon^{-1}. \quad (13)$$

Появление РГ цикла можно вывести из связи уравнений, определяющих основное состояние и возбуждения калибровочной теории поля с квантовыми интегрируемыми системами типа спиновой цепочки.

В этом обзоре мы предлагаем читателю различные примеры циклов в РГ потоках. Случаи, связанные с системами с конечным числом степеней свободы, включают систему Калоджеро и релятивистскую модель с классической конформной симметрией, описывающую движение электрона в поле внешнего точечного заряда в

графене. Ещё один конечномерный случай касается модели матрёшки для описания сверхпроводимости. Теоретико-полевые примеры представлены трёх- и четырёхмерными теориями во внешних полях. Мы используем бранное представление для этих теорий, а также их связь с конечномерными интегрируемыми системами.

2. Ренормгрупповые циклы в нерелятивистской квантовой механике

В этом разделе мы рассматриваем пример предельного цикла ренормгруппы в нерелятивистской системе с потенциалом определённого вида, а именно в системе Калоджеро:

$$H = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\mu(\mu - 1)}{r^2}. \quad (14)$$

Отличительной особенностью системы с гамильтонианом (14) является её конформность. Операторы (H, D, K) , где D — генератор дилатации, а K — конформный буст, порождают конформную $\mathfrak{so}(2, 1)$ алгебру (см. раздел 4).

Собственные функции (14) с конечной энергией явно нарушают эту симметрию; что менее тривиально, конформную симметрию нарушает даже состояние с нулевой энергией. Решение уравнения Шрёдингера $H\psi = 0$ выглядит следующим образом:

$$\psi_0 = c_+ r^\mu + c_- r^{1-\mu}. \quad (15)$$

Это решение масштабно-инвариантно, только если один из коэффициентов $c_\pm$ равен нулю. Если оба коэффициента отличны от нуля, они определяют "внутренний" масштаб расстояния $L = (c_+/c_-)^{1/(-2\mu+1)}$. Требуя, чтобы величина c_+/c_- , которая определяет состояние с нулевой энергией, была инвариантна относительно изменения масштаба,

$$\frac{c_+}{c_-} = -r_0^{-2\mu+1} \frac{\gamma - \mu + 1}{\gamma + \mu}, \quad (16)$$

можно получить β -функцию для параметра γ ,

$$\begin{aligned} \beta_\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial \log r_0} = -(\gamma + \mu)(\gamma - \mu + 1) = \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где r_0 — масштаб расстояния, играющий роль параметра ренормгруппы. Точки $\gamma = \mu - 1$, $\gamma = -\mu$, т.е. решения с $c_+ = 0$, $c_- = 0$, можно отождествить с УФ и ИК критическими точками РГ потока [8].

Если величина $\mu = i\nu$ мнимая, т.е. потенциал притягивающий, уравнение (17) позволяет определить период ренормгруппы:

$$T = - \int_{-\nu+1}^{\nu} \frac{d\gamma}{\beta_\gamma} = \frac{\pi}{\nu - 1/2}. \quad (18)$$

Это значит, что образуется бесконечная иерархия масштабов, отличающихся множителем $\exp[-\pi/(\nu - 1/2)]$. Чтобы увидеть это явно, решим уравнение Шрёдингера при конечной энергии, введя регуляризацию.

В притягивающем потенциале решение (15) может быть записано как

$$\psi_0 \propto \sqrt{r} \sin \left[\left(v - \frac{1}{2} \right) \log \frac{r}{r_0} + \alpha \right]. \quad (19)$$

Это решение бесконечно осциллирует в окрестности нуля, и константа α ничем не фиксирована. Чтобы регуляризовать это поведение, можно нарушить масштабную инвариантность на уровне гамильтониана и ввести регуляторный потенциал. Наиболее популярные способы введения регуляризации — потенциалы вида прямоугольной ямы [4–6] и δ -стенки [3]. Ещё один способ — ввести контактное взаимодействие в нуле [8].

Выбрав регуляризацию потенциалом прямоугольной ямы

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{v(v-1)}{r^2}, & r > R, \\ -\frac{\lambda}{R^2}, & r \leq R, \end{cases} \quad (20)$$

потребуем, чтобы действие оператора дилатации на волновую функцию было одинаковым при приближении к $r = R$ справа и слева. Это условие приводит к уравнению на λ :

$$\sqrt{\lambda} \cot \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} + v \cot \left(v \log \frac{R}{r_0} \right). \quad (21)$$

Многозначную функцию $\lambda(R)$ можно выбрать непрерывной [5, 6].

Волновая функция с конечной энергией, регулярная на бесконечности, является комбинацией функций Бесселя [5, 6]

$$\psi(r, \kappa_m) = \sqrt{r} (-1)^m \left[i \exp \left(-iv \frac{\pi}{2} \right) J_{iv}(\kappa_m r) - i \exp \left(iv \frac{\pi}{2} \right) J_{-iv}(\kappa_m r) \right], \quad (22)$$

где κ_m — энергия состояния. Спектр состоит из бесконечного числа связанных состояний, причём соседние энергии отличаются множителем

$$\frac{\kappa_{m+1}}{\kappa_m} = \exp \left(-\frac{\pi}{v} \right). \quad (23)$$

Заметим, что координата входит в волновую функцию (22) только в произведении с энергией, и спектр порождается оператором дилатации:

$$\psi_{m+1} = \exp \left(-\frac{\pi}{v} r \partial_r \right) \psi_m. \quad (24)$$

Действие оператора дилатации сдвигает нули волновой функции из области $r < R$ в область обратно-квадратичного потенциала, и шаг эволюции (24) соответствует перемещению одного нуля из области постоянного потенциала. Так как волновая функция бесконечно осциллирует в окрестности нуля, перемещение всех нулей из области постоянного потенциала потребует бесконечного количества шагов, что отражается в наличии бесконечной башни состояний.

3. Ренормгрупповой цикл в графене

В этом разделе мы рассматриваем пример предельного цикла ренормгруппы в релятивистском аналоге конформной системы типа Калоджеро в $(2+1)$ -измерениях, который соответствует движению в поле заряда в графене. В задаче действует классическая конформная симметрия, наличие которой позволяет ожидать циклическую ренормгруппу и ефимовские состояния после введения УФ обрезания [23].

Задача внешнего заряда в графене обсуждалась в теоретических [24–26] и экспериментальных [27, 28] работах. Показано, что существует башня "квазиридберговских" состояний с экспоненциальным скейлингом [29]. Это явление типа атомного коллапса, аналогичное неустойчивости $Z > 137$ сверхтяжёлых атомов в квантовой электродинамике [30].

