

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение

В.А. Рубаков

Дан краткий обзор моделей скалярных полей с лагранжианами, содержащими вторые производные, но приводящими к уравнениям поля второго порядка. Некоторые из таких моделей имеют решения, нарушающие изотропное (светоподобное) условие энергодоминантности, и при этом не имеющие никаких явных противоречий. Приведены примеры использования этих моделей для построения космологических сценариев, а также в контексте создания вселенной в лаборатории.

PACS numbers: 04.20.Dw, 04.62.+v, 98.80.Bp

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402b.0137

Содержание

1. Введение (137).
 2. Нарушение условия NEC и неустойчивости (139).
2.1. Тахионы, градиентные неустойчивости, духи. 2.2. Скалярные теории с лагранжианами, содержащими производные только первого порядка.
 3. Лагранжианы с производными второго порядка (142).
 4. Примеры нарушения условия NEC (143).
4.1. Катящееся фоновое решение. 4.2. Сценарий генезиса.
4.3. Космология с отскоком. 4.4. Вселенная в пробирке.
 5. Заключение (149).
- Приложение А (149).
Приложение В (150).
Приложение С (151).
Список литературы (151).

1. Введение

Среди разнообразных условий энергодоминантности (или энергетических условий) особую роль играет изотропное условие (the Null Energy Condition, NEC). Это условие означает, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению¹

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0 \quad (1)$$

для любого изотропного (светоподобного) вектора n^μ , т.е. такого вектора, что $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Есть две главные причины, по которым условие NEC особенно интересно.

¹ Случай космологической постоянной $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ — особый. В этом случае $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. В дальнейшем мы не исключаем возможности того, что космологическая постоянная отлична от нуля, но считаем, что в системе присутствует и какая-то другая материя. Всё наше обсуждение при этом остаётся в силе.

В.А. Рубаков. Институт ядерных исследований РАН, просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российская Федерация
E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 15 января 2014 г.

Во-первых, условие NEC весьма трудно нарушить; мы проиллюстрируем это в разделе 2. До сравнительно недавнего времени вообще считалось, что условие NEC не может нарушаться в непротиворечивой теории, за возможным исключением теории скалярного поля с неминимальной связью с гравитацией [1]. Результаты, опровергающие такую точку зрения, и являются основным предметом этого краткого обзора.

Во-вторых, условие NEC представляет собой главное, пожалуй, условие теоремы Пенроуза о сингулярности [2], справедливой в общей теории относительности. Условиями теоремы являются: 1) выполнение условия NEC; 2) некомпактность гиперповерхности Коши. Теорема утверждает, что если в пространстве имеется ловушечная поверхность, то в будущем обязательно возникнет сингулярность. Ловушечная поверхность — это замкнутая поверхность в пространстве, на которой выходящие наружу световые лучи на самом деле сходятся (движутся внутрь). В сферически-симметричной ситуации это означает следующее. Пусть R — координата, соответствующая площади сферы, $S(R) = 4\pi R^2$. Эта сфера является ловушечной поверхностью, если R убывает вдоль любого изотропного вектора, направленного в будущее; все световые лучи, испущенные с этой сферы, в этом смысле движутся к её центру. Детали обсуждаются в Приложении А. Примерами служат сфера внутри горизонта шварцшильдовой чёрной дыры и сфера размера, превышающего $|H|^{-1}$, в сжимающейся однородной, изотропной и пространственно плоской Вселенной, где H — параметр Хаббла. Таким образом, если материя удовлетворяет условию NEC, под горизонтом чёрной дыры всегда образуется сингулярность; сингулярностью заканчивается и эволюция сжимающейся Вселенной, если её пространственной кривизной можно пренебречь (что встречается в моделях довольно часто). Используя обращение времени, можно утверждать, что расширяющаяся Вселенная имеет сингулярность в прошлом. Всё это справедливо в рамках классической общей теории относительности; в других классических теориях гравитации ситуация может быть сложнее, а в квантовой гравитации она, скорее всего, гораздо сложнее.

Теорема Пенроуза, в частности, почти запрещает (если оставаться в рамках общей теории относительности) сценарий Вселенной с отскоком, в котором Вселенная изначально сжимается, потом сжатие прекращается и Вселенная переходит на стадию расширения, продолжаящуюся до сих пор. Покажем явно, что условие NEC крайне существенно для этого запрета. Рассмотрим однородную изотропную Вселенную с метрикой Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2)$$

где γ_{ij} — не зависящая от времени метрика единичной 3-сферы (удобно ввести параметр κ и сопоставить этому случаю значение $\kappa = +1$), или единичного 3-гиперболоида ($\kappa = -1$), или евклидова трёхмерного пространства ($\kappa = 0$). Материя, определяющая эволюцию Вселенной, также должна быть однородной и изотропной. Это означает, что ненулевые компоненты тензора энергии-импульса равны

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, \\ T_{ij} &= a^2 \gamma_{ij} p, \end{aligned}$$

где ρ и p — плотность энергии и эффективное давление. (00)- и (ij)-компоненты уравнений Эйнштейна дают

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3a)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi Gp - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3b)$$

где $H \equiv \dot{a}/a$ — параметр Хаббла. Комбинация этих уравнений определяет, как этот параметр изменяется со временем:

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{\kappa}{a^2}. \quad (4)$$

Далее, выбирая изотропный вектор n^μ в (1) в виде $n^\mu = (1, a^{-1}v^i)$, где $\gamma_{ij}v^i v^j = 1$, получаем, что условие NEC эквивалентно в космологическом контексте неравенству

$$\rho + p > 0.$$

Поэтому если второй, обусловленный пространственной кривизной, член в правой части уравнения (4) отрицателен ($\kappa < 0$, открытая Вселенная), равен нулю ($\kappa = 0$, пространственно-плоская модель) или пренебрежимо мал, то параметр Хаббла убывает со временем. Если он отрицателен (сжатие), то он будет оставаться отрицательным. Таким образом, космологический отскок почти невозможен. Исключение составляет случай замкнутой Вселенной ($\kappa = +1$), в которой плотность энергии и давление при сжатии растут медленнее, чем a^{-2} [3]. Отметим, что теорема Пенроуза не работает в последнем случае, поскольку гиперповерхность Коши компактна для замкнутой Вселенной (3-сферы).

В применении к современной Вселенной (которая с высокой точностью является пространственно плоской) условие NEC говорит, что параметр Хаббла не мог расти в недалёком прошлом и не растёт сегодня. Получение из наблюдательных данных свидетельства о том, что параметр Хаббла увеличивается со временем, означало бы, что либо тёмная энергия нарушает условие NEC, либо

общая теория относительности неприменима на современных космологических масштабах. Это, конечно, сильно изменило бы наши представления о Вселенной и заполняющей её материи.

Ещё одна сторона условия NEC проявляется через закон ковариантного сохранения энергии, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. В космологическом контексте этот закон даёт

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p). \quad (5)$$

Таким образом, условие NEC означает, что в расширяющейся Вселенной плотность энергии уменьшается со временем. Оставляя в стороне упоминавшуюся выше возможность отскока замкнутой Вселенной, можно сказать, что теорема Пенроуза гарантирует, что расширение началось с сингулярности, характеризуемой бесконечной плотностью энергии и бесконечным темпом расширения.

Ещё одно следствие условия NEC — невозможность создания вселенной в лаборатории. Вопрос о том, можно ли *в принципе* создать "вселенную в пробирке", был поставлен [4–6] сразу после формулировки инфляционной теории [7–12]. Инфляция — почти экспоненциальное расширение Вселенной с высоким темпом расширения — приводит к растяжению за короткое время микроскопической области пространства до гигантских размеров, возможно, превышающих размер современной наблюдаемой части Вселенной. Поэтому на первый взгляд кажется возможным искусственное создание в небольшой области пространства таких же условий, которые были в начале инфляции. Тогда эта область автоматически растянется до очень больших размеров и превратится во вселенную, подобную нашей. Если оставаться в рамках общей теории относительности и рассматривать теории, удовлетворяющие условию NEC, то такая конструкция, однако, оказывается нереализуемой [6, 13] в силу теоремы Пенроуза. По определению, вселенная, "подобная нашей" — это почти однородная область пространства, размер которой превышает хаббловское расстояние H^{-1} . В ней сфера хаббловского размера является антиловушечной поверхностью, а значит, в прошлом в ней должна быть сингулярность. Поскольку мы неспособны создать подходящую сингулярность (и контролировать эволюцию через любую сингулярность), мы не можем создать вселенную, "подобную нашей". В литературе широко обсуждаются такие возможности обхода этого запрета, как туннелирование [14–23] или другие квантовые эффекты [24–27], модификация гравитации [28–30] и т.д. Однако представляет несомненный интерес рассмотреть с этой целью нарушение условия NEC, оставаясь в рамках общей теории относительности. В этом направлении было сделано несколько попыток [31–34], однако большинство из них сталкивается с проблемой нестабильности.

Наконец, условие NEC запрещает и существование в общей теории относительности горловин в пространстве, как статических [35–37], так и зависящих от времени [38]. Такая горловина могла бы соединять две асимптотически плоские области пространства, формируя кротовую нору [35–37, 39, 40] (рис. 1), или могла бы служить мостом между большой, но конечной областью пространства и асимптотически плоской областью, участвуя в конструкции полузамкнутого мира [24] (рис. 2). Опять-таки представляет интерес построение моделей,

² В соответствии с (5), для материи с уравнением состояния $p = w\rho$ для этого требуется $w < -1/3$.

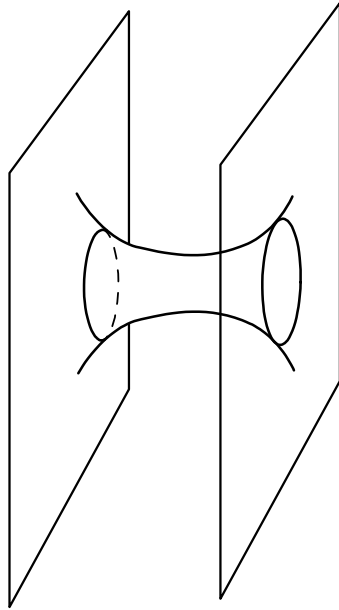


Рис. 1. Пространственная геометрия кротовой норы.

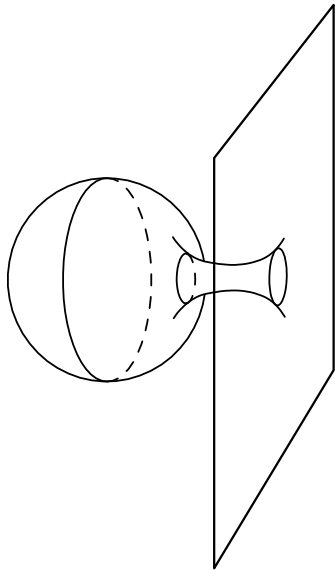


Рис. 2. Пространственная геометрия полузамкнутого мира.

нарушающих условие NEC, в которых в принципе могли бы существовать решения, описывающие горловины.

Все приведённые соображения служат мотивировкой поиска непротиворечивых моделей с нарушением условия NEC. При этом естественно начинать с моделей с классическими скалярными полями. Однако, как мы обсудим в разделе 2, в моделях скалярных полей с минимальной связью с гравитацией, лагранжианы которых содержат только первые производные, решения либо удовлетворяют условию NEC, либо имеют неприемлемые неустойчивости (с точностью до одной возможности, которую мы кратко рассмотрим в конце раздела 2). В связи с этим приходится либо вводить в рассмотрение векторные поля (примеры непротиворечивых, хотя и весьма вычурных моделей с векторными — но не калибровочными — полями и нарушением условия NEC действительно имеются [41, 42]), либо переходить к лагранжианам с высшими производными. Обычно считается, впрочем, что лагранжианы, содержащие вто-

рые и более высокие производные, рассматривать нельзя (а в рамках эффективных низкоэнергетических теорий к членам с высшими производными следует относиться как к поправкам, которые нужно учитывать только в рамках теории возмущений), поскольку соответствующие уравнения поля содержат производные выше второго порядка, что приводит к появлению "паразитных" степеней свободы с неприемлемыми свойствами. Такой взгляд, однако, неверен: существует класс теорий скалярных полей с лагранжианами, содержащими вторые производные, но приводящими к полевым уравнениям второго порядка. Такие теории были обнаружены в незамеченной работе Г. Хорндески [43], переоткрыты в совершенно ином контексте Д. Фэйрли, Я. Говэртсом и А. Морозовым [44–46] и сравнительно недавно стали популярными в разных воплощениях, таких как модель Двали–Габададзе–Поррати [47] в пределе отщепления [48, 49], теория галилеона [50] и её обобщения [51–56], k-муфляж [57], кинетическое смешивание с гравитацией [58–60], Fab-Four [61, 62] и т.д. Как мы увидим в разделе 3, существует конечное число классов лагранжианов с производными второго порядка, приводящих к уравнениям второго порядка [50, 63–65]. По крайней мере некоторые из этих лагранжианов допускают нарушение условия NEC [66–71], причём соответствующие решения и их окрестности свободны от патологий. В разделе 4 мы приведём несколько примеров использования таких теорий для построения довольно нетривиальных космологических моделей, а также для того, чтобы показать принципиальную возможность создания "вселенной в пробирке".

