

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О многократных внутренних отражениях туннелирующих частиц и фотонов в одномерном, двумерном и трёхмерном туннелировании

В.С. Ольховский

Проведён анализ исследований многократных внутренних отражений при туннелировании частиц и фотонов в одномерном, двумерном и трёхмерном случаях. Представлены результаты, полученные с использованием зависящего от времени уравнения Шрёдингера для нерелятивистских частиц и зависящего от времени уравнения Гельмгольца для электромагнитных волн. Приведены выводы и рассмотрены дальнейшие перспективы исследований.

PACS numbers: 03.65.Xp, 42.25.-p, 42.50.Xa

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201411h.1255

Содержание

1. Аналогия между движением и туннелированием частиц и движением и туннелированием фотонов (1255).
 2. Одномерное туннелирование (1256).
 3. Двумерное туннелирование (1257).
 4. Сферически-симметричное трёхмерное туннелирование (1260).
 - 4.1. Трёхмерное туннелирование и рассеяние частиц потенциальной ямой с жёсткой сердцевиной и внешним кулоновским отталкивательным барьером. 4.2. S-матрица.
 5. Заключение (1263).
- Список литературы (1264).

1. Аналогия между движением и туннелированием частиц и движением и туннелированием фотонов

Как известно, имеет место формальная математическая аналогия между зависящим от времени уравнением Шрёдингера для нерелятивистских частиц и зависящим от времени уравнением Гельмгольца для электромагнитных волн. При этом подобие вероятностных интерпретаций волновой функции частицы и волнового пакета классических электромагнитных волн (который, согласно [1, 2], является "волновой функцией единичного фотона") оказывается достаточным для одинакового определения средних моментов и длительностей процессов распространения, столкновения и туннелирования частиц и фотонов. Единственное различие с точки зрения этой аналогии обусловлено линейной зависимостью энергии от импульса для фотонов и квадратич-

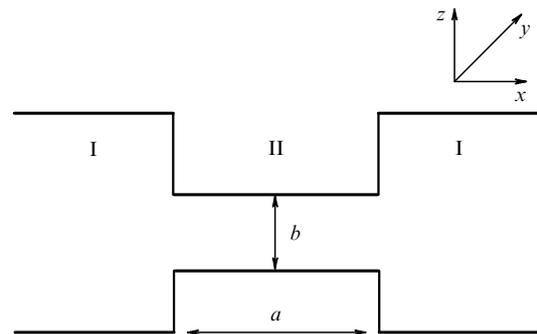


Рис. 1. При распространении радиоволн в микроволновом диапазоне вдоль волновода суженный сегмент волновода с линейными размерами сечения a и b , меньшими, чем длина волны, играет роль фотонного барьера.

ной зависимостью энергии от импульса для нерелятивистских частиц, имеющих ненулевую массу покоя. Это различие обуславливает физическое различие в распылении волновых пакетов частиц по сравнению с движением фотонов.

Рассмотрим полый суженный прямоугольный волновод (рис. 1) с поперечным сечением ab в суженной части ($a < b$), который использовался в экспериментах с микроволнами [3–7].

В представлении первичного квантования вероятностная однофотонная волновая функция обычно описывается волновым пакетом для плоских волн [1, 2]

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} \kappa(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - ik_0t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\kappa(k) = \sum_{i=1}^2 \kappa_i(\mathbf{k}) \mathbf{e}_i(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_i(\mathbf{k}) \mathbf{k} = 0$, $i, j = 1, 2$ (или y, z , если $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x$), $k_0 = \omega/c = \varepsilon/(\hbar c)$, $k = |\mathbf{k}| = k_0$, $\kappa_i(\mathbf{k})$ — амплитуда вероятности того, что фотон обладает импульсом \mathbf{k} и поляризацией, соответствующей \mathbf{e}_i . Тогда величина $|\kappa_i(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ будет пропорцио-

В.С. Ольховский. Институт ядерных исследований Национальной академии наук Украины, просп. Науки 47, 03680 Киев, Украина
E-mail: olkhovsky@mail.ru

Статья поступила 10 марта 2014 г., после доработки 15 мая 2014 г.

нальна вероятности того, что фотон имеет импульс в интервале между \mathbf{k} и $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ в состоянии поляризации e_i . Здесь \mathbf{A} — векторный потенциал с условием калибровки $\text{div } \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ — напряжённость электрического поля, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ — напряжённость магнитного поля. Хотя фотон невозможно поляризовать в направлении его движения, для одномерного движения может быть использована пространственно-временная вероятностная интерпретация (1) вдоль оси x (в направлении движения) [2].

В частном случае квазимонохроматических фотонных волновых пакетов можно, используя метод стационарной фазы для частиц [8] (когда $|k_i(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$), получить аналогичное выражение для фазового времени туннелирования:

$$\tau_{\text{tun,em}}^{\text{ph}} = \frac{2}{c\chi_{\text{em}}} , \quad \chi_{\text{em}} L \gg 1 , \quad (2)$$

где χ_{em} — мнимый импульс туннелирующего фотонного волнового пакета. Из (2) нетрудно увидеть, что если $\chi_{\text{em}} L > 2$, то эффективная скорость туннелирования

$$v_{\text{tun}}^{\text{eff}} = \frac{L}{\tau_{\text{tun,em}}^{\text{ph}}} \quad (3)$$

превышает скорость света c .

В работах [9, 10] проведён анализ эффекта Хартмана (впервые обнаруженного [11] в 1962 г.) для одномерного движения квазимонохроматических частиц, туннелирующих через потенциальные барьеры. Эффект Хартмана состоит в независимости фазовых времён туннелирования от ширины достаточно широких барьеров. Этот результат согласуется и с экспериментальными данными [3–7] для фотонов.

Электромагнитные волны и фотоны туннелируют через "фотонные барьеры" аналогично тому, как частицы туннелируют через потенциальные барьеры. Туннелирование классических затухающих электромагнитных волн впервые изучалось экспериментально в [12] с использованием двухпризмной схемы (подобной изображённой на рис. 2б). Такие барьеры были сконструированы для изучения распространения электромагнитных волн в микроволновом диапазоне через волноводы, в оптическом диапазоне через устройства с немного нарушенным полным внутренним отражением (рис. 2) и т.п. Впоследствии в [13–19] были получены результаты по туннелированию оптических фотонов (в [17] также проведён теоретический анализ туннелирования фотонов). На рисунке 2а представлена схема из [18]. На рисунке 2б показано устройство с двумя призмами, с помощью которого можно увидеть пространственный сдвиг отражённых и прошедших пучков в рамках геометрической оптики [19].

Наконец, уже имеются и экспериментальные работы по изучению обобщённого эффекта Хартмана для двух барьеров [20, 21]. Эти работы выполнены для внерезонансного рассеяния электромагнитных волн через волноводы [22], а также для оптических фотонов в волоконной оптике [23]. Поскольку в обоих случаях туннелирование проводилось в области, далёкой от резонансов, общее фазовое время туннелирования оказалось не зависящим не только от барьерных ширин, но и от расстояний между барьерами.

Явление сверхсветовых скоростей, наблюдавшееся в микроволновых и оптических экспериментах с туннели-

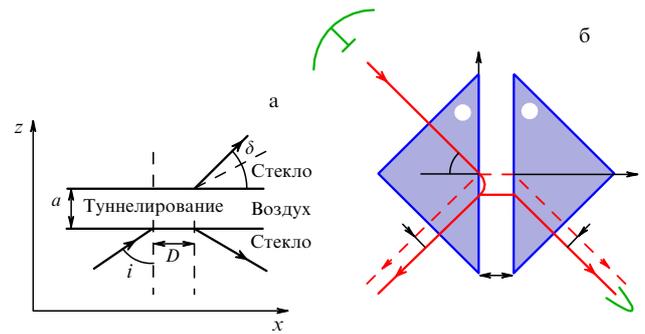


Рис. 2. (а) Нарушенное полное внутреннее отражение и туннелирование затухающих волн. (б) Схема из [18], учитывающая эффект Гуса–Хенхена.