Перейдём к рассмотрению электрона в графене, взаимодействующего с внешним зарядом. Двумерный гамильтониан задаётся формулой:

$$H_D = v_F \sigma_i p^i + V(r), \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

Внешний заряд создаёт кулоновский потенциал

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad r \geq R. \quad (26)$$

Как мы увидим в дальнейшем, волновая функция в присутствии потенциала (26) бесконечно осциллирует в нуле и должна быть регуляризована на некотором масштабе обрезания R . Поэтому в окрестности нуля $r \leq R$ потенциал (26) нужно заменить некоторым постоянным потенциалом $V_{\text{reg}}(r, \lambda(R))$. Условие перенормировки параметра λ является независимостью волновой функции с нулевой энергией от УФ регуляризации. Это условие выбрано аналогично условию регуляризации системы Калоджеро (см. раздел 2). Таким образом, нашей задачей является нахождение волновой функции с нулевой энергией

$$H_D \psi_0 = 0. \quad (27)$$

Так как гамильтониан коммутирует с оператором J_3 ,

$$J_3 = i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sigma_3, \quad [H_D, J_3] = 0, \quad (28)$$

мы можем искать решения уравнения (27) в виде:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \chi_0(r) \\ \xi_0(r) \exp(i\varphi) \end{pmatrix}, \quad J_3 \psi_0 = \psi_0. \quad (29)$$

Тогда в полярных координатах уравнение (27) выглядит как

$$\begin{cases} -i\hbar v_F \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \xi_0 = -V(r) \chi_0, \\ -i\hbar v_F \partial_r \chi_0 = -V(r) \xi_0, \end{cases} \quad (30)$$

что равносильно

$$\begin{cases} \xi_0(r) = i\hbar v_F (V(r))^{-1} \partial_r \chi_0, \\ \partial_r^2 \chi_0 + \left(\frac{1}{r} - \frac{V'(r)}{V(r)} \right) \partial_r \chi_0 + \frac{V^2(r)}{\hbar^2 v_F^2} \chi_0 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Для потенциала $V = -\alpha/r$ получим следующее уравнение на $\chi_0(r)$:

$$\partial_r^2 \chi_0 + \frac{2}{r} \partial_r \chi_0 + \frac{\beta^2}{r^2} \chi_0 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha}{\hbar v_F}. \quad (32)$$

Вводя параметр $\beta^2 = 1/4 + v^2$, запишем решение в виде:

$$\chi_0 = \sqrt{r} \left(c_- \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-iv} + c_+ \left(\frac{r}{r_0} \right)^{iv} \right) \propto \sqrt{r} \sin \left(v \log \frac{r}{r_0} + \varphi \right). \quad (33)$$

Это решение обладает теми же свойствами, что и состояние с нулевой энергией в системе Калоджеро (15): при ненулевых $c_{\pm}$ оно порождает собственный масштаб расстояния и неограниченно осциллирует в нуле.

Чтобы определить константу φ , нужно ввести потенциал обрезания. Поэтому рассмотрим решение в потенциале

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r}, & r > R, \\ V_{\text{reg}} = -\hbar v_F \frac{\lambda}{R}, & r \leq R. \end{cases} \quad (34)$$

Оператор дилатации действует на χ следующим образом:

$$r \partial_r \chi_0 = \left(\frac{1}{2} + v \cot \left(v \log \frac{r}{r_0} \right) \right) \chi_0. \quad (35)$$

Для постоянного потенциала V_{reg} из (31) находим

$$\partial_r^2 \chi_0^{\text{reg}} + \frac{1}{r} \partial_r \chi_0^{\text{reg}} + \frac{\lambda^2}{R^2} \chi_0^{\text{reg}} = 0. \quad (36)$$

Выбирая решение (36), регулярное в нуле, получаем

$$\chi_0^{\text{reg}} \propto J_0 \left(\lambda \frac{r}{R} \right). \quad (37)$$

Вычислив действие оператора дилатации на решение в области постоянного потенциала и приравняв его к действию оператора дилатации (35), получим уравнение на регуляторный параметр λ :

$$\frac{1}{2} + v \cot \left(v \log \frac{R}{r_0} \right) = -\lambda \frac{J_1(\lambda)}{J_0(\lambda)}. \quad (38)$$

Уравнение (38) задаёт λ в виде многозначной функции масштаба обрезания R . Периодическая РГ динамика соответствует прыжкам с одной ветви функции $\lambda(R)$ на другую.

Теперь найдём связанные состояния в потенциале (26) и рассмотрим уравнение Дирака

$$H_D \psi_{\kappa} = -\hbar v_F \kappa \psi_{\kappa}. \quad (39)$$

Тогда уравнение на χ , аналогичное (31), запишется как

$$\partial_r^2 \chi_{\kappa} + \frac{2\beta - \kappa r}{\beta - \kappa r} \frac{1}{r} \partial_r \chi_{\kappa} + \left(\frac{\beta}{r} - \kappa \right)^2 \chi_{\kappa} = 0. \quad (40)$$

Асимптотически, когда $r \gg \beta/\kappa$, решение (40), регулярное на бесконечности, является функцией Ганкеля:

$$\chi_{\kappa} \propto H_0^{(1)}(i\kappa r). \quad (41)$$

При малых $r \ll \beta/\kappa$ решение не регулярно в нуле,

$$\chi_{\kappa} \propto \sqrt{r} \sin \left(v \log \frac{r}{r_0} \right), \quad (42)$$

и нам снова нужно ввести регуляторный потенциал.

Решив уравнение Дирака (39) в присутствии постоянного потенциала V_{reg} и вычислив действие оператора дилатации

$$r \partial_r \chi_{\kappa}^{\text{reg}} = -(\lambda - \kappa R) \frac{J_1(\lambda - \kappa R)}{J_0(\lambda - \kappa R)} \chi_{\kappa}^{\text{reg}}, \quad (43)$$

мы можем приравнять (43) к действию дилатации на (42) и получить уравнение на спектр связанных состояний:

$$\frac{1}{2} + v \cot \left(v \log (\kappa R) \right) = -(\lambda - \kappa R) \frac{J_1(\lambda - \kappa R)}{J_0(\lambda - \kappa R)}. \quad (44)$$

Это условие даёт спектр из бесконечного количества связанных состояний:

$$\kappa_n = \kappa_* \exp \left(-\frac{\pi n}{v} \right), \quad \kappa \rightarrow \infty. \quad (45)$$

4. Аномалия в $\mathfrak{so}(2,1)$ алгебре

Сделаем несколько комментариев по поводу алгебраической стороны циклической ренормгруппы, рассмотренной в [10–13]. Как уже упоминалось, конформная симметрия имеет принципиальное значение в задаче Калоджеро, так как гамильтониан масштабно инвариантен. Группа конформной симметрии может действовать на собственных функциях гамильтониана, причём сам гамильтониан может быть выражен через генераторы этой группы. Эта конструкция известна из теории точно и квазиточно решаемых задач, когда размерность представления группы задаёт размер алгебраической части спектра.

