

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.Я. ПОМЕРАНЧУКА

Структура вакуума в трёхмерных суперсимметричных калибровочных теориях

А.В. Смилга

Статья, написанная на основе доклада, сделанного автором на мемориальной конференции И.Я. Померанчука в Институте теоретической и экспериментальной физики в июне 2013 г., посвящена вакуумной динамике трёхмерных теорий Янга–Миллса–Черна–Саймонса с включением или без включения дополнительных мультиплетов материи. На основе анализа эффективного гамильтониана Борна–Оппенгеймера в малом ящике вычисляется число вакуумных состояний (индекс Виттена) в этих теориях и исследуется их структура. Оценки, полученные для индекса Виттена, совпадают с результатами, полученными другими методами.

PACS numbers: 11.15.Yc, 11.30.Pb, 12.60.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402e.0163

Содержание

1. Введение (163).
 2. Чистая теория Янга–Миллса–Черна–Саймонса с минимальной суперсимметрией $\mathcal{N}=1$: древесный анализ (165).
 - 2.1. $SU(2)$. 2.2. Высшие унитарные группы.
 3. Петлевые поправки (168).
 - 3.1. Бесконечный объём. 3.2. Конечный объём.
 4. Теории с материей (171).
 - 4.1. Четырёхмерные теории. 4.2. Трёхмерное суперпространство. 4.3. Вычисления индекса.
 5. Приложение. Тэта-функции (175).
- Список литературы (175).

1. Введение

Быть может, наиболее известное научное достижение Исаака Яковлевича Померанчука — это концепция вакуумного полюса Редже, который сегодня называется *помероном*. Я не был знаком с Померанчуком лично — я пришёл в Институт теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ), когда он уже нас покинул. Но я неоднократно слышал от его коллег и сотрудников, что Исаак Яковлевич придавал большое значение изучению свойств вакуума и даже шутил о необходимости закупить

для этой цели партию мощных насосов для теоретдела ИТЭФ.

Померанчук не мог знать, что с приходом в физику понятия суперсимметрии проблемы вакуумной структуры приобретут дополнительный особый интерес. Наличие суперсимметричных вакуумов (основных состояний гамильтониана, аннигилируемых действием суперзарядов и имеющих нулевую энергию) говорит о том, что суперсимметрия осталась ненарушенной, в то время как отсутствие таких состояний свидетельствует о спонтанном нарушении суперсимметрии. Основной объект, который надо изучать, чтобы различить эти две возможности, — это *индекс Виттена*, разность между числом бозонных и фермионных вакуумных состояний, которую можно представить в виде

$$I = \text{tr} [(-1)^F \exp(-\beta H)], \quad (1.1)$$

где H — гамильтониан, F — оператор фермионного заряда. Вследствие суперсимметрии вклады возбуждённых состояний в следе сокращаются. Важно, что величина (1.1) представляет собой *индекс*, близкий родственник индекса Атия–Зингера и других топологических инвариантов, который не изменяется при гладких деформациях гамильтониана. Последнее обстоятельство позволяет определять индекс в весьма сложных теориях — достаточно найти релевантную упрощающую деформацию.

Мой доклад (основанный на трёх недавних работах [1–3]) посвящён именно этой проблеме — исследованию вакуумной динамики в теориях специального вида — 3-мерных суперсимметричных калибровочных теориях, включающих член Черна–Саймонса (ЧС). Эти теории привлекают сегодня особое внимание ввиду недавно обнаруженных замечательных дуальностей опре-

А.В. Смилга. Laboratoire de Physique Subatomique et des technologies associées (SUBATECH), Université de Nantes, 4 rue Alfred Kastler, BP 20722, Nantes 44307, France
E-mail: smilga@subatech.in2p3.fr

Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова", ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 23 ноября 2013 г.

делённых версий теорий с расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 8$ или $\mathcal{N} = 6$ и теорий струн на многообразиях $\text{AdS}_4 \times S^7$ или $\text{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$ [4, 5], где AdS_4 — 4-мерное пространство анти-де-Ситтера, S^7 — 7-мерная сфера, $\mathbb{CP}^3$ — комплексное проективное пространство¹. Отметим, однако, что теории поля, дуальные этим струнным теориям, являются конформными и обладают бесщелевым гамильтонианом. В таких теориях обыкновенный индекс Виттена (иначе говоря, тороидальный индекс) плохо определён и необходимо изучение так называемого суперконформного (сферического) индекса [9, 10].

Мы вычисляем индекс методом деформации, помещая теорию в малый пространственный ящик и исследуя динамику получающегося гамильтониана в рамках приближения Борна–Оппенгеймера (БО). Мы воспроизводим результаты, полученные другими методами.

Обсудим вначале простейшую суперсимметричную теорию Янга–Миллса–Черна–Саймонса (СЯМЧС) с суперсимметрией $\mathcal{N} = 1$. Лагранжиан в этой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left\langle -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\not{D}\psi \right\rangle + \kappa \left\langle \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) - \bar{\lambda}\lambda \right\rangle, \quad (1.2)$$

где принято $\epsilon^{012} = 1$, $D_\mu \mathcal{O} = \partial_\mu \mathcal{O} - i[A_\mu, \mathcal{O}]$ (так что матрица A_μ эрмитова); λ_α — 2-компонентный майорановый 3-мерный спинор, лежащий в присоединённом представлении калибровочной группы; $\langle \dots \rangle$ обозначает след по цветным индексам; $\not{D} = D_\mu \gamma_\mu$. Гамма-матрицы выбираются в виде

$$\gamma^0 = \sigma^2, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^3, \quad (1.3)$$

где σ^a — матрицы Паули. Наша теория 3-мерна, и калибровочная константа g^2 обладает размерностью массы. Физические бозонные и фермионные состояния в этой теории имеют массу

$$m = \kappa g^2. \quad (1.4)$$

Ненулевая масса приводит в трёхмерном случае к нарушению чётности. Требование, чтобы $\exp(iS)$ было инвариантно относительно определённых *больших* (нестягиваемых) калибровочных преобразований (см., например, хороший обзор [11]), приводит к условию квантования

$$\kappa = \frac{k}{4\pi} \quad (1.5)$$

с целым или иногда полуцелым (см. ниже) *уровнем* k .

Индекс (1.1) вычислен в [12]. Для калибровочной группы $\text{SU}(N)$

$$I(k, N) = (\text{sgn } k)^{N-1} \binom{|k| + \frac{N}{2} - 1}{N-1}. \quad (1.6)$$

Этот результат справедлив при $|k| \geq N/2$. Если $|k| < N/2$, то индекс обращается в нуль и суперсимметрия нару-

шается. В простейшем случае $\text{SU}(2)$

$$I(k, 2) = k. \quad (1.7)$$

Для $\text{SU}(3)$

$$I(k, 3) = \frac{k^2 - 1/4}{2}. \quad (1.8)$$

Теперь можно заметить, что, для того чтобы индекс оставался целым, уровень k должен быть целым для $\text{SU}(N)$ с чётным N , но полуцелым для $\text{SU}(N)$ с нечётным N . Это объясняется тем, что в случае нечётного N большое калибровочное преобразование, о котором говорилось выше, не только даёт добавку к классическому действию, но и вносит дополнительный фактор -1 , связанный с модификацией фермионного детерминанта [13, 14].

Результат (1.6) получен в [12] путём следующего рассуждения. Поместим теорию в *большой* пространственный ящик, $g^2 L \gg 1$. Рассмотрим функциональный интеграл для индекса (1.1) и мысленно проведём гауссово интегрирование по фермионным переменным. В результате получается эффективное бозонное действие, которое включает в себя член Черна–Саймонса, член Янга–Миллса и другие калибровочно-инвариантные структуры с высшими производными. Коэффициент при члене ЧС перенормируется²,

$$k \rightarrow k - \frac{N}{2}. \quad (1.9)$$

При большом β в сумму (1.1) дают вклад только вакуумные состояния теории. Их можно найти, исследуя низкоэнергетическую динамику соответствующего эффективного гамильтониана, которая определяется в этом случае членом с наименьшим числом производных, т.е. членом ЧС. В большом пространственном объёме и при малых энергиях влиянием янга–миллсовского члена и члена с высшими производными можно пренебречь. Таким образом, можно заключить, что спектр вакуумных состояний в нашей теории связан с *полным* спектром состояний в топологической чистой теории ЧС. Этот спектр был ранее определён:

- посредством использования связи между чистой теорией ЧС и 2-мерными конформными теориями Весса–Зумино–Новикова–Виттена [15];

- путём канонического квантования теории ЧС и явного определения волновых функций, аннигилируемых операторами гауссовых связей [16, 17].

Тогда индекс (1.6) определяется как число состояний в чистой теории ЧС со сдвинутым уровнем (1.9). Например, в случае $\text{SU}(2)$ число состояний в теории ЧС равно $k + 1$, что после сдвига даёт (1.7).

В разделах 2, 3 мы воспроизводим результат (1.6), используя другой метод. Мы предполагаем, что пространственный ящик не велик, а *мал*, $g^2 L \ll 1$, и изучаем динамику соответствующего гамильтониана БО. Этот метод был развит в работе [18] и применён там к 4-мерным теориям супер-Янга–Миллса. Кратко объясним, как он работает в 4-мерном случае.

¹ Более известна малдасеновская дуальность 4-мерной ($\mathcal{N} = 4$)-суперсимметричной теории Янга–Миллса и теории струн на $\text{AdS}_5 \times S^5$ [6, 7]. Хороший обзор на эту тему был опубликован в УФН [8].

² Формула (1.9) справедлива при $k > 0$. В дальнейшем, если это специально не оговорено, мы будем предполагать k положительным, хотя иногда будем приводить результаты и при отрицательном k .