рованием фотонов и затухающими электромагнитными волнами в работах [3–7, 15, 16, 18, 19] и ряде последующих работ, породило множество дискуссий о релятивистской причинности (см., например, [3–7, 9, 10, 18, 19, 22–36]). До сих пор согласия в результате дискуссий не достигнуто. Дебаты, а также эксперименты продолжаются. Подробнее на этом мы здесь останавливаться не будем.

2. Одномерное туннелирование

Анализ многократных внутренних отражений для одномерных потенциалов проводился уже давно (см., например, [24–33]). Проблема многократных внутренних отражений является тривиальной для потенциалов притяжения и сверхбарьерных энергий при наличии барьеров. Но ситуация резко меняется для подбарьерных энергий при наличии туннелирования. В этом случае появляются затухающие и антитухающие волны, которые имеют по отдельности нулевые потоки. Ненулевым потоком отвечают линейные комбинации затухающих и антитухающих волн.

Для корректного анализа многократных последовательных отражений от внутренних стенок барьера в процессе туннелирования через него может быть применён формализм временного анализа процессов туннелирования, разработанный в [10] с учётом результатов [37–44]. Для наглядности ограничимся простейшим случаем прямоугольного барьера высотой V_0 в интервале $(0, a)$ вдоль оси x , а эволюцию туннелирования опишем в рамках нестационарной картины реально движущихся волновых пакетов, составленных из стационарных плоских волн с отсечкой надбарьерных энергий с помощью преобразования $g(k) \rightarrow g(k)\Theta(E - V_0)$, где $\Theta(E - V_0)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Вместо обычного сшивания стационарных волновых функций в точках $x = 0$ и $x = a$ для нахождения аналитических выражений амплитуд отражения A_r и прохождения A_t , а также амплитуд затухающих и антитухающих волн α и β соответственно, перейдём к анализу прохождения начального волнового пакета через первую стенку потенциального барьера, при этом:

1) не учитывается влияние второй (задней) стенки потенциального барьера, поскольку конечный волновой пакет ещё не достиг её из-за конечной скорости;

2) не нарушаются требования конечности волновых пакетов в случае бесконечно широких барьеров (по-

сколькo возрастающие антизатухающие волны ещё не достигли задней стенки барьера);

3) волновые пакеты конструируются по следующим этапам многократных внутренних отражений, которые являются аналитическими продолжениями тех выражений, которые отвечают бегущим волнам для надбарьерных энергий.

Если полагать барьер прямоугольным и считать, что туннелирующий пакет ещё не чувствует вторую стенку барьера, а проникший волновой пакет вначале содержит только сходящиеся волны, то из условия сшивания волнового пакета и его первой производной по x в квазистационарном приближении получим два линейных неоднородных уравнения для неизвестных $A_r^{(0)}$ и α_0 . При прохождении через вторую стенку барьера после проникновения внутрь области барьера волновой пакет разделяется на два пакета: первый — протуннелировавший и распространяющийся из барьера наружу, второй — отражённый от второй стенки барьера и проникающий назад внутрь барьера. Из условий сшивания стационарной волновой функции в точке $x = a$ на втором этапе, так же как и на первом этапе, получим два линейных неоднородных уравнения для неизвестных $A_t^{(0)}$ (амплитуды стационарной волны, прошедшей через вторую стенку барьера наружу) и β_0 (амплитуды антизатухающей волны, отражённой от второй стенки барьера внутрь барьера). Волновой пакет, отражённый от второй стенки, движется внутри барьера к первой стенке. Затем волновой пакет разделяется на два пакета: а) прошедший через эту стенку (в дополнение к пакету, отражённому на первом этапе назад внутрь барьера); б) отражённый от первой стенки вперёд внутри барьера. Сшивая волновые функции в точке $x = 0$, мы снова получаем два линейных неоднородных уравнения, как и в первых двух этапах, для неизвестных $A_r^{(1)}$ (амплитуды стационарной плоской волны, прошедшей через первую стенку назад в область I) и α_1 (амплитуды стационарной затухающей волны, отражённой от первой стенки назад в область барьера II). Этот третий этап, естественно, соответствует первому внутреннему отражению.

Процессы второго и третьего этапов можно итерировать, учитывая последовательные процессы внутренних отражений с постепенным уменьшением волнового пакета (с возрастанием числа внутренних соударений частицы со стенками при частичном выходе волнового пакета через стенку наружу). Такое описание процесса туннелирования неизбежно включает в себя *подход многократных внутренних отражений* [40–44]. Легко увидеть, что любой из последующих этапов можно свести к одному из первых трёх этапов.

Таким образом, учитывая требование непрерывности волнового пакета и его первой производной по x , получим рекуррентные отношения для α_n , β_n , $A_r^{(0)}$, $A_t^{(n)}$ на всех этапах эволюции туннелирования волнового пакета. Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$ — номер этапа эволюции волнового пакета внутри барьера, $n = 0$ соответствует этапу проникновения волнового пакета внутрь барьера.

Общая эволюция волнового пакета, туннелирующего через барьер, описывается с помощью суммирования по всем возможным этапам:

$$A_t = \sum_{n=0}^{\infty} A_t^{(n)}, \quad A_r = \sum_{n=0}^{\infty} A_r^{(n)}, \quad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n, \quad \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n.$$

Результаты для α , β , A_t и A_r совпадают с результатами, полученными из стандартных условий сшивания стационарной волновой функции, которая отвечает решению стационарного уравнения Шрёдингера [44]. Более того, после замены $i\chi \rightarrow k_1$, где $k_1 = [2m(E - V_0)]^{1/2}/\hbar$ — волновое число в случае надбарьерных энергий ($E > V_0$), все приведённые выше выражения для α , β , A_t и A_r переходят в выражения для тех же величин, которые получаются в случае обычного движения частиц с энергиями выше барьера в терминах многократных внутренних отражений [44].

Детальные расчёты фазовых времён туннелирования и отражения на всех этапах и полных времён туннелирования и отражения показали [44], что

$$\tau_{\text{tun}} = \frac{a}{v} + \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(\arg A_t^{(n)})}{\partial E} \xrightarrow{\chi a \rightarrow \infty} \tau_{\text{tun}}^{(1)} = \frac{2}{v\chi}, \quad (4)$$

$$\tau_{\text{refl}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(\arg A_r^{(n)})}{\partial E} = \tau_{\text{tun}} \xrightarrow{\chi a \rightarrow \infty} \tau_{\text{refl}}^{(1)} = \frac{2}{v\chi}.$$

Очевидно, что не только в τ_{tun} , но и во всех $\tau_{\text{tun}}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, проявляется эффект Хартмана. Это согласуется с результатами теоретических исследований [45], которые состоят в том, что *движение затухающих и антизатухающих волн всегда является сверхсветовым с почти нулевым временем туннелирования*. Таким образом, расчёты по формулам (4) ясно показывают, что $\tau_{\text{tun}}^{(1)}$ на первом, $\tau_{\text{tun}}^{(n)}$ на n -м шагах эволюции туннелирования и время τ_{tun} общего результирующего туннелирования (т.е. для суммы всех шагов) в приближении $\chi a \rightarrow \infty$ *равняются друг другу и стремятся к нулю*.

Учитывая аналогию туннелирования частиц и фотонов, изученную в [9, 10], можно распространить полученные результаты на туннелирование при одномерном проникновении частиц и туннелировании фотонов.

3. Двумерное туннелирование

Сначала кратко опишем, следуя [46], движение нерелятивистских частиц в квазимонохроматическом приближении с помощью стационарного уравнения Шрёдингера

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V(x, y)) \right] \Psi(x, y) = 0,$$

где $\Psi(x, y)$ — стационарная волновая функция, m — масса частицы, $V(x, y)$ — потенциал (барьер), E — полная энергия.

Определим области I и II как области нулевых потенциалов $V(x) = V(y) = 0$: I — для $-\infty < x \leq 0$, $-\infty < y < \infty$, II — для $a \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Область III содержит барьер $V(x) = V_0 > 0$ и $V(y) = 0$ ($0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$). Все три области бесконечны вдоль оси y (параллельной поверхностям, разделяющим области I и II, а также области II и III). Имеет место трансляционная симметрия вдоль оси y во всех трёх областях, поскольку всюду $V(y) = 0$.