Введём генераторы J_1, J_2, J_3 конформной алгебры $\mathfrak{so}(2,1)$:

гамильтониан Калоджеро

$$J_1 = H = p^2 + V(r), \quad (46)$$

оператор дилатации

$$J_2 = D = tH - \frac{1}{4}(pr + rp) \quad (47)$$

и генератор специального конформного преобразования

$$J_3 = K = t^2 H - \frac{t}{2}(pr + rp) + \frac{1}{2} r^2. \quad (48)$$

Соотношения в алгебре $\mathfrak{so}(2,1)$ имеют вид

$$[J_2, J_1] = -iJ_1, \quad [J_3, J_1] = -2iJ_2, \quad [J_2, J_3] = iJ_3. \quad (49)$$

Сингулярное поведение потенциала в нуле приводит к возникновению аномалии в алгебре $\mathfrak{so}(2,1)$:

$$A(r) = -i[D, H] + H, \quad (50)$$

которую в d -мерном пространстве можно представить как

$$A(r) = -\frac{d-2}{2} V(r) + (r^i \nabla_i) V(r). \quad (51)$$

Следовательно, выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle_{\text{ground}} = E_{\text{ground}}, \quad (52)$$

где матричный элемент берётся по основному состоянию.

Оказывается, что (52) выполняется для сингулярных потенциалов в модели Калоджеро и в моделях с контактным потенциалом $V(r) = g\delta(r)$. Выражение для аномалии не зависит от выбора регуляризации. Более того, детальный анализ показывает, что аномалия пропорциональна β -функции параметра регуляризации потенциала.

Аналогичное вычисление для аномалии в графене может быть выполнено для произвольного состояния:

$$\left\langle \frac{dD}{dt} \right\rangle_{\psi} = \langle \Xi \rangle_{\psi} = - \int d^2x \psi^* (V(x) + x_i \partial_i V(x)) \psi, \quad (53)$$

что при использовании регуляризации прямоугольной ямой даёт

$$\langle \Xi \rangle_{\psi} = \hbar v_F \frac{\lambda(R)}{R} \frac{\int_0^R r |\psi|^2 dr}{\int_0^\infty r |\psi|^2 dr}. \quad (54)$$

В двумерии для анализа (51) удобно применить тождество

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r} = 2\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (55)$$

которое упрощает вычисление аномалии для любого нормированного связанного состояния

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle_{\psi} = -g\pi \int d^2r \delta(r) |\Psi(r)|^2. \quad (56)$$

5. Ренормгрупповые циклы в моделях сверхпроводимости

В этом разделе мы рассмотрим РГ поток в моделях сверхпроводимости, сначала в модели Ричардсона, а затем в её обобщении — модели матрёшки, в которой ренормгруппа является циклической. Эти модели выделены тем, что в них предполагается конечное число фермионных уровней. Удобно использовать связь этих моделей с интегрируемыми системами.

5.1. Модель Ричардсона и модель Годена

Модель сверхпроводимости Ричардсона [32, 33] с некоторым числом дважды вырожденных фермионных уровней $\epsilon_{j\sigma}$, $j = 1, \dots, N$ описывает фиксированное число куперовских пар. Предполагается, что некоторые уровни энергии заполнены куперовскими парами, а уровни с одним фермионом заблокированы. Гамильтониан модели Ричардсона имеет вид

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{j,\sigma=\pm} \epsilon_{j\sigma} c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma} - G \sum_{jk} c_{j+}^\dagger c_{j-}^\dagger c_{k-} c_{k+}, \quad (57)$$

где $c_{j\sigma}$ — фермионный оператор, G — константа связи, ответственная за притяжение, которое формирует куперовскую пару. В терминах бозонных операторов этот гамильтониан выглядит как

$$H_{\text{BCS}} = \sum_j \epsilon_j b_j^\dagger b_j - G \sum_{jk} b_j^\dagger b_k, \quad (58)$$

где

$$[b_j^\dagger, b_k] = \delta_{jk}(2N_j - 1), \quad b_j = c_{j-} c_{j+}, \quad N_j = b_j^\dagger b_j. \quad (59)$$

Собственные функции гамильтониана даются выражением

$$|M\rangle = \prod_i B_i(E_i) |\text{vac}\rangle, \quad B_i = \sum_j \frac{1}{\epsilon_j - E_i} b_j^\dagger, \quad (60)$$

причём выполняются уравнения анзаца Бете

$$G^{-1} = - \sum_j \frac{2}{\epsilon_j - E_i} + \sum_j \frac{1}{E_j - E_i}. \quad (61)$$

Энергия соответствующего состояния:

$$E(M) = \sum_i E_i. \quad (62)$$

В [33] было показано, что модель Ричардсона является точно решаемой и тесно связана с определённым обобщением модели Годена. Чтобы описать эту связь, запишем алгебру так называемых операторов псевдоспина $\mathfrak{sl}(2)$ в терминах операторов рождения и уничтожения куперовских пар:

$$t_j^- = b_j, \quad t_j^+ = b_j^\dagger, \quad t_j^0 = N_j - \frac{1}{2}. \quad (63)$$

Гамильтониан Ричардсона коммутирует с набором операторов R_j :

$$R_j = -t_j^0 - 2G \sum_{i \neq j} \frac{t_i t_j}{\epsilon_i - \epsilon_j}, \quad (64)$$

которые идентифицируются с гамильтонианами Годена,

$$[H_{\text{BCS}}, R_j] = [R_i, R_j] = 0. \quad (65)$$

Более того, гамильтониан Ричардсона непосредственно выражается через операторы R_j :

$$H_{\text{BCS}} = \sum_i \epsilon_i R_i + G \left(\sum_i R_i \right)^2 + \text{const}. \quad (66)$$

Число фермионных уровней N совпадает с числом узлов в модели Годена, а константа связи G соответствует нетривиальному граничному условию. Уравнения анзаца Бете для модели Ричардсона (61) совпадают с уравнениями анзаца Бете для системы Годена. В [2] показано, что корни Бете соответствуют возбуждённым куперовским парам. С точки зрения конформной теории поля куперовские пары соответствуют операторам экранирования [34, 35].

При нетривиальных вырождениях уровней энергии d_j уравнения анзаца Бете принимают вид

$$G^{-1} = - \sum_j \frac{d_j}{\epsilon_j - E_i} + \sum_j \frac{2}{E_j - E_i}. \quad (67)$$

5.2. Модель матрёшки и XXX спиновая цепочка

Важным обобщением модели Ричардсона, описывающей сверхпроводимость, является так называемая модель матрёшки [2]. Она содержит дополнительный безразмерный параметр α . Гамильтониан модели матрёшки имеет

вид

$$H_{RD} = 2 \sum_i^N (\epsilon_i - G) N_i - \bar{G} \sum_{j < k} (\exp(i\alpha) b_k^\dagger b_j + \exp(-i\alpha) b_j^\dagger b_k), \quad (68)$$

с двумя размерными параметрами G , η и $\bar{G} = \sqrt{G^2 + \eta^2}$. В этих переменных параметр α равен

$$\alpha = \arctan \frac{\eta}{G}. \quad (69)$$

Также удобно ввести безразмерные параметры g , θ , заданные как $G = gd$ и $\eta = \theta d$, где d — расстояние между уровнями. Модель матришки сводится к модели Ричардсона в пределе $\eta \rightarrow 0$.

Модель матришки также оказывается интегрируемой. Она соответствует уже не модели Годена, а неоднородной твистованной квантовой спиновой цепочке общего вида [36]. Трансфер-матрица этой спиновой цепочки $t(u)$ коммутирует с H_{RD} , причём последний можно выразить через гамильтонианы спиновой цепочки.

