Ноябрь 2014 г. *Том 184, № 11*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

PT-симметрия в оптике

А.А. Зябловский, А.П. Виноградов, А.А. Пухов,
А.В. Дорофеенко, А.А. Лисянский

Рассматриваются псевдоэрмитовы системы как квантово-механической, так и оптической природы. Основное внимание уделено важному для оптики и электродинамики частному случаю таких систем, а именно PT-симметричным системам. Наиболее интересным следствием PT-симметрии, обсуждаемым в литературе, является фазовый переход, при котором собственные моды системы теряют PT-симметричность. Хотя экспериментально реализовать такой переход очень трудно, можно наблюдать схожее с этим переходом явление в "почти" PT-инвариантных системах. Другие явления, предсказанные на данный момент для PT-симметричных сред, не являются специфическими исключительно для PT-инвариантных систем, и они могут наблюдаться в обыкновенных полностью пассивных системах.

PACS numbers: 03.65.Ca, 41.20.Jb, **42.79.–e** DOI: 10.3367/UFNr.0184.201411b.1177

Содержание

1. Введение

В последнее десятилетие вновь усилился интерес к оптике искусственных гетерогенных сред. Это связано с тем, что такие среды обладают многими уникальными свойствами, не встречающимися у однородных природных материалов: искусственный магнетизм на оптических частотах [1 – 4], отрицательное преломление [5, 6], сильная пространственная дисперсия [7, 8] и др. Эти новые

А.А. Зябловский. Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова,
ул. Сущёвская 22, 127055 Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 г. Долгопрудный,
Московская обл., Российская Федерация
Тел./Факс (495) 408-72-77. E-mail: info@mipt.ru
А.П. Виноградов, А.А. Пухов, А.В. Дорофеенко.
Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН,
ул. Ижорская 13, 125412 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 484-23-83. Факс (495) 484-26-33. E-mail: itae@itae.ru
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 г. Долгопрудный,
Московская обл., Российская Федерация
Тел./Факс (495) 408-72-77
E-mail: info@mipt.ru
Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики
им. Н.Л. Духова, ул. Сущёвская 22, 127055 Москва,
Российская Федерация
А.А. Лисянский. Department of Physics, Queens College
of the City University of New York, Flushing, New York 11367, USA
Тел./Факс + 718-997-3371

*Статья поступила 11 февраля 2014 г.,
после доработки 16 апреля 2014 г.*

свойства, обусловленные резонансным характером взаимодействия света с материалом, наблюдаются в плазмонных системах [9], фотонных кристаллах [10, 11], хаотических лазерах (random lasers) [12] и других системах. К сожалению, резонансный характер взаимодействия не всегда приводит к усилению только полезных свойств. Нередко при этом сильно возрастают джоулевы потери, что негативно сказывается на возможности применения таких сред [13–15]. Чтобы решить эту проблему, было предложено [16–24] добавлять в состав гетерогенной системы активные (усиливающие) компоненты. В результате в одних областях системы происходит усиление волны, а в других — ослабление. Интуитивно кажется, что компенсацию потерь можно обеспечить равенством объёмов и мнимых частей усиливающей и диссипативной компонент. Оказывается, что в этих условиях может происходить переход от решений, не испытывающих ни усиления, ни ослабления, к решениям, которые, несмотря на кажущуюся компенсацию потерь, всё же либо усиливаются, либо ослабляются [25–27]. В само́й точке перехода происходит изменение типа решений. Важным примером таких систем, позволяющих получить аналитически строгие результаты, являются PT-симметричные (Parity-Time (PT) symmetry) системы. В оптических системах свойство PT-симметрии сводится к выполнению условия $\varepsilon(x,z) = \varepsilon^*(-x,-z)$, где $\varepsilon(x,z)$ — диэлектрическая проницаемость среды.

Целью настоящего обзора является рассмотрение оптических явлений, наблюдаемых в новом типе оптических гетерогенных сред, обладающих PT-симметрией.

Первоначально интерес к таким задачам возник в квантовой механике [28, 29] при рассмотрении гамильтонианов с комплексным потенциалом, удовлетворяющим условию $V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r})$, поэтому в разделе 2 рассматривается квантовая механика PT-симметричных и псевдоэрмитовых систем. Подробно обсуждаются квантово-механические свойства операторов пространственной инверсии $\hat{P}$ и обращения времени $\hat{T}$, анализируются необходимые и достаточные условия действительности собственных значений псевдоэрмитова, в частности PT-симметричного, гамильтониана, рассматривается фазовый переход, связанный с нарушением PT-симметрии собственных состояний такой квантовой системы. Собственные числа такого гамильтониана оказываются действительными. На первый взгляд представляется естественным расширить существующую квантовую механику, включив в рассмотрение системы с псевдоэрмитовым гамильтонианом. Однако оказалось, что для последовательного построения квантовой механики с псевдоэрмитовыми гамильтонианами необходимо переопределить скалярное произведение волновых функций, что не позволяет объединить эту новую квантовую механику с традиционной.

В разделе 3 обсуждаются PT-симметричные оптические системы и возможность их практической реализации. Показано, что точные условия PT-симметричности системы могут выполняться только для дискретного набора действительных частот.

В разделе 4 рассматриваются двумерные PT-симметричные системы. Проводится аналогия между уравнением Гельмгольца для двумерной оптической системы и уравнением Шрёдингера для одномерной квантово-механической системы. Анализируются различные явления, которые можно наблюдать в PT-симметричных системах. В частности, обсуждаются условия асимметричности преломления в оптических системах. Рассматриваются фазовые переходы в двумерных как PT-симметричной, так и в PT-несимметричной оптических системах, описание которых с помощью координатного преобразования может быть сведено к описанию PT-симметричных систем; проводится анализ их поведения.

В разделе 5 обсуждаются свойства одномерных PT-симметричных оптических систем. Анализируются условия возникновения фазового перехода и возможность создания на основе PT-симметричных систем устройства, которое одновременно функционирует и как лазер, и как идеальный поглотитель.

В разделе 6 даётся критическая оценка дискуссии о взаимности оптической PT-симметричной системы. Рассматриваются условия, которым должна удовлетворять оптическая система, чтобы функционировать как оптический диод.

В заключении (раздел 7) показано, что, хотя экспериментально реализовать фазовый переход с нарушением PT-симметричности при изменении частоты невозможно, а при изменении других параметров — сложно, можно наблюдать схожее с переходом явление в почти PT-инвариантных системах. Все остальные явления, предсказанные в литературе для PT-симметричных сред, не являются специфическими исключительно для PT-инвариантных систем — они могут наблюдаться также в обыкновенных пассивных системах.

2. PT-симметрия. Основные понятия и определения

В 1998 г. Бендер и Боттчер [28] показали, что квантовые системы с неэрмитовым гамильтонианом могут обладать набором собственных состояний с действительными собственными значениями (действительным спектром). Иными словами, оказалось, что эрмитовость гамильтониана не является необходимым условием действительности его собственных значений и на основании таких гамильтонианов можно построить новую квантовую механику [28, 30, 31].

Исходным пунктом такого построения является следующий факт. В случае действительных собственных значений неэрмитова гамильтониана модуль волновой функции для собственных состояний системы является сохраняющейся во времени величиной даже в областях с комплексным потенциалом. В самом деле, для любого собственного состояния гамильтониана

$$\hat{H}\psi_k = E_k\psi_k \,. \tag{1}$$

Подставив (1) во временно́е уравнение Шрёдингера, получим

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\psi_k}{\partial t} = E_k\psi_k \,. \tag{2}$$

Очевидно, что при любом действительном E_k модуль ψ_k будет сохраняющейся во времени величиной. Однако собственные состояния такого гамильтониана не ортогональны, и для создания на основе таких гамильтонианов квантовой механики, сравнимой по самосогласованности с обыкновенной, требуется переопределить скалярное произведение и норму [32] (см. приложение 1).

2.1. Операторы пространственной инверсии и обращения времени

Исторически первым псевдоэрмитовым гамильтонианом с действительным спектром являлся PT-симметричный [28]. PT-симметричность гамильтониана означает, что он коммутирует с операторами обращения времени $\hat{T}$ и пространственной инверсии $\hat{P}$:

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T}\,. \tag{3}$$

Действие оператора пространственной инверсии $\hat{P}$ сводится к замене знака всех координат ($x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$) [33]. В результате тройка ортов системы координат из правой переходит в левую, полярные векторы меняют направление на противоположное ($\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$), а аксиальные векторы не изменяются ($\mathbf{H} \to \mathbf{H}$). Здесь $\mathbf{r}$ — координата в пространстве, $\mathbf{p}$ — импульс, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля.

В квантовой механике среднее значение оператора физической величины ставится в соответствие классическому значению этой величины. Так как при пространственной инверсии классические импульс и координата меняют знак, средние $\langle\mathbf{p}\rangle$ и $\langle\mathbf{r}\rangle$ также должны менять знак. Следовательно, операторы импульса и координаты при пространственной инверсии преобразуются по правилу

$$\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = -\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{4а}$$

$$\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P} = -\hat{\mathbf{p}}\,, \tag{4б}$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ — операторы координаты и импульса. В соответствии с этим оператор момента количества движения $\hat{\mathbf{j}}$ остаётся неизменным при пространственной инверсии:

$$\hat{P}^+\hat{\mathbf{j}}\hat{P} = \hat{\mathbf{j}}\,. \tag{4в}$$

Кроме того, при инверсии системы координат должна сохраняться нормировка волновой функции, поэтому оператор инверсии унитарен, $\hat{P}^+\hat{P} = \hat{1}$.

По теореме Вигнера [34, 35] операторы симметрии могут быть либо линейными и унитарными, либо антилинейными и антиунитарными. В соответствии с определением линейный оператор не изменяет c-числовые множители в уравнениях

$$\hat{Q}_{\mathrm{L}}c\psi(\mathbf{r},t) = c\hat{Q}_{\mathrm{L}}\,\psi(\mathbf{r},t)\,, \tag{5а}$$

а антилинейный оператор приводит к их комплексному сопряжению,

$$\hat{Q}_{\mathrm{AL}}c\,\psi(\mathbf{r},t) = c^*\hat{Q}_{\mathrm{AL}}\,\psi(\mathbf{r},t)\,. \tag{5б}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли $\hat{P}$ линейным или антилинейным, необходимо определить действие этого оператора на мнимую единицу: $\hat{P}^+\mathrm{i}\hat{1}\hat{P}$. Воспользовавшись тем, что канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}] = \mathrm{i}\hat{1}\hbar \tag{6}$$

должны оставаться инвариантными при пространственной инверсии [36], получаем

$$\begin{aligned}\hat{P}^+\mathrm{i}\hat{1}\hat{P}\hbar &= \hat{P}^+[\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}]\hat{P} = \hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}\hat{P} - \hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = \\ &= \hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P}\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P} - \hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P}\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P} = \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}] = \mathrm{i}\hat{1}\hbar\,,\end{aligned} \tag{7}$$

где учтено, что $\hat{P}^+\hat{P} = \hat{1}$. Следовательно, $\hat{P}^+\mathrm{i}\hat{1}\hat{P} = \mathrm{i}\hat{1}$ и $\hat{P}$ — линейный унитарный оператор [1] [34].

Так как двукратное применение операции пространственной инверсии возвращает систему в исходное состояние, волновые функции $\psi(\mathbf{r},t)$ и $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t)$ могут различаться только фазовым множителем: $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t) = \exp(\mathrm{i}\phi)\psi(\mathbf{r},t)$. Для того чтобы чётность волновой функции была наблюдаемой физической величиной, необходимо, чтобы оператор пространственной инверсии был эрмитовым. Единственный фазовый множитель, при котором оператор пространственной инверсии эрмитов, $\hat{P}^+ = \hat{P}$, равен единице: $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)$. Предполагая, что волновая функция является скаляром и учитывая, что $\hat{P}$ — линейный унитарный оператор [33], получим

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r},t) = \psi(-\mathbf{r},t)\,. \tag{8}$$

Унитарное преобразование любого произведения операторов импульса и координаты сводится к такому же произведению преобразованных операторов:

$$\begin{aligned}&\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}\hat{P} = (\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P})(\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P})\,,\\ &\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}^2\hat{\mathbf{p}}\hat{P} = (\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P})(\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P})(\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P})\,, \quad \ldots\end{aligned} \tag{9}$$

Если гамильтониан системы можно представить в виде полинома от операторов импульса и координаты, то

$$\hat{P}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t)\hat{P} = \hat{H}(\hat{P}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P},\hat{P}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P},t) = \hat{H}(-\hat{\mathbf{p}},-\hat{\mathbf{r}},t)\,. \tag{10}$$

Система является $\hat{P}$-инвариантной, если её гамильтониан не изменяется при инверсии координат, т.е.

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t) = \hat{H}(-\hat{\mathbf{p}},-\hat{\mathbf{r}},t)\,. \tag{11}$$

Действие оператора обращения времени $\hat{T}$ означает замену $t \to -t$ во всех уравнениях и временны́х зависимостях физических величин [33]. В результате все физические величины, линейно зависящие от производной по времени, меняют знак при обращении времени ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\mathbf{j} \to -\mathbf{j}$), а физические величины, не зависящие от времени, не изменяются ($\mathbf{r} \to \mathbf{r}$).

Действуя так же, как и при выводе соотношений (4а), (4б), (4в), получаем правила преобразования операторов при обращении времени:

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = \hat{\mathbf{r}}\,, \tag{12а}$$

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{p}}\,, \tag{12б}$$

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{j}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{j}}\,. \tag{12в}$$

Обращение времени сохраняет нормировку волновой функции. Для того чтобы выяснить, является ли оператор обращения времени линейным или антилинейным, необходимо определить действие оператора обращения времени на мнимую единицу: $\hat{T}^+\mathrm{i}\hat{1}\hat{T}$. По аналогии с (6), (7) получаем

$$\begin{aligned}\hat{T}^+\mathrm{i}\hat{1}\hat{T}\hbar &= \hat{T}^+[\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}]\hat{T} = \hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}\hat{T} - \hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = \\ &= \hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T}\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T} - \hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} = -[\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}] = -\mathrm{i}\hat{1}\hbar\,.\end{aligned} \tag{13}$$

[1] Оператор $\hat{U}$ называют унитарным, если $\langle\hat{U}\psi|\hat{U}\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$, и антиунитарным, если $\langle\hat{U}\psi|\hat{U}\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$. В обоих случаях оператор $\hat{U}$ сохраняет норму волновой функции, так как $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{1}$ [37].