В стационарной схеме (рис. 3) исходная плоская волна $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ с $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$, $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $|\mathbf{k}| \equiv k = k_x^2 + k_y^2$, $\hbar^2 k_x^2 / (2m) = E_x^2$, $\hbar^2 k_y^2 / (2m) = E_y^2$ и полной энергией $E = E_x^2 + E_y^2$, которая является кинетической энергией в областях I и III, описывает свободную частицу, движущуюся к точке $(x = y = 0)$ в области I.

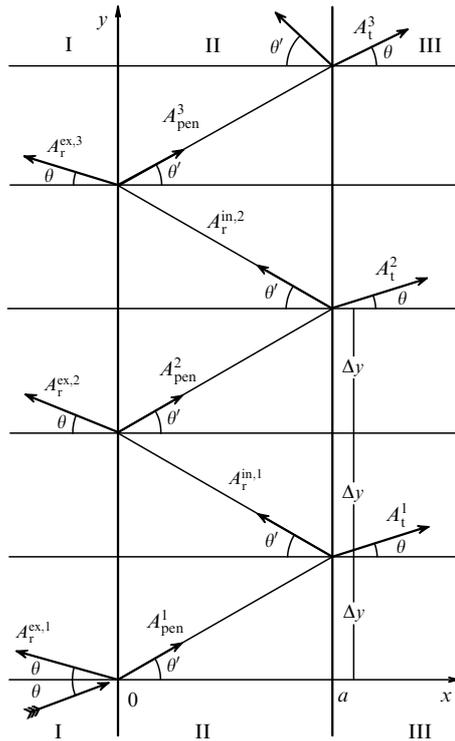


Рис. 3. Схематическая картина многократных двумерных столкновений, надбарьерных проникновений и прохождений нерелятивистских частиц.

Рассмотрим надбарьерное проникновение с $E_x > V_0$. В точке $(x = y = 0)$ появится первая внешне отражённая плоская волна $A_r^{ex,1} \exp(i\mathbf{k}_r \mathbf{r})$, где $A_r^{ex,1}$ — амплитуда первого отражения от левой границы области I, $\mathbf{k}_r^{ex} = \{-k_x^{ex}, k_y\}$, а первая прошедшая в область II волна — $\psi_{II}^1 = A_{pen}^1 \exp(i\mathbf{k}_{pen} \mathbf{r})$, где A_{pen}^1 — её амплитуда, $\mathbf{k}_{pen} = \{k_x^{pen}, k_y\}$, $k_x^{pen} = [2m(E_x - V_0)]^{1/2}/\hbar$, $E_x > V_0$. Далее в первой точке выхода $(x = a, y = \Delta y)$, где Δy — первый сдвиг вверх в области II (вследствие движения с волновым числом k_y вдоль оси y), появляются первая проходящая в области III плоская волна $\psi_{III}^1 = A_t^1 \exp(i\mathbf{k} \mathbf{r})$, где A_t^1 — её амплитуда, и первая отражённая (внутри области II) волна $A_r^{in,1} \exp(i\mathbf{k}_r^{in,1} \mathbf{r})$, где $A_r^{in,1}$ — амплитуда этой волны, $\mathbf{k}_r^{in} = \{-k_x^{pen}, k_y\}$. Очевидно, что сдвиг Δy определяется как

$$\Delta y = a \tan \theta', \quad \tan \theta' = \frac{k_y}{k_x^{pen}}, \quad (5a)$$

или

$$\Delta y = \frac{\hbar k_y}{m} \tau_x^{ph, pen} = a \tan \theta', \quad (5b)$$

где $\tau_x^{ph, pen} = am/(\hbar k_x^{pen})$ — фазовое время продвижения частицы на расстояние a со скоростью $\hbar k_x/m$, т.е. время прохождения квазимонохроматической частицы вдоль оси x в области II от точки $x = 0$ до точки $x = a$, определённое в приближении стационарной фазы.

Из условий сшивания для волн и их первых производных $\partial/\partial x$ в точках $(x = y = 0)$, $(x = a, y = \Delta y)$, $(x = 0, y = 2\Delta y)$, $(x = a, y = 3\Delta y), \dots$, получим, пренебрегая плоской волной $\exp(ik_y y)$, выражения для амплитуды n -й прошедшей в область II волны A_{pen}^n , амплитуды n -й отражённой внутри области II волны $A_r^{in,n}$, амплитуды

n -й внешне отражённой (в область I) волны $A_r^{ex,n}$ и амплитуды n -й протуннелировавшей в область III волны A_t^n .

В случае $k = k_x$, когда угол $\theta = 0$ (см. рис. 3), т.е. падающая плоская волна перпендикулярна первой границе и $\Delta y = 0$, нетрудно увидеть, что

$$\frac{k_x^{pen}}{k_x} |A_{pen}^1|^2 + |A_r^{ex,1}|^2 = 1,$$

$$k_x^{pen} |A_{pen}^1|^2 = k_x^{pen} |A_r^{in,1}|^2 + k_x |A_t^1|^2,$$

вследствие сохранения потока при первом прохождении через точки $(x = y = 0)$ и $(x = 0, y = a)$.

В случае одномерного проникновения (при $\theta = 0$, когда падающая плоская волна перпендикулярна первой границе и $\Delta y = 0$) все выражения, включая выражения для $n = 1, 2, \dots$, совпадают с соответствующими одномерными выражениями в [44], полученными с помощью временного анализа (в случае стационарной фазы) для одномерного туннелирования.

Теперь проанализируем подбарьерное туннелирование при $E_x < V_0$. Если угол θ достаточно велик, $\pi/2 > \theta > \theta_{crit} = \tan(k_y/k_x^{crit})$, где величина k_x^{crit} определяется из уравнения $\hbar^2(k_x^{crit})^2/(2m) = V_0$, то $E_x < V_0$ и значения k_x^{pen} являются мнимыми, т.е. $k_x^{pen} = i\chi$ с $\chi > 0$, и имеет место подбарьерное туннелирование, $k_y^2 = k^2 + \chi^2$. В этом случае для описания подбарьерного туннелирования вместо надбарьерного туннелирования надо ввести χ с помощью подстановки $k_x^{pen} = i\chi$. Тогда вместо движущихся волн (в области II) $\exp(\pm i k_x^{pen} x)$ появятся затухающие, $\alpha_n \exp(-\chi x)$, и антизатухающие, $\beta_n \exp(\chi x)$, волны. Соответствующая картина представлена на рис. 4. В этом случае использовались аналитические продолжения из области вещественных (надбарьерных) волновых чисел в область мнимых (подбарьерных) волновых чисел, аналогично тому, как это было сделано в [44].

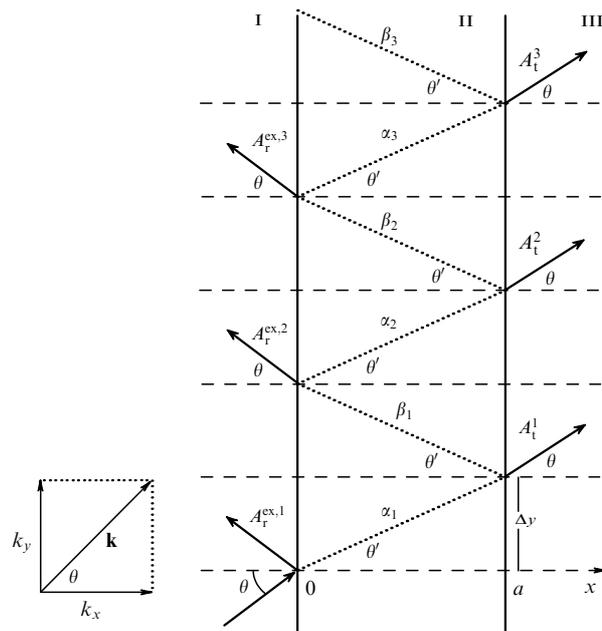


Рис. 4. Схематическое представление многократных двумерных отражений, подбарьерных проникновений и прохождений нерелятивистской частицы.

Полученные в [46] результаты совпали с соответствующими одномерными результатами в [44].