Уравнение на спектр модели матришки

$$\exp(2i\alpha) \prod_{l=1}^N \frac{E_l - \epsilon_l + i\eta}{E_l - \epsilon_l - i\eta} = \prod_{j \neq i}^M \frac{E_i - E_j + 2i\eta}{E_i - E_j - 2i\eta} \quad (70)$$

совпадает с уравнениями анзаца Бете для спиновой цепочки.

Возьмём логарифм от обеих частей уравнения (70) и получим

$$\alpha + \pi Q_i + \sum_{l=1}^N \arctan \frac{\eta}{E_l - \epsilon_l} - \sum_{j=1}^M \arctan \frac{2\eta}{E_i - E_j} = 0. \quad (71)$$

Заметим, что в уравнение входит произвольное целое число, отвечающее за многозначность арктангенса.

Шаг ренормгруппы сводится к интегрированию N -й степени свободы в модели матришки, или, эквивалентно, к интегрированию N -й неоднородности в спиновой цепочке. В результате перенормируется твист. Из (71) легко увидеть, что

$$\arctan \frac{\eta}{G_N} - \arctan \frac{\eta}{G_{N-1}} = \sum_{i=1}^M \arctan \frac{2\eta}{E_i - \epsilon_N}. \quad (72)$$

При $M = 1$ отсюда следует соотношение

$$G_{N-1} - G_N = \frac{G_N^2 + \eta^2}{\epsilon_N - G_N - E}, \quad (73)$$

что является дискретной версией уравнения (1).

Разумеется, то же соотношение можно вывести из гамильтониана (68). Рассмотрим волновую функцию $\psi = \sum_i^N \psi_i b_i^\dagger |0\rangle$. Тогда уравнение Шрёдингера для состояния с одной куперовской парой имеет вид

$$(\epsilon_i - G - E) \psi_i = (G + i\eta) \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j + (G - i\eta) \sum_{j=i+1}^N \psi_j. \quad (74)$$

Чтобы проинтегрировать N -ю степень свободы, нужно выразить ψ_N через остальные моды,

$$\psi_N = \frac{G + i\eta}{\epsilon_N - G - E} \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j, \quad (75)$$

и подставить в уравнение Шрёдингера (74). Тогда константа G_{N-1} в полученном уравнении будет отличаться от исходного значения G_N так же, как в (73).

Ключевая особенность модели матришки — это множественные решения уравнения на щель. Щель параметризуется как

$$\Delta_n = \frac{\omega}{\sinh t_n}, \quad t_n = t_0 + \frac{\pi n}{\theta}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (76)$$

где t_0 — решение уравнения

$$\tan(\theta t_0) = \frac{\theta}{g}, \quad 0 < t_0 < \frac{\pi}{\theta} \quad (77)$$

и $\omega = dN$.

Здесь $E^2 = \epsilon^2 + |\Delta|^2$. Это поведение можно вывести из приближения среднего поля [18]. Более точная интерпретация — щель с минимальной энергией определяет основное состояние, а остальные значения щели описывают возбуждения. В пределе $\theta \rightarrow 0$ щели $\Delta_{n>0} \rightarrow 0$,

$$t_0 = \frac{1}{g}, \quad \Delta_0 = 2\omega \exp\left(-\frac{1}{g}\right), \quad (78)$$

и воспроизводится стандартное выражение для щели в модели БКШ. В режиме слабой связи щели ведут себя как

$$\Delta_n \propto \Delta_0 \exp\left(-\frac{n\pi}{\theta}\right). \quad (79)$$

С точки зрения решения анзаца Бете, множественные щели отвечают различным выборам ветви логарифма, т.е. различным параметрам Q в (70).

Если присутствует нетривиальное вырождение уровней d_n , то модель матришки модифицируется и оказывается связанной с XXX цепочкой с высшими спинами. Спины s_i определяются вырождением пар d_i на i -м уровне:

$$s_i = \frac{d_i}{2}, \quad (80)$$

и уравнения анзаца Бете также модифицируются:

$$\exp(2i\alpha) \prod_{l=1}^N \frac{E_l - \epsilon_l + id_l + i\eta}{E_l - \epsilon_l - id_l - i\eta} = \prod_{j \neq i}^M \frac{E_i - E_j + 2i\eta}{E_i - E_j - 2i\eta}. \quad (81)$$

5.3. Циклическая ренормгруппа в модели матришки

Модель матришки проявляет циклическое РГ поведение [2]. РГ поток можно ввести, отщепляя верхний фермионный уровень, используя процедуру, предложенную в [1]. Уравнение ренормгруппы (73) приобретает вид:

$$g_{N-1} = g_N + \frac{1}{N}(g_N^2 + \theta^2), \quad \theta_{N-1} = \theta_N. \quad (82)$$

В пределе больших N естественная переменная ренормгруппы — это $s = \log(N/N_0)$, и решение уравнения ренормгруппы имеет вид:

$$g(s) = \theta \tan\left(\theta s + \tan^{-1} \frac{g_0}{\theta}\right). \quad (83)$$

Поэтому константа связи меняется циклически,

$$g(s + \lambda) = g(s), \quad g(\exp(-\lambda)N) = g(N), \quad (84)$$

с РГ периодом

$$\lambda = \frac{\pi}{\theta} \quad (85)$$

и общим числом щелей в модели, равным

$$N_{\text{cond}} \propto \frac{\theta}{\pi} \log N. \quad (86)$$

Множественные щели — это проявление ефимовских состояний. Размер куперовской пары в N -м конденсате также меняется в процессе динамики по ренормгруппе. Цикличность ренормгруппы можно показать даже для одной куперовской пары.

Что происходит со спектром на протяжении периода? В [18] было показано, что он перестраивается. РГ поток терпит разрыв от $g = +\infty$ до $g = -\infty$, когда начинается новый цикл. После каждого разрыва низший конденсат исчезает из спектра,

$$A_{N+1}(g = +\infty) = A_N(g = -\infty), \quad (87)$$

так как волновая функция $(N+1)$ -го состояния играет роль N -й волновой функции в следующем цикле (см. (75)). Это же поведение можно вывести из уравнений анзаца Бете [18]. Чтобы найти множественные щели, нужно помнить, что решения уравнений анзаца Бете классифицируются целыми числами Q_i , $i = 1, \dots, M$, задающими ветви логарифма. Если принять, что $Q_i = Q$ для всех корней Бете, то это число сдвигается на единицу после каждого периода и задаёт номер решения уравнения на щель:

$$A_Q \propto A_0 \exp(-\lambda Q). \quad (88)$$

В пределе большого N уравнения анзаца Бете для модели матрёшки сводятся к уравнениям для модели Ричардсона, поэтому при РГ динамике константа связи Годена сдвигается,

$$G_Q^{-1} = \eta^{-1}(\alpha + \pi Q), \quad (89)$$

что можно интерпретировать как изменение граничных условий в обобщённой модели Годена.

Подчеркнём, что необычное циклическое поведение в модели матрёшки возникает из-за наличия двух констант связи.