В заключительном разделе 5 мы отметим потенциальные проблемы теорий с нарушением условия NEC из-за присутствия вторых производных в лагранжианах. С этими вопросами ещё предстоит разобраться.

2. Нарушение условия NEC и неустойчивости

2.1. Тахионы, градиентные неустойчивости, духи

В этом кратком обзоре мы в основном будем рассматривать режим слабой гравитации, который имеет место тогда, когда $M_{\text{Pl}} = G^{-1/2}$ является самым большим параметром задачи. В низшем порядке это соответствует выключенной динамике метрики пространства-времени, так что эволюция других полей происходит на фоне пространства Минковского. Во многих случаях полезно изучать пространственно-однородные решения полевых уравнений; именно на них мы и сосредоточимся. Мы будем интересоваться вопросом о возможности нарушения условия NEC в такой ситуации.

В теории одного скалярного поля π пространственно-однородное решение $\pi_c(t)$ может быть, а может и не быть приемлемым. Неприятности, если они есть, проявляются в свойствах возмущений над этим фоновым решением, $\pi = \pi_c + \chi$. Предполагая, что линеаризованные уравнения для χ имеют второй порядок по производным, мы всегда можем записать лагранжиан для χ в виде

$$L_\chi^{(2)} = \frac{1}{2} U \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} V (\partial_i \chi)^2 - \frac{1}{2} W \chi^2, \quad (6)$$

где U , V , W зависят от времени. Рассмотрим режим больших импульсов, в котором изменения χ в пространстве и времени происходят на масштабах, малых по

сравнению с временным масштабом изменения фонового поля $\pi_c(t)$. Тогда в заданный короткий период времени зависимостью U , V и W от времени можно пренебречь, и имеются следующие возможности:

1. Стабильное фоновое решение:

$$U > 0, \quad V > 0, \quad W \geq 0.$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$U\omega^2 = V\mathbf{p}^2 + W, \quad (7)$$

что совпадает с дисперсионным соотношением для обычных линейных возмущений. Плотность энергии возмущений равна

$$T_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} U \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} V (\partial_i \chi)^2 + \frac{1}{2} W \chi^2. \quad (8)$$

Энергия положительна, как и должно быть. При $V < U$ возмущения χ распространяются со скоростью, меньшей скорости света, при $V = U$ — со скоростью света, а при $V > U$ скорость распространения возмущений χ превышает скорость света. Хотя распространение возмущений со сверхсветовыми скоростями, по-видимому, представляет собой не самую серьёзную проблему, оно, тем не менее, указывает на невозможность лоренц-инвариантного ультрафиолетового (UV) замыкания [72] (иначе говоря, такая теория не может быть низкоэнергетической эффективной теорией, возникающей в некоторой лоренц-инвариантной квантовой теории, справедливой на всех масштабах энергий) (см., однако, работу [73], где этот вывод оспаривается). Поэтому сверхсветовых скоростей лучше избегать. Случай $U = V$ тоже потенциально проблематичен, поскольку не исключено существование решений в окрестности π_c , на фоне которых возмущения распространяются со сверхсветовой скоростью. Таким образом, наиболее безопасный случай — это

$$U > V > 0.$$

1а. Специальный случай:

$$U > 0, \quad V = 0.$$

Чтобы понять, как его рассматривать, необходимо считать, что исходная теория скалярного поля — это низкоэнергетическая эффективная теория с ультрафиолетовым масштабом обрезания Λ . Лагранжиан такой теории, вообще говоря, имеет поправки высшего порядка по производным, подавленные степенями Λ^{-1} и в обычной ситуации пренебрежимо малые. Однако при $V = 0$ эти поправки являются существенными, поскольку только они приводят к слагаемым в лагранжиане для возмущений, содержащим пространственные производные [74]. Главные члены высшего порядка в лагранжиане для возмущений содержат вторые производные, поэтому лагранжиан имеет вид³

$$L_\chi^{(2)} = \frac{1}{2} U \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2\Lambda^2} [a\ddot{\chi}^2 + b\dot{\chi}^2 (\partial_i \chi)^2 + c(\partial_i \partial_i \chi)^2],$$

³ Возможный член с меньшим числом производных $(\alpha(t)/\Lambda)\dot{\chi}(\partial_i \chi)^2$ интегрированием по частям сводится к $(\dot{\alpha}/2\Lambda)(\partial_i \chi)^2$; соответствующее преобразование имеет вид $(\alpha/\Lambda)\dot{\chi}(\partial_i \chi)^2 \rightarrow -(\alpha/\Lambda)\partial_i \dot{\chi} \partial_i \chi = -(\alpha/2\Lambda)\partial_0(\partial_i \chi)^2 \rightarrow (\dot{\alpha}/2\Lambda)(\partial_i \chi)^2$. Он пренебрежимо мал при $\mathbf{p}^2 \gg \Lambda$, но становится существенным при меньших импульсах. При $\dot{\alpha} < 0$ он не приводит к проблемам.

где мы положили для простоты $W = 0$, как в модели духового конденсата [74]. Дисперсионное соотношение, с точностью до поправок, сильнее подавленных степенями Λ^{-1} , теперь имеет вид

$$U\omega^2 = \frac{c}{\Lambda^2} \mathbf{p}^4,$$

что не приводит к проблемам при $c > 0$. Другие решения дисперсионного уравнения удовлетворяют неравенству $|\omega| \gg \Lambda$, поэтому в низкоэнергетической эффективной теории их учитывать не следует.

1б. Тахионная неустойчивость:

$$U > 0, \quad V > 0, \quad W < 0.$$

На формальном уровне дисперсионное соотношение (7) приводит к мнимым значениям ω для достаточно *низких* импульсов, $V\mathbf{p}^2 < |W|$, поэтому имеются растущие возмущения, $\chi \propto \exp(\int |\omega| dt)$ с $|\omega| \ll |W|^{1/2}$. Это действительно представляет собой проблему, если временной масштаб роста возмущений $|W|^{-1/2}$ гораздо меньше временного масштаба, характеризующего фоновое поле $\pi_c(t)$. В обратном случае приближение медленно меняющихся $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ не работает, и сделать вывод о неустойчивости фонового поля π_c нельзя. Во втором случае фоновое поле устойчиво на малых временных масштабах, а для изучения того, что происходит на больших временных масштабах, необходимо провести полный анализ. Отметим, что тахионные неустойчивости присущи некоторым моделям тёмной энергии с нарушением условия NEC [41, 42], и они могут приводить к интересным наблюдаемым эффектам [75, 76].

2. Градиентная неустойчивость:

$$U > 0, \quad V < 0 \quad \text{или} \quad U < 0, \quad V > 0.$$

В соответствии с уравнением (7), "частоты" $\omega(\mathbf{p})$ являются мнимыми при высоких импульсах и имеются сколь угодно быстро растущие возмущения. Это означает, что фоновое решение π_c неустойчиво, а значит неприемлемо. Рассмотрение исходной теории скалярного поля как низкоэнергетической эффективной теории, справедливой ниже некоторого энергетического масштаба Λ , не меняет дела: скорость изменения фонового поля $\pi_c(t)$ для самосогласованности должна быть много меньше Λ , а скорости развития неустойчивостей простираются вплоть до Λ ; фоновое поле разрушается за короткое время.

3. Духовая неустойчивость:

$$U < 0, \quad V < 0.$$

В классической теории поля фоновое решение стабильно относительно возмущений с высокими импульсами: уравнение (7) показывает, что частоты вещественны при высоких импульсах. Однако фоновое поле неустойчиво в квантовой теории. Действительно, энергия (8) отрицательна при высоких импульсах, и после квантования χ -частицы имеют отрицательные энергии; они представляют собой духи. Сохранение энергии не запрещает парного рождения из вакуума духов вместе с обычными частицами (например, через обмен гравитоном, поскольку гравитоны определённо взаимодействуют с χ -частицами); вакуум в квантовой теории нестабилен. Энергии и импульсы рождённых частиц могут принимать значения вплоть до ультрафиолетовой шкалы Λ , ниже которой

теории можно доверять, поэтому соответствующий фазовый объём, вообще говоря, велик, а время распада вакуума мало. Если масштаб Λ не слишком мал, эта нестабильность неприемлема. Итак, фоновые поля, возмущения около которых содержат дүхи, следует считать патологическими. Отметим, что в лоренц-инвариантной теории и для лоренц-инвариантного фонового поля $\pi_c = \text{const}$ дүховая неустойчивость носит катастрофический характер: если частицы могут родиться из вакуума с некоторыми энергиями и импульсами, то возможен и процесс, получаемый из этого с помощью лоренцева буста; фазовый объём конечных состояний пропорционален объёму группы Лоренца, т.е. он бесконечен; временной масштаб нестабильности вакуума бесконечно мал. Другими словами, дүхи в современной Вселенной допустимы, только если в секторе дүхов нарушена лоренц-инвариантность, причём таким образом, что энергии частиц-дүхов не могут превышать 3 МэВ [77].

Приведённое обсуждение прямо обобщается на теорию нескольких скалярных полей π^I , $I = 1, \dots, N$. Лагранжиан для возмущений χ^I теперь имеет вид

$$L_\chi^{(2)} = \frac{1}{2} U_{IJ} \dot{\chi}^I \dot{\chi}^J - \frac{1}{2} V_{IJ} \partial_i \chi^I \partial_i \chi^J - \frac{1}{2} W_{IJ} \chi^I \chi^J, \quad (9)$$

а плотность энергии равна

$$T_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} U_{IJ} \dot{\chi}^I \dot{\chi}^J + \frac{1}{2} V_{IJ} \partial_i \chi^I \partial_i \chi^J + \frac{1}{2} W_{IJ} \chi^I \chi^J.$$

Оставляя в стороне случай вырожденной матрицы V_{IJ} , аналогичный обсуждавшемуся выше случаю (1а), диагонализуем матрицу V_{IJ} переопределением полей. Если она имеет отрицательные собственные значения, то энергия неограничена снизу [78]: можно построить начальную конфигурацию с $\dot{\chi}^I = 0$ и сколь угодно высоким импульсом, такую, что $\mathbf{p}^2 V_{IJ} \chi^I \chi^J < 0$. Это патологический случай: среди возмущений имеются дүхи и/или градиентные неустойчивости. В случае положительно определённой диагональной матрицы V_{IJ} можно перемасштабировать χ^I так, что V_{IJ} станет единичной матрицей, $V_{IJ} = \delta_{IJ}$. После этого можно диагонализировать U_{IJ} ортогональным преобразованием, и члены с производными в лагранжиане будут иметь вид $\sum_I [\lambda_I (\dot{\chi}^I)^2 - (\partial_i \chi^I)^2]$. Если U_{IJ} имеет отрицательное собственное значение λ_I , то имеет место градиентная неустойчивость. Итак, требование отсутствия градиентных неустойчивостей и дүхов приводит к следующему условию:

Стабильное фоновое поле:

$$\text{положительно определённые } U_{IJ}, V_{IJ}. \quad (10)$$

Отсутствие в теории тахионов (при достаточно низких импульсах) зависит теперь от положительной определённости W_{IJ} .

2.2. Скалярные теории с лагранжианами, содержащими производные только первого порядка

В качестве первой попытки построения теорий с нарушением условия NEC рассмотрим лагранжиан, содержащий производные только первого порядка:

$$L = F(X^{IJ}, \pi^I), \quad (11)$$

где

$$X^{IJ} = \partial_\mu \pi^I \partial^\mu \pi^J.$$

Будем рассматривать теории с минимальной связью с гравитацией, тогда тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial F}{\partial X^{IJ}} \partial_\mu \pi^I \partial_\nu \pi^J - g_{\mu\nu} F.$$

Поэтому для однородного фонового поля

$$T_{00} \equiv \rho = 2 \frac{\partial F}{\partial X^{IJ}} X^{IJ} - F,$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} \equiv p = F$$

и

$$\rho + p = 2 \frac{\partial F}{\partial X^{IJ}} X^{IJ} = 2 \frac{\partial F}{\partial X^{IJ}} \dot{\pi}^I \dot{\pi}^J. \quad (12)$$

Видно, что нарушение условия NEC происходит тогда, когда матрица $\partial F / \partial X_c^{IJ}$, вычисленная для фоновых полей π_c^I , не положительно определена. С другой стороны, разложим лагранжиан (11) до второго порядка по возмущениям $\pi^I = \pi_c^I + \chi^I$ и получим лагранжиан для возмущений в виде (9)

$$U_{IJ} = 2 \frac{\partial F}{\partial X_c^{IJ}} + 4 \frac{\partial^2 F}{\partial X_c^{IK} \partial X_c^{JL}} \dot{\pi}_c^K \dot{\pi}_c^L, \quad (13)$$

$$V_{IJ} = 2 \frac{\partial F}{\partial X_c^{IJ}}.$$

Отсюда следует, что стабильность фона — положительная определённая V_{IJ} (см. (10)) — несовместима с нарушением условия NEC [78].