Это означает, что $\hat{T}$ — антилинейный и антиунитарный оператор [34] (см. сноску 1).

Так как двукратное применение операции обращения времени возвращает систему в исходное состояние, волновые функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{T}^2\psi(\mathbf{r}, t)$ могут различаться только фазовым множителем: $\hat{T}^2\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(\mathrm{i}\phi)\psi(\mathbf{r}, t)$. Для определения фазового множителя воздействуем оператором $\hat{T}^3$ на волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{T}^3\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{T}\big(\hat{T}^2\psi(\mathbf{r}, t)\big) = \hat{T}\big(\exp(\mathrm{i}\phi)\,\psi(\mathbf{r}, t)\big) = \\ = \exp(-\mathrm{i}\phi)\hat{T}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{T}^2\big(\hat{T}\psi(\mathbf{r}, t)\big) . \qquad (14)$$

Таким образом, функция $\hat{T}\psi(\mathbf{r}, t)$ под действием оператора $\hat{T}^2$ приобретает фазовый множитель $\exp(-\mathrm{i}\phi)$, а волновая функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ — фазовый множитель $\exp(\mathrm{i}\phi)$. Поскольку под действием оператора $\hat{T}^2$ функция $\psi(\mathbf{r}, t) + \hat{T}\psi(\mathbf{r}, t)$ может измениться только на общий фазовый множитель, то $\exp(-\mathrm{i}\phi) = \exp(\mathrm{i}\phi)$ и $\hat{T}^2\psi(\mathbf{r}, t) = \pm\psi(\mathbf{r}, t)$. Предполагая, что волновая функция является скаляром и учитывая, что $\hat{T}$ — антилинейный и антиунитарный оператор, получаем правило обращения времени для волновой функции [33]

$$\hat{T}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t) . \qquad (15)$$

В частности, для плоской волны $\psi(x, p, t) = A\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kr)$ действие оператора обращения времени приводит к изменению направления распространения на противоположное:

$$\hat{T}\big[A\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kr)\big] = A^*\exp(-\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kr) . \qquad (16)$$

Поскольку оператор $\hat{T}$ антиунитарен, для него также выполняется соотношение (9), т.е.

$$\begin{aligned} &\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}\hat{T} = (\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}) , \\ &\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}^2\hat{\mathbf{p}}\hat{T} = (\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}) . \end{aligned} \qquad (17)$$

Действуя так же, как и при выводе (10), находим

$$\hat{T}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t)\hat{T} = \hat{H}^*(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}, \hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T}, t) = \hat{H}^*(-\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) . \qquad (18)$$

Система является $\hat{T}$-инвариантной, если её гамильтониан не изменяется при обращении времени, т.е.

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) = \hat{H}^*(-\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) . \qquad (19)$$

Объединяя условия (10) и (19), получаем преобразование гамильтониана при одновременном действии операторов $\hat{P}$ и $\hat{T}$:

$$\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t)\hat{P}\hat{T} = \hat{H}(\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P}\hat{T}, \hat{P}^+\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P}\hat{T}, t) = \\ = \hat{H}^*(\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{r}}, -t) . \qquad (20)$$

Следовательно, гамильтониан является PT-симметричным, если

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) = \hat{H}^*(\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{r}}, -t) . \qquad (21)$$

Условие (21) можно представить в виде, аналогичном условию (3), $\hat{P}\hat{T}\hat{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \hat{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)\hat{P}\hat{T}$. Для гамильтонианов вида

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) , \qquad (22)$$

где m — масса, V — потенциальная энергия частицы, условие PT-симметричности (21) сводится к требованию, чтобы действительная часть потенциала была чётной функцией координаты, а мнимая часть — нечётной:

$$V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r}) . \qquad (23)$$

Для неэрмитова PT-симметричного гамильтониана $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t, \mu)$, зависящего от некоторого параметра μ, собственные значения систем могут быть как действительными, так и комплексными. Если при вариации μ спектр собственных значений гамильтониана из действительного становиться комплексным [2], то говорят о фазовом переходе [28, 31].

2.2 Необходимое и достаточное условие действительности собственных значений PT-симметричного гамильтониана

Для того чтобы собственные значения PT-симметричной системы $\{E_k\}$ были действительными, необходимо и достаточно, чтобы её собственные решения $\{\psi_k\}$ являлись PT-симметричными [28, 31]. Действительно, пусть ψ_k — PT-симметричное собственное решение системы с гамильтонианом $\hat{H}$,

$$\psi_k = \hat{P}\hat{T}\psi_k , \qquad (24)$$

с собственным значением E_k,

$$\hat{H}\psi_k = E_k\psi_k . \qquad (25)$$

Воздействуем последовательно на обе части уравнения (25) оператором $\hat{P}\hat{T}$:

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{P}\hat{T}E_k\psi_k . \qquad (26)$$

Если гамильтониан системы $\hat{H}$ удовлетворяет условию PT-симметрии (3), (21), то при учёте PT-симметричности ψ_k (24) левая часть (26) принимает вид

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{H}\psi_k . \qquad (27)$$

С учётом того что оператор инверсии $\hat{P}$ линеен, а оператор обращения времени $\hat{T}$ антилинеен, для PT-симметричного решения ψ_k правая часть (26) преобразуется следующим образом:

$$\hat{P}\hat{T}E_k\psi_k = E_k^*\psi_k . \qquad (28)$$

Объединяя (27) и (28), получаем

$$\hat{H}\psi_k = E_k^*\psi_k . \qquad (29)$$

Уравнения (25) и (29) совместны только при $E_k = E_k^*$. Таким образом, PT-симметричность решения ψ_k явля-

[2] В качестве μ могут фигурировать, например, заряд частицы, константа связи и т.п.

ется достаточным условием действительности собственного значения E_k PT-симметричного гамильтониана $\hat{H}$.

Докажем теперь, что PT-симметричность решения ψ_k является и необходимым условием действительности собственных значений PT-симметричного гамильтониана с невырожденным спектром. Предположим, что собственные значения системы действительны, $E_k \in \mathbb{R}$, а собственные решения ψ_k не являются PT-симметричными:

$$\hat{P}\hat{T}\psi_k = \psi' \,, \tag{30}$$

где ψ' — неизвестная волновая функция. Воздействуем оператором $\hat{P}\hat{T}$ на обе части стационарного уравнения Шрёдингера для ψ_k (25):

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{P}\hat{T}E_k\psi_k \,. \tag{31}$$

Учитывая условие PT-симметричности гамильтониана (3) и действительность его собственных значений E_k, запишем

$$\hat{H}(\hat{P}\hat{T}\psi_k) = E_k(\hat{P}\hat{T}\psi_k) \,, \tag{32}$$

отсюда, используя уравнение (30), получим

$$\hat{H}\psi' = E_k\psi' \,. \tag{33}$$

Таким образом, функция ψ' является собственной функцией гамильтониана $\hat{H}$ с собственным значением E_k. Если спектр гамильтониана $\hat{H}$ невырожден, то $\psi' = \psi_k$ и из (30) следует, что ψ_k является собственной функцией оператора $\hat{P}\hat{T}$:

$$\hat{P}\hat{T}\psi_k = \psi' = \psi_k \,. \tag{34}$$

Случай PT-симметричного гамильтониана с вырожденным спектром рассмотрен в обзоре [31], где показано, что PT-симметричность собственных решений гамильтониана также является необходимым и достаточным условием действительности собственных значений. Другими словами, до тех пор пока собственные значения гамильтониана E_k действительны, его собственные решения PT-симметричны. Если собственные значения комплексны, то собственные функции гамильтониана не являются собственными функциями оператора $\hat{P}\hat{T}$.

Заметим, что свойством действительности спектра обладает более широкий класс *псевдоэрмитовых* систем (см. приложение 2). Однако в оптике имеют дело в основном с PT-симметричными системами, на свойствах которых мы и остановимся ниже.

2.3. Фазовый переход в PT-симметричных системах

Как показано в разделе 2.2, при действительных собственных значениях система находится в PT-симметричной фазе, а при комплексных — в PT-несимметричной фазе [31]. Если при изменении какого-либо параметра гамильтониана μ происходит переход от действительных собственных значений к комплексным, то можно говорить о фазовом переходе второго рода [38], связанном со спонтанным нарушением PT-симметрии собственных решений.

Для количественной характеристики изменения симметрии при прохождении через точку фазового перехода обычно вводят параметр порядка η, который равен нулю в симметричной фазе и отличен от нуля в несимметричной фазе [38]. В случае PT-симметричных систем в качестве такого параметра можно выбрать величину

$$\eta = \sum_k |\psi_k^*\psi_k - \hat{P}\hat{T}\psi_k^*\psi_k| \,, \tag{35}$$

где суммирование проводится по всем собственным состояниям системы. Введённый таким образом параметр порядка η равняется нулю в симметричной фазе и возрастает при увеличении несимметричности собственных решений. Другой возможной величиной, отвечающей формальным требованиям, налагаемым на параметр порядка, является сумма по модулю всех мнимых частей собственных значений гамильтониана: $\eta = \sum_k |\mathrm{Im}\, E_k|$. В теории среднего поля Гинзбурга – Ландау параметр порядка используется для феноменологического описания фазового перехода [38]. Однако в случае PT-симметричных систем обычно проще найти собственные решения системы ψ_k и по ним определить точку фазового перехода, чем использовать формализм параметра порядка.

В обыкновенных фазовых переходах второго рода оператор симметрии линеен. Фазовый переход и спонтанное нарушение симметрии решений в этом случае возможны лишь при появлении вырождения [39]. В одномерном случае все энергетические уровни дискретного спектра невырождены и фазовые переходы в системе с линейным преобразованием симметрии и дискретным спектром невозможны.

PT-симметричные системы электродинамики отличаются от изучаемых в статистической физике систем, инвариантных относительно линейных преобразований симметрии, тем, что вследствие антилинейности оператора $\hat{P}\hat{T}$ фазовый переход может наблюдаться в одномерных PT-симметричных системах с дискретным спектром. Действительно, если линейный оператор симметрии коммутирует с гамильтонианом, то их невырожденные собственные решения всегда совпадают. В случае, когда антилинейный оператор симметрии коммутирует с гамильтонианом, их собственные решения совпадают только при действительных собственных значениях (см. раздел 2.2).

3. PT-симметричные оптические системы

3.1. Понятие PT-симметрии для оптических систем

В разделе 2 мы рассмотрели основные свойства PT-симметричных квантово-механических систем и обсудили возможность наблюдения фазового перехода второго рода в таких системах. В работах [25, 26] квантово-механическая концепция PT-симметричности была распространена на оптику.

В оптике понятие PT-симметрии можно ввести следующим образом. В двумерном и одномерном случаях уравнения Максвелла сводятся к скалярному уравнению Гельмгольца [40]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x, z)\right) E(x, z) = 0 \,, \tag{36а}$$

которое формально совпадает со стационарным уравнением Шрёдингера [41]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_k(x, z) - \frac{2m\big(V(x, z) - E_k\big)}{\hbar^2}\,\psi_k(x, z) = 0 \,, \tag{36б}$$

если сделать формальную замену $V(x,z) - E_k \to \to (\omega/c)^2 \varepsilon(x,z)$, $\psi_k(x,z) \to E(x,z)$ и $-\hbar^2/(2m) \to 1$. Так как в квантовой механике условие PT-симметричности для системы, описываемой уравнением (36б), сводится к требованию, налагаемому на потенциальную энергию, $V(x,z) = V^*(-x,-z)$, то по аналогии между потенциальной энергией в квантовой механике и диэлектрической проницаемостью в оптике условие PT-симметричности оптической системы определяют как условие, налагаемое на диэлектрическую проницаемость среды:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, x, z) = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, -x, -z)\,, \tag{37а}$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x, z) = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, -x, -z)\,. \tag{37б}$$

Отметим, что в стационарное уравнение Шрёдингера не входит зависимость от времени, поэтому операция обращения времени $\hat{T}$ эквивалентна операции комплексного сопряжения $\hat{K}$. В дальнейшем под T-симметричностью системы в оптике мы будем понимать её K-симметричность, продолжая называть системы, удовлетворяющие условию (37), PT-симметричными.

3.2. Ограничения, накладываемые принципом причинности. Соотношения Крамерса–Кронига и возможность существования PT-симметричных оптических систем в конечном интервале частот

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$, как и любая функция отклика, должна быть причинной (аналитической, не имеющей полюсов в верхней полуплоскости комплексной плоскости частот) [42]. Из этого требования следует, что действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости связаны между собой соотношениями Крамерса–Кронига [42]:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', \mathbf{r})}{\omega' - \omega}\ d\omega'\,, \tag{38а}$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', \mathbf{r}) - \varepsilon_0}{\omega' - \omega}\ d\omega'\,, \tag{38б}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, интегралы берутся в смысле главного значения (valeur principale — v.p.). Условия (37) показывают, что любая нетривиальная PT-симметричная оптическая система состоит из усиливающих сред с такими $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$, для которых $\operatorname{Im} \varepsilon_{\text{gain}} < 0$, и из поглощающих сред с такими $\varepsilon_{\text{pass}}(\omega)$, для которых $\operatorname{Im} \varepsilon_{\text{pass}} > 0$. Ненулевая мнимая часть диэлектрической проницаемости означает, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$ обладает частотной дисперсией. В силу этого условие PT-симметричности системы (37) может выполняться только при дискретном наборе частот [43]. В самом деле, если для мнимой части диэлектрической проницаемости $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ условие PT-симметричности системы (37б) выполняется при любых действительных частотах, то

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, -\mathbf{r}) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', -\mathbf{r})}{\omega' - \omega}\ d\omega' = \\ = \varepsilon_0 - \frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', \mathbf{r})}{\omega' - \omega}\ d\omega'\,. \tag{39}$$

Выражения (38а) и (39) различаются только знаком перед интегралом. Следовательно, условие PT-симметричности системы для действительной части диэлектрической проницаемости при всех действительных частотах может быть справедливым только в тривиальном случае вакуума, когда

$$\frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', \mathbf{r})}{\omega' - \omega}\ d\omega' \equiv 0\,, \tag{40}$$

т.е. при отсутствии потерь во всём частотном диапазоне: $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) \equiv 0$. Таким образом, условие PT-симметричности не может выполняться во всём диапазоне частот.