6. Триальность в интегрируемых моделях и циклическая ренормгруппа

В этом разделе мы рассмотрим различные дуальности в интегрируемых моделях и зададимся вопросом, как они согласуются с циклической РГ динамикой. Этот вопрос мотивирован тесной связью моделей сверхпроводимости со спиновыми цепочками. Мы рассматриваем три различных семейства моделей, которые при определённой идентификации фазовых пространств и параметров можно связать между собой. Первое семейство — системы фермионов (модель Ричардсона и матрёшка), имеющие щели в спектре. Второе семейство включает твистованные неоднородные спиновые цепочки Годена, XXX и XXZ и их обобщения. Третье семейство — это системы многих тел типа Калоджеро–Рёйсенарса (рис. 1).

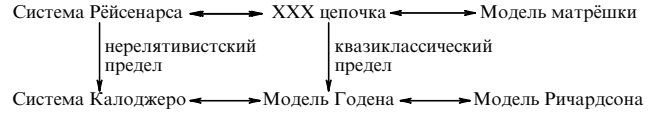


Рис. 1. Три различных семейства моделей: системы фермионов (модель Ричардсона и матрёшка), твистованные неоднородные спиновые цепочки Годена, XXX и XXZ и их обобщения, системы многих тел типа Калоджеро–Рёйсенарса. Кроме триальности, показанной на этом рисунке, на стороне системы Рёйсенарса/Калоджеро и XXX/Годена действует биспектральная дуальность. Эта дуальность — проявление трёхмерной зеркальной симметрии [37], которая меняет местами координаты и собственные значения оператора Лакса в классических системах и неоднородности и твисты — в квантовых.

Можно поставить следующие вопросы:

- Какое условие задаёт уравнение ренормгруппы в каждом семействе?
- Что является параметром ренормгруппы?
- Чем определяется период цикла?

В сверхпроводящей модели при одном шаге ренормгруппы отщепляется верхний уровень энергии и перенормируется константа связи для куперовской пары. РГ время отождествляется с числом уровней энергии $t = \log N$. Период ренормгруппы задаётся параметром Т-асимметрии в модели матрёшки.

В спиновой цепочке шаг ренормгруппы соответствует отщеплению "высшей" неоднородности с соответствующей перенормировкой твиста. Период ренормгруппы задаётся постоянной Планка в спиновой цепочке. В биспектрально дуальной спиновой цепочке [38, 39] "отщепляется" твист и "перенормируется" неоднородность. Так как постоянная Планка при биспектральности обращается, $\hbar_{\text{spin}} \rightarrow \hbar_{\text{spin}}^{-1}$, период цикла ренормгруппы также обращается. Заметим, что уравнение ренормгруппы в сверхпроводящей модели связано с уравнением анзаца Бете для спиновой цепочки [18]. Это уравнение даёт условие на инвариантность корня Бете при РГ динамике.

Для системы двух тел с притягивающим рациональным потенциалом уравнения ренормгруппы выводятся из непрерывности волновой функции основного состояния по параметру обрезания. Это условие накладывает ограничение на регуляторный потенциал. Соответственно, ренормгруппа имеет цикл с периодом

$$T_{\text{Cal}} = \frac{\pi}{v - 1/2}, \quad (90)$$

как было показано в разделе 2.

Квантово-классическая дуальность (см., например, [37, 40]) связывает системы типа спиновой цепочки с классическими системами многих тел. Это соответствие отображает рациональную модель Годена в рациональную систему Калоджеро, причём неоднородности спиновой цепочки становятся координатами Калоджеро, а твист становится собственным значением матрицы Лакса. Также можно сделать преобразование биспектральности для Калоджеро и связать координату с твистом, а собственные значения матрицы Лакса — с неоднородностями. Тогда перенормировка твиста в спиновой цепочке соответствует перенормировке координаты в системе Калоджеро.

Чтобы понять, как РГ циклы в системе Калоджеро связаны с циклами в спиновой цепочке, нам нужно

обобщить квантово-классическую дуальность до квантово-квантовой. Спектральная задача в системе Калоджеро может быть идентифицирована с уравнением Книжника–Замолодчикова [41], содержащим гамильтониан Годена H_{Gaud} (64):

$$\frac{d}{dz_i} \Psi = H_{\text{Gaud}} \Psi + \lambda \Psi. \quad (91)$$

Так как РГ условие на стороне Калоджеро формулируется для основного состояния, неоднородный член в (91) в этом случае отсутствует. Простейший тест соответствия РГ циклов при квантово-квантовой дуальности состоит в идентификации периодов. Со стороны спиновой цепочки период определяется постоянной Планка, а со стороны Калоджеро — константой связи. Для квантово-классической дуальности верно соответствие [40]

$$\hbar_{\text{spin}} = v, \quad (92)$$

которое действительно подразумевает соответствие циклов в модели Калоджеро и спиновой цепочке.

Ефимовские состояния в этих моделях имеют следующую интерпретацию. В сверхпроводящей системе они соответствуют семейству щелей A_n с ефимовским скейлингом, отвечающим нарушенной конформной симметрии. В спиновой цепочке они отвечают различным ветвям решений уравнений анзаца Бете. Наконец, в системах типа Калоджеро–Рёйсенарса — играют роль семейства связанных состояний вблизи порога непрерывного спектра.

7. Ренормгрупповые циклы в Ω -деформированных суперсимметричных калибровочных теориях

Рассмотрим, как РГ поток в Ω -деформированных суперсимметричных калибровочных теориях формулируется в терминах движений бран. Почему в деформированных теориях ренормгруппа может быть циклической? Дело в том, что основное состояние и возбуждения деформированной калибровочной теории описываются в терминах квантовой спиновой цепочки [42, 43]. В предыдущих разделах была показана естественность циклического поведения ренормгруппы для спиновой цепочки, поэтому остаётся только аккуратно определить параметры РГ динамики в деформированной теории.

Сначала мы обсудим ренормгруппу в четырёхмерной Ω -деформированной теории. Затем перейдём к трёхмерной теории, реализованной как теория на D-бранах, и рассмотрим вопрос о связи РГ динамики с движениями бран.

7.1. Четырёхмерная Ω -деформированная калибровочная теория

Уравнения анзаца Бете для спиновой цепочки встречаются не только в моделях сверхпроводимости, но и в калибровочных теориях. Квантовая XXX спиновая цепочка отвечает за пространство модулей вакуума четырёхмерной Ω -деформированной теории в пределе Некрасова–Шаташвили, т.е. когда один из параметров деформации равен нулю: $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon$ [42, 43]. Как показано в разделе 5, спиновая цепочка обладает циклическим РГ поведением, поэтому интересно понять, как оно проявляется в калибровочной теории.

Рассмотрим четырёхмерную $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную калибровочную теорию с нулевой β -функцией, т.е. при $N_f = 2N_c$. Эта теория дуальна классической неоднородной твистованной спиновой цепочке в том смысле, что спектральная кривая для спиновой цепочки совпадает с кривой Зайберга–Виттена для калибровочной теории. Твист в спиновой цепочке отождествляется с модулярным параметром кривой и с комплексифицированной константой связи в калибровочной теории; неоднородности в спиновой цепочке соответствуют массам гипермультиплетов. Для более подробного обсуждения связи между классическими интегрируемыми системами и калибровочными теориями читатель может обратиться к обзору [44].