Для сдвига вдоль оси y , обозначенного на рис. 4 как Δy , необходимо использовать выражения, подобные (56):

$$\Delta_n y = \frac{\hbar k_y}{m} \tau_{t(r), x=a(0)}^{\text{ph(ex),n}}, \quad (6)$$

где

$$\tau_{t,x=a}^{\text{ph},n} = \frac{a}{v_x} + \hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_t^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$\tau_{r,x=0}^{\text{ph,ex},n} = \hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg A_r^{\text{ex},n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Величины $\tau_{t,x=a}^{\text{ph},n}$ и $\tau_{r,x=0}^{\text{ph,ex},n}$ представляют собой фазовые времена движения (т.е. времена движения квазимонохроматических частиц в приближении стационарной фазы) для n -го этапа подбарьерного туннелирования через точку $x = a$ и n -го этапа внешнего отражения от первого барьера в точке $x = 0$ соответственно [9, 10]. Разумеется, сдвиги $\Delta_n y$ с разными значениями $n = 1, 2, 3, \dots$ различны (вследствие небольшого численного возрастания $\hbar \partial(\arg A_t^n)/\partial E$ и $\hbar \partial(\arg A_r^{\text{ex},n})/\partial E$ с увеличением n), но они всегда пропорциональны $2/(v\chi)$ в пределе $\chi a \rightarrow \infty$. Протуннелировавшие и внешне отражённые волны возрастающего порядка с увеличением числа n в выражениях для A_t^n и $A_r^{\text{ex},n}$ быстро гасятся множителем $\exp(-\chi a)$.

Но имеется и иной подход к двумерному туннелированию. В [47] при пренебрежении многократными внутренними отражениями затухающих и антитухающих волн (вместо аналитических продолжений, применяемых в [40–44]), использовались *только одна линейная комбинация* волн $\alpha \exp(-\chi x) + \beta \exp(\chi x)$ для k_x -компоненты внутри области II и *только одна* волна $\exp(ik_y y)$ для k_y -компоненты внутри области II, в результате было получено следующее выражение *только для одного сдвига* вдоль оси y на второй границе (между областями II и III), который показан на рис. 5:

$$\Delta y = \frac{\hbar k_y}{m} \tau_{t,x=a}^{\text{ph}}, \quad (9)$$

когда

$$\begin{aligned} \tau_{t,x=a}^{\text{ph}} &= \tau_{\text{tun}} = \frac{a}{v} + \hbar \frac{\partial \arg A_t}{\partial E} = \\ &= \frac{1}{v\chi} \frac{k_{0,x}^2 \sinh(2\chi a) + 2\chi a k_x^2 (\chi^2 - k^2)}{4k_x^2 \chi^2 + k_{0,x}^2 \sinh^2(\chi a)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} A_t^n = 4ik_x \chi \frac{\exp(-\chi a - ik_x a)}{F_x},$$

$$F_x = (k_x^2 - \chi^2)D_- + 2ik_x \chi D_+,$$

где $D_{\pm} = 1 \pm 4 \exp(-2\chi a)$, $k_{0,x}^2 = k_x^2 + \chi^2 = 2mV_0/\hbar^2$. В результате получаем *только одну прошедшую* (в область III) двумерную волну $A_t \exp(ik_x y) \exp(ik_y y)$, которая движется параллельно падающей волне. Из (10) ясно, что, точно так же как и в одномерном случае, время туннелирования $\tau_{t,x=a}^{\text{ph},n}$ на первом этапе и полное время туннелирования $\tau_{t,x=a}^{\text{ph}}$, соответствующее сумме всех этапов, *практически являются нулевыми для сверхсветовых скоростей и равными между собой в приближении* $\chi a \rightarrow \infty$.

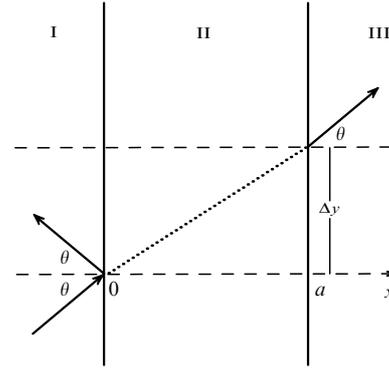


Рис. 5. Схема двумерного туннелирования с одной отражённой и одной прошедшей волной.

Таким образом, здесь имеют место два разных подхода к описанию двумерного столкновения при туннелировании частицы. В первом подходе (см. рис. 4) описывается *бесконечный ряд внутренних отражений и прошедших волн* с помощью формул (5а), (5б), (6)–(8), а также переходы $k_x^{\text{pen}} \rightarrow i\chi$, $A_{\text{pen}}^n \rightarrow \alpha_n$, $A_r^{\text{in},n} \rightarrow \beta_n$. Во втором подходе (см. рис. 5) описываются *только один* сдвиг в результате туннелирования и *только одна* прошедшая волна, которая движется параллельно падающей волне, при полном пренебрежении многократными внутренними отражениями и соответствующими прошедшими волнами.

Оба подхода при всём их различии указывают на нелокальный характер подбарьерного туннелирования, который приводит к эффекту Хартмана для фазового времени туннелирования в пределе $\chi a \rightarrow \infty$. Остаётся только установить, какой из подходов реально описывает туннелирование. Наш подход (см. рис. 4) подтверждается не только теоретическими методами, описанными в [44], но и довольно старыми экспериментальными данными (которые, однако, не получили, скорее всего, реальной обработки), опубликованными в [48, 49].

Учитывая аналогию движения фотона и частицы, можно распространить полученные выше результаты на *двумерное проникновение и туннелирование фотонов*. При рассмотрении фотонов, распространяющихся в однородных стеклянных средах I и III, проникающих и туннелирующих через однородную воздушную прослойку, можно также воспользоваться рис. 3–5. В этом случае величина

$$n = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \quad (11)$$

представляет собой показатель преломления света в стекле (если предположить, что показатель преломления света в воздухе равен единице). Тогда рис. 4 будет соответствовать проникновению фотонов в слой II для углов падения, меньших критического угла $\theta_{\text{crit}} = \tan(k_y/k_x^{\text{crit}})$, т.е. угла полного внутреннего отражения для падающих фотонов, поляризованных перпендикулярно плоскости xu светового падения.

Рисунки 4, 5 соответствуют немного нарушенному (из-за частичного прохождения через прослойку II в стеклянную среду III) полному внутреннему отражению поляризованного света, туннелирующего через щель II при угле падения $\theta > \theta_{\text{crit}}$ для обоих подходов, как и в случае рассмотрения двумерного туннелирования частиц

с многократными внутренними отражениями — подход, представленный выше (а также в несколько отличной форме для света в [48, 49]) (см. рис. 4), так и в случае рассмотрения двумерного туннелирования нерелятивистской частицы и фотона — подход, представленный в [47] (см. рис. 5). Мы надеемся, что корректные окончательные оптические эксперименты дадут яркую демонстрацию многократных внутренних отражений и многократных прошедших волн, как это было показано в предварительных экспериментах [48, 49].

4. Сферически-симметричное трёхмерное туннелирование

К решению проблемы трёхмерного туннелирования, естественно, можно подойти, распространяя результаты, полученные для двумерного случая туннелирования (для осей x и y), на трёхмерный случай (для осей x , y и z), полагая при этом поверхности интерфейсов двумерными (параллельными плоскости yz) с предварительным направлением туннелирования вдоль оси x .

Оставляя такой подход к решению проблемы на усмотрение читателей, можно также формально поставить трёхмерную сферически-симметричную проблему туннелирования, в которой главную роль играет радиальная координата. Такая постановка проблемы обычно рассматривается в ряде монографий по квантовой механике и почти во всех современных статьях по ядерной физике в рамках приближения Венцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Пока имеется мало довольно точных публикаций без использования приближения ВКБ — к таким публикациям можно отнести [50–52] (см. также [53]). Рассмотрим формально трёхмерное туннелирование для сферически-симметричной задачи, например, α -рассеяния или протонного рассеяния сферическими ядрами в результате α -распада или протонного распада сферических ядер, следуя [51].

4.1. Трёхмерное туннелирование и рассеяние частиц потенциальной ямой с жёсткой сердцевиной и внешним кулоновским отталкивательным барьером

Для простоты ограничимся нулевым орбитальным квантовым числом ($l = 0$) и формальными стационарными функциями (в квазимонохроматическом приближении реальных волновых пакетов). В этом случае мы фактически в определённом смысле возвращаемся к одномерной задаче, но уже при $l > 0$ и/или явном учёте несферичности материнских ядер задача станет явно трёхмерной.