Приведённое выше формальное доказательство становится очевидным, если учесть, что условие (38) означает, что диэлектрическая проницаемость усиливающей среды $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$ для действительных частот должна быть равна комплексно сопряжённой диэлектрической проницаемости пассивной компоненты $\varepsilon_{\text{loss}}(\omega)$:

$$\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)\,.$$

Возникает вопрос о поведении $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$, определённой таким образом, в верхней полуплоскости комплексных частот. Просто положить $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)$ нельзя, так как $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)$ не является аналитической функцией. Действительно, при переходе от $\varepsilon_{\text{loss}}(\omega)$ к $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)$ мнимая часть $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)$ меняет знак и условия Коши–Римана перестают выполняться. Выбор $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega^*)$ также не подходит: хотя $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega^*)$ и является аналитической функцией, она имеет особенности в верхней полуплоскости и не является причинной функцией. Согласно теореме непрерывности [44], если две аналитические функции совпадают на множестве, имеющем предельную точку, то они равны между собой. Поэтому не существует аналитического продолжения с действительной оси на верхнюю полуплоскость, отличного от $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega^*)$, а условие PT-симметричности системы также не может выполняться не только на всей действительной оси частот, но и в любом конечном интервале частот. Действительно, в силу теоремы непрерывности [44] аналитическое продолжение $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$ с конечного интервала частот на действительной оси на всю комплексную плоскость частот совпадает с аналитическим продолжением $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$ со всей действительной оси на комплексную плоскость, т.е. с $\varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega^*)$. Последняя, как было сказано, не удовлетворяет принципу причинности. Следовательно, условие PT-симметричности системы может выполняться только для дискретного набора частот.

Проиллюстрируем последнее утверждение на примере среды с диэлектрической проницаемостью, имеющей лоренцевскую дисперсию,

$$\varepsilon_{\text{loss}}(\omega) = \varepsilon_{\text{mat}} - \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega}\,, \tag{41}$$

где ε_{mat} — диэлектрическая проницаемость матрицы, в которую помещены усиливающие (поглощающие) компоненты, γ — ширина линии усиления (поглощения), α — коэффициент усиления (поглощения), ω_0 — частота линии.

В случае поглощающей среды, $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) > 0$, параметры α и γ должны быть положительными. Усиление соответствует отрицательной мнимой части диэлектрической проницаемости ($\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) < 0$), и для выполнения соотношений Крамерса–Кронига необходимо взять $\alpha < 0$, $\gamma > 0$, что обеспечивает причинность диэлектрической проницаемости [3] (41) [45, 46].

[3] Выбор $\alpha > 0$, $\gamma < 0$ означает, что $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon^*_{\text{loss}}(\omega)$.

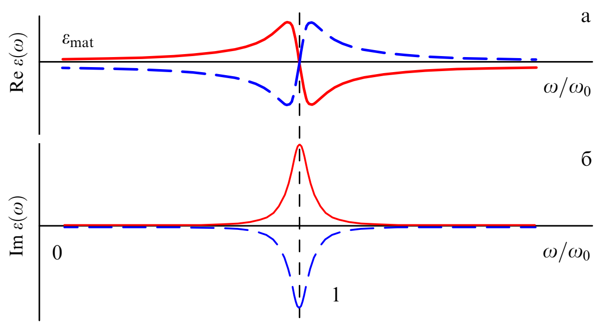

Рис. 1. Действительная (а) и мнимая (б) части диэлектрической проницаемости для поглощающей (сплошные кривые) и усиливающей (штриховые кривые) сред в случае, когда мнимые части различаются только знаком, $\operatorname{Im}\varepsilon_{\text{loss}} = -\operatorname{Im}\varepsilon_{\text{gain}}$.

Однако выбор диэлектрической проницаемости (41) с $\alpha < 0$, $\gamma > 0$ несовместим с требованием PT-симметричности системы в конечном интервале частот [43]. В этом случае

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{\text{loss}}(\omega) = \varepsilon_{\text{mat}} - \frac{|\alpha|(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)+4\gamma^2\omega^2}\,,\qquad \operatorname{Im}\varepsilon_{\text{loss}}(\omega) = -\frac{2\mathrm{i}|\alpha|}{(\omega^2-\omega_0^2)+4\gamma^2\omega^2}\,, \tag{42а}$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon_{\text{mat}} + \frac{|\alpha|(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)+4\gamma^2\omega^2}\,,\qquad \operatorname{Im}\varepsilon_{\text{loss}}(\omega) = \frac{2\mathrm{i}|\alpha|}{(\omega^2-\omega_0^2)+4\gamma^2\omega^2}\,. \tag{42б}$$

Иными словами, выполняется (37б), но не (37а) (рис. 1).

Подведём итоги этого раздела. Условие PT-симметричности оптической системы может выполняться только для дискретного набора частот, и оно не может выполняться в любом конечном диапазоне частот[4], поэтому говорить о фазовом переходе при изменении частоты бессмысленно.

В дальнейшем мы рассмотрим оптические явления, приписываемые в литературе PT-симметричным системам, и исследуем, как отклонение от условий (37) влияет на предсказания, сделанные для структур с точной PT-симметрией.

4. Двумерные PT-симметричные оптические системы

4.1. Аналогия между двумерным уравнением Гельмгольца и одномерным уравнением Шрёдингера

Ниже будем рассматривать оптические системы с диэлектрической проницаемостью, зависящей только от координаты x. Предполагается, что по такой системе распространяется линейно поляризованная вдоль оси y электромагнитная волна с амплитудой $E(x)$. В этом случае задача о распространении волны сводится к скалярной задаче [40], и для нахождения распределения поля необходимо решить уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x) E = 0\,. \tag{43}$$

Так как диэлектрическая проницаемость не зависит от координаты z, решение уравнения (43) можно искать в виде произведения двух функций [40]:

$$E(x,z) = g(z) f(x)\,, \tag{44}$$

которые находятся из уравнений [40]

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x) f(x) = k_z^2 f(x)\,, \tag{45а}$$

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + k_z^2 g(z) = 0\,. \tag{45б}$$

Из уравнения (45б) получаем, что

$$g(z) = A_1 \exp(\mathrm{i}k_z z) + A_2 \exp(-\mathrm{i}k_z z)\,, \tag{46}$$

где коэффициенты A_1, A_2 определяются из граничных условий, а константа разделения k_z^2 является собственным значением уравнения (45а).

Уравнение (45а) совпадает с одномерным стационарным уравнением Шрёдингера с гамильтонианом (21), в котором $p^2/(2m) \to \partial^2/\partial x^2$, $V(x) \to (\omega/c)^2\varepsilon(x)$, $E \to k_z^2$ и $\psi(x) \to f(x)$. Это позволяет распространить на оптику результаты, полученные в рамках PT-симметричной квантовой механики. Оператор $\hat{P}$ в этом случае сводится к инверсии по оси x, а оператор $\hat{T}$ — к комплексному сопряжению.

4.2. Фазовый переход в двумерных PT-симметричных оптических системах

Рассмотрим PT-симметричный одномерный фотонный кристалл, элементарная ячейка которого состоит из двух слоёв с одинаковой толщиной d. Ось x направлена перпендикулярно слоям (рис. 2), действительная часть диэлектрической проницаемости одинакова во всех слоях, а мнимые части диэлектрической проницаемости в соседних слоях различаются знаком:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathrm{R}} + (-1)^n\,\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}\,,\quad \varepsilon_{\mathrm{R}},\varepsilon_{\mathrm{I}} > 0\,,\quad \varepsilon_{\mathrm{R}},\varepsilon_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}\,, \tag{47}$$

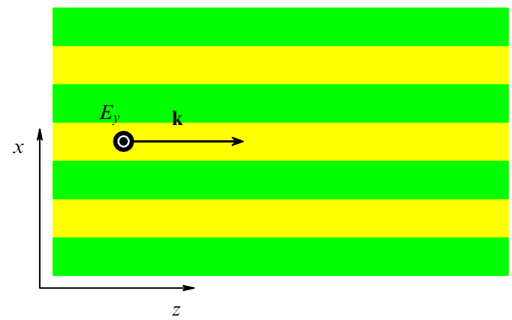

Рис. 2. Двумерные PT-симметричные оптические системы, $\varepsilon(x,z) = \varepsilon^*(-x,z)$. Различным цветом отмечены разные значения мнимой части диэлектрической проницаемости, стрелкой обозначено направление распространения электромагнитных волн.

[4] Условие псевдоэрмитовости гамильтониана, которое в оптике является обобщением условия PT-симметрии (см. приложение 2), также может выполняться только для дискретного набора частот и не может выполняться в любом конечном диапазоне частот (см. приложение 3).

где $n = 1, 2$ — номер слоя в ячейке. Пусть по системе в направлении z распространяется линейно поляризованная вдоль оси y электромагнитная волна (см. рис. 2) $E_y(x,z) = f(x)\exp(\mathrm{i}k_{\mathrm{eff}}z)$, где k_{eff} — эффективный волновой вектор в направлении распространения волны. Дисперсионное уравнение для k^2_{eff} в такой системе сводится к двум уравнениям [47, 48]:

$$\tan\frac{\beta_{\mathrm{l}}d}{2}\cot\frac{\beta_{\mathrm{g}}d}{2} = -\frac{\beta_{\mathrm{l}}}{\beta_{\mathrm{g}}}\,, \qquad (48а)$$

$$\tan\frac{\beta_{\mathrm{l}}d}{2}\cot\frac{\beta_{\mathrm{g}}d}{2} = -\frac{\beta_{\mathrm{g}}}{\beta_{\mathrm{l}}}\,, \qquad (48б)$$

где

$$\beta_{\mathrm{l}} = \sqrt{k_0^2(\varepsilon_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}) - k^2_{\mathrm{eff}}}\,,$$

$$\beta_{\mathrm{g}} = \sqrt{k_0^2(\varepsilon_{\mathrm{R}} - \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}) - k^2_{\mathrm{eff}}}\,, \qquad k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2.$$

Уравнение (48а) соответствует быстрозатухающей волне [47, 48] даже в среде без потерь и усиления, поэтому этот случай мы не будем рассматривать. Уравнению (48б) соответствует распределение поля в ячейке $f(x)$, имеющее вид [47, 48]

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\beta_{\mathrm{l}}x) + \dfrac{\cos(\beta_{\mathrm{g}}d) - \cos(\beta_{\mathrm{l}}d)}{(\beta_{\mathrm{l}}/\beta_{\mathrm{g}})\sin(\beta_{\mathrm{g}}d) + \sin(\beta_{\mathrm{l}}d)}\sin(\beta_{\mathrm{l}}x), & x \in [0, d], \\ \cos(\beta_{\mathrm{g}}x) + \dfrac{\cos(\beta_{\mathrm{g}}d) - \cos(\beta_{\mathrm{l}}d)}{\sin(\beta_{\mathrm{g}}d) + (\beta_{\mathrm{g}}/\beta_{\mathrm{l}})\sin(\beta_{\mathrm{l}}d)}\sin(\beta_{\mathrm{g}}x), & x \in [-d, 0), \end{cases} \qquad (49)$$

где $x = 0$ определяет плоскость, разделяющую слои внутри ячейки.

Из уравнения (48б) следует, что при значениях мнимой части ε_{I} диэлектрической проницаемости, меньших некоторого критического $\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{cr}}(k_0 d)$, для любой частоты существует два собственных решения с различными действительными волновыми векторами k_{eff}. При значениях мнимой части диэлектрической проницаемости, бóльших критического, волновые векторы k_{eff} становятся комплексными (рис. 3), причём их действительные части совпадают между собой, а мнимые различаются знаком. При $\varepsilon_{\mathrm{I}} < \varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{cr}}$ распределение поля $f(x)$ PT-симметрично (рис. 4а), при $\varepsilon_{\mathrm{I}} > \varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{cr}}$ распределение поля в системе перестаёт быть PT-симметричным (рис. 4б).

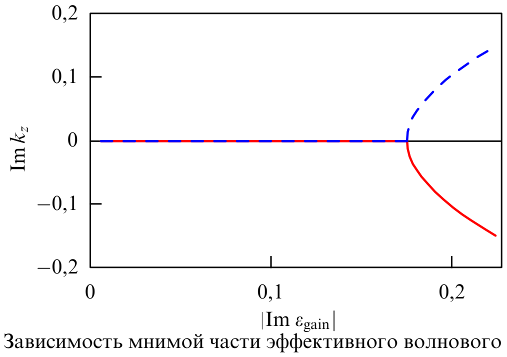

Рис. 3. Зависимость мнимой части эффективного волнового вектора от величины мнимой части диэлектрической проницаемости при $k_0 d = 10\pi$.

Таким образом, переход от действительного волнового вектора к комплексному сопровождается изменением симметрии собственных решений $f(x)$: PT-симметричные решения сменяются PT-несимметричными (см. рис. 4). Следовательно, в системе наблюдается фазовый переход, связанный со спонтанным нарушением PT-симметрии решения $f(x)$ при увеличении модуля мнимой части диэлектрической проницаемости ε_{I}. Ниже точки фазового перехода собственные решения PT-симметричны. Амплитуда поля в слое с потерями равна амплитуде поля в слое с усилением (рис. 4а), в результате диссипация энергии в слое с потерями компенсируется притоком энергии в слое с усилением, $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{\mathrm{gain}}|E_{\mathrm{gain}}|^2 + \mathrm{Im}\,\varepsilon_{\mathrm{loss}}|E_{\mathrm{loss}}|^2 = 0$. Иными словами, энергия поля сохраняется, что соответствует действительному значению волнового вектора. Выше точки фазового перехода собственные решения PT-несимметричны, амплитуды поля в слое с потерями и в слое с усилением не равны друг другу (рис. 4б) и $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{\mathrm{gain}}|E_{\mathrm{gain}}|^2 + \mathrm{Im}\,\varepsilon_{\mathrm{loss}}|E_{\mathrm{loss}}|^2 \neq 0$. Затухание поля в слое с потерями больше не компенсируется возрастанием поля в усиливающем слое. В результате возможно распространение электромагнитного поля по системе с затуханием или с усилением.