Остаётся, впрочем, одна возможность, связанная с рассмотренным выше случаем (1а) [79]. В качестве примера рассмотрим теорию дүхового конденсата с добавленным малым потенциальным членом [79, 80],

$$L = M^4 (X^2 - 1)^2 - V(\pi),$$

где π — поле дүхового конденсата (размерности масса⁻¹), $X = \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi$, а M — энергетический масштаб. В отсутствие потенциала имеется решение $\pi_c = t$, для которого $F \equiv M^4 (X^2 - 1)^2 = 0$ и $\partial F / \partial X = 0$. Это решение находится на границе нарушения условия NEC. Член со вторыми производными, имеющий правильный знак, делает фоновое поле стабильным. При добавлении малого потенциала $V(\pi)$ с положительным наклоном величина $(\dot{\pi}_c - 1)$ становится слегка отрицательной. В соответствии с (12) и (13) это приводит к нарушению условия NEC и одновременно к градиентной неустойчивости. Однако с учётом членов второго порядка в лагранжиане эта неустойчивость имеется только при малых импульсах \mathbf{p} и может быть безопасной в некоторых ситуациях [80] при специальном выборе параметров и вида членов второго порядка. Эта возможность использовалась, в частности, в работе [80] для построения космологического сценария, подобного тому, который сейчас носит название "генезис". Мы рассмотрим менее вычурную модель генезиса в разделе 4. Конструкция с дүховым конденсатом была использована и для построения космологических моделей с отскоком [81, 82], стартующих со стадии экипирозиса [83, 84]. Для самосогласованности фазы отскока в них тоже требуется подбирать параметры специальным образом. Мы рассмотрим более простую версию этого сценария в разделе 4.

3. Лагранжианы с производными второго порядка

Основное внимание в этом кратком обзоре мы уделяем теориям скалярных полей с лагранжианами, содержащими производные второго порядка, и с уравнениями поля второго порядка по производным. Хотя терминология здесь не вполне устоялась, мы будем называть такие поля (обобщёнными) галилеонами. Сконцентрируемся на случае одного скалярного поля π в пространстве Минковского и запишем уравнение Эйлера – Лагранжа для теории с лагранжианом $L(\pi, \partial_\mu \pi, \partial_\mu \partial_\nu \pi)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \pi_\mu} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \pi_{\mu\nu}} = 0, \quad (14)$$

где

$$\pi_\mu = \partial_\mu \pi, \quad \pi_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \pi.$$

Из-за последнего члена в уравнении (14) полевое уравнение, вообще говоря, имеет четвёртый порядок по производным. Однако есть исключения, которые и представляют собой лагранжианы галилеонов. Простейший исключительный лагранжиан имеет вид

$$L_{(1)} = K^{\mu\nu}(\pi, \partial_\lambda \pi) \partial_\mu \partial_\nu \pi. \quad (15)$$

Казалось бы, соответствующее уравнение имеет третий порядок, однако это не так. Действительно, второй член в уравнении (14) приводит к следующему вкладу третьего порядка

$$-\frac{\partial K^{\mu\nu}}{\partial \pi_\lambda} \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \pi, \quad (16)$$

тогда как третий член в (14) равен

$$\partial_\mu \partial_\nu K^{\mu\nu}(\pi, \pi_\lambda) = \frac{\partial K^{\mu\nu}}{\partial \pi_\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \pi + \dots, \quad (17)$$

где невыписанные слагаемые не содержат третьих производных. В результате члены с третьими производными сокращаются, и полевое уравнение имеет второй порядок.

Полезно сделать следующее наблюдение. На первый взгляд, имеется два члена общего вида (15), но с разной лоренцевой структурой:

$$K(\pi, X) \square \pi \quad \text{и} \quad H(\pi, X) \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \pi,$$

где $\square = \partial_\lambda \partial^\lambda$ и, как и прежде, $X = \partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi$. Однако вторая структура сводится к первой интегрированием по частям (которое мы обозначаем стрелкой):

$$\begin{aligned} H(\pi, X) \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \pi &= \frac{1}{2} H \partial^\mu \pi \partial_\mu X = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu Q \partial^\mu \pi \rightarrow -\frac{1}{2} Q \square \pi, \end{aligned}$$

где функция $Q(\pi, X)$ такова, что $H = \partial Q / \partial X$. Поэтому остаётся единственный член в лагранжиане

$$L_{(1)} = K_1(\pi, X) \partial_\mu \partial^\mu \pi. \quad (18)$$

Отметим, что он не сводится интегрированием по частям к какому-либо лагранжиану с первыми производными.

Рассмотрим более сложный пример лагранжиана, квадратичного по вторым производным. Имеется пять

возможных лоренцевых структур:

$$\begin{aligned} L_{(2)} &= F_1 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial^\lambda \pi \partial^\rho \pi \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\rho \partial_\lambda \pi + \\ &+ F_2 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\lambda \pi \partial_\nu \partial^\lambda \pi + \\ &+ F_3 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \pi \square \pi + \\ &+ F_4 \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi + \\ &+ F_5 (\square \pi)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $F_a = F_a(\pi, X)$, $a = 1, \dots, 5$. Получаемое отсюда уравнение поля имеет следующие слагаемые *четвёртого порядка*

$$\begin{aligned} &F_1 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial^\lambda \pi \partial^\rho \pi \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\lambda \pi + \\ &+ F_2 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \square \pi + \\ &+ F_3 \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \square \pi + \\ &+ F_4 \square \square \pi + \\ &+ F_5 \square \square \pi. \end{aligned} \quad (20)$$

Видно, что члены четвёртого порядка сокращаются тогда и только тогда, когда $F_1 = 0$, $F_2 = -F_3$, $F_4 = -F_5$, а лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L_{(2)} &= H \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi (\partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\lambda \partial^\lambda \pi - \partial_\mu \partial_\lambda \pi \partial_\nu \partial^\lambda \pi) + \\ &+ K (\partial^\nu \partial_\nu \pi \partial_\mu \partial^\mu \pi - \partial^\nu \partial_\mu \pi \partial_\nu \partial^\mu \pi) = \\ &= H \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\lambda \partial^\lambda \pi + K \partial^\nu \partial_\nu \pi \partial_\mu \partial^\mu \pi, \end{aligned} \quad (21)$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию (мы используем определение $A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ без численного множителя). Теперь понятно, почему произошло сокращение членов четвёртого порядка в уравнении поля: оно вытекает из тождеств типа $\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \partial^\lambda \pi = 0$. Первый член в (21) снова может быть приведён к виду второго:

$$\begin{aligned} &H \partial^\mu \pi \partial^\nu \pi (\partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\lambda \partial^\lambda \pi - \partial_\mu \partial_\lambda \pi \partial_\nu \partial^\lambda \pi) = \\ &= \frac{1}{2} H (\partial_\mu X \partial^\mu \pi \square \pi - \partial_\lambda X \partial_\mu \pi \partial^\lambda \partial^\mu \pi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu Q (\partial^\mu \pi \square \pi - \partial_\nu \pi \partial^\nu \partial^\mu \pi) \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} Q (\square \pi \square \pi - \partial_\nu \partial_\mu \pi \partial^\nu \partial^\mu \pi). \end{aligned}$$

Стало быть, снова остаётся один член

$$L_{(2)} = K_2(\pi, X) (\partial^\nu \partial_\nu \pi \partial_\mu \partial^\mu \pi - \partial^\nu \partial_\mu \pi \partial_\nu \partial^\mu \pi).$$

Теперь нетрудно проверить, что члены третьего порядка тоже сокращаются в уравнении поля: слагаемые с $(\partial K_2 / \partial \pi_\lambda) \partial_\lambda (\partial^\nu \partial_\nu \pi \partial_\mu \partial^\mu \pi - \partial^\nu \partial_\mu \pi \partial_\nu \partial^\mu \pi)$ сокращаются автоматически, так же как (16) и (17), в то время как оставшиеся члены типа

$$\partial^\nu K_2(\pi, X) (\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu \pi - \partial_\mu \partial_\nu \partial^\mu \pi)$$

также равны нулю.

История повторяется для членов третьего и более высоких порядков по вторым производным. Единственный исключительный лагранжиан n -го порядка в пространстве-времени размерности D имеет вид [50, 63]

$$L_{(n)} = K_n(\pi, X) \partial^{\mu_1} \partial_{[\mu_1} \pi \dots \partial^{\mu_n} \partial_{\mu_n]} \pi. \quad (22)$$

То, что соответствующее уравнение поля имеет второй порядок по производным, проверяется тривиально;

доказать то, что другие члены отсутствуют или сводятся к (22) интегрированием по частям, далеко не просто [63]. Отметим, что $L_{(n)}$ может быть записан в виде

$$L_{(n)} = \frac{1}{(D-n)!} \times \\ \times K_n(\pi, X) \epsilon^{v_1 \dots v_{D-n} \mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{v_1 \dots v_{D-n} \lambda_1 \dots \lambda_n} \partial_{\mu_1} \partial^{\lambda_1} \pi \dots \partial_{\mu_n} \partial^{\lambda_n} \pi. \quad (23)$$

Действительно, любой антисимметричный тензор $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ может быть представлен в виде

$$A_{\mu_1 \dots \mu_n} = \epsilon_{v_1 \dots v_{D-n} \mu_1 \dots \mu_n} B^{v_1 \dots v_{D-n}}, \quad (24)$$

где

$$B^{v_1 \dots v_{D-n}} = \frac{1}{n!(D-n)!} \epsilon^{v_1 \dots v_{D-n} \mu_1 \dots \mu_n} A_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (25)$$

— дуальный тензор. Выражение в правой части (22) антисимметрично как по нижним, так и по верхним индексам. Применяя преобразование (24), (25) к верхним и нижним индексам по отдельности, мы и получаем (23).

Отметим, что имеется $(D+1)$ разрешённых класса лагранжианов, если учитывать и класс без вторых производных

$$L_{(0)} = K_0(\pi, X). \quad (26)$$

В частности, для четырёхмерного пространства-времени имеется пять классов. Общий лагранжиан галилеона представляет собой сумму всех этих членов.

На этом обсуждение исключительных теорий одного скалярного поля, галилеона, в пространстве Минковского завершается. Теории с *многими* скалярными полями рассмотрены в работах [64, 65] (см. также [85–88]). Минимальное обобщение $L_{(1)}$ на случай *искривлённого* пространства-времени имеет простой вид:

$$L_{(1)} = K_1(\pi, X) \nabla_\mu \nabla^\mu \pi,$$

где $X = g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi$; нетрудно показать, что соответствующее уравнение поля имеет по-прежнему второй порядок. Тензор энергии-импульса, а следовательно, и уравнения Эйнштейна также имеют второй порядок по производным. Обобщение же $L_{(2)}$ и более высоких лагранжианов далеко не тривиально [43, 51, 63]. Отметим ещё, что некоторые лагранжианы галилеонного типа имеют интересную интерпретацию в терминах динамики 3-браны в 5-мерном пространстве-времени [52, 53].

4. Примеры нарушения условия NEC

В этом разделе мы рассмотрим простой пример решения, нарушающего условие NEC, и его применения к построению довольно нетривиальных космологических моделей. Мы также рассмотрим возможность создания вселенной в лаборатории с помощью моделей галилеона типа обсуждавшихся в разделе 3. Наш набор примеров далеко не полон и носит, конечно, субъективный характер.

4.1. Катящееся фоновое решение

Особенно просто проводится анализ моделей, обладающих инвариантностью относительно масштабных преобразований

$$\pi(x) \rightarrow \pi'(x) = \pi(\lambda x) + \ln \lambda. \quad (27)$$

Для наших целей достаточно рассмотреть лагранжиан, включающий только слагаемые $L_{(0)}$ и $L_{(1)}$ (см. (26) и (18)). Теории с такой общей структурой детально рассмотрены в работах [58–60], где им было дано название теорий с кинетическим смешиванием с гравитацией. Запишем для масштабного-инвариантного случая в пространстве-времени Минковского

$$L_\pi = F(Y) e^{4\pi} + K(Y) \square \pi e^{2\pi}, \quad (28)$$

где

$$Y = e^{-2\pi} (\partial \pi)^2, \quad (\partial \pi)^2 \equiv \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \quad (29)$$

а F и K — не выбранные пока функции. Предполагая, что K аналитична вблизи нуля, положим

$$K(Y=0) = 0. \quad (30)$$

Действительно, постоянная часть K интегрированием по частям может быть приведена к виду F -члена в (28). Нам потребуется выражение для тензора энергии-импульса. Мы ограничимся рассмотрением минимальной связи с гравитацией и положим в искривлённом пространстве $Y = e^{-2\pi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi$ и $\square \pi = \nabla^\mu \nabla_\mu \pi$. Для вычисления тензора энергии-импульса заметим, что в искривлённом пространстве K -член в $\sqrt{-g} L_\pi$ может быть записан после интегрирования по частям как $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu (K e^{2\pi})$. После этого вариация по $g^{\mu\nu}$ легко вычисляется, и мы получаем

$$T_{\mu\nu} = 2F' e^{2\pi} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - g_{\mu\nu} F e^{4\pi} + \\ + 2\square \pi K' \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - \partial_\mu \pi \partial_\nu (K e^{2\pi}) - \\ - \partial_\nu \pi \partial_\mu (K e^{2\pi}) + g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \pi \partial_\rho (K e^{2\pi}).$$

Это выражение справедливо и в искривлённом пространстве.