Вначале опишем столкновение частиц в виде последовательности двух процессов: на первом этапе волновой пакет сходящихся волн туннелирует через барьер вне потенциальной ямы, генерируя отражённые волны во внешнюю область; на втором этапе расходящиеся из потенциальной ямы волны, которые появляются после вхождения начального туннелирующего волнового пакета, туннелируют через барьер наружу, генерируя отражённые волны из потенциальной ямы через кулоновский барьер внутрь ямы. Затем опишем низкоэнергетическое рассеяние в целом, используя понятие S -матрицы и всех амплитуд вероятностей (туннелирований и отражений). Наконец, покажем наличие многократных внутренних отражений от внутренней стенки кулоновского барьера и от жёсткой сердцевины.

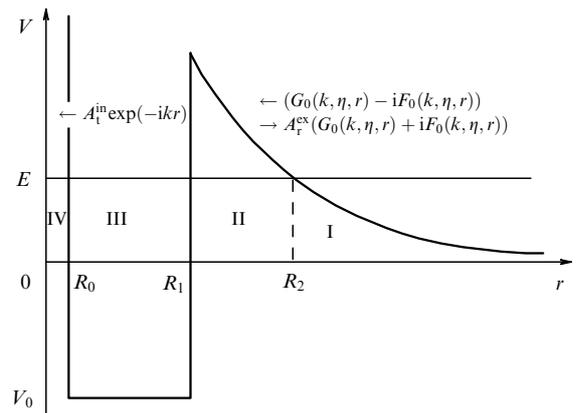


Рис. 6. Схематическое представление столкновения между сходящейся волной снаружи с кулоновским барьером отталкивания.

4.1.1. Столкновение снаружи. Схема столкновения снаружи представлена на рис. 6. Область I с $r > R_2$ является внешней областью с медленно убывающим кулоновским потенциалом; область II, ограниченная R_1 и R_2 , представляет собой подбарьерную область; область III с $R_0 < r < R_1$ — потенциальную яму; в области IV с $r < R_0$ имеется жёсткая сердцевина с нулевой волновой функцией. Вертикальная прямая $r = R_2$ отделяет внешнюю надбарьерную область, в которой кинетическая энергия E частицы превышает кулоновский барьер, от внутренней подбарьерной области II, в которой уровень E лежит ниже кривой кулоновского отталкивания. Вертикальная прямая $r = R_1$ отделяет яму III от кулоновского барьера.

Стационарная радиальная волновая функция, которая удовлетворяет радиальному уравнению Шрёдингера, для картины, изображённой на рис. 6, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_I^{\text{ex}} &= G_0(k_1, \eta, r) - iF_0(k_1, \eta, r) + \\ &+ A_T^{\text{ex}} (G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r)), \quad R_2 \leq r < \infty, \\ \Phi_{II}^{\text{ex}} &\text{ формально та же, что и } \Phi_I^{\text{ex}}, \quad R_1 \leq r < R_2, \quad (12) \\ \Phi_{III}^{\text{ex}} &= A_I^{\text{in}} \exp(-ik_2 \rho), \quad \rho = r - R_0, \quad R_0 < r < R_1. \end{aligned}$$

Здесь k_1 и $E = \hbar^2 k_1^2 / (2m)$ — волновое число и кинетическая энергия частицы соответственно, η — параметр Зоммерфельда,

$$\eta = \frac{z_1 z_2 e^2 m}{\hbar^2 k_1},$$

$k_2 = [2m(V_0 + E)]^{1/2} / \hbar$; для кулоновского барьера отталкивания

$$V_C = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}, \quad R_1 \leq r < \infty, \quad (13)$$

где $z_1 e$ и $z_2 e$ — электрические заряды взаимодействующих частиц (ядер); кулоновские функции $G_0(k_1, \eta, r)$ и $F_0(k_1, \eta, r)$ имеют асимптотики:

$$\begin{aligned} G_0(k_1, \eta, r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \cos(k_1 r - \eta \ln(2k_1 r) + \sigma), \\ F_0(k_1, \eta, r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sin(k_1 r - \eta \ln(2k_1 r) + \sigma), \end{aligned} \quad (14)$$

$\sigma = \arg \Gamma(1 + i\eta)$; A_T^{ex} и A_I^{in} — амплитуды внешнего отражения и проникновения внутрь потенциала при первом туннелировании соответственно, аналитические

выражения для которых можно найти из условий непрерывности для обеих амплитуд и их первых производных в точках $r = R_2$ и $r = R_1$:

$$A_r^{\text{ex}} = - \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) - iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 + (G_0'(k_1, \eta, R_1) - iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right] \times \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 + (G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$A_t^{\text{in}} = 2ik_1 \exp [ik_2(R_1 - R_0)] \times \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 + (G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right]^{-1}. \quad (16)$$

Нетрудно увидеть, что

$$|A_r^{\text{ex}}|^2 + \frac{k_2}{k_1} |A_t^{\text{in}}|^2 = 1, \quad (17)$$

если учесть известное соотношение для вронскиана $F_0G_0' - G_0F_0' = 1$, где G_0' и F_0' — производные от G_0 и F_0 по k_1R_1 соответственно. Равенство (17) является следствием закона сохранения плотности потока вероятности.

Для малых k_1 , когда $k_1 \rightarrow 0$ (точнее, когда $2\eta \gg k_1R_1$),

$$G_0 \rightarrow 2 \left(\frac{k_1R_1}{\pi} \right)^{1/2} I_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \exp(\pi\eta)$$

$$\text{при } I_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \rightarrow 1,$$

$$G_0' \rightarrow -2 \left(\frac{2\eta}{\pi} \right)^{1/2} K_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \exp(\pi\eta)$$

$$\text{при } K_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \rightarrow \ln \left(\frac{1}{\gamma} (2\pi k_1R_1)^{1/2} \right),$$

где $\gamma = 1,781 \dots$ — постоянная Эйлера,

$$F_0 \rightarrow (\pi k_1R_1)^{1/2} I_1(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \exp(-\pi\eta)$$

$$\text{при } I_1(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \rightarrow (2\pi k_1R_1)^{1/2},$$

$$F_0' \rightarrow (2\pi k_1R_1)^{1/2} I_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \exp(-\pi\eta)$$

$$\text{при } I_0(2(2\pi k_1R_1)^{1/2}) \rightarrow 1.$$

Если $[(2k_1^2/k_2^2)\eta/(k_1R_1)][(\ln \gamma)^{-1}(2\pi k_1R_1)^{-1/2}] \ll 1$, то вероятность проникновения снаружи через кулоновский барьер внутрь прямоугольной потенциальной ямы $|A_t^{\text{in}}|^2$ приобретает вид

$$|A_t^{\text{in}}|^2 \rightarrow \frac{\pi k_1}{k_2^2 R_1} \exp(-2\pi\eta). \quad (18)$$

При этом в трёхмерном случае даже при очень малых k_1 необходимо учитывать не только экспоненциальный множитель $\exp(-2\pi\eta)$, но и предэкспоненциальный множитель $\pi k_1/(k_2^2 R_1)$, чем пренебрегается в одномерном ВКБ-приближении, часто используемом при анализе низкоэнергетических ядерных столкновений в ядерной астрофизике.

4.1.2. Эмиссия изнутри барьера. Схема эмиссии наружу из барьера показана на рис. 7. Стационарная радиальная

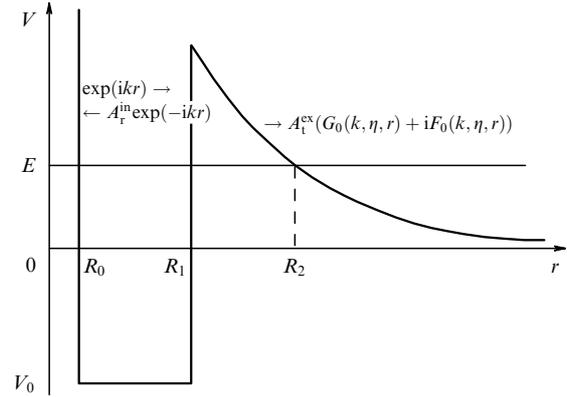


Рис. 7. Схематическое представление эмиссии внутренней расходящейся волны через кулоновский барьер отталкивания.