Ω -деформация вводится для регуляризации инстантонных расходимостей в статистической сумме калибровочной теории [45]. Мы можем рассматривать четырёхмерную теорию как редукцию шестимерной $\mathcal{N} = 1$ теории с метрикой

$$ds^2 = 2 dz d\bar{z} + (dx^m + \Omega^{mn} x_n d\bar{z} + \bar{\Omega}^{mn} x_n dz)^2, \quad m = 1, \dots, 4. \quad (93)$$

Таким образом можно рассматривать теорию на четырёхмерном пространстве, расслоённом над двумерным тором. Параметры деформации $\epsilon_{1,2}$ можно представлять как химические потенциалы для вращений в двух ортогональных плоскостях четырёхмерного евклидова пространства.

Нетривиальная Ω -деформация модифицирует соответствие между калибровочными теориями и интегрируемыми системами. В пределе Некрасова–Шаташвили Ω -деформированная калибровочная теория соответствует квантовой XXX спиновой цепочке, причём ϵ играет роль постоянной Планка [42, 43]. Эта деформированная теория также оказывается дуальной двумерной эффективной теорией на мировой поверхности неабелевой струны [46, 47].

Рассмотрим Ω -деформированную $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную КХД с калибровочной группой $SU(L)$, L фундаментальными мультиплетами с массами m_i^f и L антифундаментальными мультиплетами с массами m_i^{af} . Обозначим набор собственных значений присоединённого скаляра в векторном мультиплете как $\mathbf{a}$. Разложим деформированную статистическую сумму в окрестности $\epsilon = 0$, чтобы идентифицировать препотенциал и эффективный суперпотенциал,

$$\log \mathcal{Z}(\mathbf{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) \sim \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \mathcal{F}(\mathbf{a}, \epsilon) + \frac{1}{\epsilon_2} \mathcal{W}(\mathbf{a}, \epsilon). \quad (94)$$

Эффективный суперпотенциал — многозначная функция, причём её ветвь задаётся набором целых чисел $\mathbf{k}$:

$$\mathcal{W}(\mathbf{a}, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{F}(\mathbf{a}, \epsilon) - 2\pi i \mathbf{k} \mathbf{a}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^L. \quad (95)$$

Уравнение на вакуумы имеет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{a}, \epsilon)}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^L, \quad (96)$$

и даёт ограничение на $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} = \mathbf{m}^f - \epsilon \mathbf{n}. \quad (97)$$

Теория допускает существование неабелевых струн в четырёхмерном пространстве-времени. Двумерная тео-

рия на мировой поверхности неабелевой струны содержит L киральных мультиплетов в фундаментальном представлении с твистованными массами M_i^F и L мультиплетов в антифундаментальном представлении с массами M_i^{AF} , которые связаны с массами гипермультиплетов в четырёхмерной теории как

$$M_i^F = m_i^f - \frac{3}{2} \epsilon, \quad M_i^{AF} = m_i^{af} + \frac{1}{2} \epsilon. \quad (98)$$

Двумерная теория также содержит киральный мультиплет в присоединённом представлении с массой ϵ . Ранг калибровочной группы N (или, эквивалентно, число неабелевых струн) задаётся вектором $\mathbf{n}$ с помощью соотношения:

$$N + L = \sum_{l=1}^L n_l. \quad (99)$$

Модулярные параметры четырёхмерной и двумерной теорий связаны сдвигом на постоянную величину

$$\tau_{2d} = \tau_{4d} + \frac{1}{2}(N + 1). \quad (100)$$

Эффективный суперпотенциал теории на мировой поверхности связан с четырёхмерным суперпотенциалом:

$$\mathcal{W}_{4d}(a_i = m_i^f - \epsilon n_i, \epsilon) - \mathcal{W}_{4d}(a_i = m_i^f - \epsilon, \epsilon) = \mathcal{W}_{2d}(\{n_i\}). \quad (101)$$

Двумерный суперпотенциал зависит от набора собственных значений присоединённого скаляра в векормультиплете λ_i , $i = 1, \dots, N$. Система уравнений на вакуумы $\partial \mathcal{W}_{2d} / \partial \lambda = 0$ совпадает с системой уравнений анзаца Бете для XXX спиновой цепочки:

$$\prod_{l=1}^L \left(\frac{\lambda_j - M_l^F}{\lambda_j - M_l^{AF}} \right) = \exp(2\pi i \tau_{4d}) \prod_{k \neq j}^N \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k - \epsilon}{\lambda_j - \lambda_k + \epsilon} \right). \quad (102)$$

Постоянная Планка в спиновой цепочке соответствует параметру деформации ϵ , а комплексифицированная константа связи соответствует твисту в спиновой цепочке. Перенормировка спиновой цепочки сводится к отщеплению одного фундаментального и одного антифундаментального кирального мультиплета в двумерной теории. В четырёхмерной теории это отвечает уменьшению числа флейворов и цветов $N_f \rightarrow N_f - 2$, $N_c \rightarrow N_c - 1$. Таким образом, теория остаётся конформной. Перенормировка константы связи, аналогичная (73), выведена из соотношения (102) для $N = 1$:

$$\exp[2\pi i(\tau_L - \tau_{L-1})] = \frac{\lambda - M_L^F}{\lambda - M_L^{AF}}. \quad (103)$$

Выбрав массы эквидистантными с расстоянием δm , получим изменение константы связи за один шаг ренормгруппы:

$$\exp[2\pi i(\tau_L - \tau_{L-1})] \propto \frac{\epsilon}{\delta m}. \quad (104)$$

Таким образом, в теории появляется набор непертурбативных масштабов, аналогичный появлению ефимовского скейлинга в системе Калоджеро. Эти масштабы

соответствуют множественным щелям в сверхпроводящей модели:

$$\Delta_n \propto \Delta_0 \exp\left(-\frac{\pi n \delta m}{\epsilon}\right). \quad (105)$$

Заметим, что появление циклов ренормгруппы возможно только в теории с Ω -деформацией, а в недеформированной теории отщепление тяжёлого флейвора не приводит к циклической РГ динамике.

7.2. Трёхмерные калибровочные теории и теории на мировой поверхности бран

Напомним основные идеи, касающиеся геометрической реализации калибровочных теорий на D-бранах. Детали можно найти в обзоре [48]. Dp-брана — это $(p + 1)$ -мерная гиперповерхность в десятимерном пространстве-времени, на которой живёт $U(1)$ калибровочное поле. D-браны позволяют строить калибровочные теории с нужными свойствами. Напомним основные элементы конструкции:

- На стопке из N совпадающих D-бран живёт калибровочная теория с группой $U(N)$ с максимальной суперсимметрией.

- Смещение части бран в трансверсальном направлении отвечает механизму Хиггса в $U(N)$ калибровочной теории, а расстояние между бранами отвечает вакуумному среднему скалярного поля.