4.3. "Прозрачность, индуцированная потерями"

Для изготовления PT-симметричной системы необходимо добиться точного совпадения модулей мнимых частей диэлектрической проницаемости в усиливающей и поглощающей средах. В реальных оптических системах этого достичь сложно, тем более сложно управлять

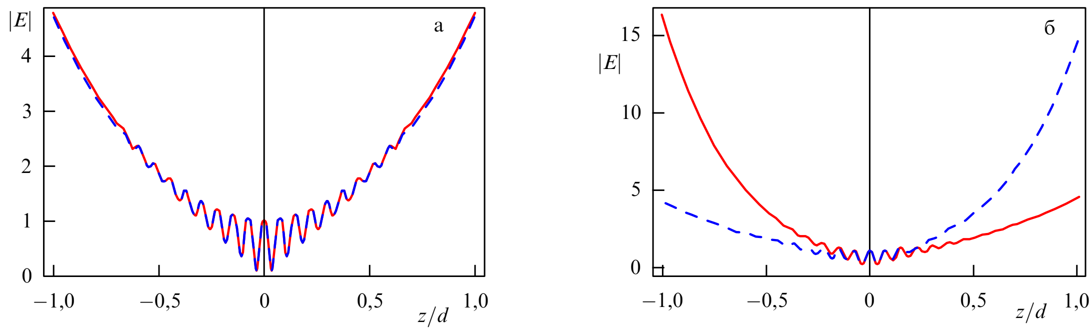

Рис. 4. Распределение поля в системе двух слоёв толщиной $k_0 d = 10\pi$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathrm{R}} + (-1)^n\,\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}$, $\varepsilon_{\mathrm{R}} > 0$, $\varepsilon_{\mathrm{R}}, \varepsilon_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}$, где n — номер слоя, $n = 1, 2$: (а) ниже точки фазового перехода, $\varepsilon_{\mathrm{I}} = 0{,}15 < \varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{cr}} \approx 0{,}18$; (б) выше точки фазового перехода, $\varepsilon_{\mathrm{I}} = 0{,}35 > \varepsilon_{\mathrm{I}}^{\mathrm{cr}} \approx 0{,}18$. Сплошная и штриховая кривые соответствуют амплитудам двух разных собственных мод системы.

этими величинами, сохраняя выполнение соотношения (37б).

Однако оказывается [49], что описанный в разделе 4.2 фазовый переход можно наблюдать в системах, которые не являются PT-симметричными. Это возможно, если описание таких систем можно формально свести к описанию некоторой вспомогательной PT-симметричной системы.

Рассмотрим бесконечную оптическую систему, для которой действительная часть диэлектрической проницаемости $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega, x)$ является чётной функцией координаты, а мнимая часть $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega, x)$ равна сумме нечётной функции координаты $\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x)$ и константы C:

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega, x) = \operatorname{Re}\varepsilon(\omega, -x)\,, \tag{50а}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon(\omega, x) = \varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x, \mu) + C\,, \tag{50б}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x) = -\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, -x)\,, \tag{50в}$$

при этом зависимость от z отсутствует. Ниже мы предполагаем линейную зависимость $\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x, \mu)$ от действительного множителя μ, параметризующего систему (50), $\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x, \mu) = \mu\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega, x)$. Такая система не является PT-симметричной из-за нарушения условия (37б). Добавление константы означает, что система может быть чисто диссипативной, что гораздо проще реализовать в эксперименте.

Опишем преобразование, сводящее систему (50) к PT-симметричной. Действуя так же, как и при получении (43)–(46), будем искать распределение поля в системе в виде

$$E(x, z) = \exp(\mathrm{i}kz)\, f(x)\,. \tag{51}$$

Введём новую переменную

$$e(x, z) = E(x, z)\exp(\alpha z)\,. \tag{52}$$

Тогда уравнение Гельмгольца (43) для $e(x, z)$ может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 e(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e(x,z)}{\partial z^2} + 2\alpha\,\frac{\partial e(x,z)}{\partial z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,x) + \frac{\alpha^2}{(\omega/c)^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega,x,\mu) + \mathrm{i}C\right)e(x,z) = 0\,. \tag{53}$$

Так как диэлектрическая проницаемость не зависит от координаты z, решение уравнения (53) можно искать в виде произведения двух функций [40] (см. раздел 4.1):

$$e(x, z) = \exp(\mathrm{i}k_{e\mathrm{R}}z + k_{e\mathrm{I}}z)\, f(x)\,. \tag{54}$$

В этом случае из уравнения (53) исключается член с первой производной, так как $\partial e(x,z)/\partial z = (\mathrm{i}k_{e\mathrm{R}} + k_{e\mathrm{I}})\, e(x,z)$, и уравнение (53) принимает вид

$$\frac{\partial^2 e(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e(x,z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,x) + \frac{\alpha^2}{(\omega/c)^2} + \frac{2\alpha k_{e\mathrm{I}}}{(\omega/c)^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega,x,\mu) + \mathrm{i}C + \mathrm{i}\,\frac{2\alpha k_{e\mathrm{R}}}{(\omega/c)^2}\right)e(x,z) = 0\,. \tag{55}$$

Уравнение (55) является стандартным волновым уравнением с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}(x) = \left(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,x) + \frac{\alpha^2}{(\omega/c)^2} + \frac{2\alpha k_{e\mathrm{I}}}{(\omega/c)^2}\right) + \mathrm{i}\left(\varepsilon_{\mathrm{I}}(\omega,x,\mu) + C + \frac{2\alpha k_{e\mathrm{R}}}{(\omega/c)^2}\right).$$

Выберем такой параметр α в преобразовании (52), чтобы не зависящая от координаты мнимая часть диэлектрической проницаемости обратилась в нуль: $C + (2\alpha c^2 k_{e\mathrm{R}})/\omega^2 = 0$. В результате получим систему с эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}(x) = \left(\operatorname{Re}\varepsilon(x) + \frac{C^2}{4}\,\frac{(\omega/c)^2}{k_{e\mathrm{R}}^2} - C\,\frac{k_{e\mathrm{I}}}{k_{e\mathrm{R}}}\right) + \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{I}}(x)\,, \tag{56}$$

удовлетворяющей условию PT-симметрии (37). Слагаемые в (56), зависящие от волнового вектора $k_e = k_{e\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{e\mathrm{I}}$, являются PT-симметричными, так как волновые векторы не изменяются при одновременном действии оператора пространственной инверсии $\hat{P}$ и оператора обращения времени $\hat{T}$. Следовательно, эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{\mathrm{eff}}(x)$ является PT-симметричной и собственные решения уравнения (55) могут менять симметрию при изменении параметра μ.

Поскольку электрическое поле $E(x,z)$ и функция $e(x,z)$ взаимно однозначно связаны друг с другом (см. (52)), изменение симметрии вспомогательного поля $e(x,z)$ будет приводить к изменению распределения истинного поля[5] $E(x,z)$. Таким образом, мы указали на возможность наблюдения "скрытого" фазового перехода с изменением симметрии решений в системах, для которых условие PT-симметричности нарушено.

В работе [49] был экспериментально обнаружен и теоретически исследован фазовый переход в системе, подчиняющейся условиям (50). В этой работе была рассмотрена система двух связанных оптических волноводов, заполненных материалами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Причём в первом материале нет ни потерь, ни усиления ($\operatorname{Im}\varepsilon_1 = 0$), а во втором материале есть диссипация ($\operatorname{Im}\varepsilon_2 > 0$). Анализ такой системы был проведён в [49] в приближении взаимодействующих мод [25, 49–51], в этом случае оптическое поле в волноводах искалось в виде $E_n = U_n(z)F_n(x,y)$. Здесь $F_n(x,y)$ описывает распределение поля в сечении n-го волновода, а $U_n(z)$ является "амплитудой". В приближении взаимодействующих мод $U_n(z)$ подчиняются следующим уравнениям [49]:

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}z} = \beta U_1 + \kappa U_2\,, \tag{57а}$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}z} = (\beta + \delta\beta)U_2 + \kappa^* U_1\,, \tag{57б}$$

где β — константа распространения в системе волноводов без потерь и без усиления ($\operatorname{Im}\varepsilon_1 = \operatorname{Im}\varepsilon_2 = 0$), κ — коэффициент взаимодействия между волноводами.

[5] Изменение распределения электрического поля $E(x,z)$ при вариации мнимой части диэлектрической проницаемости соответствует фазовому переходу от P-симметричных собственных решений к P-несимметричным. Напомним, что здесь мы считаем, что оператор $\hat{P}$ сводится к инверсии лишь по оси x.

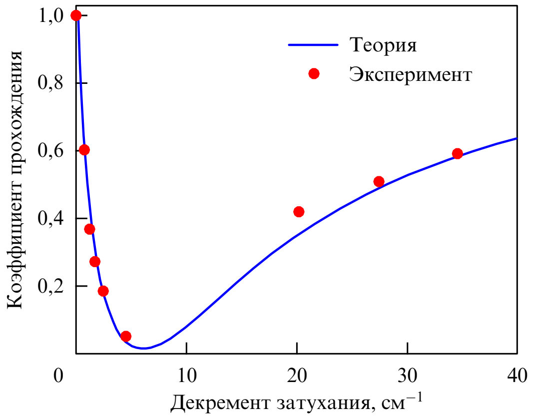

Рис. 5. Коэффициент прохождения через систему двух связанных волноводов в зависимости от декремента затухания во втором волноводе. (Из работы [49].)

Изменение константы распространения $\delta\beta$ в системе волноводов, которое возникает из-за добавления потерь, пропорционально мнимой части диэлектрической проницаемости. В такой системе существует две собственные волноводные моды с константами распространения $\beta_{\pm} = \beta + \delta\beta/2 \pm [\kappa^*\kappa - (\delta\beta/2)^2]^{1/2}$. При значениях $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2$, меньших некоторого порогового значения, собственные моды волноводов пространственно симметричны, а с увеличением потерь ($\mathrm{Im}\,\varepsilon_2$) коэффициент прохождения через систему убывает (рис. 5). Когда $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2$ при увеличении достигает порогового значения, собственные моды волноводов становятся пространственно несимметричными (рис. 4б) и при дальнейшем увеличении потерь $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2$ коэффициент прохождения через систему для одной из мод возрастает (см. кривую на рис. 5). Возрастание коэффициента прохождения связано с тем, что с увеличением $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2$ поле в собственной моде системы сосредоточивается преимущественно в волноводе без потерь.

Явление увеличения коэффициента прохождения с возрастанием величины потерь получило название "прозрачности, индуцированной потерями" [49].

4.4. Асимметричность преломления в PT-симметричной оптической системе

В работе [26] PT-симметричным системам приписывалось свойство асимметричного преломления, а именно при падении из вакуума под произвольным углом θ на полубесконечную PT-симметричную систему плоской линейно поляризованной волны распределение поля внутри фотонного кристалла не переходит в свой P-симметричный образ при изменении угла падения $\theta \to -\theta$,

$$E(x,z,\theta) \neq \hat{P}E(x,z,\theta) = E(-x,z,-\theta)\,. \tag{58}$$

В работе [26] рассматривался полубесконечный фотонный кристалл, граничащий с вакуумом по плоскости $z=0$, в котором диэлектрическая проницаемость варьируется вдоль оси x. Предполагалось, что распределение диэлектрической проницаемости имеет несинфазное изменение её действительной и мнимой частей[6]:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\cos(kx) + \mathrm{i}\varepsilon_2\sin(kx)\,. \tag{59}$$

[6] Рассматриваем случай немагнитной среды, в которой магнитная проницаемость равна единице.

Очевидно, что такая система является PT-симметричной. При падении плоской волны, линейно поляризованной вдоль оси y, на границу вакуум–фотонный кристалл поле в рассматриваемой системе можно искать в виде [40]

$$E(x,z) = \exp(\mathrm{i}k_z^{\mathrm{PC}}z)\exp(\mathrm{i}k_x^{\mathrm{inc}}x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(\mathrm{i}k_\varepsilon nx)\,,\quad z<0\,, \tag{60a}$$

$$E(x,z) = \exp\left[\mathrm{i}\left(k_x^{\mathrm{inc}}x + \sqrt{k_0^2 - (k_x^{\mathrm{inc}})^2}\,z\right)\right] + \exp(\mathrm{i}k_x^{\mathrm{inc}}x)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_n\exp\left[\mathrm{i}k_\varepsilon nx - \sqrt{k_0^2 - (k_\varepsilon n + k_x^{\mathrm{inc}})^2}\,z\right],\quad z\geqslant 0\,, \tag{60б}$$

где k_z^{PC} — волновой вектор в фотонном кристалле в направлении z, перпендикулярном поверхности фотонного кристалла, k_x^{inc} — тангенциальная компонента волнового вектора падающей волны, $k_\varepsilon = 2\pi/d$ — вектор обратной решётки.

Подставляя распределение поля (60) и диэлектрическую проницаемость (59) в уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon(x)E = 0\,, \tag{61}$$

получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов разложения в ряд Фурье $C_n(k_x^{\mathrm{inc}})$:

$$\left[k_0^2 - (k_z^{\mathrm{PC}})^2 - (k_x^{\mathrm{inc}} + k_\varepsilon n)^2\right]C_n(k_x^{\mathrm{inc}}) +$$
$$+\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}\,C_{n-1}(k_x^{\mathrm{inc}}) + \frac{k_1^2 - k_2^2}{2}\,C_{n+1}(k_x^{\mathrm{inc}}) = 0\,, \tag{62}$$

где $k_0^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_0$, $k_1^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_1$ и $k_2^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_2$, а величина k_z находится как собственное значение граничной задачи (62) [40, 41]. Условие асимметричности преломления (58)

$$E(x,z,k_x^{\mathrm{inc}}) = \exp(\mathrm{i}k_z^{\mathrm{PC}}z)\exp(\mathrm{i}k_x^{\mathrm{inc}}x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(\mathrm{i}k_\varepsilon nx) \neq$$
$$\neq E(-x,z,-k_x^{\mathrm{inc}}) = \exp(\mathrm{i}k_z^{\mathrm{PC}}z)\exp(\mathrm{i}k_x^{\mathrm{inc}}x)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_{-n}\exp(\mathrm{i}k_\varepsilon nx) \tag{63}$$

на языке коэффициентов разложения в ряд Фурье можно представить как

$$C_n(k_x^{\mathrm{inc}}) \neq C_{-n}(-k_x^{\mathrm{inc}})\,. \tag{64}$$

Система уравнений для $C_{-n}(-k_x^{\mathrm{inc}})$ получается из системы уравнений (62) заменой $k_x \to -k_x$ и $n \to -n$:

$$\left[k_0^2 - k_z^2 - (k_x^{\mathrm{inc}} + k_\varepsilon n)^2\right]C_{-n}(-k_x^{\mathrm{inc}}) +$$
$$+\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}\,C_{-n-1}(-k_x^{\mathrm{inc}}) + \frac{k_1^2 - k_2^2}{2}\,C_{-n+1}(-k_x^{\mathrm{inc}}) = 0\,. \tag{65}$$

Из уравнений (62), (65) видно, что перед $C_n(k_x^{\mathrm{inc}})$ и $C_{-n}(-k_x^{\mathrm{inc}})$ стоят одинаковые коэффициенты, в то же время коэффициенты перед $C_{n+1}(k_x^{\rm inc})$ и $C_{-(n+1)}(-k_x^{\rm inc})$ и перед $C_{n-1}(k_x^{\rm inc})$ и $C_{-(n-1)}(-k_x^{\rm inc})$ различаются, следовательно, в рассматриваемой PT-симметричной системе, в которой $k_1^2 \neq 0$ и $k_2^2 \neq 0$, преломление является асимметричным [7].