волновая функция в этой задаче имеет вид

$$\Phi_{\text{III}}^{\text{in}} = \exp(ik_2\rho) + A_r^{\text{in}} \exp(-ik_2\rho), \quad \rho = r - R_0, \quad R_0 < r < R_1, \\ \Phi_{\text{II}}^{\text{ex}} \text{ формально та же, что и } \Phi_{\text{I}}^{\text{in}}, \quad R_1 \leq r < R_2, \quad (19) \\ \Phi_{\text{I}}^{\text{ex}} = A_t^{\text{ex}} (G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r)), \quad R_1 \leq r < \infty.$$

Из условий непрерывности стационарной волновой функции и её производных в точках $r = R_2$ и $r = R_1$ нетрудно найти аналитические выражения для амплитуд A_r^{in} и A_t^{ex} :

$$A_r^{\text{in}} = \exp [2ik_2(R_1 - R_0)] \times \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 - (G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right] \times \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 + (G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right]^{-1}, \quad (20)$$

$$A_t^{\text{ex}} = 2ik_2 \exp [ik_2(R_1 - R_0)] \times \left[(G_0(k_1, \eta, R_1) + iF_0(k_1, \eta, R_1))ik_2 + (G_0'(k_1, \eta, R_1) + iF_0'(k_1, \eta, R_1))k_1 \right]^{-1}. \quad (21)$$

Вследствие закона сохранения плотности потока имеет место уравнение

$$|A_r^{\text{in}}|^2 + \frac{k_1}{k_2} |A_t^{\text{ex}}|^2 = 1. \quad (22)$$

Повторяя для (22) те же рассуждения, которые были сделаны при малых k_1 , $k_1 \rightarrow 0$, при получении формулы (18) из (17), находим, что

$$|A_r^{\text{in}}|^2 \rightarrow \frac{\pi}{k_2 R_1} \exp(-2\pi\eta). \quad (23)$$

Как и при выводе формулы (18), в трёхмерном случае при малых k_1 необходимо учитывать не только экспоненциальный множитель $\exp(-2\pi\eta)$, но и предэкспоненциальный множитель $\pi/(k_2 R_1)$, что не учитывается в одномерном ВКБ-приближении, типичном для низкоэнергетических ядерных столкновений.

В простейшем случае прямоугольного барьера при $R_1 \leq r < R_2$ и нулевого потенциала вместо кулоновского

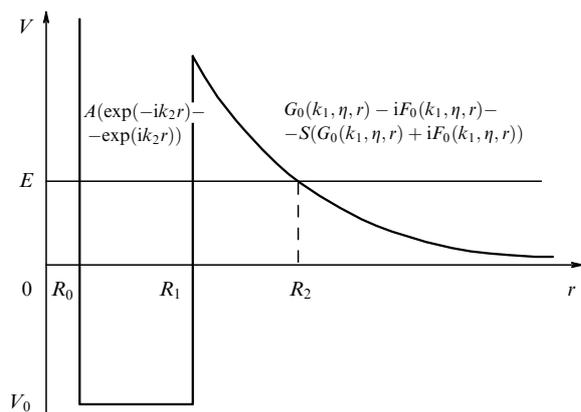


Рис. 8. Схема рассеяния в целом.

барьера простая проверка фазовых времён отражения внутрь ямы от внутренней стенки барьера и туннелирования через барьер подтверждает наличие эффекта Хартмана. Другими словами, мы имеем элементарное подтверждение эффекта Хартмана для трёхмерного туннелирования (см. [50]).

4.2. S-матрица

Теперь объединим оба этапа столкновения в одно рассеяние, вводя S-матрицу и учитывая многократные отражения внутри потенциальной ямы. Для этой цели отобразим рассеяние схемой, приведённой на рис. 8, а стационарную радиальную волновую функцию представим как

$$\begin{aligned} \Psi_I &= (G_0(k_1, \eta, r) - iF_0(k_1, \eta, r)) - \\ &\quad - S(G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r)), \quad r \geq R_2, \\ \Psi_{II} &\text{ имеет тот же вид, что и } \Psi_I, \quad R_1 \leq r < R_2, \\ \Psi_{III} &= A[\exp(-ik_2 r) - \exp(ik_2 r)], \quad R_0 < r < R_1, \\ \Psi_{IV} &\equiv 0, \quad r \leq R_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из условий непрерывности стационарной волновой функции и её производных в точках $r = R_2$ и $r = R_1$ можно получить аналитические выражения для S-матрицы и амплитуды A:

$$S = \frac{H_1[k_2 \cos k_2(R_1 - R_0)] - H_2[k_1 \sin k_2(R_1 - R_0)]}{H_3[k_2 \cos k_2(R_1 - R_0)] - H_4[k_1 \sin k_2(R_1 - R_0)]}, \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} A &= 2i \exp[ik_2(R_2 - R_0)] k_1 \times \\ &\quad \times \left(H_4 k_1 \{1 - \exp[2ik_2(R_1 - R_0)]\} + \right. \\ &\quad \left. + H_3 ik_2 \{1 + \exp[2ik_2(R_1 - R_0)]\} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (25b)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= G_0(k_1, \eta, r) - iF_0(k_1, \eta, r), \\ H_2 &= G_0'(k_1, \eta, r) - iF_0'(k_1, \eta, r), \\ H_3 &= G_0(k_1, \eta, r) + iF_0(k_1, \eta, r), \\ H_4 &= G_0'(k_1, \eta, r) + iF_0'(k_1, \eta, r). \end{aligned}$$

Очевидно, что $|S| = 1$, а из простого сравнения A и S с $A_r^{\text{ex}}, A_t^{\text{ex}}, A_r^{\text{in}}$ и A_t^{in} можно найти, что

$$A = \frac{A_t^{\text{in}}}{1 + A_r^{\text{in}}}, \quad (26)$$

$$S = -A_r^{\text{ex}} + AA_t^{\text{ex}} = -A_r^{\text{ex}} + \frac{A_t^{\text{ex}} A_t^{\text{in}}}{1 + A_r^{\text{in}}}. \quad (27)$$

Физический смысл члена $1/(1 + A_r^{\text{in}})$ заключается в наличии бесконечной серии когерентных многократных внутренних отражений, описываемых стационарными волновыми функциями:

$$\begin{aligned} A_t^{\text{in}}(1 - A_r^{\text{in}} + (A_r^{\text{in}})^2 - (A_r^{\text{in}})^3 + \dots) \exp(-ikr) &= \\ = \frac{A_t^{\text{in}}}{1 + A_r^{\text{in}}} \exp(-ikr), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_t^{\text{in}}(1 - A_r^{\text{in}} + (A_r^{\text{in}})^2 - (A_r^{\text{in}})^3 + \dots) \exp(ikr) &= \\ = \frac{A_t^{\text{in}}}{1 + A_r^{\text{in}}} \exp(ikr). \end{aligned} \quad (29)$$

Для входящих и выходящих волн, соответственно, имеются многократные внутренние отражения между точками жёсткой сердцевины и диаметрально противоположными им точками внутренней стенки сферически-симметричного кулоновского барьера. Разумеется, их временную последовательность естественно изучать физически в прямом временном подходе, просто обобщая подход, изложенный ранее для одномерного туннелирования. В случае сферически-симметричных ядер полагается, что пакет волн, расходящихся внутри ядра (однородно сжимающихся внутри ядра), движущийся радиально в направлении внутренней поверхности кулоновского барьера, отражается внутрь и затем уже движется радиально дальше внутрь как пакет сходящихся волн к сферической стенке жёсткой сердцевины, после чего отражается внутрь потенциальной ямы, где снова движется как пакет расходящихся волн к внутренней стенке кулоновского барьера — всё это повторяется многократно вплоть до постепенного полного выхода волнового пакета наружу.

Такие когерентные внутренние отражения обычно имеют место для элементарных заряженных частиц (протонов, позитронов, π^+ -мезонов и т.д.), причём как для нерезонансного, так и для резонансного рассеяния.