Рассмотрим простейшую теорию SU(2). Если наложить на все поля *периодические* граничные условия³, то медленными переменными в эффективном гамильтониане БО будут являться нулевые фурье-моды пространственных компонент абелева векторного потенциала и их суперпартнёры,

$$C_j = A_j^{(0)3}, \quad \lambda_\alpha = \lambda_\alpha^{(0)3}. \quad (1.10)$$

(В 4-мерном случае пространственный индекс j принимает три значения, $j = 1, 2, 3$; λ_α — двухкомпонентный вейлевский спинор, описывающий поле глюино.) Движение в полевом пространстве $\{C_j\}$ оказывается финитным, так как сдвиг

$$C_j \rightarrow C_j + 4\pi \frac{n_j}{L} \quad (1.11)$$

с целыми n_j отвечает *стягиваемому* (это неабелева специфика) калибровочному преобразованию, по отношению к которому волновые функции остаются инвариантными. В главном порядке БО эффективный гамильтониан — это просто лапласиан

$$H^{\text{eff}} = \frac{g^2}{2L^2} P_j^2, \quad (1.12)$$

где P_j — оператор импульса, сопряжённого к C_j . Вакуумная волновая функция тогда является просто константой, которую можно умножить на функцию голоморфных фермионных переменных λ_α . Казалось бы, таким образом мы получаем четыре вакуумные волновые функции с фермионными зарядами 0, 1 и 2:

$$\Psi^{F=0} = 1, \quad \Psi_\alpha^{F=1} = \lambda_\alpha, \quad \Psi^{F=2} = \epsilon^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \quad (1.13)$$

Однако в действительности фермионные волновые функции в этом случае отсутствуют. Дело в том, что волновые функции в исходной теории должны быть инвариантными относительно калибровочных преобразований. Для эффективных волновых функций это означает инвариантность по отношению к *вейлевским отражениям*. В случае SU(2) есть только одно такое отражение, сводящееся к смене знака,

$$C_j \rightarrow -C_j, \quad \lambda_\alpha \rightarrow -\lambda_\alpha. \quad (1.14)$$

Функции $\Psi^{F=1}$ в (1.13) не инвариантны относительно (1.14), поэтому их следует отбросить. У нас остаются две бозонные вакуумные функции, дающие значение индекса $I = 2$. Несколько более сложный анализ (который особенно нетривиален для ортогональных и исключительных групп [20–22]) позволяет определить индекс для других групп. Этот индекс совпадает с собственным значением оператора Казимира в присоединённом представлении c_V (другое название этой величины — дуальное число Коксета $h^\vee$), $I = N$ для SU(N).

В случае 3-мерных теорий СЯМЧС подобный анализ оказывается существенно более сложным по нескольким причинам:

- древесный эффективный гамильтониан больше не является просто свободным лапласианом, а отвечает движению в однородном магнитном поле;

- эффективные волновые функции являются не просто инвариантными по отношению к сдвигам (1.11), а умножаются на определённый фазовый фактор [23];

- нельзя ограничиться только анализом эффективного гамильтониана на древесном уровне, необходимо учесть также петлевые поправки.

В разделе 2 мы проведём тщательный анализ в рамках древесного гамильтониана БО. В разделе 3 обсудим петлевые поправки. Раздел 4 посвящён теориям с дополнительными мультиплетами материи. Мы воспроизводим в этом случае результаты [24], но выводим их более простым и физически ясным способом.

2. Чистая теория

Янга – Миллса – Черна – Саймона с минимальной суперсимметрией $\mathcal{N} = 1$: древесный анализ

2.1. SU(2)

Рассмотрим вначале теорию SU(2). Как указывалось во введении, мы налагаем на все поля периодические граничные условия. В 3-мерном случае остаются всего две бозонные медленные переменные, $C_{j=1,2} = A_j^{(0)3}$, и одна голоморфная фермионная переменная, $\lambda = \lambda_1^{(0)3} - i\lambda_2^{(0)3}$. Древесные эффективные суперзаряды и гамильтониан, описывающие движение в однородном магнитном поле, пропорциональном константе Черна – Саймона, имеют вид

$$Q^{\text{eff}} = \frac{g}{L} \lambda (P_- + A_-), \quad (2.1)$$

$$\bar{Q}^{\text{eff}} = \frac{g}{L} \bar{\lambda} (P_+ + A_+),$$

$$H^{\text{eff}} = \frac{g^2}{2L^2} [(P_j + A_j)^2 + \mathcal{B}(\lambda \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \lambda)], \quad (2.2)$$

где

$$A_j = -\frac{\kappa L^2}{2} \epsilon_{jk} C_k, \quad (2.3)$$

$P_\pm = P_1 \pm iP_2$, $A_\pm = A_1 \pm iA_2$, $\mathcal{B} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. Эффективные векторы-потенциалы (2.3) зависят от полевых переменных $\{C_1, C_2\}$ и, разумеется, не имеют ничего общего с $A_j^a(\mathbf{x})$; $A_j(\mathbf{C})$ определены с точностью до калибровочного преобразования

$$A_j \rightarrow A_j + \partial_j f(\mathbf{C}). \quad (2.4)$$

Действительно, конкретный вид (2.3) определяется членом ЧС $\sim \epsilon_{jk} A_j \dot{A}_k$ в лагранжиане (1.2), но к последнему всегда можно добавить полную временную производную, что приводит к добавлению градиента некоторой функции к каноническому импульсу P_j и к эффективному вектору-потенциалу.

Движение в пространстве $\{C_1, C_2\}$ финитно, как и движение в 4-мерном случае. Однако, как отмечалось, волновые функции не просто являются инвариантными относительно сдвигов вдоль циклов дуального тора, но и

³ Мы будем так поступать, хотя в теории, включающей в себя только присоединённые поля, возможны, кроме того, так называемые *твистованные* граничные условия. В 4-мерных теориях такие граничные условия дают то же значение для индекса [18], но в 3-мерных теориях результат оказывается другим [19].

приобретают дополнительные фазовые факторы,

$$\begin{aligned}\Psi(X+1, Y) &= \exp(-2\pi i k Y) \Psi(X, Y), \\ \Psi(X, Y+1) &= \exp(2\pi i k X) \Psi(X, Y),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где $X = C_1 L / (4\pi)$, $Y = C_2 L / (4\pi)$.

Объясним их происхождение. Как сказано в разделе 1, сдвиги $X \rightarrow X+1$ и $Y \rightarrow Y+1$ представляют собой стягиваемые калибровочные преобразования. В 4-мерных теориях волновые функции инвариантны относительно таких преобразований. Но в трёхмерной теории ЯМЧС это не так. Действительно, в теории ЯМЧС (и в теориях СЯМЧС) гауссово условие связей выражается не просто как $D_j \Pi_j^a = 0$, а приобретает вид

$$G^a = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0^a} = D_j \Pi_j^a + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{jk} \partial_j A_k^a = 0,$$

где $\Pi_j^a = F_{0j}^a / g^2 + (\kappa/2) \epsilon_{jk} A_k^a$ — канонические импульсы. При выполнении инфинитезимального калибровочного преобразования $\delta A_j^a(\mathbf{x}) = D_j \alpha^a(\mathbf{x})$ (следует отличать пространственные координаты $\mathbf{x}$ от перемасштабированных векторов-потенциалов X, Y) второй член привносит фазовый фактор

$$\Psi[A_j^a + D_j \alpha^a] = \exp\left(-\frac{i\kappa}{2} \int d\mathbf{x} \epsilon_{kl} \partial_k \alpha^a A_l^a\right) \Psi[A_j^a]. \quad (2.6)$$

Это свойство выполняется также при конечных стягиваемых калибровочных преобразованиях $\alpha^a = (4\pi x/L) \delta^{a3}$ или $\alpha^a = (4\pi y/L) \delta^{a3}$, отвечающих сдвигам $C_{1,2} \rightarrow C_{1,2} + 4\pi/L$. Полученные таким образом фазовые факторы $\mathcal{E}_{1,2}(X, Y)$ совпадают с факторами, приведёнными в (2.5); они представляют собой голономии $\mathcal{E}_1 = \exp(i \int_{\gamma_1} A_1 dC_1)$ и $\mathcal{E}_2 = \exp(i \int_{\gamma_2} A_2 dC_2)$, где $\gamma_{1,2}$ — два цикла тора, прицепленные к точке (X, Y) . Факторы $\mathcal{E}_{1,2}$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{E}_1(X, Y) \mathcal{E}_2(X+1, Y) \mathcal{E}_1^{-1}(X+1, Y+1) \mathcal{E}_2^{-1}(X, Y+1) = \exp(4\pi i k) = 1. \quad (2.7)$$

Фаза $4\pi k$, приобретаемая в результате обхода по двум прямым и двум обратным циклам, — это не что иное, как $2\pi \Phi$, где Φ — магнитный поток. Требование однозначности волновых функций даёт квантование потока.

Заметим, что, выбирая другую калибровку для A_j , мы получили бы другие голономии $\mathcal{E}_{1,2}$, но соотношение (2.7) осталось бы, разумеется, по-прежнему справедливым.

Собственные функции гамильтониана (2.2), удовлетворяющие граничным условиям (2.5), представляют собой эллиптические функции — разновидность θ -функций. Имеется $2k$ состояний с нулевой энергией, которые при $k > 0$ выражаются в явном виде:

$$\Psi_{\text{tree}}^{\text{eff}}(X, Y) \propto \exp(-\pi k \bar{z} z) \exp(\pi k \bar{z}^2) Q_m^{2k}(\bar{z}), \quad (2.8)$$

где $z = X + iY$, $m = 0, \dots, 2k-1$, функции Q_m^a определены в приложении. Для отрицательных k волновые функции имеют тот же вид с заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$ и дополнительным фермионным фактором λ .

Индекс $I = 2k$ эффективного гамильтониана (2.2) совпадает с потоком эффективного магнитного поля на дуальном торе, делённым на 2π [25, 26].

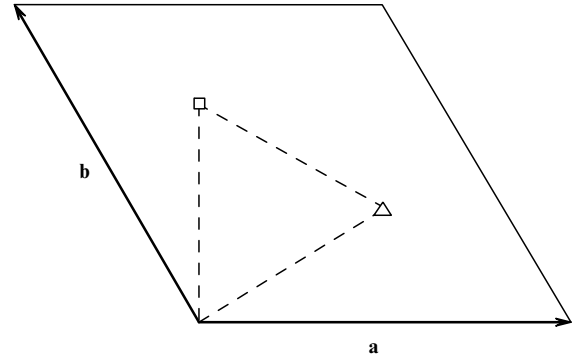


Рис. 1. Максимальный тор и альков Вейля для $SU(3)$: $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — простые корни; точки $\square$ и $\triangle$ — фундаментальные ковесы.

Однако не все из этих $2|k|$ состояний разрешены. Мы должны наложить дополнительное требование вейлевской инвариантности волновых функций (следующее из калибровочной инвариантности исходной теории). Для $SU(2)$ оно сводится к условию⁴ $\Psi^{\text{eff}}(-C_j) = \Psi^{\text{eff}}(C_j)$, что выделяет $|k| + 1$ вакуумных состояний, бозонных для $k > 0$ и фермионных для $k < 0$.