Важно отметить, что асимметричность преломления не связана с PT-симметрией системы и она может наблюдаться в любой P-несимметричной системе. Действительно, в соответствии с определением преломление считается симметричным, если распределение поля в системе переходит в свой P-симметричный образ:

$$\hat{P}E(x,z,k_x) = E(-x,z,-k_x) = E(x,z,k_x)\,. \qquad (66)$$

Если уравнение Гельмгольца (61) инвариантно относительно $\hat{P}$-преобразования и $E(x,z,k_x)$ — собственное решение уравнения Гельмгольца, то $\hat{P}E(x,z,k_x)$ также будет собственным решением уравнения Гельмгольца и, как следствие, преломление в системе будет симметричным. Если оптическая система не является P-симметричной, то $\hat{P}E(x,z,k_x)$ не представляет собой собственного решения уравнения Гельмгольца и преломление будет асимметричным.

Рассмотренная в [26] система не является P-симметричной, $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(-x)$, поэтому нет ничего удивительного в том, что в ней наблюдается асимметричное преломление.

5. Одномерные PT-симметричные оптические системы

В разделе 4 рассмотрены двумерные PT-симметричные оптические системы, для которых уравнение (45а) эквивалентно одномерному стационарному уравнению Шрёдингера. Мы видели, что это позволяет распространить результаты, полученные в PT-симметричной квантовой механике, на оптику. В частности, в двумерных PT-симметричных оптических системах (37) возможен фазовый переход, связанный с нарушением PT-симметрии собственных решений уравнения Гельмгольца.

Хотя в одномерном случае нельзя установить прямую аналогию с уравнением Шрёдингера, под PT-симметрией оптической системы по-прежнему понимают выполнение условия $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$. В реальных оптических системах это условие может выполняться только для дискретного набора частот (см. раздел 3.2), поэтому имеет смысл рассматривать свойства матрицы рассеяния PT-симметричной оптической системы только на одной заранее выбранной действительной частоте ω.

[7] В литературе вместо термина "асимметричное преломление" обычно используют термин "невзаимное распространение", который нам кажется неудачным, поскольку обычно под этим термином понимают различие в коэффициентах прохождения в прямом и обратном направлениях, что возможно только в нелинейных или гиротропных средах или средах с изменяющимся во времени коэффициентом прохождения [42, 52]. При рассмотрении PT-симметричных систем невзаимностью распространения называют различие в преломлении при падении на PT-симметричную систему света под углами $\pm\theta$, которое не устраняется при зеркальном отображении системы относительно перпендикуляра к поверхности [3], т.е. асимметричность преломления, $E(x,z,k_x) \neq E(-x,z,-k_x)$.

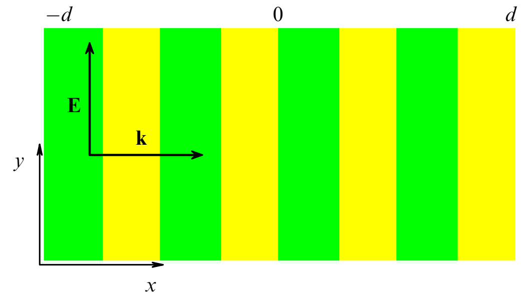

Рис. 6. (В цвете онлайн.) Одномерные PT-симметричные оптические системы, $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$. Зелёным и жёлтым цветом отмечены разные значения мнимой части диэлектрической проницаемости, вектор **E** указывает поляризацию, а вектор **k** — направление распространения электромагнитной волны.

5.1. Фазовый переход в одномерной оптической системе

Для определённости будем считать, что свет распространяется вдоль направления вариации диэлектрической проницаемости x и он поляризован вдоль оси y [53–55], а PT-симметричная система, которая занимает область по координате x от $-d$ до d, с обеих сторон окружена вакуумом (рис. 6). Единственная компонента электрического поля $E_y = E(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [53, 54]

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x,\omega)\,E(x) = 0\,. \qquad (67)$$

Здесь направления распространения волны и изменения диэлектрической проницаемости, в отличие от таковых в двумерном случае (47), совпадают. Такую систему удобнее описывать на языке матрицы рассеяния s [53]. Матрица s связывает амплитуды падающих на систему, ϕ_k, и рассеянных, ψ_n, волн:

$$\psi_n = s_{nk}\phi_k\,, \qquad (68)$$

где $n,k = 1,2$, индекс 1 соответствует падению плоской волны на систему слева (ψ_1 описывает отражённую и прошедшую волны), а индекс 2 — падению плоской волны справа.

Если в двумерных PT-симметричных оптических системах мы связывали фазовый переход с изменением симметрии собственных мод системы, то в одномерном случае мы будем рассматривать изменение симметрии собственных векторов матрицы рассеяния s [53].

Электрическое поле вне PT-симметричной системы равно сумме падающих и рассеянных волн:

$$E(x,\omega) = \begin{cases} \phi_1 \exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right) + \psi_1 \exp\left(-\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right), & x < -d\,, \\ \phi_2 \exp\left(-\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right) + \psi_2 \exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right), & x > d\,. \end{cases} \qquad (69)$$

Для того чтобы определить, какими свойствами обладает матрица рассеяния в PT-симметричных оптических системах, воздействуем на распределение поля в системе (69) оператором $\hat{P}\hat{T}$. При этом действие оператора $\hat{P}$ сводится к замене $x \to -x$, а действие оператора $\hat{T}$ приводит к комплексному сопряжению, $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$. Таким образом, под действием оператора $\hat{P}\hat{T}$ $\mathrm{i}x \to \mathrm{i}x$ и (69) изменяется следующим образом (см. раздел 2.1):

$$\hat{P}\hat{T}E(x,\omega) = \\ = \begin{cases} (\hat{P}\hat{T}\phi_1)\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right) + (\hat{P}\hat{T}\psi_1)\exp\left(-\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right), & x > d\,, \\ (\hat{P}\hat{T}\phi_2)\exp\left(-\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right) + (\hat{P}\hat{T}\psi_2)\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{\omega}{c}\,x\right), & x < -d\,. \end{cases} \tag{70}$$

Так как уравнение Гельмгольца (67) для PT-симметричной системы ($\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$) инвариантно относительно PT-преобразования и (69) представляет собой решение уравнения Гельмгольца, следовательно, (70) является решением уравнения Гельмгольца. Сравнивая (69) и (70), видим, что теперь $\hat{P}\hat{T}\psi_n$ играет роль амплитуд падающих на систему плоских волн, а $\hat{P}\hat{T}\phi_n$ — амплитуд рассеянных на системе плоских волн. Эти амплитуды связаны между собой той же матрицей рассеяния, что и до PT-преобразования[8]: $\hat{P}\hat{T}\phi_n = s_{nk}\hat{P}\hat{T}\psi_k$. Иначе говоря,

$$\hat{P}\hat{T}\psi_n = s_{nk}^{-1}\hat{P}\hat{T}\phi_k\,. \tag{71}$$

Подействовав на уравнение (68) слева оператором $\hat{P}\hat{T}$, получим

$$\hat{P}\hat{T}\psi_n = (\hat{P}\hat{T}s_{nk}\hat{P}\hat{T})\,\hat{P}\hat{T}\phi_k\,. \tag{72}$$

Из (71) и (72) следует, что в случае PT-симметричных систем матрица рассеяния s преобразуется следующим образом [53]:

$$\hat{P}\hat{T}s_{nk}\hat{P}\hat{T} = s_{nk}^{-1}\,. \tag{73}$$

Введём обозначения для собственных векторов матрицы рассеяния ϕ_n^1 и ϕ_n^2, а также обозначения s^1 и s^2 для соответствующих им собственных значений ($s_{nk}\phi_k^i = s^{(i)}\phi_k^{(i)}$). Умножив левую и правую части уравнения (73) на собственный вектор матрицы рассеяния ϕ_k^i, $i = \{1, 2\}$, получим

$$\hat{P}\hat{T}s_{nk}(\hat{P}\hat{T}\phi_k^i) = s_{nk}^{-1}\phi_k^i = \frac{1}{s^{(i)}}\,\phi_k^{(i)}\,. \tag{74}$$

Теперь, воздействовав на (74) слева оператором $\hat{P}\hat{T}$, учитывая, что $(\hat{P}\hat{T})^2 = \hat{1}$, находим

$$s_{nk}(\hat{P}\hat{T}\phi_k^i) = (\hat{P}\hat{T}s_{nk}\phi_k^{(i)})\,\frac{1}{(s^{(i)})^*}\,(\hat{P}\hat{T}\phi_k^{(i)})\,. \tag{75}$$

Разлагая $\hat{P}\hat{T}\phi_k^i$ по собственным векторам матрицы рассеяния, получим матричное представление оператора $\hat{P}\hat{T}$ в базисе ϕ_k^i:

$$\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = c^{ij}\phi_k^j\,. \tag{76}$$

Так как $(\hat{P}\hat{T})^2 = \hat{1}$ и $(\hat{P}\hat{T})^+ = \hat{P}\hat{T}$, то $c^{ij}c^{jl} = \delta^{il}$, где δ^{il} — символ Кронекера, $(c^{ij})^* = c^{ji}$. В результате матрицу c^{ij} можно представить в виде либо (см. приложение 5)

$$c = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{77а}$$

либо

$$c = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\exp(\mathrm{i}\phi) \\ \sin\theta\exp(-\mathrm{i}\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{77б}$$

где θ и ϕ — действительные числа. При $\theta = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, последний случай сводится к

$$c = \begin{pmatrix} 0 & \exp(\mathrm{i}\phi) \\ \exp(-\mathrm{i}\phi) & 0 \end{pmatrix}. \tag{77в}$$

Подставляя (76) в (75), приходим к системе уравнений для c_{ij}:

$$s_{nk}\sum_j c^{ij}\phi_k^j = \sum_j c^{ij}s^j\phi_n^j = \sum_j \frac{c^{ij}}{(s^{(i)})^*}\,\phi_n^j\,. \tag{78}$$

Далее ограничимся рассмотрением взаимных систем. Собственные решения матрицы рассеяния взаимной системы с разными собственными значениями ортогональны, $\sum_k(\phi_k^j)^{\mathrm{T}}\phi_k^l = \delta^{jl}$ (см. приложение 5). Умножив уравнение (78) скалярно на $(\phi_k^l)^{\mathrm{T}}$, приходим к задаче для собственных значений матрицы рассеяния:

$$c^{il}s^{(l)} = \frac{c^{il}}{(s^{(i)})^*}\,. \tag{79}$$

В зависимости от вида матрицы c система уравнений (79) имеет три возможных решения:

1) если $c^{11} = \pm 1$, $c^{22} = \pm 1$, $c^{12} = c^{21} = 0$ (случай (77а)), то собственные векторы матрицы рассеяния PT-симметричны, $\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = \pm\phi_k^i$, и собственные значения по модулю равны единице, $|s^i| = 1$;

2) если $c^{11} = c^{22} = 0$, $c^{12} \neq 0$ и $c^{21} \neq 0$ (случай (77в)), то собственные векторы матрицы рассеяния PT-несимметричны и переходят друг в друга при преобразовании $\hat{P}\hat{T}$: $\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = \phi_k^j$, $i \neq j$, а собственные значения матрицы рассеяния связаны между собой соотношением $s^i = 1/(s^j)^*$, $i \neq j$;

3) если $c^{11} = -c^{22}$, $c^{12} \neq 0$ и $c^{21} \neq 0$ (случай (77б)), то собственные значения матрицы рассеяния для разных собственных векторов равны друг другу, $s^i = s^j = 1/(s^i)^*$, $i \neq j$.

Ниже точки фазового перехода (фаза PT-симметричных решений) собственные векторы матрицы рассеяния PT-симметричны: $\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = \pm\phi_k^i$, а оба собственных значения матрицы рассеяния по амплитуде равны единице, $|s^i| = 1$, что соответствует первому случаю. Выше точки фазового перехода собственные векторы матрицы рассеяния PT-несимметричны, что соответствует второму случаю: $\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = \pm\phi_k^j$, $i \neq j$, и собственные значения матрицы рассеяния связаны между собой соотношением $s^i = 1/(s^j)^*$, $i \neq j$ [53].

В третьем случае имеется вырождение: собственные значения равны друг другу, а собственные векторы совпадают (линейно зависимы). Эта точка соответствует границе между областью с PT-симметричными и

[8] PT-симметричная система не изменяется при PT-преобразовании: $PT\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x) = \varepsilon(x)$, и, так как матрица рассеяния определяется только структурой системы, матрица рассеяния PT-симметричной системы не изменяется при PT-преобразовании.

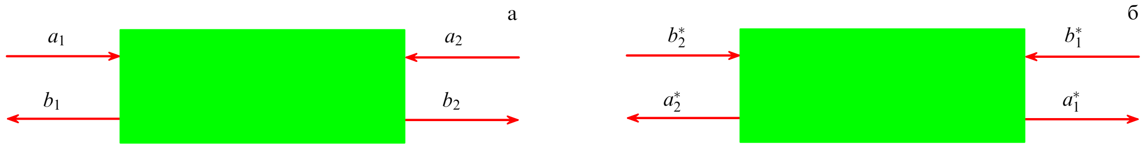

Рис. 7. (а) Схематическое изображение рассеяния плоских волн на одномерной оптической системе: a_i — комплексные амплитуды падающих на систему волн, b_i — комплексные амплитуды рассеянных на системе волн. (б) Схематическое изображение рассеяния плоских волн на одномерной оптической системе, представленной на рис. а, после её $\hat{P}\hat{T}$-преобразования.

PT-несимметричными собственными решениями, т.е. точке фазового перехода.

Для того чтобы определить условие, при котором происходит фазовый переход от PT-симметричных собственных векторов матрицы рассеяния к PT-несимметричным, вспомним, что в любой PT-симметричной системе оператор $\hat{P}\hat{T}$ и оператор Гельмгольца в уравнении (67) коммутируют друг с другом. В этом случае, если бы $\hat{P}\hat{T}$ был линейным оператором, то собственные решения уравнения Гельмгольца всегда оставались бы PT-симметричными, т.е. совпадали бы с собственными решениями оператора $\hat{P}\hat{T}$. На самом деле, оператор $\hat{P}\hat{T}$ — антилинейный, поскольку его действие включает в себя операцию комплексного сопряжения (см. раздел 2.1), поэтому собственные решения оператора $\hat{P}\hat{T}$ и оператора Гельмгольца могут не совпадать. В этом случае собственные решения уравнения Гельмгольца (67) PT-несимметричны (см. раздел 2.3).