В дальнейшем мы рассматриваем однородное фоновое поле в пространстве Минковского, $\pi = \pi(t)$. Уравнение движения для однородного поля имеет вид

$$4e^{4\pi} F + F' e^{2\pi} (-6\dot{\pi}^2 - 2\ddot{\pi}) - 2e^{2\pi} \dot{\pi} F'' \dot{Y} + \\ + K e^{2\pi} (4\dot{\pi}^2 + 4\ddot{\pi}) + 4e^{2\pi} \dot{\pi} K' \dot{Y} + \\ + K'' \dot{Y} (-2\dot{\pi}^3) + K' (-12\dot{\pi}^2 \ddot{\pi} + 4\dot{\pi}^4) = 0, \quad (31)$$

а плотность энергии и давление равны

$$\rho = e^{4\pi} Z, \quad (32a)$$

$$p = e^{4\pi} (F - 2YK - e^{-2\pi} K' \dot{\pi} \dot{Y}), \quad (32b)$$

где

$$Z = -F + 2YF' - 2YK + 2Y^2 K'.$$

Нетрудно убедиться, что при $\dot{\pi} \neq 0$ уравнение (31) эквивалентно сохранению энергии $\dot{\rho} = 0$.

Полезно вычислить квадратичный лагранжиан для возмущений около однородного фонового поля. Он имеет вид (6) с

$$\frac{1}{2} U = e^{2\pi c} (F' + 2YF'' - 2K + 2YK' + 2Y^2 K'') = e^{2\pi c} Z', \quad (33a)$$

$$\frac{1}{2} V = e^{2\pi c} (F' - 2K + 2YK' - 2Y^2 K'') + (2K' + 2YK'') \dot{\pi} c. \quad (33b)$$

Явное выражение для W нам пока не понадобится. Отметим, что U пропорционально производной по Y

той самой комбинации Z , которая определяет плотность энергии (32а).

При $F(0) = 0$ имеется постоянное решение $\pi_c = \text{const}$, $Y = 0$ и $T_{\mu\nu} = 0$. В отсутствие других форм энергии это решение соответствует пространству Минковского. Выражения (33а), (33б) показывают, что постоянное решение стабильно при $F'(0) > 0$ и что возмущения распространяются со скоростью света (напомним, что мы положили $K(0) = 0$). Этот факт легко понять: из (28) следует, что возмущения относительно постоянного фона π_c описываются первым членом в лагранжиане, причём $L^{(2)} = e^{2\pi_c} F'(0) (\partial\chi)^2$ совпадает с лагранжианом свободного безмассового скалярного поля. В окрестности постоянного фона, т.е. при малых $\delta\pi_c$, возмущения не будут сверхсветовыми [70], если $K'(0) = 0$, $F''(0) > 0$.

В широком классе функций F и K уравнение (31) имеет также катящееся решение

$$e^\pi = \frac{1}{\sqrt{Y_*(t_* - t)}}, \quad (34)$$

где t_* — произвольный параметр. Для этого решения $Y = Y_* = \text{const}$, а Y_* определяется из уравнения

$$Z(Y_*) \equiv -F + 2Y_*F' - 2Y_*K + 2Y_*^2K' = 0, \quad (35)$$

где F , F' и т.д. вычисляются при $Y = Y_*$. На этом решении $T_{00} = \rho = 0$ и

$$p = \frac{1}{Y_*^2(t_* - t)^4} (F - 2Y_*K). \quad (36)$$

Видно, что катящееся решение нарушает условие NEC, если

$$\text{Нарушение условия NEC: } 2Y_*K - F > 0. \quad (37)$$

Квадратичный лагранжиан для возмущений (6) приводится для катящегося фона к виду

$$L^{(2)} = \frac{A}{Y_*(t_* - t)^2} [\dot{\chi}^2 - (\partial_i\chi)^2] + \frac{B}{Y_*(t_* - t)^2} \dot{\chi}^2 + \frac{C}{Y_*^2(t_* - t)^4} \chi^2, \quad (38)$$

где

$$A = \frac{1}{2} e^{-2\pi_c} V = F' - 2K + 4Y_*K',$$

$$B = \frac{1}{2} e^{-2\pi_c} (U - V) = 2Y_*F'' - 2Y_*K' + 2Y_*^2K'',$$

$$C = 8F - 12Y_*F' + 8Y_*^2F'' + 8Y_*K - 8Y_*^2K' + 8Y_*^3K''$$

— не зависящие от времени коэффициенты. В качестве проверки можно найти отсюда уравнения для однородного возмущения $\chi(t)$ и проверить, что $\chi = \delta\pi_c = (t_* - t)^{-1}$ этому уравнению удовлетворяет, как и должно быть. И действительно, используя (35), можно убедиться, что коэффициенты при $\dot{\chi}^2$ и χ^2 в выражении (38) простым образом связаны:

$$4(A + B) = \frac{C}{Y_*}.$$

Поэтому однородное возмущение удовлетворяет универсальному уравнению

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\chi}}{(t_* - t)^2} \right) + 4 \frac{\chi}{(t_* - t)^4} = 0.$$

Решениями этого уравнения служат $\chi = (t_* - t)^{-1}$ и $\chi = (t_* - t)^4$. Это показывает, что катящееся фоновое решение является аттрактором и что оно стабильно относительно длинноволновых возмущений: растущее возмущение $\chi = (t_* - t)^{-1} \chi_0(\mathbf{x})$ с медленно меняющимся $\chi_0(\mathbf{x})$ может быть интерпретировано как слегка неоднородный сдвиг времени.

Рассмотрим вопросы о стабильности катящегося решения и о скорости распространения возмущений над ним. Член с пространственными градиентами в (38) имеет правильный (отрицательный) знак, если

Отсутствие градиентной неустойчивости:

$$A = F' - 2K + 4Y_*K' > 0. \quad (39)$$

Скорость распространения возмущений относительно катящегося фона меньше скорости света, если коэффициент при $\dot{\chi}^2$ больше коэффициента при $-(\partial_i\chi)^2$, т.е.

Субсветовое распространение:

$$B = 2Y_*F'' - 2Y_*K' + 2Y_*^2K'' > 0. \quad (40)$$

Мы потребуем, чтобы это неравенство выполнялось в сильном смысле, тогда скорость возмущений относительно катящегося фона строго меньше скорости света, а значит, возмущения относительно фоновых полей в окрестности катящегося решения также будут иметь субсветовые скорости. Когда выполнены условия (39) и (40), отсутствуют дүхи. Условия (37), (39) и (40) вместе с (35) действительно выполняются для $Y = Y_*$ при подходящем выборе функций F и K в окрестности этой точки, поэтому нарушение условия NEC происходит вполне приемлемым образом. Это можно увидеть так. Уравнение (35) можно использовать, чтобы выразить $F(Y_*)$ через $F'(Y_*)$, $K(Y_*)$ и $K'(Y_*)$, а именно, $F = 2Y_*F' - 2Y_*K + 2Y_*^2K'$. После этого неравенства (37), (39) выполняются, если $2K - 4Y_*K' < F' < 2K - Y_*K'$, что возможно для положительного K' . Условие (40) можно выполнить путём выбора F'' и K'' .

Чтобы связать изложенные результаты с известными работами, отметим, что в работе [67] рассматривался лагранжиан типа (28), а именно

$$L_\pi = -f^2 e^{2\pi} (\partial\pi)^2 + \frac{f^2}{2A^3} (1 + \alpha) (\partial\pi)^4 + \frac{f^3}{A^3} (\partial\pi)^2 \square\pi, \quad (41)$$

что соответствует

$$F = -f^2 Y + \frac{f^2}{2A^3} (1 + \alpha) Y^2, \quad K = \frac{f^3}{A^3} Y.$$

Здесь параметры f и A имеют размерность массы, а параметр α — безразмерный. Решение уравнения (35) имеет вид

$$Y_* = \frac{2}{3(1 + \alpha)} \frac{A^3}{f}.$$

Следует потребовать, чтобы энергетический масштаб $\sqrt{Y_*}$, связанный с этим решением, был ниже масштаба A , который интерпретируется как масштаб ультрафиолетового обрезания. Это даёт

$$f \gg A. \quad (42)$$

Из (37) находим, что фоновое значение $Y = Y_*$ приводит к нарушению условия NEC тогда и только тогда, когда

$$2Y_*K - F = 2f^2 Y_* \frac{3 + \alpha}{1 + \alpha} > 0,$$

а условия стабильности и отсутствия сверхсветовых скоростей (39) и (40) дают

$$A = \frac{3 - \alpha}{3(1 + \alpha)} f^2 > 0, \quad B = \frac{4\alpha}{3(1 + \alpha)} f^2 > 0.$$

Все эти условия выполнены для [67]

$$0 < \alpha < 3.$$

Отметим, что случай $\alpha = 0$ соответствует распространению возмущений вокруг фонового решения с $Y = Y_*$ со скоростью света. В этом случае теория (41) обладает инвариантностью относительно конформной симметрии [50, 66]. Однако случай $\alpha = 0$ проблематичен, поскольку в окрестности $Y = Y_*$ существуют фоновые поля, возмущения относительно которых распространяются со скоростью, превышающей скорость света [67]. Отметим ещё, что лагранжиан (41) не допускает стабильного решения с $\pi_c = \text{const}$, соответствующего пространству Минковского, поскольку $F'(0) < 0$. Конформно-инвариантная теория со стабильными константными и катящимися решениями и субсветовой скоростью распространения возмущений над катящимся решением предложена в работе [69], которая опирается на работу [52]; эта теория носит название ДБИ теория конформного галилеона.

В заключение этого раздела рассмотрим, следуя работе [70], структуру пространства однородных конфигураций $(\pi, \dot{\pi})$ в произвольной теории галилеона, обладающей инвариантностью относительно масштабных преобразований (27). Лагранжиан может содержать все члены, обсуждавшиеся в разделе 3. Выше мы отмечали, что при $\dot{\pi} \neq 0$ уравнение поля эквивалентно сохранению энергии $\dot{\rho} = 0$. Это не случайно. Теорема Нетер гарантирует, что нетеровский тензор энергии-импульса (совпадающий с метрическим для минимальной связи скалярного поля с гравитацией) удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = -(\text{Е.О.М.}) \partial_\nu \pi,$$

где (Е.О.М.) — выражение для уравнения поля (equation of motion). Поэтому полевое уравнение в однородном случае $\pi = \pi(t)$ имеет вид

$$(\text{Е.О.М.}) = -\frac{1}{\dot{\pi}} \dot{\rho}. \quad (43)$$

Поскольку уравнение поля имеет второй порядок, функция $\rho = \rho(\pi, \dot{\pi})$ не содержит $\ddot{\pi}$ и высших производных, и в силу масштабной инвариантности она представима в виде

$$\rho = e^{4\pi} Z(Y),$$

где $Y = \dot{\pi}^2 \exp(-2\pi)$ (ср. с (29)), а Z — некоторая функция, вид которой определяется лагранжианом. Теперь мы можем пояснить в общем виде причину, по которой катящееся решение с $Z = 0$ и $\dot{\pi} > 0$ является аттрактором в классе однородных решений. Используем для этого сохранение энергии $\dot{\rho} = 0$ и запишем для произвольного однородного решения

$$e^{4\pi} Z = \text{const}. \quad (44)$$

Когда π растёт, $|Z|$ убывает, поэтому решение стремится к конфигурации с $Z \rightarrow 0$. Пространство однородных галилеонов с $\dot{\pi} > 0$ разбивается таким образом на области притяжения решений с $Z = 0$.

Мы также отмечали, что коэффициент U , фигурирующий в лагранжиане для возмущений, пропорционален Z' . Это тоже не случайно. Чтобы в этом убедиться, используем снова соотношение (43), справедливое для любого однородного галилеона. Из него следует, что полевое уравнение для однородного возмущения вокруг фонового поля $\pi_c(t)$ имеет вид

$$-\frac{1}{\dot{\pi}_c} \frac{\partial \rho}{\partial \dot{\pi}_c} \ddot{\chi} + \dots = 0,$$

где невыписанные слагаемые не содержат $\ddot{\chi}$. Поэтому лагранжиан для возмущений равен

$$L^{(2)} = \frac{1}{2\dot{\pi}_c} \frac{\partial \rho}{\partial \dot{\pi}_c} \dot{\chi}^2 + \dots = e^{2\pi_c} Z'(Y) \dot{\chi}^2 = \dots,$$

где невыписанные слагаемые не содержат $\dot{\pi}$. Мы заключаем, что $\rho = e^{4\pi_c} Z(Y_c)$, $U = 2e^{2\pi_c} Z'(Y_c)$ для любой точки конфигурационного пространства однородного галилеона $(\pi_c, \dot{\pi}_c)$ в любой масштабно-инвариантной теории.