Если $k = 0$, то эффективный гамильтониан (2.2) описывает свободное движение по дуальному тору. Имеется два основных состояния с нулевой энергией, $\Psi^{\text{eff}} = \text{const}$ и $\Psi^{\text{eff}} = \text{const} \times \lambda$. (По той же причине, которая обсуждалась выше, мы не должны здесь беспокоиться по поводу вейлевской нечётности фактора λ .) Индекс равен нулю. Таким образом, мы получаем

$$I_{\text{SU}(2)}^{\text{tree}} = (|k| + 1) \text{sgn } k. \quad (2.9)$$

2.2. Высшие унитарные группы

Эффективный гамильтониан для группы $SU(N)$ содержит $2r = 2(N-1)$ медленных бозонных и $r = N-1$ медленных фермионных переменных $\{C_j^a, \lambda^a\}$, лежащих в подалгебре Картана $\mathfrak{su}(N)$ (r — ранг группы). Этот гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{g^2}{2L^2} [(P_j^a + \mathcal{A}_j^a)^2 + \mathcal{B}^{ab} (\lambda^a \bar{\lambda}^b - \bar{\lambda}^b \lambda^a)], \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j^a &= -\frac{\kappa L^2}{2} \epsilon_{jk} C_k^a, \\ \mathcal{B}^{ab} &= \kappa L^2 \delta^{ab},\end{aligned}\quad (2.11)$$

$a = 1, \dots, r$. Как и в случае $SU(2)$, движение является финитным и проходит на многообразии $T \times T$, где T — максимальный тор группы.

Для $SU(3)$ максимальный тор изображён на рис. 1. Каждая точка на рис. 1 — это ковес $\{w^3, w^8\}$, так что приведённый на максимальный тор групповой элемент

⁴ В отличие от того, как мы поступали в 4-мерном случае (см. (1.14)), мы не включили в это условие вейлевское отражение фермионного фактора λ , который присутствует в эффективной волновой функции при отрицательных k . Причина состоит в том, что удобным образом определённая быстрая волновая функция (на которую следует умножить эффективную волновую функцию, зависящую только от C_j и λ) содержит для отрицательных k вейлевски-нечётный фактор $C_1 + iC_2$. Эта нечётность компенсирует нечётность фактора λ в эффективной волновой функции [1].

выражается как $g^{\text{togus}} = \exp[4\pi i(w^3 t^3 + w^8 t^8)]$. Смысл штриховых линий и точек, отмеченных треугольником и квадратом, будет прояснён ниже.

Индекс эффективного гамильтониана можно определить квазиклассически [27]. Он представляет собой *обобщённый* магнитный поток (являющийся не чем иным, как r -м классом Черна для линейного $U(1)$ -расслоения над $T \times T$ со связностью A_j^a),

$$I = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{T \times T} \prod_{ja} dC_j^a \det \|B^{ab}\|. \quad (2.12)$$

В случае $SU(N)$

$$I^{SU(N)} = Nk^{N-1}. \quad (2.13)$$

Найдём явные выражения для $3k^2$ вакуумных волновых функций в случае группы $SU(3)$. Они представляют собой обобщённые θ -функции, определённые на решётке корней $SU(3)$, и удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{X} + \mathbf{a}, \mathbf{Y}) &= \exp(-2\pi i \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{Y}) \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\ \Psi(\mathbf{X} + \mathbf{b}, \mathbf{Y}) &= \exp(-2\pi i \mathbf{k} \mathbf{b} \mathbf{Y}) \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\ \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y} + \mathbf{a}) &= \exp(2\pi i \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{X}) \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\ \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y} + \mathbf{b}) &= \exp(2\pi i \mathbf{k} \mathbf{b} \mathbf{X}) \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\mathbf{X} = 4\pi \mathbf{C}_1/L$, $\mathbf{Y} = 4\pi \mathbf{C}_2/L$; $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ — простые корни. При $k = 1$ имеется три таких состояния:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \sum_{\mathbf{n}} \exp[-2\pi(\mathbf{n} + \mathbf{Y})^2 - 2\pi i \mathbf{X} \mathbf{Y} - 4\pi i \mathbf{X} \mathbf{n}], \\ \Psi_{\Delta} &= \sum_{\mathbf{n}} \exp[-2\pi(\mathbf{n} + \mathbf{Y} + \Delta)^2 - 2\pi i \mathbf{X} \mathbf{Y} - 4\pi i \mathbf{X}(\mathbf{n} + \Delta)], \\ \Psi_{\square} &= \sum_{\mathbf{n}} \exp[-2\pi(\mathbf{n} + \mathbf{Y} + \square)^2 - 2\pi i \mathbf{X} \mathbf{Y} - 4\pi i \mathbf{X}(\mathbf{n} + \square)], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где суммирование ведётся по решётке корней, $\mathbf{n} = m_a \mathbf{a} + m_b \mathbf{b}$, с целыми $m_{a,b}$. Точки Δ , $\square$ — некоторые специальные точки на максимальном торе (фундаментальные ковесы), удовлетворяющие соотношениям

$$\Delta \mathbf{a} = \square \mathbf{b} = \frac{1}{2}, \quad \square \mathbf{a} = \Delta \mathbf{b} = 0.$$

Групповые элементы, отвечающие этим точкам, лежат в центре группы,

$$\begin{aligned} U_0 &= \text{diag}(1, 1, 1), \\ U_{\square} &= \text{diag}\left(\exp \frac{2i\pi}{3}, \exp \frac{2i\pi}{3}, \exp \frac{2i\pi}{3}\right), \\ U_{\Delta} &= \text{diag}\left(\exp \frac{4i\pi}{3}, \exp \frac{4i\pi}{3}, \exp \frac{4i\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Очевидно, что они инвариантны относительно вейлевской симметрии, которая переставляет собственные значения⁵. Таким образом, при $k = 1$ все три вакуумных

⁵ Для произвольного ковеса элементы группы Вейля, переставляющие собственные значения $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 3$, действуют как отражения относительно штриховых линий, ограничивающих альков Вейля (фактор-пространство T/W), на рис. 1.

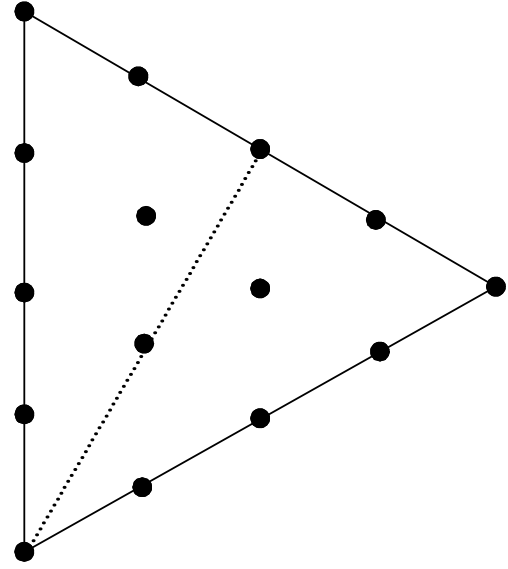


Рис. 2. $SU(3)$: 15 вакуумных состояний при $k = 4$. Пунктирная линия отмечает границу алькова Вейля для G_2 .

состояния (2.15) вейлевски-инвариантны. Но если $k > 1$, то число инвариантных состояний меньше, чем $3k^2$. Для произвольного k волновые функции всех $3k^2$ собственных состояний могут быть записаны по аналогии с (2.15) как

$$\Psi_n = \sum_{\mathbf{n}} \exp[-2\pi(\mathbf{n} + \mathbf{Y} + \mathbf{w}_n)^2 - 2\pi i \mathbf{X} \mathbf{Y} - 4\pi i \mathbf{X}(\mathbf{n} + \mathbf{w}_n)], \quad (2.17)$$

где $\mathbf{w}_n$ — ковесы, проекции которых на простые корни $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ кратны $1/(2k)$. Только функции (2.17) с $\mathbf{w}_n$, лежащими в вершинах алькова Вейля, остаются инвариантными под действием вейлевской группы. Для всех остальных $\mathbf{w}_n$ надо построить вейлевски-инвариантные комбинации

$$\Psi = \sum_{\hat{x} \in W} \hat{x} \Psi_{\mathbf{w}_n}. \quad (2.18)$$

Таким образом, число вейлевски-инвариантных состояний совпадает с числом ковесов $\mathbf{w}_n$, лежащих внутри алькова Вейля (включая границы). Например, в случае $k = 4$ имеется 15 таких ковесов, показанных на рис. 2, и, соответственно, 15 вакуумных состояний.

При произвольном k число состояний есть

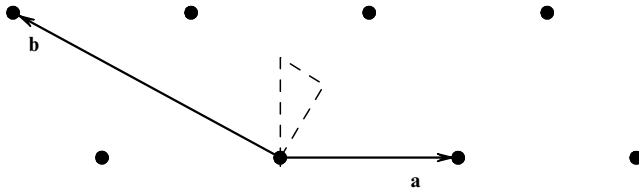
$$I_{SU(3)}^{\text{tree}}(k > 0) = \sum_{m=1}^{k+1} m = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad (2.19)$$

В случае $SU(4)$ рассмотрение аналогично. Альков Вейля — это тетраэдр с вершинами, отвечающими элементам центра $SU(4)$. Чисто геометрический подсчёт даёт

$$I_{SU(4)}^{\text{tree}}(k > 0) = \sum_{m=1}^{k+1} \sum_{p=1}^m p = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \quad (2.20)$$

Обобщение для случая произвольного N очевидно. Получаем результат

$$I^{\text{tree}}(k, N) = \binom{k+N-1}{N-1}. \quad (2.21)$$

Рис. 3. Решётка корней и альков Вейля для G_2 .

Мы провели также подобный анализ для симплектических групп и для G_2 . Остановимся на случае G_2 . Простые корни G_2 — это $\mathbf{a} = (1, 0)$ и $\mathbf{b} = (-3/2, \sqrt{3}/2)$. Решётка корней и максимальный тор выглядят абсолютно так же, как для $SU(3)$ (рис. 3). Значит, перед тем как было наложено требование вейлевской инвариантности, индекс равнялся $3k^2$, как и для $SU(3)$. Разница состоит в том, что группа Вейля содержит теперь не 6, а 12 элементов и альков Вейля в два раза меньше, чем для $SU(3)$. В результате в случае $k = 4$ мы имеем теперь не 15, а всего 9 вейлевски-инвариантных состояний (см. рис. 2). Общая формула имеет вид

$$I_{G_2}^{\text{tree}}(k) = \begin{cases} \frac{(|k|+2)^2}{4} & \text{для чётных } k, \\ \frac{(|k|+1)(|k|+3)}{4} & \text{для нечётных } k. \end{cases} \quad (2.22)$$

3. Петлевые поправки

В этом разделе мы в основном будем обсуждать теорию в случае $SU(2)$. Аккуратное обобщение для высших унитарных и других групп не должно быть сложным, но оно пока не проведено.