Но если бомбардирующая ядерная частица является кластером, как, например, α -частица, и имеет место резонансное рассеяние с образованием α -радиоактивного составного ядра, то может реализоваться более сложный некогерентный процесс: α -частица исчезает ("растворяется") внутри составного (материнского) ядра и спустя некоторое виртуальное и реальное время (время пребывания) τ_{resid} (включая время движения под поверхностью до исчезновения и последующего нового формирования), α -частица появляется снова вблизи ядерной поверхности и проникает через кулоновский барьер наружу (см., например, [54, 55]).

Предполагая, что, после того как любая выходящая "порция" вероятностного волнового пакета α -частицы в процессе бесконечной серии многократных отражений при каждом ударе с внутренней стенкой барьера уменьшается в $|A_r^{\text{in}}|^2$ раз по сравнению с таковой при предыдущем ударе, можно представить общую вероятность

α -распада (равную единице) в виде бесконечной суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{k_1}{k_2} |A_t^{\text{ex}}|^2 (1 + |A_r^{\text{in}}|^2 + |A_r^{\text{in}}|^2 |A_r^{\text{in}}|^2 + \dots) = \frac{(k_1/k_2) |A_t^{\text{ex}}|^2}{1 - |A_r^{\text{in}}|^2} = 1. \quad (30)$$

Более того, также предполагается, что все многократные последовательные внутренние отражения внутри материнского ядра после формирования α -частицы вблизи ядерной поверхности до её дальнейшего исчезновения внутри материнского ядра *не когерентны* между собой вследствие независимости последовательных процессов исчезновений, поэтому в цепочке многократных внутренних отражений должны суммироваться не амплитуды вероятностей, а вероятности. Далее естественно предположить, что на каждом этапе некогерентных многократных внутренних отражений α -частицы полная средняя длительность τ_{resid} виртуального и действительного пребывания α -частицы внутри материнского ядра между двумя последовательными внутренними отражениями равна сумме среднего времени исчезновения внутри ядра, среднего времени последующего формирования α -частицы, среднего времени её отражения внутрь ядра и среднего времени её кинематического движения после отражения внутрь, а затем к поверхности после её формирования. Считается также, что величина τ_{resid} одинакова для каждой пары последовательных ударов α -частицы о ядерную поверхность.

Эффективное, или среднее, время виртуального или действительного пребывания α -частицы внутри материнского α -радиоактивного ядра между двумя последовательными некогерентными многократными внутренними отражениями в течение долгого α -распада можно оценить феноменологически просто на основе экспериментального экспоненциального закона α -распада с временем жизни τ :

$$L(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (31)$$

Экспоненциальный закон (31) для распада резонансного состояния с распределением энергий в виде лоренцевской кривой (кривой Брейта – Вигнера) подтверждается с хорошей точностью теоретически, за исключением очень малых, $t < t_0(\Gamma/E_{\text{res}})$, и весьма больших, $t > t_0 \ln(E_{\text{res}}/\Gamma)$, времён [56] (см. также [57]), где Γ и E_{res} — ширина и энергия резонанса соответственно.

Если $\tau_{\text{resid}} \ll \tau$, то за время τ_{resid} вероятность распада уменьшается на величину

$$\Delta L = 1 - |A_r^{\text{in}}|^2 = \frac{\tau_{\text{resid}}}{\tau}. \quad (32)$$

Таким образом, учитывая (30), получим

$$\frac{\tau_{\text{resid}}}{\tau} = \frac{k_1}{k_2} |A_t^{\text{ex}}|^2 \quad \text{и} \quad \tau_{\text{resid}} = \frac{k_1}{k_2} |A_t^{\text{ex}}|^2 \tau = P\tau, \quad (33)$$

где $P = (k_1/k_2) |A_t^{\text{ex}}|^2$.

Формула (33), которая при подстановке $v = 1/\tau_{\text{resid}}$ и $\tau = 1/\lambda$ преобразуется в известную формулу (см., например, [58, 59], а также [60]):

$$\lambda = vP, \quad (34)$$

по сути, описывает новый феноменологический подход к физическому смыслу предэкспоненциального множителя.

Вычислим τ_{resid} , например, для ядра ^{210}Po со значениями $E = 5,407$ МэВ, $V_0 = 16,7$ МэВ, $R_1 = 8,76$ фм и $R_1 = 8,975$ фм [51] и $\tau = 138,376$ сут = $11955686,4$ с. Тогда мы получим значения $\tau_{\text{resid}} = 2,434 \times 10^{-20}$ с и $\tau_{\text{resid}} = 5,740 \times 10^{-20}$ с и, следовательно, значения $v = 1/\tau_{\text{resid}} = 4,108 \times 10^{19} \text{ с}^{-1}$ и $1,742 \times 10^{19} \text{ с}^{-1}$ соответственно. Полученные здесь значения $v = 1/\tau_{\text{resid}}$ отличаются от гаммовского предэкспоненциального множителя $v_0/2R_1 \equiv [2(E + V_0)/m]^{1/2}/2R_1$, оценённого как простое классическое число чисто кинематических ударов α -частицы о ядерную поверхность в единицу времени, а также и от оценки Ландау [61] для предэкспоненциального множителя в виде $D/(2\pi\hbar)$, где D — среднее расстояние между энергетическими уровнями материнского ядра в рассматриваемом интервале энергий.

Численно полученные нами значения сильно отличаются от гаммовской оценки: для выбранных в [51] величин $E = 5,407$ МэВ, $V_0 = 16,7$ МэВ, $R_1 = 8,76$ фм и $R_1 = 8,975$ фм мы получили $v_0/(2R_1) = 1,881 \times 10^{21} \text{ с}^{-1}$ и $1,836 \times 10^{21} \text{ с}^{-1}$ соответственно. Такое различие можно объяснить физически очень малым временем движения внутри потенциальной ямы по сравнению с временами исчезновения и формирования α -частицы внутри ядра. Кроме того, можно увидеть, что величина R_0 не влияет на значения A_r , A_t и τ_{resid} .

Для $D = 100$ кэВ величина $D/(2\pi\hbar) = 2,418 \times 10^{19} \text{ с}^{-1}$ и наш результат не сильно отличается от значения Ландау в [61]. Возможно, это обусловлено тем, что обе величины связаны с фундаментальными внутренними свойствами материнского ядра (более того, величина $D/(2\pi\hbar)$ количественно близка обратному значению цикла Пуанкаре для оператора времени в квазидискретном энергетическом спектре).

5. Заключение

Итак, на основе проведённого анализа теоретических результатов двумерного и трёхмерного туннелирования частиц и фотонов и многократного внутреннего отражения можно сделать следующие выводы.

1. По поводу *многократных внутренних отражений туннелирующих частиц и фотонов* имеются разногласия между разными авторами, в частности между авторами [31–44, 46, 51] и авторами [47]. Предварительные экспериментальные данные [48, 49] как будто подтверждают точку зрения, изложенную в [31–44, 46, 51]. Для окончательного уяснения предложено проведение корректных оптических экспериментов (с реальной обработкой экспериментальных данных) для полных внутренних отражений в продолжение работ [48, 49].

2. Полученные трёхмерные результаты могут быть использованы как начальный этап во временном подходе к описанию ядерных реакций и распадов для любого значения l и для явно несферических случаев, а также подбарьерных астрофизических реакций ядерного синтеза. В последнем случае важно учитывать не только множитель проникновения (18), но и множитель $1/(1 + A_r^{\text{in}})$, который появляется вследствие многократных внутренних столкновений между жёсткой сердцевинной и диаметрально противоположными точками внутренней стенки трёхмерного кулоновского барьера. Оба этих множителя отсутствуют в одномерном приближении, которое до сих пор обычно используется в работах по ядерной астрофизике (см., например, [62–66] и приведённые там ссылки).

3. В дальнейшем имеет смысл провести перерасчёт формулы $\lambda = vP$ для всех α -радиоактивных ядер при $v = 1/\tau_{\text{resid}}$.