Вспомним, наконец, что конфигурация $(\pi_c, \dot{\pi}_c)$, для которой $U < 0$, нестабильна: возмущения вокруг неё имеют либо духовые, либо градиентные неустойчивости. Поэтому приведённые результаты означают, что любой путь в пространстве однородных конфигураций $(\pi, \dot{\pi})$, соединяющий два аттракторных решения с нулевой энергией $Z = 0$, проходит через область неустойчивости: Z' отрицателен где-то на этом пути. Это свойство приводит к трудностям при использовании масштабно-инвариантных галилеонов, о которых мы будем говорить ниже. Здесь мы отметим, что оно не допускает эволюцию без патологий, связывающую константное и катящееся решения, даже если эта эволюция происходит под влиянием источника (если этот источник не взаимодействует с $\dot{\pi}$).

Приведённый анализ существенно использует масштабную инвариантность. Если от неё отказаться, то весь анализ и выводы из него перестают быть справедливыми. В частности, эволюция без патологий от константного к катящемуся решению становится возможной [71].

4.2. Сценарий генезиса

В качестве первого примера использования катящегося решения раздела 4.1 рассмотрим "генезис" [66] — космологический сценарий, альтернативный инфляции⁴. В этом сценарии предполагается, что на ранних временах $t \rightarrow -\infty$ пространство-время является пространством Минковского, плотность энергии и давление равны нулю, Вселенная пуста. При этих временах единственной существенной формой материи является поле галилеона π , описываемое лагранжианом (28) (другие лагранжианы галилеона рассмотрены в работах [69, 89] с похожими результатами). Предполагается, что условия (37), (39) и (40) выполнены, тогда решение $Y = Y_*$ стабильно и нарушает условие NEC. На начальной стадии эволюции, т.е. при достаточно больших $(t_* - t)$, плотность энергии и давление малы, поэтому можно использовать теорию возмущений по $G \equiv M_{\text{Pl}}^{-2}$. Уравнение (4) с $\kappa = 0$ определяет параметр Хаббла, а в низшем нетривиальном порядке по M_{Pl}^{-2} в нём можно использовать полученные в случае пространства Минковского

⁴ Термин Genesis, совпадающий с английским названием первой книги Ветхого Завета, ввели авторы работы [66].

выражения для плотности энергии, $\rho = 0$, и давления, формула (36),

$$p = -\frac{P}{(t_* - t)^4}, \quad (45)$$

где $P = (2Y_*K - F)Y_*^{-2}$. Получаем

$$H = \frac{4\pi P}{3M_{\text{Pl}}^2(t_* - t)^3}.$$

Уравнение (3а) теперь определяет плотность энергии в первом порядке по M_{Pl}^{-2} :

$$\rho = \frac{3}{8\pi} M_{\text{Pl}}^2 H^2 = \frac{3\pi}{8} \frac{P^2}{M_{\text{Pl}}^2(t_* - t)^6}.$$

Видно, что с ростом π_c происходит рост плотности энергии, а Вселенная расширяется всё быстрее и быстрее. Приближение слабой гравитации (разложение по M_{Pl}^{-2}) работает при $\rho \ll p$, т.е. при

$$(t_* - t)^2 \gg \frac{P}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (46)$$

Параметр P может быть большим: в примере с лагранжианом (41) мы имеем $P \sim f^3/\Lambda^3 \gg 1$ в силу (42). Тем не менее, если P не чрезвычайно велик, режим слабой гравитации продолжается почти до планковских масштабов.

В качестве проверки рассмотрим уравнение для однородного поля в расширяющейся пространственно плоской Вселенной. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} 4e^{4\pi} F + F'e^{2\pi}(-6\dot{\pi}^2 - 2\ddot{\pi}) + 4F''(-\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + \dot{\pi}^4) + \\ + 4Ke^{2\pi}(\dot{\pi}^2 + \ddot{\pi}) - 4K'(\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + \dot{\pi}^4) + \\ + 4e^{-2\pi}K''(-\dot{\pi}^4\ddot{\pi} + \dot{\pi}^6) - 6He^{2\pi}\dot{\pi}F' + 12He^{2\pi}\dot{\pi}K - \\ - 6K'(2H\dot{\pi}^3 + 2H\dot{\pi}\ddot{\pi} + \dot{H}\dot{\pi}^2 + 3H^2\dot{\pi}^2) + \\ + 12e^{-2\pi}HK''(-\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + \dot{\pi}^5) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Видно, что обусловленные гравитацией поправки малы в этом уравнении, когда $H \ll \dot{\pi}$, что снова даёт условие (46). Для наших целей приближения слабого поля достаточно, но, конечно, можно проследить за всей эволюцией с полным учётом гравитационных эффектов. Это сделано в работе [66] для модели (41) с $\alpha = 0$.

Итак, мы убедились, что теория допускает космологический сценарий, в котором эволюция Вселенной начинается с пустого пространства Минковского и происходит с возрастанием плотности энергии и темпа расширения до, возможно, больших значений. Это и есть эпоха генезиса. В сценарии генезиса есть ещё два необходимых аспекта. Во-первых, на некоторой поздней стадии плотность энергии галилеона должна перейти в тепло, так что Вселенная переходит на стандартную горячую стадию. Возможный механизм "разморозки" предложен в работе [90]. В конце "разморозки", какая бы она ни была, галилеон должен остановиться, $\dot{\pi} = 0$. В масштабнo-инвариантной теории галилеона такая последовательность событий проблематична в силу соображений, приведённых в конце раздела 4.1. Нарушение масштабной инвариантности при "разморозке", возможно, позволяет решить эту проблему.

Второй аспект связан с механизмом генерации неоднородностей плотности, ответственных в конечном итоге за анизотропию реликтового излучения и формирование структур во Вселенной. Эти неоднородности представляют собой гауссово (или почти гауссово) случайное поле с почти плоским спектром мощности. Возмущения самого галилеона непригодны в этом отношении [66]. Однако простое расширение теории галилеона вполне может решить задачу [66]. Будем считать, что теория масштабнo-инвариантна на стадии генезиса и введём новое поле θ , которое тривиально преобразуется при масштабных преобразованиях, $\theta(x) \rightarrow \theta(\lambda x)$. Из-за масштабной инвариантности кинетический член в его лагранжиане имеет вид

$$L_\theta = \frac{1}{2} e^{2\pi} (\partial\theta)^2.$$

Если новое поле не испытывает других взаимодействий в эпоху генезиса, лагранжиан на фоне катящегося поля (34) равен

$$L_\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{Y_*(t_* - t)^2} (\partial\theta)^2.$$

Он совпадает с лагранжианом скалярного поля, минимально связанного с гравитацией, в инфляционную эпоху с параметром Хаббла $\sqrt{Y_*}$, если отождествить t с конформным временем эпохи инфляции. Поэтому можно использовать известный результат инфляционной теории о том, что вакуумные флуктуации поля θ развиваются в гауссово случайное поле со спектром мощности

$$\mathcal{P}_{\delta\theta} = \frac{Y_*}{(2\pi)^2}. \quad (48)$$

Предполагается, что флуктуации $\delta\theta$, представляющие собой энтропийные возмущения в эпоху генезиса, превращаются в адиабатические возмущения после этой эпохи, например, за счёт одного из механизмов работ [91–95] или [96–98]. Адиабатические возмущения ζ наследуют свойства возмущений $\delta\theta$ (с точностью до негауссовости, которая может быть генерирована в процессе переработки энтропийных возмущений в адиабатические); в частности, для спектра мощности справедливо $\mathcal{P}_\zeta = \text{const} \cdot \mathcal{P}_\theta$. Спектр (48) — плоский; небольшой наклон, требующийся для соответствия наблюдательным данным [99, 100], может возникнуть из-за малого явного нарушения масштабной инвариантности в эпоху генезиса (ср. с работой [101]).

В заключение этого раздела отметим, что сценарий генезиса, особенно его версия с конформным галилеоном, представляет собой пример того, что стало называться (псевдо-)конформной космологией [66, 68, 102–104]. В общих словах этот класс сценариев предполагает, что Вселенная вначале эффективно описывалась геометрией Минковского, а материя находилась в конформно-инвариантном состоянии. Затем конформная симметрия была спонтанно нарушена катящимся фоновым полем, похожим на (34). Механизм генерации неоднородностей плотности по существу совпадает с описанным выше. Конформный сценарий даёт ряд модельно-независимых предсказаний, отличающих его от инфляции. Эти предсказания относятся, в частности, к негауссовости и статистической анизотропии первичных скалярных возмущений [105–109]. Характерным является также отсутствие тензорных возмущений.

4.3. Космология с отскоком

Теории галилеона могут быть использованы и для построения космологических моделей с отскоком [66, 110–114]. Перед тем как обсуждать эту возможность, сделаем одно отступление. Сжимающаяся Вселенная легко может стать сильно неоднородной и анизотропной из-за явления Белинского–Лифшица–Халатникова [115–119]. Это представляет собой проблему с точки зрения самосогласованности всего сценария с отскоком. Для решения этой проблемы можно предположить, что доминирующая материя имеет сверхжесткое уравнение состояния $p > \rho$ [120]. Именно это предположение делается в классе моделей с экипирозисом [83, 84]. Мы обсуждаем этот вопрос несколько подробнее в приложении В. Отметим, что для материи с уравнением состояния $p = w\rho$, $w = \text{const}$, уравнение (5) даёт $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, а из уравнения (3а) с $\kappa = 0$ получается закон эволюции масштабного фактора

$$a(t) \propto |t|^\alpha, \quad t < 0,$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w)}.$$

Для сверхжесткого уравнения состояния выполняется поэтому

$$\alpha < \frac{1}{3}. \quad (49)$$

Пример сверхжесткой материи даёт скалярное поле с отрицательным экспоненциальным потенциалом:

$$L_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = -V_0 e^{\phi/M}, \quad (50)$$

где V_0 и M — положительные параметры. Уравнение для однородного поля $\phi(t)$ и уравнение Фридмана (3а) имеют следующее решение

$$a(t) = |t|^\alpha, \quad \phi(t) = \text{const} - 2M \ln |t|, \quad (51)$$

$$V[\phi(t)] = -\frac{2M^2(1-3\alpha)}{t^2}, \quad t < 0,$$

где

$$\alpha = 16\pi \frac{M^2}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (52)$$

Это решение — аттрактор в случае коллапса. В соответствии с (49) и (52) эффективное уравнение состояния действительно является сверхжестким, $w \gg 1$ при $M \ll M_{\text{Pl}}$. Отметим, что плотность энергии положительна и растёт при коллапсе,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) = \frac{6M^2\alpha}{t^2}.$$

Это свойство оставляет возможность того, что потенциал $V(\phi)$ становится положительным при больших ϕ , и поле "выныривает" из отрицательной потенциальной ямы на некоторой поздней стадии.

Следует отметить, что при $M \ll M_{\text{Pl}}$ это решение всегда находится в режиме слабой гравитации, аналогичном режиму, обсуждавшемуся в разделе 4.2. В пределе слабой гравитации можно пренебречь гравитационными эффектами в уравнении скалярного поля и получить

решение в пространстве Минковского:

$$\phi(t) = M \ln \left(\frac{2M^2}{t^2 V_0} \right), \quad V(t) = -\frac{2M^2}{t^2}. \quad (53)$$

Плотность энергии равна нулю в этом пределе, а давление равно

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V = \frac{4M^2}{t^2}. \quad (54)$$

Приближение слабой гравитации работает во все времена при $M \ll M_{\text{Pl}}$.

Хотя для построения моделей, в которых эпоха экипирозиса заканчивается отскоком, в принципе достаточно ограничиться теориями всего с одним скалярным полем [112, 114], гораздо проще [113] расширить модель (50), добавив новое поле галилеона с лагранжианом (28). Тогда полный лагранжиан материи будет иметь вид

$$L = L_\pi + L_\phi. \quad (55)$$

В режиме слабой гравитации поля ϕ и π не взаимодействуют между собой, галилеон катится согласно (34), а поле $\phi(t)$ даётся выражением (53). Плотность энергии равна нулю, а давление представляет собой сумму выражений (45) и (54):

$$p = \frac{4M^2}{t^2} - \frac{P}{(t_* - t)^4}. \quad (56)$$

Параметр Хаббла вновь находим из уравнения (4):

$$H = -\frac{16\pi M^2}{M_{\text{Pl}}^2 |t|} + \frac{4\pi P}{3M_{\text{Pl}}^2 (t_* - t)^3}. \quad (57)$$

В ранние времена поле ϕ доминирует, и Вселенная сжимается ($H < 0$), затем галилеон начинает преобладать, по крайней мере в случае $t_* < 0$, сжатие прекращается ($H = 0$, отскок), начинается эпоха расширения ($H > 0$), которая вполне аналогична стадии генезиса. Нетрудно видеть, что отскок происходит в режиме слабой гравитации $H \ll \dot{\pi}$, если выполнено мягкое неравенство $|t_*| \gg P^{1/2} M^2 / M_{\text{Pl}}^3$, $t_* < 0$ (случай $t_* > 0$ рассмотрен в работе [113]; результат состоит в том, что отскок происходит всегда, но не обязательно в режиме слабой гравитации).