3.1. Бесконечный объём

Уже почти тридцать лет назад было известно [28], что константа ЧС κ в чистой теории ЯМЧС перенормируется на однопетлевом уровне. Для суперсимметричных теорий $\mathcal{N} = 1, 2, 3$ соответствующие вычисления были сделаны в работе [29]. Суть эффекта легко понять, рассмотрим вклад фермионной петли в перенормировку структуры $\propto A \partial A$ в ЧС-члене (рис. 4). Мы получаем (напомним, что k и k считаются положительными, если не оговорено обратное)

$$\Delta\kappa = -mc_V \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^2} = -\frac{c_V}{8\pi}. \quad (3.1)$$

Имеется также вклад от глюонной петли⁶. Удобно [2] выбрать гамильтонову калибровку $A_0 = 0$, тогда нет дубов и глюонный пропагатор

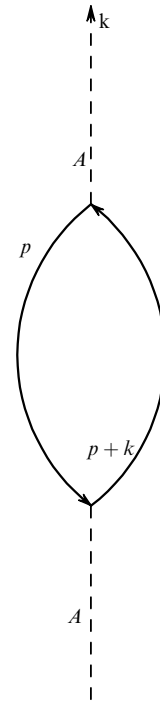
$$D_{jk}^{ab}(\omega, \mathbf{p}) = \frac{ig^2 \delta^{ab}}{\omega^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \left(\delta_{jk} - \frac{p_j p_k}{\omega^2} - \frac{im}{\omega} \epsilon_{jk} \right) \quad (3.2)$$

включает в себя только поперечные степени свободы.

Аккуратное вычисление даёт

$$k_{\text{ren}} = k + c_V - \frac{c_V}{2}, \quad (3.3)$$

⁶ С другой стороны, бесспиновые скаляры, присутствующие в теориях СЯМЧС с расширенной суперсимметрией, не дают вклада в перенормировку κ .

Рис. 4. Фермионная перенормировка структуры $\propto \epsilon_{\mu\nu\rho} \text{tr} \{A_\mu \partial_\nu A_\rho\}$.

где второй член в правой части происходит из глюонной петли, а третий — от фермионной.

Можно задать законный вопрос: дают ли вклад в перенормировку уровня k также вторая и высшие петли? Ответ на этот вопрос отрицателен. Доказательство несложно. Рассмотрим случай $k \gg c_V$. Это пертурбативный режим, в котором петлевые поправки упорядочены, так что $\Delta k^{(1 \text{ loop})} \sim O(1)$, $\Delta k^{(2 \text{ loops})} \sim O(1/k)$ и т.д. Но поправки в k вида $\sim 1/k$ недопустимы. Калибровочная инвариантность требует целого k_{ren} . Значит, вклады всех высших петель в k_{ren} должны обнуляться, и они обнуляются.

Заметим также, что перенормировка (3.3) имеет место в теории СЯМЧС — динамической теории с нетривиальным взаимодействием. С другой стороны, в чистой топологической суперсимметричной теории Черна–Саймонса перенормировки нет: фермионы в этой теории отщепляются. Число состояний там такое же, как в несуперсимметричной чистой теории ЧС.

3.2. Конечный объём

Как отмечалось в разделе 2.1, коэффициент κ (с фактором L^2) имеет смысл магнитного поля на дуальном торе в эффективном гамильтониане БО в конечном объёме. Перенормировка κ означает перенормировку этого магнитного поля. На древесном уровне магнитное поле было постоянным. Однако перенормированное поле не является постоянным, а зависит от медленных переменных C_j . Эту зависимость можно найти, вычислив эффективный лагранжиан в медленном абелевом фоне $C_j(t)$. Эффективный вектор-потенциал извлекается из члена $\sim A_j(C) \dot{C}_j$ в этом лагранжиане. Вычисление производится методом фонового поля. С точностью до некоторых технических тонкостей [1, 2], которые мы не будем здесь обсуждать, результат можно получить, сделав замену

$$p_j \rightarrow \frac{2\pi n_j}{L} - C_j, \quad \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \rightarrow \frac{1}{L^2} \sum_{n_j} \quad (3.4)$$

в пространственных интегралах, фигурирующих в выражениях, описывающих перенормировку κ в бесконечном объёме. Сдвиг импульса на $-C$ в (3.4) связан с заменой обычной производной ковариантной производной.

Мы получаем следующие индуцированные фермионной и глюонной петлёй эффективные векторные потенциалы⁷,

$$A_j^F = \frac{\epsilon_{jk}}{2} \sum_{n_j} \frac{(C - 2\pi n/L)_k}{(C - 2\pi n/L)^2} \left[1 - \frac{m}{\sqrt{(C - 2\pi n/L)^2 + m^2}} \right] \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{\epsilon_{jk}}{2} \sum_{n_j} \frac{(C - 2\pi n/L)_k}{(C - 2\pi n/L)^2}, \quad (3.5)$$

$$A_j^B = -\frac{\epsilon_{jk}}{2} \sum_{n_j} \frac{(C - 2\pi n/L)_k}{(C - 2\pi n/L)^2} \left[2 - \frac{3m}{\sqrt{(C - 2\pi n/L)^2 + m^2}} + \frac{m^3}{[(C - 2\pi n/L)^2 + m^2]^{3/2}} \right] \xrightarrow{m \rightarrow 0} -\epsilon_{jk} \sum_{n_j} \frac{(C - 2\pi n/L)_k}{(C - 2\pi n/L)^2}. \quad (3.6)$$

Соответствующие магнитные поля имеют вид

$$\Delta B^F(C) = -\frac{m}{2} \sum_{n_j} \frac{1}{[(C - 2\pi n/L)^2 + m^2]^{3/2}}, \quad (3.7)$$

$$\Delta B^B(C) = \frac{3m}{2} \sum_{n_j} \frac{(C - 2\pi n/L)^2}{[(C - 2\pi n/L)^2 + m^2]^{5/2}}. \quad (3.8)$$

Почти всюду на дуальном торе поправки к полю порядка $mL^3 = \kappa g^2 L^3$, т.е. малы по сравнению с $B^{\text{tree}} \sim \kappa L^2$, если $g^2 L \ll 1$, что мы всегда предполагаем. Имеются, однако, четыре специальные точки ("углы" тора):

$$C_j = 0, \quad C_j = \left(\frac{2\pi}{L}, 0 \right), \quad C_j = \left(0, \frac{2\pi}{L} \right), \quad C_j = \left(\frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L} \right), \quad (3.9)$$

в окрестности которых индуцированное петлями магнитное поле *много больше* древесного. Фактически это означает, что "абелево" приближение Борна–Оппенгеймера, основанное на предположении, что масштаб энергий, связанный с динамикой медленных переменных $\{C_j, \lambda\}$, мал по сравнению с масштабом энергии, обусловленным неабелевыми компонентами и высшими фурье-модами, становится в этой области несправедливым.

Не обращая пока на это внимания, отмечаем, что петлевые поправки генерируют локализованные в углах эффективные линии магнитного потока, схожие с абрикосовскими вихрями. Эти вихри имеют ширину порядка m . Глюонная петля генерирует линии единичного потока $\Phi^B = 1/(2\pi) \int \Delta B^B(C) d^2 C$, в то время как фермионная петля даёт вихри с полуцелым потоком $-1/2$. В итоге мы получаем в каждом угле линию с потоком $\Phi_{\text{line}} = 1/2$.

Суммируя индуцированные и древесные потоки, получаем полный поток

$$\Phi^{\text{tot}} = 2k + 4 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2} = 2k + 2, \quad (3.10)$$

что говорит, на первый взгляд, о наличии $2k + 2$ вакуумных состояний в эффективном гамильтониане БО (перед тем как наложено требование вейлевской инвариантности).

Однако не все эти состояния допустимы! Волновые функции *четырёх* из них оказываются сингулярными в углах, и их следует исключить из рассмотрения.

Действительно, найдём эффективные волновые функции всех $2k + 2$ состояний в абелевой долине на достаточном удалении от углов (3.9). Эффективный вектор-потенциал, отвечающий одному из индуцированных вихрей, можно записать в виде

$$A_j = -\frac{\epsilon_{jk} C_k}{2C^2} F(m^2, C^2). \quad (3.11)$$

Профильная функция

$$F(m^2, C^2) = 1 - \frac{2m}{\sqrt{C^2 + m^2}} + \frac{m^3}{(C^2 + m^2)^{3/2}}, \quad (3.12)$$

которая может быть найдена из (3.5) и (3.6), равняется нулю при $C_j = 0$ и стремится к единице при больших C_j .

Рассмотрим эффективный суперзаряд Q^{eff} , определённый в (2.1), вблизи угла $C_j = 0$, но вне сердцевин вихря, в области

$$m \ll C_j \ll \frac{4\pi}{L}. \quad (3.13)$$

Тогда мы можем положить $F(m^2, C) = 1$ и пренебречь вкладом других вихрей, а также вкладом от древесного однородного поля (2.3). Уравнение $Q^{\text{eff}} \chi^{\text{eff}} = 0$ для вакуумной эффективной волновой функции приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4z} \right) \chi^{\text{eff}} = 0. \quad (3.14)$$

(Напомним, что $z = C_+ L / (4\pi)$.) Решение этого уравнения:

$$\chi^{\text{eff}}(z, \bar{z}) \sim \frac{F(\bar{z})}{z^{1/4}}. \quad (3.15)$$

Теперь мы можем восстановить поведение волновой функции на всём торе исходя из двух условий:

- в каждом из углов волновая функция должна себя вести, как (3.15);
- волновая функция должна удовлетворять граничным условиям с твистом (2.7), отвечающим полному потоку (3.10).

Это даёт структуру

$$\chi_m^{\text{eff}}(z, \bar{z}) \propto \frac{Q_m^{2k+2}(\bar{z})}{(\Pi(z) \Pi(\bar{z}))^{1/4}}, \quad (3.16)$$

⁷ Суммы (3.5) и (3.6) расходятся при больших $\|n\|$. Точный смысл этих выражений будет прояснён позднее.

где $\Pi(\bar{z})$ — θ -функция четвёртого порядка,

$$\Pi(\bar{z}) = Q_3^4(\bar{z}) - Q_1^4(\bar{z}), \quad (3.17)$$

имеющая нули в углах (3.9)⁸.