В качестве иллюстрации рассмотрим одномерную систему, на которую слева и справа падают плоские волны с амплитудами a_1 и a_2 соответственно, а влево и вправо от неё уходят волны с амплитудами b_1 и b_2 (рис. 7а). Если выполнить $\hat{P}\hat{T}$-преобразование распределения полей, то операция обращения времени приведёт к смене направления распространения волн и комплексному сопряжению амплитуд (16), а операция пространственной инверсии — к повторной смене направления распространения волн и перестановке местами волн, распространяющихся слева направо и справа налево (см. формулы (69), (70)). В результате волна, падающая на систему слева (справа), перейдёт в волну, уходящую вправо (влево), с комплексно сопряжённой амплитудой (рис. 7б).

Таким образом, для того чтобы распределение поля в системе было PT-симметричным, необходимо, чтобы после применения PT-преобразования решение не изменилось. Для этого необходимо выполнение условий $a_1 = b_2^*$ и $a_2 = b_1^*$. В то же время, так как матрица рассеяния связывает амплитуды падающих и уходящих волн, амплитуды падающих и уходящих волн для собственных векторов матрицы должны быть попарно равны друг другу по модулю, $|a_1| = |b_1|$ и $|a_2| = |b_2|$. В результате амплитуды падающих слева и справа волн для PT-симметричных собственных решений должны равняться между собой по модулю, $|a_1| = |a_2|$.

Рассмотрим подробнее случай, в котором $a_1 = 1$, $a_2 = \exp(\mathrm{i}\phi)$, где ϕ — произвольный фазовый множитель (рис. 8). Для того чтобы распределение электрического поля в системе было PT-симметричным, необходимо выполнение равенств $b_2 = 1$ и $b_1 = \exp(-\mathrm{i}\phi)$.

В то же время плоская волна, уходящая от системы влево, является суммой прошедшей волны, падающей справа, $t\exp(\mathrm{i}\phi)$ (t — коэффициент прохождения через

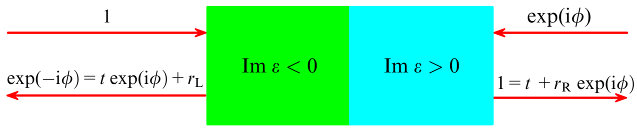

Рис. 8. PT-симметричное распределение поля в одномерной оптической системе.

систему)[9] и отражённой волны, падающей слева, r_{L} (r_{L} — коэффициент отражения от системы при падении слева). Окончательно получим

$$\exp(-\mathrm{i}\phi) = t\exp(\mathrm{i}\phi) + r_{\mathrm{L}}\,. \tag{80а}$$

Плоская волна, уходящая от системы справа, является суммой прошедшей волны, падающей слева, t (t — коэффициент прохождения через систему), и отражённой волны, падающей справа, $r_{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\phi)$ (r_{R} — коэффициент отражения от системы при падении справа), что даёт для PT-симметричного распределения полей

$$1 = t + r_{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\phi)\,. \tag{80б}$$

Решая систему уравнений (80а), (80б), получаем

$$\frac{r_{\mathrm{L}} - r_{\mathrm{R}}}{t} = -2\mathrm{i}\sin\phi\,, \tag{81}$$

а собственные векторы матрицы рассеяния выражаются как

$$\begin{aligned}
\phi_k^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left[\mathrm{i}\arcsin\left(-\dfrac{r_{\mathrm{L}} - r_{\mathrm{R}}}{2\mathrm{i}t}\right)\right] \end{pmatrix}, \\
\phi_k^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left\{\mathrm{i}\left[\pi - \arcsin\left(-\dfrac{r_{\mathrm{L}} - r_{\mathrm{R}}}{2\mathrm{i}t}\right)\right]\right\} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Модуль правой части уравнения (81) не может быть больше двух, поэтому оператор $\hat{P}\hat{T}$ имеет собственные решения только при

$$\left|\frac{r_{\mathrm{L}} - r_{\mathrm{R}}}{t}\right| \leqslant 2\,. \tag{83}$$

Таким образом, решение задачи для PT-симметричной системы является PT-симметричным, только если выполняется условие (83) [53]. При нарушении условия

[9] Считаем, что рассматриваемая система взаимна, т.е. коэффициенты прохождения через неё слева направо и справа налево равны между собой.

(83) происходит фазовый переход от PT-симметричных собственных векторов матрицы рассеяния к PT-несимметричным. В самой точке фазового перехода от PT-симметричных собственных решений к PT-несимметричным $\arcsin\left[-(r_{\mathrm{L}}-r_{\mathrm{R}})/(2\mathrm{i}t)\right]=\pi/2$ и собственные векторы матрицы рассеяния совпадают друг с другом, $\phi_k^1=\phi_k^2$.

5.2. Лазерная генерация в PT-симметричных оптических системах и "скрытый" фазовый переход в одномерной оптической системе

Выше, рассматривая PT-симметричные системы, мы не обсуждали возможность лазерной генерации в таких структурах. В то же время в состав любой PT-симметричной системы входит усиливающая среда. Если область, занимаемая усиливающей средой, образует резонатор, то в системе может возникнуть лазерная генерация.

В режиме лазерной генерации уходящие от системы волны существуют даже в отсутствие падающих волн. Для того чтобы определить амплитуды уходящих волн и частоту лазерной генерации, необходимо учитывать нелинейную зависимость функции отклика усиливающей среды от амплитуды поля в системе. Тем не менее определить условия, при которых в системе происходит лазерная генерация, можно в рамках линейного описания среды [46]. В рамках линейного приближения генерация наступает при переходе одного из полюсов матрицы рассеяния в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости частот [46, 56, 57]. Полюс матрицы рассеяния соответствует обращению в бесконечность одного из собственных значений матрицы рассеяния. В точке начала лазерной генерации при отсутствии падающих волн амплитуда исходящих волн равна нулю.

В области, где условие (83) нарушено, одно из собственных значений матрицы рассеяния может обратиться на какой-либо действительной частоте в бесконечность. Одновременно второе собственное значение на этой частоте обратится в нуль, так как $s^{(i)}=1/(s^{(j)})^*$, $i\neq j$. Ситуации, при которой собственное значение матрицы рассеяния обращается в нуль при действительной частоте, соответствует идеальное когерентное поглощение (Coherent Perfect Absorption — CPA) [58]. В этом случае при падении плоских волн на систему рассеянные волны отсутствуют: $\phi_n^{(i)}\neq 0$, а $\psi_n^{(i)}=0$. Следовательно, в момент начала лазерной генерации, т.е. когда генерируемая мощность всё ещё равна нулю, PT-симметричная оптическая система одновременно является идеальным когерентным поглотителем. В литературе такие системы получили название "CPA-лазеры" [53, 54].

В разделе 4.3 мы обсуждали возможность наблюдения фазового перехода в PT-несимметричных системах, которые при формальном переобозначении полей сводятся к PT-симметричным. В работе [59] была предложена PT-несимметричная оптическая система, состоящая из двух когерентно связанных низкодобротных лазерных резонаторов. Если среду в одном из резонаторов посредством внешней накачки сделать усиливающей, то начиная с некоторого значения накачки в системе возникнет лазерная генерация. В этом случае распределение поля в лазерной моде будет асимметричным: интегральная интенсивность поля в резонаторе с накачкой будет больше, чем в резонаторе без накачки [59]. Если, кроме того, добавить внешнюю накачку во второй резонатор, то при некотором критическом значении накачки во втором резонаторе системы произойдёт срыв лазерной генерации. При дальнейшем увеличении интенсивности накачки во втором резонаторе в системе вновь начнётся лазерная генерация. В этом случае распределение поля в лазерной моде будет симметричным: интегральные интенсивности поля в резонаторах будут равны друг другу [59].

Таким образом, в системе двух связанных резонаторов может наблюдаться такое контринтуитивное явление, как подавление лазерной генерации при увеличении интенсивности накачки, которое связано с пространственной неоднородностью накачки. Важно заметить, что описанный эффект возникает вследствие фазового перехода, происходящего в системе, и он никак не связан с нелинейностью среды.

Действительно, рассмотрим систему, состоящую из двух слоёв с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1{,}1-0{,}3\mathrm{i}$ и $\varepsilon_2=1{,}1-0{,}3\mathrm{i}\alpha$, где $\alpha\in[0,1]$. Выбор знака минус перед мнимой частью диэлектрической проницаемости соответствует усиливающей среде. Для того чтобы определить параметры системы, при которых наблюдается лазерная генерация, достаточно проследить за положением полюсов матрицы рассеяния s в комплексной плоскости частот. Если хотя бы один из полюсов матрицы рассеяния лежит в верхней полуплоскости частот, то в системе наблюдается лазерная генерация [46, 56, 57]. При нахождении границ области генерации крайне важно учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости, потому что с возрастанием частоты излучения увеличивается оптическая толщина системы и условия лазерной генерации выполняются при всё меньших значениях усиления. В результате лазерная генерация на высоких частотах наблюдается при любых значениях усиления. Учёт дисперсии приводит к уменьшению мнимой части диэлектрической проницаемости с возрастанием частоты (мнимая часть убывает быстрее, чем $1/\mathrm{Re}\,\omega$), что и позволяет отсечь нефизическую генерацию на высоких частотах.

Для иллюстративности при рассмотрении описанной системы мы вначале пренебрежём дисперсией диэлектрической проницаемости и не будем учитывать полюсы на высоких частотах, как нефизические. Рассмотрим три системы: с $\alpha_1=0{,}0$, $\alpha_2=1{,}0$ и $\alpha_3=0{,}5$. В первом случае коэффициент α во втором слое равен нулю. Во втором случае накачка однородна по системе. Третий случай является промежуточным между первым и вторым.

С возрастанием частоты полюсы системы во всех трёх случаях переходят из нижней полуплоскости в верхнюю и начинается лазерная генерация (рис. 9). При малых частотах полюсы всех трёх систем лежат на прямых в плоскости комплексных частот и наклон прямых тем выше, чем больше коэффициент усиления во втором слое. При некотором значении частоты $(\omega/\omega_{\mathrm{d}}\approx 30)$ в первой системе происходит перестройка собственных мод системы. В результате прямая, на которой лежат полюсы, разбивается на две прямые, с бóльшим и меньшим наклоном, чем у изначальной. Наклон одной из этих прямых оказывается даже больше, чем наклон прямой, на которой лежат полюсы третьей системы. Как следствие, существует частота, при которой полюсы системы без усиления во втором слое оказываются выше полюсов системы с усилением во втором слое $(\omega/\omega_{\mathrm{d}}\approx 65)$. Таким образом, добавление

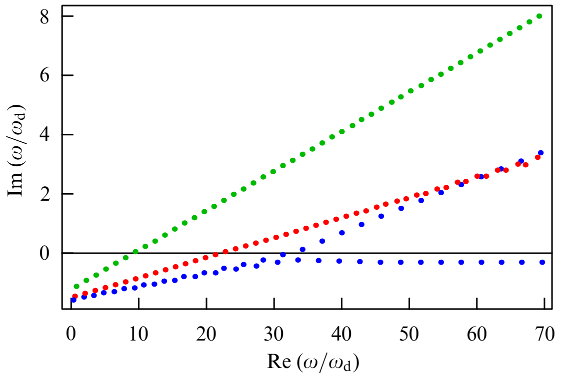

Рис. 9. (В цвете онлайн.) Положение полюсов матрицы рассеяния в плоскости комплексных частот. По оси абсцисс — действительная часть частоты, по оси ординат — мнимая часть частоты Im (ω/ω_d), где $\omega_d = \pi c/(2d)$. Зелёным цветом отмечены полюсы системы с $\alpha = 1{,}0$, красным — с $\alpha = 0{,}5$ и синим — с $\alpha = 0$.

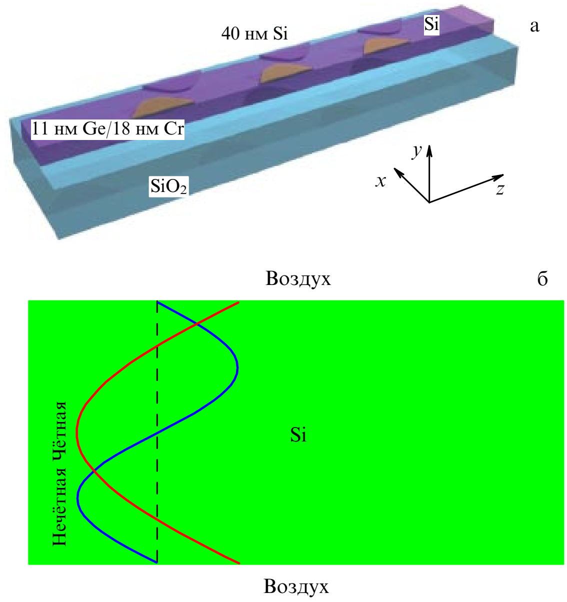

Рис. 10. (В цвете онлайн.) (а) Схема PT-симметричной оптической системы из двух связанных прямоугольных волноводов, PT-симметричных вдоль оси z. (б) Распределение поля в чётной (красная кривая) и нечётной (синяя кривая) модах PT-симметричной оптической системы, представленной на рис. а. (Из работы [62].)

усиления во второй слой может приводить к опусканию полюса в нижнюю полуплоскость и подавлению лазерной генерации, как описано в работе [59]. При нашем рассмотрении никаким образом не учитывалась нелинейность среды, следовательно, эффект подавления генерации при увеличении накачки является чисто линейным.

6. "Квазидиодные" PT-симметричные оптические системы. Принцип взаимности

В настоящее время активно обсуждается возможность создания оптического компьютера [60, 61], в котором для передачи, хранения и обработки информации будут использоваться кванты оптического поля. Основой элементной базой таких компьютеров должны стать оптические диоды, пропускающие сигнал в только одном направлении.