Модель можно сделать более реалистичной путём изменения потенциала $V(\phi)$ при больших ϕ и добавления потенциала для галилеона, чтобы обеспечить зануление космологической постоянной на поздних стадиях. В зависимости от выбора параметров система либо переходит в режим инфляции, либо нет [113]. Аспекты, обсуждавшиеся в разделе 4.2, присутствуют и в рассматриваемой модели.

4.4. Вселенная в пробирке

Наш последний пример — попытка построить модель создания вселенной в лаборатории [70]. Идея состоит в том, чтобы построить следующее начальное условие в теории галилеонного типа: 1) внутри некоторой большой сферы поле π близко к однородному и ведёт себя так же, как на начальной стадии сценария генезиса, 2) вне этой сферы это поле стремится к константному решению, а пространство-время асимптотически плоское. Для таких начальных данных плотность энергии и давление везде малы, всё пространство-время почти плоское, так что требуемая начальная конфигурация может быть приготовлена "в лаборатории". При последующей эволюции

поля $\pi(t, \mathbf{x})$ плотность энергии внутри большой сферы нарастает, пространство испытывает там ускоренное расширение, и область внутри сферы превращается в искусственно созданную вселенную. Вне сферы плотность энергии остаётся малой и в асимптотике стремится к нулю; пространство-время всё время остаётся асимптотически плоским.

Естественно попытаться реализовать эту конструкцию наиболее простым образом, считая, что поле $\pi(t, \mathbf{x})$ медленно меняется в пространстве и интерполирует между катящимся решением (34) внутри большой сферы и вакуумным решением $\delta\pi = 0$ на пространственной бесконечности. Под медленным изменением в пространстве мы понимаем то, что пространственные производные поля π пренебрежимо малы по сравнению с временными, так что в каждой точке пространства поле π ведёт себя так же, как в однородном случае.

Плюсом такого квазиоднородного подхода является его простота; минусом — то, что он на самом деле не работает в классе масштабно-инвариантных моделей раздела 4.1. Препятствием служит свойство, обсуждавшееся в конце раздела 4.1: если динамика поля π везде эффективно однородна, то применим анализ раздела 4.1, и поскольку $Z(Y)$ равно нулю как внутри большой сферы (область генезиса), так и вдали от неё (область константного решения), существует промежуточная область, где $Z' < 0$ и система неустойчива.

Одна возможность обойти эту трудность могла бы состоять в том, чтобы, настаивая на медленном изменении галилеона в пространстве, отойти от требования, чтобы внутри большой сферы поле находилось в режиме генезиса (34). Вместо этого можно было бы рассмотреть поле с ненулевой плотностью энергии внутри сферы, которое связано путём без патологий в конфигурационном пространстве с константным решением. Это, однако, вряд ли привело бы к созданию "вселенной в пробирке", поскольку, как мы обсуждали в разделе 4.1, точка $Y = 0$ является аттрактором и внутренность сферы, скорее всего, релаксировала бы в эту точку.

Другие возможности связаны с рассмотрением значительных пространственных градиентов и с отказом от масштабной инвариантности (вторая возможность успешно реализована в космологическом контексте [71]). В обоих случаях приведённые выше аргументы не работают, но анализ был бы весьма сложен. Проще пойти по другому пути и усложнить вместо этого модель.

Будем считать, что функции F и K зависят явно от пространственных координат. Этого можно добиться, введя новое поле φ , от которого эти функции зависят, и считая, что это поле постоянно во времени, но зависит от точки пространства, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$. В этом случае естественно рассмотреть полевую конфигурацию $\pi(t, \mathbf{x})$, которая в любой точке пространства приблизительно совпадает с катящимся решением (34), но с Y_* , зависящим от \mathbf{x} . Приготовим поле $\varphi(\mathbf{x})$ так, чтобы $Y_*(\mathbf{x})$ было постоянно внутри большой сферы (которая превратится в новую вселенную) и постепенно стремилось к нулю при $r \rightarrow \infty$. Нетрудно подобрать функции $F(Y; \varphi)$, $K(Y; \varphi)$ так, чтобы рассматриваемая конфигурация нигде не имела патологий.

Опишем вкратце явную конструкцию. Предположим, что поле φ — это обычное скалярное поле, потенциал которого имеет два минимума, $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$. Приготовим сферически-симметричную конфигурацию этого

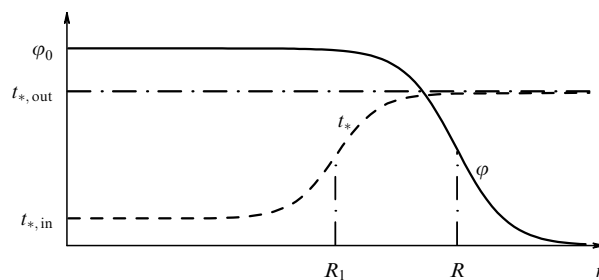


Рис. 3. Описание модели и начальных данных. Штриховая и сплошная кривые — функции $t_*(r)$ и $\varphi(r)$ соответственно. Поведение функции $Y_*(r) = Y_*(\varphi(r))$ аналогично поведению $\varphi(r)$.

поля, для которой $\varphi = \varphi_0$ внутри сферы достаточно большого радиуса R и $\varphi = 0$ вне этой сферы (рис. 3). Предположим для определённости, что существует источник для поля φ , который держит эту конфигурацию статической. Пусть $L \ll R$ — толщина стенки, разделяющей два вакуума; L также удерживается постоянной. Потребуем, чтобы масса этого шара была не слишком велика, так что $R \gg R_s$, где R_s — радиус Шварцшильда. По порядку величины масса равна $\mu^4 R^2 L$, где μ — энергетический масштаб, характерный для поля φ . Последнее неравенство тогда имеет вид $\mu^4 R L \ll M_{\text{Pl}}^2$ и может легко удовлетворяться для достаточно малых μ при достаточно больших R и L .

Пусть функция $Y_*(\varphi)$ такова, что $Y_*(0) = 0$ и $Y_*(\varphi_0) = Y_0$. Приготовим начальную конфигурацию поля π при $t = 0$ таким образом, что она вначале ведёт себя как

$$e^\pi = \frac{1}{\sqrt{Y_0} t_*(r) - \sqrt{Y_*(r)} t}, \quad (58)$$

где мы разрешили параметру t_* в (34) изменяться в пространстве и выбрали удобную параметризацию. Выберем $t_*(r) = t_{*,\text{in}}$ внутри сферы несколько меньшего радиуса $R_1 < R$ (но $R_1 \sim R$) и $t_*(r) = t_{*,\text{out}} \gg t_{*,\text{in}}$ при $r > R_1$ (здесь и далее индексы in и out относятся к областям $r < R_1$ и $r > R_1$ соответственно), как показано на рис. 3, с переходной областью, скажем, той же толщины L . Выберем $t_{*,\text{out}} \ll L$, тогда характерные временные масштабы малы по сравнению с наименьшим пространственным масштабом L , и пространственные производные поля π действительно малы по сравнению с временными. Это служит обоснованием применения квазиоднородного подхода для описания динамики поля π . При $r \rightarrow \infty$ выполняется $Y_*(r) \rightarrow 0$ и $t_* \rightarrow \text{const}$, поэтому поле π стремится к вакууму $\pi = \text{const}$.

На начальной стадии эволюции давление внутри сферы радиуса R_1 равно

$$p_{\text{in}} = \frac{M^4}{Y_0^2 (t_{*,\text{in}} - t)^4},$$

где M — энергетический масштаб, характерный для галилеона. Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $p_{\text{in}} R^3 / M_{\text{Pl}}^2 \ll R$, тогда гравитационные потенциалы всюду малы и система находится в режиме слабой гравитации. Итак, мы накладываем ограничение

$$\frac{M^4 R^2}{Y_0^2 t_{*,\text{in}}^4} \ll M_{\text{Pl}}^2, \quad (59)$$

которое согласуется с приведёнными выше условиями при $M \ll M_{\text{Pl}}$ и $Y_0 \gtrsim M^2$. В полной аналогии с разделом 4.2 параметр Хаббла внутри сферы радиуса R_1 вскоре становится равным

$$H_{\text{in}} = \frac{4\pi M^4}{3M_{\text{Pl}}^2 Y_0^2 (t_{*,\text{in}} - t)^3}. \quad (60)$$

В силу (59) и $t_{*,\text{in}} \ll R$ хаббловский масштаб расстояний в течение некоторого времени остаётся большим, $H^{-1} \gg R$. Это верно и при $r > R_1$, поэтому антиловушечных поверхностей в начале процесса нет.

По мере того как t приближается к $t_{*,\text{in}}$, давление в области генезиса $r < R_1$ возрастает и хаббловский размер уменьшается до $R_1 \sim R$. Внутри сферы радиуса R_1 появляются антиловушечные поверхности, создаётся новая вселенная, расширяющаяся в режиме генезиса. Это происходит тогда, когда $H_{\text{in}} \sim R^{-1}$, т.е. во время t_1 , такое, что

$$(t_{*,\text{in}} - t_1) \sim \left(\frac{M^4 R}{M_{\text{Pl}}^2 Y_0^2} \right)^{1/3}.$$

Отметим, что в это время плотность энергии $\rho_{\text{in}} \sim M_{\text{Pl}}^2 H_{\text{in}}^2$ по-прежнему мала:

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{p_{\text{in}}} \sim \left(\frac{M^4}{Y_0^2 R^2 M_{\text{Pl}}^2} \right)^{1/3} \ll 1.$$

Поэтому во время t_1 пространство-время локально почти плоское. Другое проявление этого свойства состоит в том, что масштабный фактор всё ещё близок к единице:

$$a_{\text{in}}(t_1) = 1 + \frac{2\pi M^4}{3M_{\text{Pl}}^2 Y_0^2 (t_{*,\text{in}} - t_1)^2}, \quad (61)$$

где поправка имеет порядок $\rho_{\text{in}}/p_{\text{in}}$. Таким образом, наше приближённое решение (58), (60) действительно верно.

Поскольку $t_{*,\text{out}} \gg t_{*,\text{in}}$, поле e^π по-прежнему мало во время t_1 при $r > R_1$, а хаббловский размер превышает R в этой области. Отклонения метрики от плоской по-прежнему малы при $r > R_1$, поэтому можно считать, что конфигурация поля φ не изменилась к этому времени. Отметим, что к этому времени не произошло и формирование чёрной дыры.

Этим мы завершаем описание начальной конфигурации и её эволюции на начальной стадии образования "вселенной в пробирке". Мы проверяем в приложении С, что наши результаты не противоречат результатам общего анализа работы [13].

Конечно, описанная здесь конструкция представляет собой лишь набросок того, как могла бы быть создана "вселенная в пробирке". Чтобы сделать этот сценарий законченным, необходимо прояснить вопрос о том, как приготовить соответствующую конфигурацию поля φ и как удерживать её статической (или рассмотреть вместо этого зависящее от времени поле φ). Необходимо также выяснить роль пространственных градиентов. Наконец, нужно проследить за эволюцией системы на более длинном промежутке времени с учётом эффектов гравитации и выяснить, какая геометрия пространства-времени образуется к концу эпохи генезиса, имеющей место в области $r < R_1$. В частности, интересно понять, обра-

зуется ли в результате рассматриваемых процессов чёрная дыра.

5. Заключение

Теории (обобщённых) галилеонов дают интересную возможность самосогласованного и контролируемого нарушения условия NEC. Однако в этих теориях остаются невыясненными многие вопросы. Один из них относится к сверхсветовым движениям. Хотя решение, рассмотренное в разделе 4.1, не имеет такой проблемы, нельзя исключить, что распространение возмущений над другими фоновыми полями происходит со скоростью больше скорости света. Примеры такого рода приведены в работе [121]. Вопрос о сверхсветовых скоростях тесно связан с вопросом о возможности UV-пополнения [72]. Другой неясный вопрос — стабильность относительно радиационных поправок. Если часть теорий галилеонов обладает достаточными симметриями, гарантирующими эту стабильность, то общие теории с лагранжианами вида (22) такого свойства не имеют. Кроме того, есть пока совершенно не изученные области, в которых теории галилеонов могут преподнести сюрпризы, например, термодинамика чёрных дыр [122] или отсутствие/существование замкнутых времениподобных кривых [123].