Вернёмся теперь к выражениям (3.5), (3.6). Расходимости в суммах можно регуляризовать, вычитая из $\mathcal{A}_j$ некоторую бесконечную часть, представляющую собой чистую калибровку $\sim \partial_j f(\mathbf{C})$ (заметим, что такая регуляризация разрушает кажущуюся периодичность (3.5) и (3.6)). В безмассовом пределе получившиеся выражения для $\mathcal{A}_+^{F,B}$ и $\mathcal{A}_-^{F,B}$ представляют собой заданные на торе мероморфные функции $P(\bar{z})$, $P(z)$ с простыми полюсами в углах (3.9). Очевидно, что эти функции выражаются через $\Pi^{-1}(\bar{z})$ и $\Pi^{-1}(z)$.

Полная волновая функция является произведением эффективной волновой функции (3.16) и волновой функции основного состояния быстрого гамильтониана. Вблизи угла последняя ведёт себя как (см. формулу (3.16) в работе [2])

$$\Psi^{\text{fast}} \sim \frac{1}{\sqrt{|\Pi(z)|}}. \quad (3.18)$$

Таким образом, в общем случае полная волновая функция оказывается сингулярной в углах,

$$\Psi^{\text{fast}} \chi_m^{\text{eff}}(z, \bar{z}) \sim \frac{1}{|\Pi(z)|}. \quad (3.19)$$

В рамках долинного подхода сингулярность в $\mathcal{A}_j$ сглаживается, если учесть ненулевую массу и пройти в сердцевину вихря. Сглаживается также сингулярность в волновой функции. Однако, как отмечалось ранее, в сердцевине вихря "абелев долинный" анализ БО становится неприемлемым.

В работе [2] был проведён тщательный анализ угловой области (снова в рамках метода Борна–Оппенгеймера, где мы в этом случае должны трактовать как медленные *все* нулевые фурье-моды⁹ полей, как абелевы, так и неабелевы) с наложением условия согласования волновой функции в углах и функции в абелевой долине на некотором отдалении от углов. Результат этого анализа довольно естествен. Оказывается, что сингулярность на самом деле *не* сглаживается в сердцевине вихря. Другими словами, состояния, для которых долинны абелевы волновые функции сингулярны в углах в безмассовом пределе, как в (3.19), остаются там сингулярными и при точном анализе с ненулевой массой. Такие состояния недопустимы, и их следует исключить из подсчёта.

Допустимые волновые функции по-прежнему имеют структуру (3.16), но θ -функции $Q_m^{2k+2}(\bar{z})$ должны обнуляться в углах. Иначе говоря, они должны быть представимы в виде произведения $\Pi(\bar{z})$ и θ -функций порядка $2k - 2$. Отсюда получаем

$$\chi_m^{\text{eff}}(z, \bar{z}) \propto Q_m^{2k-2}(\bar{z}) \Pi^{3/4}(\bar{z}) \Pi^{-1/4}(z). \quad (3.20)$$

⁸ Функция (3.17) известна из работ по каноническому квантованию чистых теорий ЧС [16, 17, 30]; она фигурирует также в соотношении (П.7) (см. приложение).

⁹ Строго говоря, медленные переменные совпадают с нулевыми модами вблизи угла $C_j = 0$. Вблизи других углов (3.9) медленные переменные даются модами $n_j = (1, 0)$, $n_j = (0, 1)$ и $n_j = (1, 1)$.

Параметр m принимает теперь $2k - 2$ значений, что даёт $2k - 2$ (а не $2k + 2$, как, казалось бы, должно следовать из (3.16)) "довейлевских" вакуумных состояний. После наложения условия вейлевской инвариантности остаются, согласно (1.7), k состояний.

Здесь необходимо сделать следующее важное замечание. Мы получили $2k - 2$ "довейлевских" состояний, отбирая несингулярные состояния из $2k + 2$ состояний в (3.16). Последняя формула была выведена с учётом вихревых линий, связанных как с фермионами, так и с глюонами. Однако от вихрей, индуцированных глюонами, можно при желании *вообще* избавиться.

Вне сердцевины вихрей, где справедливо приближение БО, проведённый анализ эффективного лагранжиана можно выразить на языке эффективного гамильтониана. Эффективные векторы-потенциалы получаются тогда в виде фаз Панчатратнама – Берри [31, 32],

$$\mathcal{A}_j^{\text{PB}} = -i \frac{\int (\Psi^{\text{fast}})^* (\partial \Psi^{\text{fast}} / \partial C_j) dx^{\text{fast}}}{\int (\Psi^{\text{fast}})^* \Psi^{\text{fast}} dx^{\text{fast}}}. \quad (3.21)$$

Потенциалы, приводящие к (3.7) и (3.8), отвечают определённому выбору Ψ^{fast} .

Мы можем, однако, с тем же успехом переопределить быструю волновую функцию, умножив её на произвольную функцию медленных переменных, в частности, на функцию, имеющую сингулярности в углах, где неприемлемо приближение БО. Определим

$$\tilde{\Psi}^{\text{fast}} = \Psi^{\text{fast}} \sqrt{\frac{\Pi(\bar{z})}{\Pi(z)}}. \quad (3.22)$$

В рамках абелева приближения БО выбор быстрой волновой функции в виде $\tilde{\Psi}^{\text{fast}}$ полностью равнозначен выбору в виде Ψ^{fast} . Вычисляя (3.21) с $\tilde{\Psi}^{\text{fast}}$, мы получаем дополнительный градиентный член, дающий в каждом угле единичный отрицательный поток, который сокращается со вкладом от глюонной петли.

Уравнение $Q^{\text{eff}} \tilde{\chi}^{\text{eff}} = 0$, которое теперь приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4z} \right) \chi^{\text{eff}} = 0, \quad (3.23)$$

имеет решение $\chi^{\text{eff}} \sim z^{1/4} F(\bar{z})$. Распространяя это решение на весь тор, получим

$$\tilde{\chi}_m^{\text{eff}}(z, \bar{z}) \propto Q_m^{2k-2}(\bar{z}) \sqrt{|\Pi(z)|}. \quad (3.24)$$

Умножая функции (3.24) (они *все* теперь допустимы) на $\tilde{\Psi}^{\text{fast}}$, мы получаем те же самые, что ранее, полные волновые функции. Можно, таким образом, заключить, что индуцированные глюонами вихревые линии (фактически все вихри с целым потоком) не влияют на подсчёт числа вакуумов и их можно исключить из рассмотрения. Такие целопоточные вихревые линии (своеобразные нити Дирака) ненаблюдаемы. С другой стороны, вихри с нецелым потоком влияют на подсчёт числа вакуумов. Опираясь на эвристические соображения, можно сказать, что они как бы "затрудняют" существование на торе однозначных несингулярных волновых функций (единичный вихрь с нецелым потоком сделал бы это просто невозможным), так что число допустимых состояний уменьшается.

Для всех других групп индекс вычисляется подстановкой в древесный результат значения k , перенормированного *только* фермионными петлями¹⁰, $k \rightarrow k - c_V/2$.

Для $SU(N)$ мы приходим к результату (1.6). Для G_2 получаем

$$I_{N=1}^{\text{SYMCS}}[G_2] = \begin{cases} \frac{k^2}{4} & \text{для чётных } k, \\ \frac{k^2 - 1}{4} & \text{для нечётных } k. \end{cases} \quad (3.25)$$

Для полноты приведём также результат для симплектических групп. При положительном k

$$I_{N=1}^{\text{SYMCS}}[\text{sp}(2r)] = \left(k + \frac{r-1}{2} \right). \quad (3.26)$$

Для отрицательных k индекс получается из соотношения $I(k) = (-1)^r I(-k)$.

4. Теории с материей

В теориях с материей индекс модифицируется по сравнению с таковым в чистых теориях СЯМЧС вследствие эффектов:

- дополнительной связанной с материей перенормировки k ;
- появления новых хиггсовских вакуумов, обусловленного нетривиальными юкавскими взаимодействиями.

Первый эффект довольно ясен: дополнительные фермионные петли приводят к дополнительной перенормировке. Здесь есть, однако, тонкости, которые мы обсудим ниже. Что касается появления дополнительных хиггсовских вакуумов, это не является спецификой 3-мерия, такие вакуумы возникают (и модифицируют индекс) также в 4-мерных суперсимметричных калибровочных теориях. Вначале обсудим ситуацию в 4-мерии.

4.1. Четырёхмерные теории

В пионерской работе [18] отмечалось, что добавление в теорию *некиральной* материи не изменяет значения индекса. В самом деле, некиральный фермион (и их скалярным суперпартнёрам) можно придать массу. Если массу сделать большой, то поля материи, казалось бы, должны отщепляться, а индекс должен оставаться таким же, как и в чистой теории СЯМ¹¹. Позднее, однако, стало понятным, что в *некоторых* случаях массивная материя может модифицировать индекс. Это происходит тогда, когда в лагранжиан добавляются, кроме массового члена, юкавские члены, связывающие разные мультиплеты материи.

Простейшим примером¹² является теория $\mathcal{N} = 1$ с группой $SU(2)$, включающая в себя пару фундаменталь-

ных мультиплетов материи Q_f^j (где $j = 1, 2$ — цветной индекс, а $f = 1, 2$ — сабфлейворный; индексы поднимаются и опускаются с помощью $\epsilon^{jk} = -\epsilon_{jk}$ и $\epsilon^{fg} = -\epsilon_{fg}$) и присоединённый мультиплет $\Phi_j^k = \Phi^a (t^a)^k_j$.

Выберем древесный суперпотенциал в виде

$$\mathcal{W}^{\text{tree}} = \mu \Phi_k^j \Phi_j^k + \frac{m}{2} Q_f^j Q_j^f + \frac{h}{\sqrt{2}} Q_{jf} \Phi_k^j Q^{kf}, \quad (4.1)$$

где μ и m — массы присоединённых и фундаментальных полей материи, h — юкавская константа.

Имеется также суперпотенциал, генерируемый инстантонами [37],

$$\mathcal{W}^{\text{inst}} = \frac{\Lambda^5}{V}, \quad (4.2)$$

где Λ — константа с размерностью массы, $V = Q_f^j Q_j^f / 2$ — калибровочно-инвариантный модуль. Исключая Φ , получаем эффективный суперпотенциал

$$\mathcal{W}^{\text{eff}} = mV - \frac{h^2 V^2}{4\mu} + \frac{\Lambda^5}{V}. \quad (4.3)$$

Вакуумы находятся из решений уравнения $\partial \mathcal{W}^{\text{eff}} / \partial V = 0$. Уравнение кубично, значит, оно имеет три корня, что даёт *три* вакуума¹³.