В работе [62] предложена схема оптического диода на основе линейной PT-симметричной системы, представляющей собой двухмодовый волновод в виде кремневого бруска конечных размеров с периодически расположенными на его верхней поверхности включениями (рис. 10а) [62]. Толщина волновода выбиралась такой, чтобы по нему могли распространяться только две волноводные моды: чётная, имеющая максимум в центре поперечного сечения бруска, и нечётная, обращающаяся в нуль в центре поперечного сечения бруска (рис. 10б). Расположенные по одну сторону волновода включения из кремния на рассматриваемых частотах не приводят к усилению или к поглощению света. По другую сторону волновода располагались гетерогенные включения германий/хром, которые при пропускании по ним тока становятся усиливающими элементами. Расположение включений в исследуемой системе можно описать в терминах распределения диэлектрической проницаемости вида $\varepsilon(x,y,z)$ [62]:

$$\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon_0(x,y) + \delta\varepsilon(x,y)\exp(\mathrm{i}qz)\,, \qquad (84)$$

где z — ось волновода, xy — плоскость сечения волновода.

В [62] показано, что интегральная интенсивность поля на выходе такого устройства зависит от того, с какой стороны на систему подаётся сигнал. Такое поведение системы связывалось с невзаимностью, и рассматриваемую систему предлагалось использовать как оптический диод.

На самом деле рассматриваемая в работе [62] система является взаимной (см. [52, 63]), и построить на её основе оптический диод невозможно. Ошибочная трактовка эксперимента связана с восприятием авторами [62] различия в выходной мощности при падении на систему справа и слева как невзаимности системы. В действительности различие интенсивностей связано с различием модового состава выходного излучения и может наблюдаться во взаимных системах. В самом деле, при падении чётной моды коэффициент прохождения чётной моды не зависит от направления её падения, что согласуется с взаимностью системы, но амплитуда нечётной моды на выходе зависит от того, с какой стороны падает чётная мода. В частности [62], при падении чётной моды с одной стороны амплитуда нечётной моды на выходе равна нулю (рис. 11а), а при падении с другой стороны отлична от нуля (рис. 11б). Такое поведение не противоречит взаимности системы, и оно может наблюдаться и в PT-несимметричных системах, как видно из рис. 11.

Сформулируем условия, при которых система является оптическим диодом. В линейной электродинамике связь между амплитудами падающих и рассеянных волн выражается в виде матричного соотношения:

$$b_\mu = s_{\mu\nu} a_\nu\,, \qquad (85)$$

где a_ν — столбец амплитуд, падающих на систему волн, b_μ — столбец амплитуд, отражённых от системы волн, $s_{\mu\nu}$ — матрица рассеяния. Индексы μ, ν пробегают значения от 1 до N, где N — число типов волн (каналов), которые могут рассеиваться на системе.

В матричной формулировке рассматриваемая оптическая система эквивалентна многополюснику с четырь-

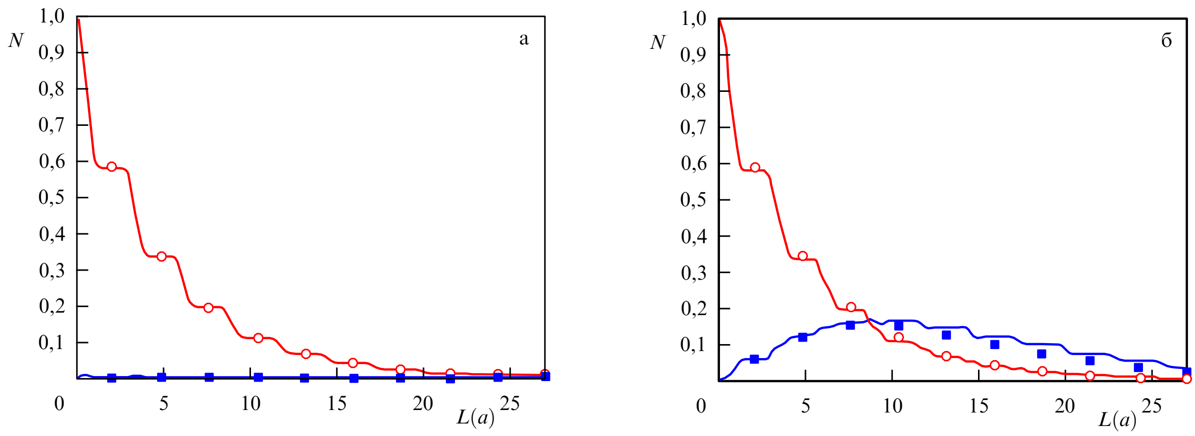

Рис. 11. (В цвете онлайн.) (а) Амплитуды чётной (красная кривая) и нечётной (синяя кривая) мод при падении на систему чётной моды слева в зависимости от толщины системы. (б) Амплитуды чётной (красная кривая) и нечётной (синяя кривая) мод при падении на систему чётной моды справа в зависимости от толщины системы. (Из Supporting Online Material работы [62].)

мя входами. Примем чётную моду, падающую на систему слева, за первую моду, нечётную моду, падающую слева, — за вторую, чётную моду, падающую справа, — за третью, нечётную моду, падающую справа, — за четвёртую (рис. 12а).

При подключении системы к оптической схеме компьютера сигнал подаётся на один из входов многополюсника, например на первый (чётная мода, падающая слева), а снимается с другого, например с четвёртого (нечётная мода, выходящая справа) (рис. 12б). При распространении в противоположном направлении сигнал подаётся на четвёртый вход (нечётная мода, падающая справа), а снимается с первого входа (чётная мода, выходящая слева) (рис. 12в). Для того чтобы система функционировала как диод, необходимо выполнение условия $s_{14} \neq s_{41}$. В общем случае матрица рассеяния оптического диода должна быть несимметричной:

$$s_{\mu\nu} \neq s_{\nu\mu}\,. \tag{86}$$

На основе леммы Лоренца можно показать [64], что матрица рассеяния всех линейных оптических систем симметрична, $s_{\mu\nu} = s_{\nu\mu}$, если диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят явно от времени и являются скалярами или симметричными тензорами[10], $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$, $\mu_{\mu\nu} = \mu_{\nu\mu}$ (см. приложение 5). Такие оптические системы называют взаимными. Как следует из вышесказанного (см. (86)), взаимные оптические системы не могут функционировать как оптический диод.

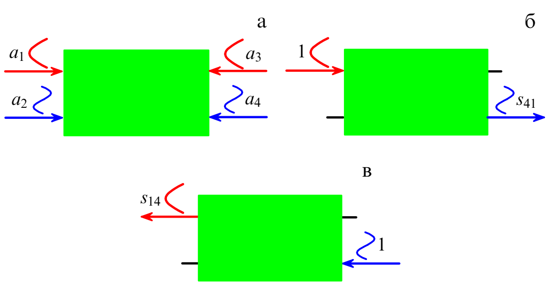

Рис. 12. (а) Схематическое изображение рассеяния волн на оптической системе, рассматриваемой в работе [62]: a_1 и a_3 — комплексные амплитуды чётных мод, падающих на систему, a_2 и a_4 — комплексные амплитуды нечётных мод, падающих на систему, b_1 и b_3 — комплексные амплитуды чётных мод, рассеянных на системе, b_2 и b_4 — комплексные амплитуды нечётных мод, рассеянных на системе. (б) Схематическое изображение падения на систему слева чётной моды с единичной амплитудой. (в) Схематическое изображение падения на систему справа нечётной моды с единичной амплитудой.

В работе [62] первый и второй входы, а также третий и четвёртый были объединены, поэтому измерялась выходная интенсивность сразу двух входов. В частности, при падении чётной волны слева (первый вход) интенсивность поля на выходе является суммой интенсивностей чётной и нечётной мод, выходящих справа: $I \approx |s_{31}|^2 + |s_{41}|^2$ (рис. 13а), а при падении чётной волны справа (третий вход) интенсивность поля на выходе является суммой интенсивностей чётной и нечётной мод, выходящих слева: $I \approx |s_{13}|^2 + |s_{23}|^2$ (рис. 13б). В этом случае даже во взаимных системах, где $s_{31} = s_{13}$, интегральная интенсивность поля на выходе зависит от направления падения волны на систему, поскольку в общем случае $s_{41} \neq s_{23}$. Различие выходных мощностей на "объединённых" входах не указывает на невзаимность предложенной PT-симметричной системы, так как является свойством, общим для всех взаимных систем.

В качестве примера, иллюстрирующего эти рассуждения, рассмотрим систему, изображённую на рис. 14а. Представленная система описывается матрицей рассеяния, аналогичной матрице рассеяния системы, предложенной в работе [62]. Отличие заключается в физической реализации каналов матрицы рассеяния: в работе [62] каналы отличаются симметрией, а возбуждение составного волновода происходит через общее сечение, тогда как в предлагаемой нами модели каналы имеют раздельные входы (рис. 14), а симметрия мод не играет

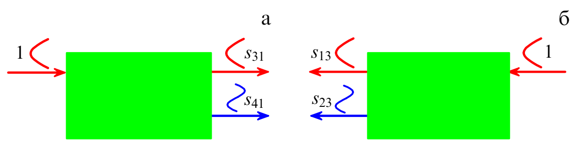

Рис. 13. Схематическое изображение падения чётной моды с единичной амплитудой на систему слева (а) и справа (б).

[10] Тензоры проницаемостей становятся несимметричными при наличии внешнего поля или ненулевой намагниченности [64].

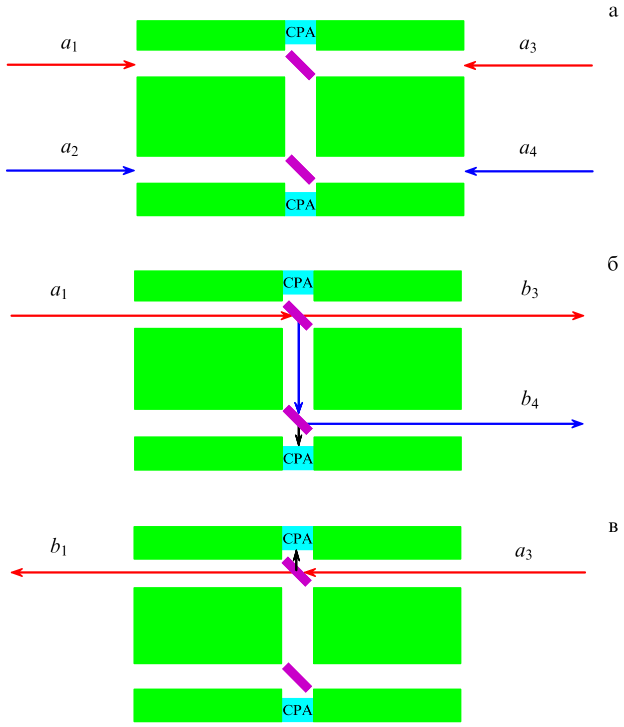

Рис. 14. (а) Схематическое изображение рассеяния волн на оптической системе; обозначения те же, что и на рис. 12а. (б) Схематическое изображение падения "чётной" моды на систему слева. (в) Схематическое изображение падения "чётной" моды на систему справа. Наклонными прямоугольниками обозначены полупрозрачные зеркала, аббревиатура CPA используется для обозначения идеального когерентного поглотителя. Ситуация полностью аналогична такой при рассеянии волн на PT-симметричной системе.

никакой роли. При падении на систему (рис. 14а) электромагнитного импульса на канал a_1 амплитуды выходящих волн b_3 и b_4 отличны от нуля (рис. 14б); при падении электромагнитного импульса на канал a_3 выходной сигнал в канале b_2 отсутствует (рис. 14в). Другими словами, отклик системы аналогичен отклику системы, предложенной в работе [62].

Таким образом, предложенная в работе [62] PT-симметричная оптическая система не может функционировать как оптический диод, а зависимость интегральной интенсивности поля на выходе из системы от направления подачи сигнала не является специфической особенностью именно PT-симметричных систем.

7. Заключение

Интерес к PT-симметричным системам возник относительно недавно. В 1998 г. Бендер и Боттчер [28] показали, что неэрмитовы гамильтонианы могут обладать действительными собственными значениями, если они коммутируют с произведением операторов пространственной инверсии и обращения времени $\hat{P}\hat{T}$. Более того, в системах с PT-симметричными гамильтонианами может наблюдаться фазовый переход от действительных собственных значений гамильтониана к комплексным. Этот переход сопровождается спонтанным нарушением PT-симметрии собственных функций гамильтониана. К настоящему времени полностью построен математический аппарат квантовой механики с PT-симметричными гамильтонианами [31]. Необходимо отметить, что построенная таким образом квантовая механика не является расширением обычной квантовой механики, а представляет собой отдельное математическое описание. Различие этих квантовых механик состоит в разном определении скалярного произведения [32]. PT-симметричная квантовая механика остаётся чисто спекулятивным построением ввиду отсутствия в природе квантово-механических неэрмитовых PT-симметричных систем с комплексным потенциалом. Поэтому в настоящее время исследования PT-симметричных систем переместились в область оптики и физики сверхпроводников [65], где возможно создание PT-симметричных систем.

В обзоре показано, что наблюдение фазового перехода в оптических системах является крайне затруднительным. В частности, такой переход невозможно наблюдать, изменяя только частоту внешнего поля, а наблюдение перехода при изменении накачки требует неоднородности распределения накачки по пространству.

Однако может наблюдаться "скрытый" фазовый переход. Последний наблюдается в PT-несимметричных системах, которые посредством формальных переобозначений и преобразований можно свести к PT-симметричным.

Показано, что большинство "необычных" свойств, приписываемых PT-симметричным системам, могут наблюдаться и в обычных системах, в том числе асимметричность преломления, подавление лазерной генерации при увеличении интенсивности накачки [59], "невзаимность".

В нашем обзоре обсуждались только линейные PT-симметричные оптические системы. Рассмотрение более широкого круга явлений (см., например, [66–71]), предсказанных для нелинейных PT-симметричных систем, требует написания отдельной статьи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-02-01093, 13-02-00407, 13-02-92660), при поддержке фонда "Династия" и фонда NTFS (National Teaching Fellowship Scheme, UK) (грант DMR-1312707).