Конечно, наиболее интригующий вопрос: а существуют ли в природе поля, нарушающие условие NEC? Разумеется, до сих пор таких полей не обнаружено. Но ситуация, на наш взгляд, не совсем безнадежная: когда-нибудь мы, возможно, узнаем, что Вселенная проходила через стадию отскока или генезиса, и это будет серьёзным указанием на то, что нарушение условия NEC имело место в прошлом.

Автор благодарен С. Демидову, Д. Левкову, М. Либанову, И. Ткачёву и М. Волошину за полезные обсуждения, а также С. Дезеру, Я.С. Пиао и А. Викману за интересную переписку. Работа осуществлена при частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-2835.2014.2 и контракта Министерства образования и науки РФ 8412.

Приложение А

Рассмотрим общую сферически-симметричную метрику, которую мы выберем в диагональном виде

$$ds^2 = N^2 dt^2 - a^2 dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (62)$$

где $N = N(t, r)$, $a = a(t, r)$, $R = R(t, r)$. Мы хотим показать, что ловушечная поверхность такова, что $R(t, r(t))$ убывает вдоль изотропной геодезической, для которой r растёт.

Формальное определение ловушечной поверхности даёт неравенство

$$\nabla_\mu l^\mu < 0$$

для вектора $l^\mu = dx^\mu/d\lambda$, касательного к внешней радиальной изотропной геодезической, где λ — аффинный параметр. Вектор l^μ изотропен,

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0, \quad (63)$$

и удовлетворяет уравнению геодезической

$$\frac{dl^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu l^\nu l^\rho = 0. \quad (64)$$

Для метрики (62) уравнение (63) даёт

$$l^0 = u(t), \quad l^r = u(t) \frac{N(t, r(t))}{a(t, r(t))},$$

где мы параметризуем геодезическую временем t , так что изотропная мировая линия записывается в виде $(t, r(t), 0, 0)$; знак l^r соответствует внешней геодезической. Нормировочный множитель $u(t)$ может быть найден из уравнения (64). Чтобы это сделать, запишем $dl^\mu/d\lambda = dl^\mu/dt \cdot l^0$ и получим для нулевой компоненты уравнения (64)

$$\frac{du}{dt} + \Gamma_{00}^0 u + 2\Gamma_{0r}^0 u \frac{N}{a} + \Gamma_{rr}^0 u \left(\frac{N}{a}\right)^2 = 0. \quad (65)$$

Соответствующие символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N}, \quad \Gamma_{0r}^0 = \frac{N'}{N}, \quad \Gamma_{rr}^0 = \frac{a\dot{a}}{N^2},$$

где точка и штрих обозначают частные производные, взятые в точке $r = r(t)$. Таким образом, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} + \left(\frac{\dot{N}}{N} + 2\frac{N'}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\right)u = 0, \quad (66)$$

где в скобках снова стоят частные производные, взятые в точке $r = r(t)$. В качестве проверки запишем r -компоненту уравнения геодезической (64):

$$\frac{d}{dt} \left[u \frac{N(t, r(t))}{a(t, r(t))} \right] + \Gamma_{00}^r u + 2\Gamma_{0r}^r u \frac{N}{a} + \Gamma_{rr}^r u \left(\frac{N}{a}\right)^2 = 0. \quad (67)$$

Учитывая равенства

$$\Gamma_{00}^r = \frac{NN'}{a^2}, \quad \Gamma_{0r}^0 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{rr}^0 = \frac{a'}{a},$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{N}{a},$$

мы получаем, что уравнение (67) совпадает с уравнением (66).

Вычислим теперь

$$\begin{aligned} \nabla_\mu l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} l^\mu) = \\ &= \frac{1}{aN R^2} \left[\partial_0 (aN R^2 u) + \partial_r \left(aN R^2 u \frac{N}{a} \right) \right] = \\ &= \dot{u} + \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N} + 2\frac{\dot{R}}{R} + 2\frac{N'}{a} + 2\frac{R'}{R} \frac{N}{a} \right) u. \end{aligned}$$

Используя уравнение (66) для исключения \dot{u} , мы приходим к

$$\nabla_\mu l^\mu = 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} u + \frac{R'}{R} \frac{N}{a} u \right) = 2l^\mu \partial_\mu R. \quad (68)$$

Итак, ловушечная поверхность действительно такова, что $R(t, r(t))$ убывает вдоль изотропной внешней геодезической.

Примером служит коллапсирующая пространственно-плоская Вселенная. Для неё $a = a(t)$, $R = a(t)r$ и правая часть (68) отрицательна при $r > -1/\dot{a}$; сфера радиуса $R = ar > |H|^{-1}$ — это ловушечная поверхность. Производя обращение времени, мы можем сказать, что сфера радиуса $R > |H|^{-1}$ — это антиловушечная поверхность в расширяющейся Вселенной.

Приложение В

Обсудим вкратце, почему сжимающаяся Вселенная становится сильно неоднородной и анизотропной, если доминирующая материя удовлетворяет условию $p < \rho$, и наоборот, Вселенная изотропизуется в противоположном случае. Рассмотрим упрощённую модель анизотропной Вселенной, описываемую однородной анизотропной метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{a=1}^3 e^{2\beta_a(t)} e_i^{(a)} e_j^{(a)} dx^i dx^j,$$

где $e_i^{(a)}$ — три линейно независимых вектора, постоянных во времени. Предположим, что эти векторы ортогональны друг другу (в общем случае динамическая картина намного сложнее, но это оказывается не слишком существенным с обсуждаемой здесь точки зрения, см. комментарий ниже). Функция $a(t)$ выбрана так, что

$$\sum_a \beta_a = 0, \quad (69)$$

другими словами, $\det g_{ij} = a^6$. Уравнения Эйнштейна дают

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6} \sum_a \dot{\beta}_a^2 + \frac{8\pi}{3} G\rho, \quad (70a)$$

$$\ddot{\beta}_a + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\beta}_a = 0. \quad (70b)$$

Решением уравнения (70b) служит

$$\dot{\beta}_a = \frac{d_a}{a^3}, \quad (71)$$

а с учётом (69) константы d_a удовлетворяют условию $\sum_a d_a = 0$. Теперь уравнение (70a) записывается в виде

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6a^6} \sum_a d_a^2 + \frac{8\pi}{3} G\rho. \quad (72)$$

Это уравнение показывает, что общий темп сжатия (температура, с которым растёт $\det g_{ij}$) определяется при малых a анизотропией, а не материей, если ρ растёт медленнее, чем a^{-6} . Уравнение ковариантного сохранения энергии в случае метрики (69) по-прежнему имеет вид (5) с $H = \dot{a}/a$, поэтому последнее свойство имеет место, если $p < \rho$. В этом случае можно положить $\rho = 0$ на поздней стадии коллапса, и тогда система уравнений (71), (72) имеет решением метрику Казнера

$$a(t) = |t|^{1/3}, \quad \beta_a = d_a \ln |t|,$$

$$\sum_a d_a = 0, \quad \sum_a d_a^2 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, анизотропия возрастает при сжатии Вселенной. В общем случае, когда векторы $e_i^{(a)}$ не ортогональны друг другу, этот режим продолжается в течение конечного времени, а затем значения параметров d_a быстро меняются на другие [124]. Векторы $e_i^{(a)}$ также меняются. Такие изменения происходят бесконечно много раз в пределе $t \rightarrow 0$. Это соответствует хаотическому анизотропному коллапсу.

Эти результаты показывают, что Вселенная является сильно анизотропной перед отскоком. В действительно-

сти описанные процессы происходят независимо в разных областях хаббловского размера, и они очень сильно различаются в разных областях из-за хаотического характера этих процессов. Поэтому Вселенная ещё и сильно неоднородна перед отскоком. Такая картина сохраняется и после отскока, по крайней мере в классической теории. Сильная неоднородность Вселенной после отскока несовместима с малостью первичных космологических возмущений, поэтому весь сценарий с отскоком повисает в воздухе.

Для решения этой проблемы используется предположение, что во время сжатия доминирует материя со сверхжестким уравнением состояния $p = w\rho$, $w > 1$. Её плотность энергии ведёт себя как $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, т.е. она возрастает быстрее, чем a^{-6} . В правой части уравнения (72) доминирует второе слагаемое, масштабный фактор убывает как $a(t) \propto |t|^\alpha$ с $\alpha < 1/3$ (см. (49)). Из уравнения (71) теперь следует, что параметры β_a стремятся к константам при $t \rightarrow 0$. Если Вселенная была близка к однородной и изотропной на начальной стадии коллапса, то она становится более и более однородной в процессе сжатия (детали см. в работе [120]).

Приложение С

В этом приложении мы покажем, что результаты раздела 4.4 находятся в согласии с общими результатами, полученными в работе [13].

Определение [13]. Пусть метрика имеет вид (62). R-областью называется область, где векторы $R_\mu = \partial_\mu R$, нормальные к гиперповерхностям $R = \text{const}$, пространственноподобны, $g^{\mu\nu} R_\mu R_\nu < 0$. Поскольку $g^{\mu\nu} R_\mu R_\nu = N^{-2} \dot{R}^2 - a^{-2} R'^2 < 0$, в R-области нет мест, где $R' = 0$, поэтому знак R' один и тот же во всей R-области. R-область с $R' > 0$ называется R_+ -областью, а R-область с $R' < 0$ называется R_- -областью. T-область — это область, где нормальные векторы R_μ к гиперповерхностям $R = \text{const}$ времениподобны, $g^{\mu\nu} R_\mu R_\nu > 0$. В T-области \dot{R} нигде не равно нулю. Поэтому знак \dot{R} везде в ней один и тот же. T-область с $\dot{R} > 0$ называется T_+ -областью, а T-область с $\dot{R} < 0$ — T_- -областью. T_+ - и T_- -области — это области расширения и сжатия соответственно.

Рассмотрим модель раздела 4.4. В смысле данного сейчас определения всё пространство изначально представляет собой R_+ -область. В момент времени t_1 появляется T_+ -область. Одна из её границ движется в сторону меньших r , а другая — в сторону больших r . Один из результатов работы [13] состоит в том, что при $\rho + p < 0$ ($\beta < 0$ в обозначениях работы [13]) граница между внутренней R_+ -областью и T_+ -областью пространственноподобна. Проверим, что обсуждаемая в разделе 4.4 геометрия согласуется с этим результатом.

В нашем случае $N = 1$, $a \approx 1$ (см. (61)) и $R = a(r, t)r$. Граница между левой R_+ -областью и T_+ -областью определяется уравнением $\dot{a}r = a$, т.е.

$$r - H^{-1} = 0.$$

Нормалью к этой гиперповерхности служит вектор

$$\left(\frac{\dot{H}}{H^2}, 1, 0, 0 \right),$$

который времениподобен, поскольку

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \sim (H(t_{*, \text{in}} - t))^{-1} \sim \frac{M_{\text{Pl}}^2 Y_0^2 (t_{*, \text{in}} - t)^2}{M^4} \gg 1.$$

Таким образом, гиперповерхность, разделяющая внутреннюю R_+ -область и T_+ -область, действительно пространственноподобна, в согласии с работой [13].

Внешняя граница T_+ -области может в принципе быть как пространственноподобной, так и времениподобной [13]. По той же причине, что и выше, в нашем случае она пространственноподобна.