Заметим, что если юкавская константа h очень мала, то *один* из этих вакуумов характеризуется очень большим значением $\langle V \rangle \approx 2\mu m / h^2$ (при этом инстантонный член в суперпотенциале не играет существенной роли). В пределе $h \rightarrow 0$ этот вакуум уходит на бесконечность и остаются только *два* вакуума — как и в чистой теории СЯМ с группой $SU(2)$. Это следует также из того факта, что при $h = 0$ уравнение $\partial \mathcal{W}^{\text{eff}} / \partial V = 0$ становится квадратным и имеет только два решения.

То же явление имеет место в теории с группой G_2 , изучавшейся в [39]. Эта теория включает в себя три септиплета S_f^j . Индекс чистой теории СЯМ с группой G_2 известен — он совпадает с присоединённым собственным значением оператора Казимира c_V , равным четырём для G_2 . Однако если мы включим в суперпотенциал юкавский член,

$$\mathcal{W}^{\text{Yukawa}} = h \epsilon^{fgh} f^{jkl} S_{fj} S_{gk} S_{hl} \quad (4.4)$$

(где f^{jkl} — антисимметричный тензор Фано), то появятся два новых вакуума, которые уходят на бесконечность в пределе $h \rightarrow 0$.

Появление новых вакуумов при добавлении юкавских членов не должно вызывать удивления. Главная причина этого — большая размерность юкавского члена по сравнению с размерностью массового члена.

4.2. Трёхмерное суперпространство

Мы работаем в 3-мерном ($\mathcal{N} = 1$)-суперпространстве и используем вариант формализма, развитого в [40]. Суперпространство (x^μ, θ^a) включает в себя действительный двухкомпонентный спинор θ^a . Индексы опу-

¹⁰ Как подробно обсуждалось выше, эту перенормировку следует понимать *cum grano salis*, так как перенормированное магнитное поле сконцентрировано в углах, где абелево приближение БО неприменимо. Желательно поэтому распространить точный анализ, проделанный в [2] для $SU(2)$, на другие группы. Можно ожидать, что такой анализ подтвердит вывод о том, что эффектами, обусловленными глюонными петлями, на самом деле можно пренебречь.

¹¹ Этот аргумент неприменим к киральным мультиплетам, которые всегда являются безмассовыми и всегда влияют на индекс [33, 34].

¹² Этот пример кратко обсуждался в [35] и детально проанализирован в [36].

¹³ Эти три вакуума тесно связаны с тремя *сингулярностями* в пространстве модулей ассоциированной ($\mathcal{N} = 2$)-суперсимметричной теории с одним гипермультиплетом материи, изучавшейся в [38].

скаются и поднимаются с помощью антисимметричных тензоров $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}$; $\theta^2 \equiv \theta^\alpha \theta_\alpha$, $\int d^2\theta \theta^2 = -2$. Трёхмерные γ -матрицы $(\gamma^\mu)^\alpha_\beta$ выбираются так же, как в (1.3). Справедливо тождество

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho. \quad (4.5)$$

Заметим, что все матрицы $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ симметричны и чистыми.

Калибровочные теории описываются в терминах вещественного спинорного суперполя Γ_α . В неабелевых теориях Γ_α представляют эрмитовы цветные матрицы. Как и в 4-мерии, удобно выбрать калибровку Весса–Зумино, уменьшающую число компонент в Γ_α . В этой калибровке

$$\Gamma_\alpha = i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta A_\mu + i\theta^2 \lambda_\alpha. \quad (4.6)$$

Ковариантное суперполе напряжённостей тогда приобретает вид

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \frac{1}{2} \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}_\alpha \Gamma_\beta - \frac{1}{2} [\Gamma^\beta, \mathcal{D}_\beta \Gamma_\alpha] = \\ &= -i\lambda_\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} (\gamma_\rho)_{\alpha\beta} \theta^\beta + \frac{i\theta^2}{2} (\gamma^\mu)^\beta_\alpha \nabla_\mu \lambda_\beta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Лагранжиан (1.2) записывается в терминах суперполей как

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \left\langle \frac{1}{2g^2} W_\alpha W^\alpha + \frac{i\kappa}{2} \left(W_\alpha \Gamma^\alpha + \frac{1}{3} \{ \Gamma^\alpha, \Gamma^\beta \} \mathcal{D}_\beta \Gamma_\alpha \right) \right\rangle. \quad (4.8)$$

Добавим теперь мультиплеты материи. Здесь мы рассмотрим только вещественные присоединённые мультиплеты. (В работе [3] изучаются также теории с комплексными фундаментальными мультиплетными.) Пусть есть всего один такой мультиплет:

$$\Sigma = \sigma + i\psi_\alpha \theta^\alpha + i\theta^2 D. \quad (4.9)$$

Калибровочно-инвариантный кинетический член имеет вид

$$\mathcal{L}^{\text{kin}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^2\theta \langle \nabla_\alpha \Sigma \nabla^\alpha \Sigma \rangle, \quad (4.10)$$

где $\nabla_\alpha \Sigma = \mathcal{D}_\alpha \Sigma - [\Gamma_\alpha, \Sigma]$. Можно добавить также массовый член¹⁴

$$\mathcal{L}_M = -i\zeta \int d^2\theta \langle \Sigma^2 \rangle. \quad (4.11)$$

Складывая (4.8), (4.10), (4.11), выражая лагранжиан в компонентах и исключая вспомогательное поле D ,

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{g^2} \left\langle -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma + \lambda \not{\nabla} \lambda + \psi \not{\nabla} \psi \right\rangle + \\ &+ \kappa \left\langle \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + i\lambda^2 \right\rangle + \\ &+ i\zeta \langle \psi^2 \rangle - \zeta^2 g^2 \langle \sigma^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Лагранжиан включает в себя, помимо калибровочного поля, присоединённый фермион λ с массой $m_\lambda = \kappa g^2$, присоединённый фермион ψ с массой $m_\psi = \zeta g^2$ и присоединённый скаляр σ с той же массой. Случай $\zeta = \kappa$ — особый. При этом лагранжиан (4.12) обладает расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$.

4.3. Вычисления индекса

Рассмотрим теорию (4.12). Положим вначале $\zeta > 0$. Тогда масса фермионов материи положительна. Точнее, её знак совпадает со знаком массы глюино при $k > 0$. Петли материи дают дополнительную перенормировку.

Отметим, что статус последнего утверждения отличается от статуса утверждения о перенормировке k глюонной петлей. Мы видели, что в случае глюонной перенормировки индуцированное магнитное поле на дуальном торе сосредоточено в углах (3.9), что следует из неравенства $m_\lambda L \ll 1$. С другой стороны, масса полей материи $m_\psi = \zeta g^2$ является независимым параметром. Удобно сделать её *большой*, $m_\psi L \gg 1$. При конечной массе индуцированное магнитное поле имеет такой же вид, как и в (3.7). В случае малого $m_\psi L$ это поле сконцентрировано в углах. Но в противоположном пределе индуцированная плотность потока становится постоянной, как и древесная плотность. Таким образом, материя с достаточно большой массой даёт обычную перенормировку k без дополнительных оговорок (если угодно, "sine sale") (см. сноску 10 в разделе 3.2).

При положительном ζ перенормировка отрицательна, $k \rightarrow k - 1$. Индекс совпадает с индексом ($\mathcal{N} = 1$)-теории СЯМЧС с перенормированным k ,

$$I_{\zeta>0} = k - 1. \quad (4.13)$$

При $k = 1$ индекс обращается в нуль и суперсимметрия спонтанно нарушена.

При отрицательном ζ имеют место два эффекта.

• Прежде всего, масса фермионов материи имеет противоположный знак, и это же относится к перенормировке k за счёт соответствующей петли. На первый взгляд, получаем $I_{\zeta<0} = k + 1$.

• Последнее, однако, неверно ввиду другого эффекта. При положительном ζ волновая функция основного состояния в секторе материи имеет бозонный характер. Но при отрицательном ζ она становится фермионной, $\Psi \propto \prod_a \psi^a$, меняя знак индекса.

Мы получаем

$$I_{\zeta<0} = -k - 1. \quad (4.14)$$

При $k = -1$ суперсимметрия нарушена.

Как отмечалось, при $\zeta = \kappa$ лагранжиан (4.12) обладает расширенной суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$. Это означает, в частности, что в теории $\mathcal{N} = 2$ ζ меняет знак вместе с κ и результат даётся формулой

$$I_{\mathcal{N}=2}^{\text{SYMCS}} = |\kappa| - 1, \quad (4.15)$$

¹⁴ Это так называемый *вещественный* массовый член, который можно выразить на языке ($\mathcal{N} = 2$)-трёхмерных суперполей, только оставляя в подынтегральном выражении $S = \int d^4\theta \dots$ члены с явной зависимостью от θ [41–43]. В теории с двумя вещественными мультиплетными (4.9) (которые образуют мультиплет $\mathcal{N} = 2$) можно записать также комплексный массовый член, имеющий тот же вид, что и в 4-мерии. Такие члены, однако, не перенормируют k , и мы их здесь не будем рассматривать.

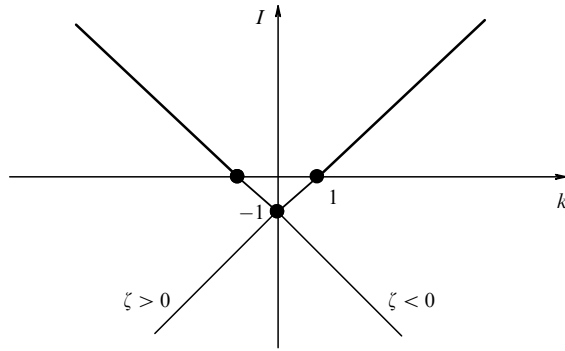


Рис. 5. Значения индексов в теории (4.12) при $\zeta > 0$, $\zeta < 0$ и $\zeta = \kappa$ (жирные линии).

в согласии с [44, 45]. В отличие от (4.13) и (4.14), выражение (4.15) неаналитично при $k = 0$, неаналитичность следует из обращения знака массы фермиона материи при переходе точки $k = 0$.

Строго говоря, соотношение (4.15) при $k = 0$ не обосновано. В этом случае мы должны также удерживать значение $\zeta = 0$, материя становится безмассовой, безмассовые скаляры делают движение в пространстве полей инфинитным и индекс плохо определён. Однако, имея в виду, что регуляризованная теория при $\zeta \neq 0$ даёт результат $I_{\mathcal{N}=2 \text{ deformed}}^{\text{SYMCS}}(0) = -1$ независимо от знака ζ , можно также приписать это значение индексу $I_{\mathcal{N}=2}^{\text{SYMCS}}(0)$.

Три зависимости, (4.13)–(4.15), представлены вместе на рис. 5.