- Чтобы нарушить суперсимметрию, нужно ввести граничные условия по некоторым координатам, используя другие типы бран, или повернуть часть бран.

- Все геометрические характеристики бранной конфигурации имеют смысл параметров калибровочной теории, например вакуумных средних некоторых операторов или констант связи в теории на мировой поверхности браны.

- Если пронести одну брану через другую, может появиться брана меньшей размерности. Простейший пример — движение Ханани – Виттена (рис. 2).

- Так как в общем случае в нашем распоряжении есть браны различных размерностей, например N D2-бран и M D4-бран, мы можем одновременно изучать $U(N)$ $(2 + 1)$ -мерную теорию и $U(M)$ $(4 + 1)$ -мерную теорию на мировой поверхности браны. Эти теории существуют одновременно и отвечают нетривиальным соответствиям между калибровочными теориями.

Посмотрим, как можно использовать бранную реализацию для построения калибровочных теорий, связанных с квантовыми спиновыми цепочками. Наш основной пример — трёхмерная $\mathcal{N} = 2$ калибровочная теория.

Бранная конфигурация строится следующим образом. Имеется M параллельных NS5-бран, протяжённых

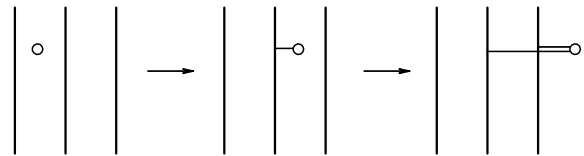


Рис. 2. Движение Ханани – Виттена. Вертикальные линии — это NS5-браны, горизонтальные — D3-браны, а окружности — ортогональные D5-браны. Когда D5-брана пронесётся через последовательность NS5-бран, числа зацепления сохраняются, поэтому появляются дополнительные D3-браны.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3	×	×	×	×						
NS5	×	×	×		×	×	×			
D5	×	×	×					×	×	×

Рис. 3. Бранная конструкция для трёхмерной квиверной теории.

по координатам (012456), N_i D3-бран, протяжённых по (0123) между i -й и $(i+1)$ -й NS5-бранами, и M_i D5-бран, протяжённых вдоль (012789) между i -й и $(i+1)$ -й NS5-бранами (рис. 3). Из этой бранной конфигурации получаем, что теория на мировой поверхности D3-бран имеет калибровочную группу $\prod_i^M U(N_i)$ и M_i фундаментальных гипермультиплетов. Расстояния между i -й и $(i+1)$ -й NS5-бранами дают комплексифицированные константы связи для калибровочных групп $U(N_i)$, координаты D5-бран в плоскости (45) соответствуют массам гипермультиплетов. Координаты D3-бран в плоскости (45) соответствуют координатам на кулоновской ветви. Ω -деформация нарушает группу суперсимметрии с $\mathcal{N} = 4$ до $\mathcal{N} = 2^*$, т.е. $\mathcal{N} = 2$ теории с массивным скаляром в присоединённом представлении. Бранная конструкция определяет трёхмерную теорию, если расстояние между NS5-бранами предполагается достаточно малым. Мы предполагаем, что одна из координат компактна, т.е. теория живёт на $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Параметры калибровочной теории отображаются в параметры интегрируемой системы следующим образом. В пределе Некрасова–Шаташвили твистованный суперпотенциал трёхмерной калибровочной теории на D3-бранах отображается в функцию Янга–Янга для XXZ спиновой цепочки [49]. Минимизация суперпотенциала даёт уравнения на суперсимметричные вакуумы, и в то же время уравнения анзаца для XXZ спиновой цепочки, вообще говоря, "вложенного". D3 браны идентифицируются с корнями Бете, которые распределены в соответствии с рангами калибровочных групп на каждом из M шагов нестинга $\prod_i^M U(N_i)$.

Положения D5-бран на плоскости (45) соответствуют неоднородностям в спиновой цепочке. Анизотропия спиновой цепочки определяется радиусом компактной координаты, параметр Ω -деформации играет роль постоянной Планка. При малых радиусах эта модель переходит в XXX спиновую цепочку. Твисты в спиновой цепочке соответствуют координатам NS5 в плоскости (78) и параметрам Файе–Илиопулоса (ФИ) в трёхмерной теории [37].

Шаг ренормгруппы соответствует интегрированию одной неоднородности в спиновой цепочке и перенормировке твистов. В трёхмерной теории это означает интегрирование одного массивного флейвора с перенормировкой ФИ параметров. В терминах движений бран шаг ренормгруппы приобретает прозрачную геометрическую интерпретацию:

- Шаг ренормгруппы выражается в удалении одной D5-браны на бесконечность, что приводит к перенормировке положений NS5-бран.
- Период цикла ренормгруппы определяется числом NS5-бран [49], так как оно идентифицируется с постоянной Планка спиновой цепочки.
- В некоторый момент твист испытывает скачок от $+\infty$ до $-\infty$.

8. Заключение

Какую общую информацию можно извлечь из существования циклических РГ потоков? С нашей точки зрения, самая важная идея — существование некоторой тонкой структуры на УФ масштабе, что приводит к возникновению ефимовской башни с БКТ скейлингом. Более того, циклический поток предполагает некоторое взаимодействие между УФ и ИК обрезанием, что свойственно некоммутативной теории. Это смешивание может пролить новый свет на явление размерной трансмутации в теории поля и дать примеры генерации множественных масштабов.

Присутствие двух параметров в ренормгруппе — довольно общий случай. В некоторых (хотя и не во всех) примерах период ренормгруппы задаётся "числом заполнения" во внешнем поле, будь это магнитное поле или параметр Ω -деформации. Последний имеет смысл постоянной Планка в конечномерной интегрируемой модели. Это наводит на мысль, что циклическая ренормгруппа может быть сформулирована исключительно в терминах квантового фазового пространства, так как постоянную Планка можно представить как внешнее поле второго ранга в классическом фазовом пространстве.

Можно ожидать, что циклы в ренормгруппе связаны с возможностью некоторого обобщения континуального интеграла в квантовой механике. Действительно, попытка строгой математической формулировки перенормировки в квантовой теории поля привела М.Л. Концевича к мотивному обобщению континуального интеграла. Оно соответствует некоторой дополнительной тонкой структуре на регуляторном масштабе, что имеет некоторое сходство с обсуждаемой задачей. Циклическая ренормгруппа в рациональной модели Калоджеро подразумевает также тесную связь с инвариантами узлов, так как инварианты узлов являются характеристикой спектра Калоджеро с рациональной константой связи (см., например, [42]).