Список литературы

- Akhiezer A I, Berestetskiy V B *Квантовая электродинамика* (М.: Физматгиз, 1959); Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1965)
- Швебер С *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля* (М.: ИЛ, 1963) Гл. 5.3; Schweber S S *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Evanston, Ill.: Row, Peterson, 1961)
- Enders A, Nimtz G *J. Physique I* **2** 1693 (1992)
- Enders A, Nimtz G *J. Physique I* **3** 1089 (1993)
- Enders A, Nimtz G *Phys. Rev. B* **47** 9605 (1993)
- Enders A, Nimtz G *Phys. Rev. E* **48** 632 (1993)
- Nimtz G, in *Tunneling and Its Implications* (Eds A Ranfagni, L S Schulman) (Singapore: World Scientific, 1997) p. 223
- Wigner E P *Phys. Rev.* **98** 145 (1955)
- Olkhovsky V S, Recami E *Phys. Rep.* **214** 339 (1992)
- Olkhovsky V S, Recami E, Jakiel J *Phys. Rep.* **398** 133 (2004)
- Hartman T E *J. Appl. Phys.* **33** 3427 (1962)
- Bose J Ch *Bose Inst. Trans.* 42 (1927)
- Steinberg A M, Kwiat P G, Chiao R Y *Phys. Rev. Lett.* **71** 708 (1993)
- Chiao R Y, Kwiat P G, Steinberg A M *Sci. Am.* **269** (2) 52 (1993)
- Spielmann Ch et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 2308 (1994)
- Balcou Ph, Dutriaux L *Phys. Rev. Lett.* **78** 851 (1997)
- Jakiel J, Olkhovskiy V S, Recami E *Phys. Lett. A* **248** 156 (1998)
- Laude V, Tournois P *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 194 (1999)
- Haibel A, Nimtz G, Stahlhofen A A *Phys. Rev. E* **63** 047601 (2001)
- Olkhovskiy V S, Recami E, Salesi G *Europhys. Lett.* **57** 879 (2002)
- Olkhovskiy V S, Recami E, Zaichenko A K *Europhys. Lett.* **70** 712 (2005)
- Nimtz G, Enders A, Spieker H *J. Physique I* **4** 565 (1994)
- Longhi S et al. *Phys. Rev. E* **65** 046610 (2002)
- Chiao R Y *AIP Conf. Proc.* **461** 3 (1999)
- Nimtz G *AIP Conf. Proc.* **461** 14 (1999)
- Recami E *AIP Conf. Proc.* **461** 32 (1999)
- Steinberg A *AIP Conf. Proc.* **461** 36 (1999)
- Recami E, in *Time's Arrows, Quantum Measurement, and Superluminal Behavior: Intern. Conf. TAQMSB, Palazzo Serra di Cassano, Napoli, October 3–5, 2000* (Eds D Mugnai, A Ranfagni, L S Schulman) (Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2001) p. 17
- Nimtz G, Haibel A, Vetter R-M, in *Time's Arrows, Quantum Measurement, and Superluminal Behavior: Intern. Conf. TAQMSB, Palazzo Serra di Cassano, Napoli, October 3–5, 2000* (Eds D Mugnai, A Ranfagni, L S Schulman) (Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2001) p. 125
- Olkhovskiy V S, in *Time's Arrows, Quantum Measurement, and Superluminal Behavior: Intern. Conf. TAQMSB, Palazzo Serra di Cassano, Napoli, October 3–5, 2000* (Eds D Mugnai, A Ranfagni, L S Schulman) (Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2001) p. 173
- Nimtz G *Prog. Quantum Electron.* **27** 417 (2003)
- Winful H G *Phys. Rep.* **436** 1 (2006)
- Recami E *J. Phys. Conf. Ser.* **196** 012020 (2009)
- Nimtz G *Found. Phys.* **39** 1346 (2009)
- Shvartsburg A B, Petite G, Zuev M *J. Opt. Soc. Am. B* **28** 2271 (2011)
- Aharonov Y, Erez N, Reznik B *Phys. Rev. A* **65** 052124 (2002)
- Cardone F, Mignani R, Olkhovskiy V S *Phys. Lett.* **289** 279 (2001)
- Cardone F, Mignani R, Olkhovskiy V S *Mod. Phys. Lett. B* **14** 109 (2000)
- Cardone F, Mignani R, Olkhovskiy V S *J. Physique I* **7** 1211 (1997)
- Fermor J H *Am. J. Phys.* **34** 1168 (1966)
- McVoy K W, Heller L, Bolsterli M *Rev. Mod. Phys.* **39** 245 (1967)
- Anderson A *Am. J. Phys.* **57** 230 (1989)
- Maidanyuk S P, Olkhovskiy V S, Zaichenko A K *J. Phys. Studies* **6** (1) 24 (2002)
- Cardone F, Maidanyuk S P, Mignani R, Olkhovskiy V S *Found. Phys. Lett.* **19** 441 (2006)
- Barbero A P L, Hernández-Figueroa H E, Recami E *Phys. Rev. E* **62** 8628 (2000)
- Olkhovskiy V S, Romaniuk M V *J. Mod. Phys.* **2** 1166 (2011)
- Steinberg A M, Chiao R Y *Phys. Rev. A* **49** 3283 (1994)
- Carniglia C K, Mandel L *J. Opt. Soc. Am.* **61** 1035 (1971)
- Zhu S et al. *Am. J. Phys.* **54** 601 (1986)
- Olkhovskiy V S et al. *Central Eur. J. Phys.* **6** 122 (2008)
- Olkhovskiy V S, Romaniuk M V *Nucl. Phys. Atom. Energy* **10** 273 (2009)
- Olkhovskiy V S *Int. J. Mod. Phys. E* **23** 1460006 (2014); "About the similarity of particle and photon tunneling and multiple internal reflections in 1-dimensional, 2-dimensional and 3-dimensional photon tunneling", in *Materiály IX Mezinárodní Vědecko-praktická Konf. "Zprávy Vědecké Ideje", 27 Října–05 Listopadu 2013 Roku, Fyzika, Praha* (Praha: Publ. House Education and Science, 2013) p. 43
- Давидовский В В, Зайченко А Л, Ольховский В С *Ядерная физика. Сб. науч. тр. Ин-та ядерных иссл.* (1(14)) 28 (2005)
- Preston M A *Physics of the Nucleus* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1962)
- Кадменский С Г, Фурман В И *Альфа-распад и родственные ядерные реакции* (М.: Энергоатомиздат, 1985)
- Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (М.: Наука, 1971); Baz' A I, Zel'dovich Ya B, Perelomov A M *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)
- Базь А И, Гольданский В И, Зельдович Я Б *УФН* **85** 445 (1965); Baz' A I, Gol'danskii V I, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **8** 177 (1965)
- Gamow G *Z. Phys.* **51** 204 (1928)
- Gurney R W, Condon E D W U *Nature* **122** 439 (1928)
- Гамов Г А *УФН* **163** (4) 51 (1993); Gamov G A *Phys. Usp.* **36** (4) 267 (1993); Гамов Г А *УФН* **10** 531 (1930); *УФН* **13** 46 (1933)
- Ландау Л Д, Смородинский Я А *Лекции по теории атомного ядра* (М.: Гостехиздат, 1955); Landau L D, Smorodinsky Ya *Lectures on Nuclear Theory* (New York: Dover Publ., 1993)
- Bonetti R et al. *Phys. Rev. Lett.* **82** 5205 (1999)
- Spitaleri C et al. *Phys. Rev. C* **63** 055801 (2001)
- Junghans A R et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 041101 (2002)
- Imbriani G et al. *Eur. Phys. J. A* **25** 455 (2005)
- Lemut A et al. (LUNA Collab.) *Phys. Lett. B* **634** 483 (2006)

On the multiple internal reflections of particles and phonons tunneling in one, two, or three dimensions

V.S. Olkhovsky

Kiev Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine,
prosp. Nauky 47, 03680 Kiev, Ukraine
E-mail: olkhovsky@mail.ru

An analysis is given of multiple internal reflections undergone by particles and phonons undergoing one-, two-, and three-dimensional tunneling. Results obtained by using the time dependent Schrödinger equation for nonrelativistic particles and those obtained with the time dependent Helmholtz equation for electromagnetic waves are presented. The paper closes with conclusions and considerations for future research.

PACS numbers: 03.65.Xp, **42.25**–p, 42.50.Xa

Bibliography — 66 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (11) 1255–1264 (2014)

DOI: 10.3367/UFN.0184.201411h.1255

Received 10 March 2014, revised 15 May 2014

Physics–Uspekhi **57** (11) (2014)