Рассмотрим теперь теорию, включающую в себя калибровочный мультиплет (4.6) и три ($\mathcal{N} = 1$)-вещественных присоединённых мультиплетов материи (4.9). Если все массы равны, то теория обладает расширенной ($\mathcal{N} = 2$)-суперсимметрией, если к лагранжиану добавить дополнительный юкавский член [46]. Если обозначить один из присоединённых мультиплетов (тот, который вместе с (4.6) образует суперполе $\mathcal{N} = 2$) Σ и объединить два других вещественных мультиплетов в комплексный ($\mathcal{N} = 2$)-мультиплет Φ , то юкавский член принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{2i}{g^2} \int d^2\theta \langle \Sigma \Phi \bar{\Phi} \rangle. \quad (4.16)$$

Для вычисления индекса рассмотрим, однако, деформированный лагранжиан $\mathcal{N} = 1$ с различными массами M (масса мультиплета Σ) и m (масса комплексного мультиплета Φ). Мы будем предполагать массу M большой, но, для того чтобы переход к теории $\mathcal{N} = 2$ сделать плавным, будем считать, что знак M совпадает со знаком k .

Имеется четыре различных случая¹⁵.

1. $m > 0$, $k > 0 \Rightarrow M > 0$.

$$k \rightarrow k - 1_\Sigma - 2_\Phi = k - 3. \quad (4.17)$$

Это даёт вклад в индекс $k - 3$. Заметим, что при $k = 1, 2$ вклад отрицателен.

2. $m > 0$, $k, M < 0$.

$$k \rightarrow k + 1_\Sigma - 2_\Phi = k - 1. \quad (4.18)$$

Умножая (4.18) на -1 , ввиду фермионной природы волновой функции, которая включает в себя в этом случае фермионный фактор, связанный с вещественным присоединённым мультиплетом Σ (см. обсуждение перед уравнением (4.14)), мы получаем $I = -k + 1$.

3. $m < 0$, $k, M > 0$.

$$k \rightarrow k - 1_\Sigma + 2_\Phi = k + 1, \quad (4.19)$$

что даёт вклад $I = k + 1$.

4. $m < 0$, $k, M < 0$.

$$k \rightarrow k + 1_\Sigma + 2_\Phi = k + 3. \quad (4.20)$$

Вклад в индекс равен $-k - 3$.

На этом вычисление индекса не заканчивается, в отличие от его вычисления в модели с единственным вещественным присоединённым мультиплетом, поскольку в рассматриваемой модели необходимо также учесть вклад в индекс, который дают дополнительные состояния на хиггсовской ветви. Действительно, суперпотенциал имеет вид

$$\mathcal{W} = -\frac{i}{g^2} \left(\frac{M}{2} \Sigma^a \Sigma^a + m \bar{\Phi}^a \Phi^a + i\epsilon^{abc} \Sigma^a \Phi^b \bar{\Phi}^c \right). \quad (4.21)$$

Бозонный потенциал обнуляется, если

$$\begin{aligned} m\phi^b &= i\epsilon^{abc} \sigma^a \phi^c, \\ M\sigma^a &= i\epsilon^{abc} \bar{\phi}^b \phi^c. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения, когда массы M и m или обе положительные, или обе отрицательны. Рассмотрим случай положительных масс. Тогда уравнения (4.22) имеют единственное с точностью до калибровочного преобразования решение:

$$\sigma^a = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi^a = \sqrt{\frac{Mm}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Соответствующий вклад в индекс, однако, не равен просто единице ввиду нового важного эффекта, который отсутствовал в рассмотренной выше 4-мерной теории с суперпотенциалом (4.1) и отсутствовал бы также в 3-мерной теории с фундаментальным мультиплетом материи $\mathcal{N} = 2$.

В самом деле, помимо решения (4.23), имеются также решения, связанные с (4.23) калибровочными преобразованиями. Последние не обязательно глобальны, они могут зависеть от пространственных координат x, y . Заметим теперь, что для теории, живущей на торе, мы можем также применить к (4.23) определённые преобразования, которые выглядят как калибровочные, но нестягиваемы ввиду нетривиальной фундаментальной группы $\pi_1[\text{SO}(3)] = \mathbb{Z}_2$. (SO(3) следует здесь понимать не как группу саму по себе, а скорее как пространство присоединённого представления.) Пример такого квази-

¹⁵ Следует принять во внимание, что соглашение относительно знака массы фермионов материи в работе [24] противоположно принятому нами соглашению относительно этого знака. Мы называем массу положительной, если её знак совпадает со знаком массы фермионов калибровочного мультиплета при положительном k (и, следовательно, положительном ζ). Другими словами, при положительных k, ζ сдвиги k за счёт как петли присоединённой материи, так и глюонной петли имеют отрицательные знаки.

калибровочного преобразования:

$$\Omega_1: O^{ab}(x) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi x}{L} & \sin \frac{2\pi x}{L} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi x}{L} & \cos \frac{2\pi x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

где L — размер пространственного ящика. Преобразование (4.24) не влияет на $\sigma^a = \sigma \delta^{a3}$ и сохраняет периодичность полей¹⁶ $\phi^a(x)$. Имеется аналогичное преобразование Ω_2 вдоль второго цикла тора.

В 4-мерных теориях волновые функции инвариантны по отношению к стягиваемым калибровочным преобразованиям. В 3-мерных теориях волновые функции инвариантны с точностью до возможного фазового фактора, как в (2.5). Но ничто не определяет поведение волновых функций относительно преобразований $\Omega_{1,2}$. Последние *не являются* калибровочными симметриями, а представляют собой некие глобальные симметрии теории, живущей на торе. Мы получаем, таким образом, четыре разные волновые функции, изменяющиеся или не изменяющиеся¹⁷ под действием $\Omega_{1,2}$.

Окончательный результат для индекса в этой теории

$$I^{N=2} = |k| + 1 \quad (4.25)$$

как для положительного, так и для отрицательного k . Причём дополнительные хиггсовские состояния дают вклад только при положительном k .

Интрилигатор и Зайберг в работе [24] при выводе результата (4.25), как и других подобных результатов в этой работе, следовали несколько другой логике. Авторы [24] не деформировали $N = 2 \rightarrow N = 1$, но держали поля в вещественном присоединённом мультиплете материи Σ лёгкими. Тогда лёгкие поля материи $\{\sigma, \psi\}$ входят в эффективный гамильтониан БО на том же основании, что и абелевы компоненты полей глюонов и глюино.

Как отмечалось выше, магнитные потоки, индуцированные лёгкими полями, не однородны, а сконцентрированы в углах тора. Это обстоятельство существенно осложняет точный анализ. Индекс (4.25) получен в [24] как сумма не двух, как у нас, а *трёх* вкладов¹⁸, и не вполне ясно также, как этот метод работает в специальном случае $k = 2$, когда обнуляется определённое согласно [24] k_{eff} , включающее в себя только перенормировку от комплексного мультиплета материи, $k_{\text{eff}} = k - 2$.

Наш метод проще.

Можно рассмотреть также теории, содержащие мультиплеты $N = 2$ с высшими изоспинами. Тогда подсчёт хиггсовских вакуумных состояний становится несколько сложнее. Например, в случае $I = 3/2$ имеется 10 хиггсовских состояний, в том числе одно состояние с проекцией изоспина $1/2$ и $3^2 = 9$ состояний с проекцией изоспина $3/2$ (эти девять состояний складываются из вакуумного

решения с постоянными полями и его восьми квазикалибровочных копий с нетривиальной зависимостью от x). Общий результат для индекса в теории с несколькими ($N = 2$)-мультиплетами материи с различными изоспинами:

$$I = |k| - 1 + \frac{1}{2} \sum_f T_2(I_f), \quad (4.26)$$

где $T_2(I)$ — индекс Дынкина соответствующего представления,

$$T_2(I) = \frac{2I(I+1)(2I+1)}{3}, \quad (4.27)$$

нормированный согласно $T_2(\text{fund}) = 1$.

При выводе (4.26) мы предполагали, что сдвиг индекса, генерируемый материей, является суммой индивидуальных сдвигов от отдельных мультиплетов. Это справедливо, если лагранжиан не содержит дополнительных кубичных ($N = 2$)-инвариантных суперпотенциалов, которые могут привести к возникновению дополнительных хиггсовских состояний.

Заметим, что индекс не зависит от знака k , хотя этот универсальный результат получается при сложении отдельных вкладов, которые при $k > 0$ и $k < 0$ выглядят совершенно по-разному. Если рассмотреть вклад отдельного мультиплета, то хиггсовские вакуумные состояния присутствуют только при одном знаке k (положительном или отрицательном, в зависимости от знака массы). Интересное объяснение симметрии относительно смены знака массы при фиксированном k (и, следовательно, относительно смены знака k при фиксированном m) было предложено в [24]. Фактически рассуждение авторов [24] состояло в добавлении к массе размера одного из циклов дуального тора с множителем i . Это даёт комплексный голоморфный параметр, от которого не должен зависеть индекс теории $N = 2$. Следовательно, индекс не должен зависеть и от действительной части этого параметра (массы). Мне, однако, кажется, что проходить точку $m = 0$, в которой индекс плохо определён, небезопасно, поэтому рассуждение, приведённое в [24], представляется недостаточно строгим. Явное вычисление для группы $SU(2)$, впрочем, показывает, что симметрия по отношению к смене знака массы действительно присутствует.

Это рассмотрение можно обобщить для случая высших унитарных групп. Интрилигатор и Зайберг предложили следующее обобщение (4.26):

$$I^{\text{SU}(N)} = \frac{1}{(N-1)!} \prod_{j=-N/2+1}^{N/2-1} \left(|k| + \frac{1}{2} \sum_f T_2(R_f) - \frac{N}{2} - j \right) \quad (4.28)$$

(в теории без дополнительных кубичных суперпотенциалов, так что общий сдвиг k является суммой индивидуальных сдвигов от отдельных мультиплетов), где суммирование проводится по различным представлениям $SU(N)$. Вклад от индивидуального мультиплета может быть вычислен в случае, когда k и m имеют разные знаки и нет дополнительных хиггсовских состояний. Этот результат обобщается для случая, в котором k, m имеют те же знаки, с использованием симметрии, обсуждавшейся выше.

Мы проверили непосредственным вычислением наличие такой симметрии для всех групп $SU(N)$ с фундамен-

¹⁶ Заметим, что для фундаментальной материи преобразование (4.24) не разрешено: будучи поднято в $SU(2)$, оно сделало бы постоянное решение, фундаментальный аналог (4.22), антипериодичным.