Как мы отмечали, циклическая ренормгруппа связана с БКТ-спариванием партонных в двумерии. Естественно задать вопрос, не является ли эта связь универсальной. Один пример подобного спаривания в четырёхмерии стоит упомянуть. В $(3+1)$ -мерии можно рассматривать конденсацию бионов. Анализ ренормгруппы для модели газа бионов и электрически заряженных W -бозонов был проведён в [50]. Перенормируемыми параметрами являются электрический и магнитный химические потенциалы и константа связи. Система уравнений на ренормгруппу была решена явно в самодуальном случае, и решение уравнений ренормгруппы для химических потенциалов, полученное в [50], идентично решению для константы связи в модели матрёшки после аналитического продолжения. Период ренормгруппы определяется суммой УФ значений электрического и магнитного химических потенциалов $\mu_e + \mu_m$. Сходство ренормгруппового поведения не случайно, поскольку в [50] была найдена связь возмущённой ХУ модели с калибровочной теорией.

Мы хотим подчеркнуть, что изучение различных аспектов предельных циклов в РГ динамике только начинается и количество открытых вопросов очень велико. Нам кажется, что РГ циклы могут иметь многочисленные применения как в прикладных задачах, так и в раз-

личных аспектах математической физики, являясь важным примером предельных циклов в общих динамических системах. В данном случае РГ динамика рассматривается как пример нетривиальной нелинейной динамической системы.

Работа А.Г. и К.Б. была поддержана грантами RFBR-12-02-00284 и PICS-12-02-91052. Работа К.Б. была также поддержана стипендией фонда "Династия". А.Г. благодарит ФТПИ в Университете Миннесоты, где была выполнена часть работы, за гостеприимство и поддержку. Авторы благодарят Н.А. Некрасова и Ф.К. Попова за полезные замечания и комментарии.

Список литературы

1. Glazek S D, Wilson K G *Phys. Rev. Lett.* **89** 230401 (2002); hep-th/0203088
2. LeClair A, Román J M, Sierra G *Phys. Rev. B* **69** 020505(R) (2004); cond-mat/0211338
3. Braaten E, Hammer H-W *Phys. Rep.* **428** 259 (2006); cond-mat/0410417
4. Bawin M, Coon S A *Phys. Rev. A* **67** 042712 (2003); quant-ph/0302199
5. Braaten E, Phillips D *Phys. Rev. A* **70** 052111 (2004); hep-th/0403168
6. Beane S R et al. *Phys. Rev. A* **64** 042103 (2001); quant-ph/0010073
7. LeClair A, Román J M, Sierra G *Nucl. Phys. B* **675** 584 (2003); hep-th/0301042
8. Kaplan D B et al. *Phys. Rev. D* **80** 125005 (2009); arXiv:0905.4752
9. Gorsky A, arXiv:1202.4306
10. Añaños G N J et al. *Phys. Rev. D* **67** 045018 (2003); hep-th/0205191
11. Camblong H E, Ordóñez C R *Phys. Lett. A* **345** 22 (2005); hep-th/0305035
12. Moroz S, Schmidt R *Ann. Physics* **325** 491 (2010); arXiv:0909.3477
13. Añaños G N J, Camblong H E, Ordóñez C R *Phys. Rev. D* **68** 025006 (2003); hep-th/0302197
14. Efimov V *Phys. Lett. B* **33** 563 (1970)
15. Efimov V *Nucl. Phys. A* **210** 157 (1973)
16. Hammer H-W, Platter L *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **369** 2679 (2011); arXiv:1102.3789
17. Brézin E, Zinn-Justin J *Phys. Lett. B* **288** 54 (1992); hep-th/9206035
18. Anfossi A, LeClair A, Sierra G *J. Stat. Mech.* P05011 (2005); cond-mat/0503014
19. Jensen K et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 041601 (2010); arXiv:1002.3159
20. Miransky V A *Nuovo Cimento A* **90** 149 (1985)
21. Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A *Phys. Rev. Lett.* **73** 3499 (1994); *Phys. Rev. Lett.* **76** 1005 (1996), Erratum; hep-ph/9405262
22. Areán D et al. *JHEP* (11) 068 (2013); arXiv:1309.2286
23. Gorsky A, Popov F, arXiv:1312.7399
24. Shytov A V, Katsnelson M I, Levitov L S *Phys. Rev. Lett.* **99** 236801 (2007); arXiv:0705.4663
25. Pereira V M, Kotov V N, Castro Neto A H *Phys. Rev. B* **78** 085101 (2008); arXiv:0803.4195
26. Fogler M M, Novikov D S, Shklovskii B I *Phys. Rev. B* **76** 233402 (2007); arXiv:0707.1023
27. Wang Y et al. *Nature Phys.* **8** 653 (2012)
28. Wang Y et al. *Science* **340** 734 (2013)
29. Shytov A V, Katsnelson M I, Levitov L S *Phys. Rev. Lett.* **99** 246802 (2007); arXiv:0708.0837
30. Pomeranchuk I, Smorodinsky J J. *Phys. USSR* **9** 97 (1945)
31. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971) [Zeldovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)]
32. Richardson R W *Phys. Lett.* **3** 277 (1963)
33. Cambiaggio M C, Rivas A M F, Saraceno M *Nucl. Phys. A* **624** 157 (1997); nucl-th/9708031
34. Sierra G *Nucl. Phys. B* **572** 517 (2000); hep-th/9911078
35. Asorey M, Falceto F, Sierra G *Nucl. Phys. B* **622** 593 (2002); hep-th/0110266
36. Dunning C, Links J *Nucl. Phys. B* **702** 481 (2004); cond-mat/0406234
37. Gaiotto D, Koroteev P *JHEP* (05) 126 (2013); arXiv:1304.0779
38. Adams M R, Harnad J, Hurtubise J *Lett. Math. Phys.* **20** 299 (1990)
39. Mukhin E, Tarasov V, Varchenko A *Adv. Math.* **218** 216 (2008)
40. Gorsky A, Zabrodin A, Zotov A, arXiv:1310.6958
41. Вецелов А П *ТМФ* **98** 524 (1994) [Veselov A P *Theor. Math. Phys.* **98** 368 (1994)]
42. Nekrasov N A, Shatashvili S L *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **192–193** 91 (2009); arXiv:0901.4744
43. Nekrasov N A, Shatashvili S L, arXiv:0908.4052
44. Gorsky A, Mironov A, hep-th/0011197
45. Nekrasov N A *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 831 (2004); hep-th/0206161
46. Dorey N, Hollowood T J, Lee S, arXiv:1103.5726
47. Dorey N *JHEP* (11) 005 (1998); hep-th/9806056
48. Giveon A, Kutasov D *Rev. Mod. Phys.* **71** 983 (1999); hep-th/9802067
49. Bulychева K, Gorsky A, arXiv:1310.7361
50. Poppitz E, Ünsal M *JHEP* (07) 082 (2011); arXiv:1105.3969

Limit cycles in renormalization group dynamics

K.M. Bulychева

*Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, Russian Federation State Scientific Center,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
E-mail: bulycheva@itep.ru*

A.S. Gorsky

*Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, Russian Federation State Scientific Center,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
E-mail: gorsky@itep.ru
Moscow Institute of Physics and Technology, State University,
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

This review discusses the concept of limit cycles in renormalization group flows. Examples from quantum mechanics and field theory are presented.

PACS numbers: 11.10.Hi, 11.25.Uv, 12.60.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402g.0182

Bibliography — 50 references

Received 17 December 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (2) 182–193 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (2) (2014)