Список литературы

1. Flanagan E E, Wald R M *Phys. Rev. D* **54** 6233 (1996); gr-qc/9602052
2. Penrose R *Phys. Rev. Lett.* **14** 57 (1965)
3. Старобинский А А *Письма в Астрон. журн.* **4** 155 (1978) [Starobinskii A A *Sov. Astron. Lett.* **4** 82 (1978)]
4. Berezin V A, Kuzmin V A, Tkachev I I, in *Quantum Gravity. Proc. of the Third Seminar on Quantum Gravity, October 23–25, 1984, Moscow, USSR* (Eds M A Markov, V A Berezin, V P Frolov) (Singapore: World Scientific, 1985) p. 605
5. Березин В А, Кузьмин В А, Ткачев И И *Письма в ЖЭТФ* **41** 446 (1985) [Berezin V A, Kuz'min V A, Tkachev I I *JETP Lett.* **41** 547 (1985)]
6. Farhi E, Guth A H *Phys. Lett. B* **183** 149 (1987)
7. Старобинский А А *Письма в ЖЭТФ* **30** 719 (1979) [Starobinskii A A *JETP Lett.* **30** 682 (1979)]
8. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980)
9. Guth A H *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981)
10. Linde A D *Phys. Lett. B* **108** 389 (1982)
11. Albrecht A, Steinhardt P J *Phys. Rev. Lett.* **48** 1220 (1982)
12. Linde A D *Phys. Lett. B* **129** 177 (1983)
13. Березин В А, Кузьмин В А, Ткачев И И *ЖЭТФ* **93** 1159 (1987) [Berezin V A, Kuz'min V A, Tkachev I I *Sov. Phys. JETP* **66** 654 (1987)]
14. Berezin V A, Kuzmin V A, Tkachev I I *Phys. Lett. B* **207** 397 (1988)
15. Farhi E, Guth A H, Guven J *Nucl. Phys. B* **339** 417 (1990)
16. Fischler W, Morgan D, Polchinski J *Phys. Rev. D* **41** 2638 (1990); *Phys. Rev. D* **42** 4042 (1990)
17. Linde A *Nucl. Phys. B* **372** 421 (1992); hep-th/9110037
18. Garriga J, Vilenkin A *Phys. Rev. D* **57** 2230 (1998); astro-ph/9707292
19. Garriga J et al. *Int. J. Theor. Phys.* **39** 1887 (2000); astro-ph/9909143
20. Dutta S, Vachaspati T *Phys. Rev. D* **71** 083507 (2005); astro-ph/0501396
21. Aguirre A, Johnson M C *Phys. Rev. D* **73** 123529 (2006); gr-qc/0512034
22. Lee W et al. *Phys. Rev. D* **74** 123520 (2006); hep-th/0604064
23. Piao Y-S *Nucl. Phys. B* **803** 194 (2008); arXiv:0712.4184
24. Frolov V P, Markov M A, Mukhanov V F *Phys. Lett. B* **216** 272 (1989); *Phys. Rev. D* **41** 383 (1990)
25. Guendelman E I *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 1357 (2010); arXiv:1003.3975
26. Лукаш В Н, Михеева Е В, Строков В Н *УФН* **182** 216 (2012) [Lukash V N, Mikheeva E V, Strokov V N *Phys. Usp.* **55** 204 (2012)]; arXiv:1110.6820
27. Lukash V N, Strokov V N *Int. J. Mod. Phys. A* **28** 1350007 (2013); arXiv:1301.5544
28. Mukhanov V, Brandenberger R *Phys. Rev. Lett.* **68** 1969 (1992)
29. Brandenberger R, Mukhanov V, Sornborger A *Phys. Rev. D* **48** 1629 (1993); gr-qc/9303001
30. Trodden M, Mukhanov V F, Brandenberger R H *Phys. Lett. B* **316** 483 (1993); hep-th/9305111
31. Lee B-H et al. *Phys. Rev. D* **77** 063502 (2008); arXiv:0710.4599
32. Guendelman E I, Sakai N *Phys. Rev. D* **77** 125002 (2008); *Phys. Rev. D* **80** 049901(E) (2009), Erratum; arXiv:0803.0268
33. Yeom D, arXiv:0912.0068
34. Hwang D, Yeom D *Class. Quantum Grav.* **28** 155003 (2011); arXiv:1010.3834
35. Morris M S, Thorne K S *Am. J. Phys.* **56** 395 (1988)
36. Morris M S, Thorne K S, Yurtsever U *Phys. Rev. Lett.* **61** 1446 (1988)
37. Visser M *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (Woodbury, N.Y.: American Institute of Physics, 1995)
38. Hochberg D, Visser M *Phys. Rev. D* **58** 044021 (1998); gr-qc/9802046
39. Новиков И Д, Кардашев Н С, Шапкий А А *УФН* **177** 1017 (2007) [Novikov I D, Kardashev N S, Shatskii A A *Phys. Usp.* **50** 965 (2007)]

40. Шацкий А А, Новиков И Д, Кардашев Н С *УФН* **178** 481 (2008) [Shatskii A A, Novikov I D, Kardashev N S *Phys. Usp.* **51** 457 (2008)]; arXiv:0810.0468
41. Рубаков В А *ТМФ* **149** 409 (2006) [Rubakov V A *Theor. Math. Phys.* **149** 1651 (2006)]; hep-th/0604153
42. Libanov M et al. *JCAP* (08) 010 (2007); arXiv:0704.1848
43. Horndeski G W *Int. J. Theor. Phys.* **10** 363 (1974)
44. Fairlie D B, Govaerts J, Morozov A *Nucl. Phys. B* **373** 214 (1992); hep-th/9110022
45. Fairlie D B, Govaerts J *Phys. Lett. B* **281** 49 (1992); hep-th/9202056
46. Fairlie D B, Govaerts J *J. Math. Phys.* **33** 3543 (1992); hep-th/9204074
47. Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000); hep-th/0005016
48. Luty M A, Porrati M, Rattazzi R *JHEP* (09) 029 (2003); hep-th/0303116
49. Nicolis A, Rattazzi R *JHEP* (06) 059 (2004); hep-th/0404159
50. Nicolis A, Rattazzi R, Trincherini E *Phys. Rev. D* **79** 064036 (2009); arXiv:0811.2197
51. Deffayet C, Esposito-Farèse G, Vikman A *Phys. Rev. D* **79** 084003 (2009); arXiv:0901.1314
52. de Rham C, Tolley A J *JCAP* (05) 015 (2010); arXiv:1003.5917
53. Goon G L, Hinterbichler K, Trodden M *Phys. Rev. Lett.* **106** 231102 (2011); arXiv:1103.6029
54. Goon G, Hinterbichler K, Trodden M *JCAP* (07) 017 (2011); arXiv:1103.5745
55. Kamada K et al. *Phys. Rev. D* **83** 083515 (2011); arXiv:1012.4238
56. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J *Prog. Theor. Phys.* **126** 511 (2011); arXiv:1105.5723
57. Babichev E, Deffayet C, Ziour R *Int. J. Mod. Phys. D* **18** 2147 (2009); arXiv:0905.2943
58. Deffayet C et al. *JCAP* (10) 026 (2010); arXiv:1008.0048
59. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J *Phys. Rev. Lett.* **105** 231302 (2010); arXiv:1008.0603
60. Pujolàs O, Sawicki I, Vikman A *JHEP* (11) 156 (2011); arXiv:1103.5360
61. Charmousis C et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 051101 (2012); arXiv:1106.2000
62. Charmousis C et al. *Phys. Rev. D* **85** 104040 (2012); arXiv:1112.4866
63. Deffayet C et al. *Phys. Rev. D* **84** 064039 (2011); arXiv:1103.3260
64. Padilla A, Sivanesan V *JHEP* (04) 032 (2013); arXiv:1210.4026
65. Sivanesan V, arXiv:1307.8081
66. Creminelli P, Nicolis A, Trincherini E *JCAP* (11) 021 (2010); arXiv:1007.0027
67. Creminelli P et al. *JHEP* (02) 006 (2013); arXiv:1209.3768
68. Hinterbichler K et al. *JCAP* (12) 030 (2012); arXiv:1209.5742
69. Hinterbichler K et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 241303 (2013); arXiv:1212.3607
70. Rubakov V A *Phys. Rev. D* **88** 044015 (2013); arXiv:1305.2614
71. Elder B, Joyce A, Khoury J, arXiv:1311.5889
72. Adams A et al. *JHEP* (10) 014 (2006); hep-th/0602178
73. de Rham C, Fasiello M, Tolley A J, arXiv:1308.2702
74. Arkani-Hamed N et al. *JHEP* (05) 074 (2004); hep-th/0312099
75. Сергиенко А В, Рубаков В А *ТМФ* **173** 441 (2012) [Sergienko A V, Rubakov V A *Theor. Math. Phys.* **173** 1709 (2012)]; arXiv:0803.3163
76. Либанов М В, Рубаков В А, Сажина О С, Сажин М В *ЖЭТФ* **135** 253 (2009) [Libanov M V, Rubakov V A, Sazhina O S, Sazhin M V *J. Exp. Theor. Phys.* **108** 226 (2009)]; *Phys. Rev. D* **79** 083521 (2009); arXiv:0812.1459
77. Cline J M, Jeon S, Moore G D *Phys. Rev. D* **70** 043543 (2004); hep-ph/0311312
78. Buny R V, Hsu S D H, Murray B M *Phys. Rev. D* **74** 063518 (2006); hep-th/0606091
79. Senatore L *Phys. Rev. D* **71** 043512 (2005); astro-ph/0406187
80. Creminelli P et al. *JHEP* (12) 080 (2006); hep-th/0606090
81. Buchbinder E I, Khoury J, Ovrut B A *Phys. Rev. D* **76** 123503 (2007); hep-th/0702154
82. Creminelli P, Senatore L *JCAP* (11) 010 (2007); hep-th/0702165
83. Khoury J et al. *Phys. Rev. D* **64** 123522 (2001); hep-th/0103239
84. Khoury J et al. *Phys. Rev. D* **65** 086007 (2002); hep-th/0108187
85. Padilla A, Saffin P M, Zhou S-Y *JHEP* (12) 031 (2010); arXiv:1007.5424
86. Padilla A, Saffin P M, Zhou S-Y *JHEP* (01) 099 (2011); arXiv:1008.3312
87. Padilla A, Saffin P M, Zhou S-Y *Phys. Rev. D* **83** 045009 (2011); arXiv:1008.0745
88. Hinterbichler K, Trodden M, Wesley D *Phys. Rev. D* **82** 124018 (2010); arXiv:1008.1305
89. Nishi S et al., arXiv:1401.1045
90. Lévassieur L P, Brandenberger R, Davis A-C *Phys. Rev. D* **84** 103512 (2011); arXiv:1105.5649
91. Linde A, Mukhanov V *Phys. Rev. D* **56** R535 (1997); astro-ph/9610219
92. Enqvist K, Sloth M S *Nucl. Phys. B* **626** 395 (2002); hep-ph/0109214
93. Lyth D H, Wands D *Phys. Lett. B* **524** 5 (2002); hep-ph/0110002
94. Moroi T, Takahashi T *Phys. Lett. B* **522** 215 (2001); *Phys. Lett. B* **539** 303 (2002), Erratum; hep-ph/0110096
95. Dimopoulos K et al. *JHEP* (07) 053 (2003); hep-ph/0304050
96. Dvali G, Gruzinov A, Zaldarriaga M *Phys. Rev. D* **69** 023505 (2004); astro-ph/0303591
97. Kofman L, astro-ph/0303614
98. Dvali G, Gruzinov A, Zaldarriaga M *Phys. Rev. D* **69** 083505 (2004); astro-ph/0305548
99. Hinshaw G et al. (WMAP Collab.) *Astrophys. J. Suppl.* **208** 19 (2013); arXiv:1212.5226
100. Ade P A R et al. (Planck Collab.), arXiv:1303.5076
101. Rubakov V A, Osipov M A *Письма в ЖЭТФ* **93** 56 (2011) [*JETP Lett.* **93** 52 (2011)]; Osipov M, Rubakov V, arXiv:1007.3417
102. Rubakov V A *JCAP* (09) 030 (2009); arXiv:0906.3693
103. Hinterbichler K, Khoury J *JCAP* (04) 023 (2012); arXiv:1106.1428
104. Hinterbichler K, Joyce A, Khoury J *JCAP* (06) 043 (2012); arXiv:1202.6056
105. Libanov M, Rubakov V *JCAP* (11) 045 (2010); arXiv:1007.4949
106. Libanov M, Mironov S, Rubakov V *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **190** 120 (2011); arXiv:1012.5737
107. Libanov M, Mironov S, Rubakov V *Phys. Rev. D* **84** 083502 (2011); arXiv:1105.6230
108. Libanov M, Ramazanov S, Rubakov V *JCAP* (06) 010 (2011); arXiv:1102.1390
109. Mironov S A, Ramazanov S R, Rubakov V A, arXiv:1312.7808
110. Qiu T et al. *JCAP* (10) 036 (2011); arXiv:1108.0593
111. Easson D A, Sawicki I, Vikman A *JCAP* (11) 021 (2011); arXiv:1109.1047
112. Cai Y-F, Easson D A, Brandenberger R *JCAP* (08) 020 (2012); arXiv:1206.2382
113. Osipov M, Rubakov V *JCAP* (11) 031 (2013); arXiv:1303.1221
114. Koehn M, Lehnert J-L, Ovrut B A, arXiv:1310.7577
115. Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **80** 391 (1963) [Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **6** 495 (1964)]
116. Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Adv. Phys.* **12** 185 (1963)
117. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970) [Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **13** 745 (1971)]
118. Belinskii V A, Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Adv. Phys.* **19** 525 (1970)
119. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *ЖЭТФ* **62** 1606 (1972) [Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **35** 838 (1972)]
120. Erickson J K et al. *Phys. Rev. D* **69** 063514 (2004); hep-th/0312009
121. Easson D A, Sawicki I, Vikman A *JCAP* (07) 014 (2013); arXiv:1304.3903
122. Dubovsky S L, Sibiryakov S M *Phys. Lett. B* **638** 509 (2006); hep-th/0603158
123. Hawking S W *Phys. Rev. D* **46** 603 (1992)
124. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]

The Null Energy Condition and its violation

V.A. Rubakov

Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences, prosp. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation

E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russian Federation

A brief review is given of scalar field theories with second-derivative Lagrangians yielding second order field equations. Some of these theories admit solutions that violate the Null Energy Condition but which otherwise show no obvious inconsistencies. The use of these theories in constructing cosmological scenarios and in the context a laboratory-created universe is illustrated with examples.

PACS numbers: 04.20.Dw, **04.62.+v**, 98.80.Bp

Bibliography — 124 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (2) 137–152 (2014)

DOI: 10.3367/UFN.0184.201402b.0137

Received 15 January 2014

Physik – Uspekhi **57** (2) (2014)