¹⁷ Нечётность волновой функции по отношению к преобразованию (4.24) означает, согласно [47], ненулевой *электрический поток*.

¹⁸ Помимо обычных вакуумов с $\phi = \sigma = 0$ и хиггсовских вакуумов с $\phi, \sigma \neq 0$, в [24] рассматривались также "топологические вакуумы" $\phi = 0, \sigma \neq 0$, которые в нашем подходе отсутствуют.

тальной материей и для группы SU(3) с присоединённой материей¹⁹. Представляется интересным построить общее доказательство этого факта.

5. Приложение. Тэта-функции

Напомним некоторые математические факты, касающиеся свойств аналитических функций на торе. Они в основном взяты из учебника [48], но с использованием нескольких других обозначений, которые нам кажутся более ясными и более подходящими для наших целей.

Тэта-функции играют на торе ту же роль, что и обыкновенные полиномы на римановой сфере. Тэта-функции аналитичны, но удовлетворяют нетривиальным квазипериодическим граничным условиям по отношению к сдвигам вдоль циклов тора. В общем случае тор характеризуется комплексным модулярным параметром τ , но мы делаем простейший выбор $\tau = i$, так что тор представляет собой склеенный по сторонам квадрат $x, y \in [0, 1]$ ($z = x + iy$).

Простейшая θ -функция удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned}\theta(z+1) &= \theta(z), \\ \theta(z+i) &= \exp[\pi(1-2iz)]\theta(z).\end{aligned}\quad (\text{П.1})$$

Это определяет *единственную* (с точностью до постоянного комплексного множителя) аналитическую функцию, которая имеет следующий явный вид:

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2\pi i n z). \quad (\text{П.2})$$

Функция (П.2) (назовём её θ -функцией порядка 1 и введём альтернативное обозначение $\theta(z) \equiv Q^1(z)$) имеет только один нуль на квадрате $x, y \in [0, 1]$, расположенный прямо в его центре, $\theta((1+i)/2) = 0$.

Для произвольного целого $q > 0$ можно определить тэта-функции порядка q , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}Q^q(z+1) &= Q^q(z), \\ Q^q(z+i) &= \exp[q\pi(1-2iz)]Q^q(z).\end{aligned}\quad (\text{П.3})$$

Граничные условия (П.3) включают в себя твист (показатель экспоненты в правой части (2.7)) $-2\pi q$, отвечающий отрицательному магнитному потоку²⁰. Функции $Q^q(\bar{z})$ отвечают положительным потокам $2\pi q$. Умножая $Q^{2k}(\bar{z})$ и $Q^{2k}(z)$ на экспоненты определённого вида, можно получить (уже не аналитические) функции (2.8), удовлетворяющие граничным условиям (2.5).

Функции (П.3) лежат в векторном пространстве размерностью q , в котором удобно выбрать следующий базис:

$$Q_m^q(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi q\left(n + \frac{m}{q}\right)^2 + 2\pi i q z\left(n + \frac{m}{q}\right)\right], \quad m = 0, \dots, q-1. \quad (\text{П.4})$$

В обозначениях Мамфорда [48] функции (П.4) могут быть выражены как

$$Q_m^q(z) = \theta_{m/q,0}(qz, iq), \quad (\text{П.5})$$

где $\theta_{a,b}(z, \tau)$ — тэта-функции с рациональными характеристиками.

$Q_m^q(z)$ можно назвать "эллиптическими полиномами" порядка q . Действительно, каждая функция $Q_m^q(z)$ имеет q простых нулей в точках

$$z_s^{(m)} = \frac{2s+1}{2q} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{q}\right), \quad s = 0, \dots, q-1 \quad (\text{П.6})$$

(их можно поместить в фундаментальную область $x, y \in [0, 1]$, добавляя при необходимости i к выражениям (П.6)). Произведение $Q^q(z)Q^{q'}(z)$ двух таких "полиномов" с порядками q и q' даёт полином порядка $q+q'$. Отсюда можно вывести множество соотношений между тэта-функциями разного порядка и их произведениями. Одно из таких любопытных соотношений имеет вид

$$\frac{Q_5^6(z) - Q_1^6(z)}{(Q_3^4(z) - Q_1^4(z))Q_0^2(z)} = \frac{1}{\eta(i)} = \frac{2\pi^{3/4}}{\Gamma(1/4)}, \quad (\text{П.7})$$

$\Gamma(1/4)$ — гамма-функция. Отношения разных тэта-функций одинакового уровня являются дважды периодическими мероморфными эллиптическими функциями. Например, отношение определённой линейной комбинации $\alpha Q_1^2(z) + \beta Q_2^2(z)$ и $\theta^2(z)$ даёт функцию Вейерштрасса.

Список литературы

- Smilga A V *JHEP* (01) 086 (2010); arXiv:0910.0803
- Smilga A V *JHEP* (05) 103 (2012); arXiv:1202.6566
- Smilga A V, arXiv:1308.5951
- Bagger J, Lambert N *Phys. Rev. D* **77** 065008 (2008); arXiv:0711.0955
- Aharony O et al. *JHEP* (10) 091 (2008); arXiv:0806.1218
- Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
- Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
- Горский А С *УФН* **175** 1145 (2005) [Gorsky A S *Phys. Usp.* **48** 1093 (2005)]
- Römelsberger C *Nucl. Phys. B* **747** 329 (2006); hep-th/0510060
- Spiridonov V P, Vartanov G S *Nucl. Phys. B* **824** 192 (2010); arXiv:0811.1909
- Dunne G V, in *Topological Aspects of Low Dimensional Systems: Ecole de Physique des Houches, Les Houches, Session LXIX, 7–31 July 1998* (Eds A Comtet et al.) (Berlin: Springer, 1999) p. 177; hep-th/9902115
- Witten E, in *The Many Faces of the Superworld* (Ed. M A Shifman) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 156; hep-th/9903005
- Niemi A J, Semenoff G W *Phys. Rev. Lett.* **51** 2077 (1983)
- Redlich A N *Phys. Rev. D* **29** 2366 (1984)
- Witten E *Commun. Math. Phys.* **121** 351 (1989)
- Elitzur S et al. *Nucl. Phys. B* **326** 108 (1989)
- Labastida J M F, Ramallo A V *Phys. Lett. B* **227** 92 (1989)
- Witten E *Nucl. Phys. B* **202** 253 (1982)
- Henningson M *JHEP* (11) 013 (2012); arXiv:1209.1798
- Kac V G, Smilga A V, in *The Many Faces of the Superworld* (Ed. M A Shifman) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 185; hep-th/9902029
- Keurentjes A *JHEP* (05) 001 (1999); hep-th/9901154
- Keurentjes A *JHEP* (05) 014 (1999); hep-th/9902186
- Deser S, Jackiw R, Templeton S *Ann. Physics* **140** 372 (1982)
- Intriligator K, Seiberg N, arXiv:1305.1633

¹⁹ Подчеркнём, что всё это является спецификой теорий $\mathcal{N} = 2$. Для теорий $\mathcal{N} = 1$ такой симметрии нет (см., например, рис. 2).

²⁰ Это физическая интерпретация. Математики назвали бы его *мондромией*.

25. Дубровин Б А, Кричевер И М, Новиков С П *ДАН СССР* **229** 15 (1976) [Dubrovin B A, Krichever I M, Novikov S P *Sov. Math. Dokl.* **17** 947 (1977)]
26. Дубровин Б А, Новиков С П *ЖЭТФ* **79** 1006 (1980) [Dubrovin B A, Novikov S P *Sov. Phys. JETP* **52** 511 (1980)]
27. Cecotti S, Girardello L *Phys. Lett. B* **110** 39 (1982)
28. Pisarski R D, Rao S *Phys. Rev. D* **32** 2081 (1985)
29. Kao H-C, Lee K, Lee T *Phys. Lett. B* **373** 94 (1996); hep-th/9506170
30. Gawedzki K, Kupiainen A *Nucl. Phys. B* **320** 625 (1989)
31. Pancharatnam S *Proc. Indian Acad. Sci. A* **44** 247 (1956)
32. Berry M V *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 45 (1984)
33. Смілга А В *ЖЭТФ* **91** 14 (1986) [Smilga A V *Sov. Phys. JETP* **64** 8 (1986)]
34. Blok B Yu, Smilga A V *Nucl. Phys. B* **287** 589 (1987)
35. Intriligator K, Seiberg N *Nucl. Phys. B* **431** 551 (1994); hep-th/9408155
36. Gorsky A, Vainshtein A, Yung A *Nucl. Phys. B* **584** 197 (2000); hep-th/0004087
37. Affleck I, Dine M, Seiberg N *Phys. Lett. B* **137** 187 (1984)
38. Seiberg N, Witten E *Nucl. Phys. B* **431** 484 (1994); hep-th/9408099
39. Smilga A V *Phys. Rev. D* **58** 105014 (1998); hep-th/9801078
40. Gates S J (Jr.) et al. *Front. Phys.* **58** 1 (1983); hep-th/0108200
41. Nishino H, Gates S J (Jr.) *Int. J. Mod. Phys. A* **8** 3371 (1993)
42. Aharony O et al. *Nucl. Phys. B* **499** 67 (1997); hep-th/9703110
43. de Boer J, Hori K, Oz Y *Nucl. Phys. B* **500** 163 (1997); hep-th/9703100
44. Ohta K *JHEP* (10) 006 (1999); hep-th/9908120
45. Bergman O et al. *JHEP* (10) 036 (1999); hep-th/9908075
46. Ivanov E A *Phys. Lett. B* **268** 203 (1991)
47. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **153** 141 (1979)
48. Mumford D *Tata Lectures on Theta* (Boston: Birkhäuser, 1983–1991)

Vacuum structure in 3D supersymmetric gauge theories

A.V. Smilga

*Laboratoire de Physique Subatomique et des technologies associées (SUBATECH), Université de Nantes,
4 rue Alfred Kastler, BP 20722, Nantes 44307, France*

E-mail: smilga@subatech.in2p3.fr

*Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, Russian Federation State Scientific Center,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation*

In this paper, based on a talk given at the Pomeranchuk memorial conference in ITEP in June 2013, we review the vacuum dynamics in 3D supersymmetric Yang–Mills–Chern–Simons theories with and without extra matter multiplets. By analyzing the effective Born–Oppenheimer Hamiltonian in a small spatial box, we calculate the number of vacuum states (Witten index) and examine their structure for these theories. The results are identical with those obtained by other methods.

PACS numbers: 11.15.Yc, 11.30.Pb, 12.60.Jv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402e.0163

Bibliography — 48 references

Received 23 November 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (2) 163–176 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (2) (2014)