8. Приложения

П1. Неортогональность собственных функций неэрмитова гамильтониана с действительными собственными значениями

Пусть все собственные значения E_k неэрмитова гамильтониана $\hat{H}$ с дискретным спектром действительны. В этом случае из временнóго уравнения Шрёдингера

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial|\psi_k\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi_k\rangle \qquad (\text{П}1.1)$$

следует, что для собственного решения гамильтониана $|\psi_k(t)\rangle = \exp(\mathrm{i}E_k t)|\psi_k(0)\rangle$ норма волновой функции $\langle\psi_k(t)|\psi_k(t)\rangle$ сохраняется во времени:

$$\big\langle\psi_k(t)|\psi_k(t)\big\rangle = \big\langle\psi_k(0)\big|\exp(-\mathrm{i}E_k t)\exp(\mathrm{i}E_k t)\big|\psi_k(0)\big\rangle = \\ = \big\langle\psi_k(0)|\psi_k(0)\big\rangle\,. \qquad (\text{П}1.2)$$

Однако, в отличие от собственных функций эрмитова гамильтониана, собственные функции гамильтониана $\hat{H}$, соответствующие различным действительным собственным числам, не являются ортогональными. Для доказательства этого умножим эрмитово-сопряжённое уравнение Шрёдингера

$$-\mathrm{i}\,\frac{\partial\langle\psi_n|}{\partial t}=\langle\psi_n|\hat{H}^+ \qquad (\Pi 1.3)$$

на $|\psi_k\rangle$ справа, а уравнение (П1.1) слева умножим на $\langle\psi_n|$ и вычтем второе из первого:

$$\mathrm{i}\left(\langle\psi_n|\,\frac{\partial|\psi_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\psi_n|}{\partial t}\,|\psi_k\rangle\right)=\langle\psi_n|\hat{H}-\hat{H}^+|\psi_k\rangle= \\ =\mathrm{i}\,\frac{\partial\langle\psi_n|\psi_k\rangle}{\partial t}\,. \qquad (\Pi 1.4)$$

Если собственные функции гамильтониана ортогональны, $\langle\psi_n|\psi_k\rangle=0$, то тогда $\partial\langle\psi_n|\psi_k\rangle/\partial t=0$. Если набор функций $|\psi_k\rangle$ — полный, то из (П1.4) следует, что $\hat{H}=\hat{H}^+$, т.е. гамильтониан системы $\hat{H}$ эрмитов. Для того чтобы неэрмитов гамильтониан имел действительные собственные значения, необходимо, чтобы либо выполнялось условие $\langle\psi_n|\psi_k\rangle\neq 0$ при $n\neq k$, либо собственные волновые функции гамильтониана не составляли полного базиса.

В обзоре рассматривается важный частный случай систем с PT-симметричными гамильтонианами ($\hat{P}\hat{T}\hat{H}=\hat{H}\hat{P}\hat{T}$). Если все собственные значения такого гамильтониана действительны, то можно показать (см. [32]), что система его собственных функций полна. Следовательно, собственные функции этого гамильтониана неортогональны.

Заметим, что из (П1.2) следует сохранение нормы только для собственных функций гамильтониана. Из неортогональности этих функций следует, что норма произвольной волновой функции $\psi=\sum_k c_k|\psi_k\rangle$ может не сохраняться во времени, в самом деле,

$$\frac{\partial\langle\psi|\psi\rangle}{\partial t}=\frac{\partial\left(\sum\limits_n c_n^*\langle\psi_n|\sum\limits_k c_k|\psi_k\rangle\right)}{\partial t}= \\ =\frac{\partial\left(\sum\limits_{k,n} c_n^*c_k\langle\psi_n|\psi_k\rangle\right)}{\partial t}= \\ =\sum_n|c_n|^2\frac{\partial\langle\psi_n|\psi_n\rangle}{\partial t}+\sum_{n\neq k}c_n^*c_k\frac{\partial\langle\psi_n|\psi_k\rangle}{\partial t}= \\ =\sum_{n\neq k}c_n^*c_k\frac{\partial\langle\psi_n|\psi_k\rangle}{\partial t}\neq 0\,. \qquad (\Pi 1.5)$$

Для произвольной волновой функции сохраняющейся величиной является $\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$. Действительно, умножив уравнение (П1.1) слева на $\langle\psi|\hat{P}$, а уравнение (П1.3) — справа на $\hat{P}|\psi\rangle$ и сложив их, получим

$$\mathrm{i}\frac{\partial\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle}{\partial t}=\langle\psi|\hat{H}^+\hat{P}-\hat{P}\hat{H}|\psi\rangle\,. \qquad (\Pi 1.6)$$

Если $\hat{H}^+=\hat{T}\hat{H}\hat{T}$ (см. приложение 2), то $\hat{H}^+\hat{P}-\hat{P}\hat{H}=\hat{T}\hat{H}\hat{T}\hat{P}-\hat{P}\hat{H}=\hat{H}\hat{T}\hat{P}-\hat{T}\hat{P}\hat{H}=\hat{H}\hat{P}\hat{T}-\hat{P}\hat{T}\hat{H}=0$. Следовательно, в этом случае $\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$ является сохраняющейся во времени величиной.

Таким образом, для построения на основе PT-симметричных гамильтонианов с действительными собственными значениями замкнутой квантовой механики необходимо переопределить скалярное произведение, а в качестве бра-вектора надо взять вектор $\langle\psi|\hat{P}$. При этом правило нахождения средних от физических величин приобретает вид $\langle\hat{A}\rangle=\langle\psi|\hat{P}\hat{A}|\psi\rangle$.

П2. Псевдоэрмитовы системы

В [29] показано, что необходимым условием действительности собственных значений гамильтониана является его псевдоэрмитовость:

$$\hat{H}^+=\hat{S}^{-1}\hat{H}\hat{S}\,, \qquad (\Pi 2.1)$$

где $\hat{S}$ — любой линейный эрмитов оператор. В частности, все PT-симметричные гамильтонианы с действительными собственными значениями являются одновременно псевдоэрмитовыми [29].

Псевдоэрмитовость гамильтониана является необходимым, но не достаточным условием действительности спектра. Иными словами, существуют псевдоэрмитовы гамильтонианы с комплексными собственными значениями. Если при некоторых параметрах μ псевдоэрмитова система с гамильтонианом $\hat{H}(\mu)$ имеет чисто действительные собственные значения, а при других не имеет, то говорят о фазовом переходе от состояний с действительными собственными значениями к состояниям с комплексными собственными значениями.

Если гамильтониан системы удовлетворяет условию $\hat{H}^+=\hat{T}\hat{H}\hat{T}$[11], то при $\hat{S}=\hat{P}$ условие псевдоэрмитовости (П2.1) совпадает с условием PT-симметричности (3):

$$\hat{H}^+=\hat{T}\hat{H}\hat{T}=\hat{P}\hat{H}\hat{P}\Leftrightarrow\hat{P}\hat{T}\hat{H}=\hat{H}\hat{P}\hat{T}\,, \qquad (\Pi 2.2)$$

где мы воспользовались тем, что $\hat{P}^2=\hat{1}$, $\hat{T}^2=\hat{1}$.

Для гамильтонианов произвольного вида ($\hat{H}^+\neq\hat{T}\hat{H}\hat{T}$) условие псевдоэрмитовости с оператором $\hat{S}=\hat{P}$ (П2.1) не совпадает с условием PT-симметрии (3). Например, физическая система с гамильтонианом

$$\hat{H}=\hat{p}^2+\hat{x}^2\hat{p} \qquad (\Pi 2.3)$$

является PT-симметричной, но не псевдоэрмитовой с оператором $\hat{S}=\hat{P}$ [29], и, наоборот, система с гамильтонианом

$$\hat{H}=\hat{p}^2+\mathrm{i}(\hat{x}^2\hat{p}+\hat{p}\hat{x}^2) \qquad (\Pi 2.4)$$

является псевдоэрмитовой с оператором $\hat{S}=\hat{P}$, но не PT-симметричной [29].

Для оптических PT-симметричных систем уравнение Гельмгольца можно свести к уравнению Шрёдингера с гамильтонианом

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)\,, \qquad (\Pi 2.5)$$

где $\hat{p}=\partial/\partial x+\ldots$, $V(x)=(\omega/c)^2\varepsilon(x)$ и $-\hbar^2/(2m)\to 1$. Поскольку этот гамильтониан удовлетворяет условию

[11] Примером такого гамильтониана являются гамильтонианы, в которых потенциал $V(x)$ не зависит от времени и отсутствуют члены, включающие в себя произведение импульса на координату ($\hat{p}\hat{x}, \hat{p}^2\hat{x}, \hat{p}\hat{x}^2, \ldots$). К таким гамильтонианам относится и простейший гамильтониан $\hat{H}=\hat{p}^2/(2m)+V(\hat{x})$.

$\hat{H}^{+} = \hat{T}\hat{H}\hat{T}$, в оптике PT-симметричные системы являются частным случаем псевдоэрмитовых систем.

П3. Ограничения, вносимые принципом причинности. Соотношения Крамерса – Кронига и возможность существования псевдоэрмитовых оптических систем в конечном интервале частот

В оптику понятие псевдоэрмитовости системы может быть введено аналогично тому, как это делается для условия PT-симметрии (3). В двумерном и одномерном случаях уравнения Максвелла сводятся к скалярному уравнению Гельмгольца [40]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x,z)\right) E(x,z) = 0\,, \tag{П3.1а}$$

которое формально совпадает со стационарным уравнением Шрёдингера

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi_k(x,z) - \frac{2m\big(V(x,z) - E_k\big)}{\hbar^2}\, \psi_k(x,z) = 0\,, \tag{П3.1б}$$

если сделать замену $V(x,z) - E_k \to (\omega/c)^2 \varepsilon(x,z)$, $\psi_k(x,z) = E(x,z)$, $-\hbar^2/(2m) \to 1$.

В квантовой механике условие псевдоэрмитовости (П2.1) для системы, описываемой уравнением Шрёдингера (П3.1б), сводится к требованию для потенциальной энергии $V^*(x,z) = \hat{S}V(x,z)\hat{S}$. По аналогии между потенциальной энергией в квантовой механике и диэлектрической проницаемостью в оптике условие псевдоэрмитовости оптической системы можно определить как условие, налагаемое на диэлектрическую проницаемость:

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) = \hat{S}\big(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r})\big)\hat{S}\,, \tag{П3.2а}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) = -\hat{S}\big(\operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{r})\big)\hat{S}\,. \tag{П3.2б}$$

Из определения псевдоэрмитовости (П3.2) видно, что любая псевдоэрмитова оптическая система состоит из усиливающих и поглощающих сред (П3.2б), в то же время при рассмотрении оптической системы с усилением/поглощением существенную роль играет частотная дисперсия диэлектрической проницаемости; для усиливающей среды её учёт принципиально важен. Действительно, если пренебречь дисперсией усиливающей среды, то в любой сколь угодно малой структуре будет наблюдаться лазерная генерация на высоких частотах, на которых оптическая толщина гораздо больше [46, 57], чем на низких частотах.

Диэлектрическая проницаемость является функцией отклика среды на падающее излучение, и, как любая функция отклика, она должна быть причинной (аналитической в верхней полуплоскости комплексных частот). Из требования, чтобы диэлектрическая проницаемость была аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексных частот, следует, что действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости должны быть связаны соотношениями Крамерса – Кронига [42]:

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega',\mathbf{r})}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega'\,, \tag{П3.3а}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\varepsilon(\omega',\mathbf{r}) - \varepsilon_0}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega'\,, \tag{П3.3б}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. С помощью соотношений Крамерса – Кронига можно показать, что условие PT-симметричности системы (П3.2) выполняется только при дискретном наборе частот.

В самом деле, если для мнимой части диэлектрической проницаемости условие псевдоэрмитовости системы (П3.2б) выполняется при любых действительных частотах, то

$$\hat{S}\big(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r})\big)\hat{S} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}\big(\operatorname{Im}\varepsilon(\omega',\mathbf{r})\big)\hat{S}}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega' = \\ = \varepsilon_0 - \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega',\mathbf{r})}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega'\,. \tag{П3.4}$$

Для выполнения условия псевдоэрмитовости системы для действительной части диэлектрической проницаемости необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) = \hat{S}(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}))\hat{S}$. Сравнивая выражения для $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,\mathbf{r})$ (П3.3а) и для $\hat{S}(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega,-\mathbf{r}))\hat{S}$ (П3.4), видим, что они различаются только знаком перед интегралом. Следовательно, условие псевдоэрмитовости системы для действительной части диэлектрической проницаемости для всех действительных частот может выполняться только при справедливости тождества

$$\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega',\mathbf{r})}{\omega'-\omega}\,\mathrm{d}\omega' \equiv 0\,, \tag{П3.5}$$

что возможно лишь для полностью прозрачной системы $(\operatorname{Im}\varepsilon(\omega,\mathbf{r}) \equiv 0)$.

Следуя логике раздела 3.2, несложно показать, что условие псевдоэрмитовости системы не может выполняться и в любом конечном диапазоне частот. Таким образом, условие псевдоэрмитовости системы может выполняться только для дискретного набора частот.

П4. Ортогональность собственных векторов матрицы рассеяния для взаимной системы

Пусть ϕ_k^i — i-й собственный вектор матрицы рассеяния s_{nk} с собственным значением s^i:

$$s_{nk}\phi_k^{(i)} = s^{(i)}\phi_n^{(i)}\,, \tag{П4.1}$$

где по индексам, заключённым в скобки, суммирование не ведётся. Уравнение (П4.1) можно представить в виде

$$\big(\phi_k^{(j)}\big)^{\mathrm{T}} s_{kn} = s^{(j)}\big(\phi_n^{(j)}\big)^{\mathrm{T}}\,. \tag{П4.2}$$

Умножив обе части уравнения (П4.1) на $(\phi_n^{(j)})^{\mathrm{T}}$, а обе части уравнения (П4.2) — на $\phi_n^{(i)}$ и вычтя из первого второе, получим

$$\big(s^{(i)} - s^{(j)}\big)\big(\phi_n^{(j)}\big)^{\mathrm{T}}\phi_n^{(i)} = (\phi_n^j)^{\mathrm{T}}(s_{nk} - s_{kn})\,\phi_k^i\,. \tag{П4.3}$$

Матрица рассеяния взаимной среды симметрична, $s_{nk} = s_{kn}$ [64], поэтому если собственные значения различны, то собственные векторы матрицы рассеяния ортогональны:

$$(\phi_n^j)^{\mathrm{T}}\phi_n^i = 0\,. \tag{П4.4}$$

В случае одномерных PT-симметричных оптических систем собственные значения матрицы рассеяния совпадают между собой только в точке фазового перехода (см.

раздел 5.1 и [53]) от PT-симметричных собственных векторов к PT-несимметричным. В этом случае выбор собственных векторов произволен, и их всегда можно выбрать ортогональными друг другу [39].

П5. Свойства матрицы *c*

Рассмотрим некоторые важные для раздела 5.1 результаты. Из (76) следует, что матрица c^{ij} есть матричное представление оператора $\hat{P}\hat{T}$ в базисе собственных функций матрицы рассеяния $\phi_k^{(i)}$,

$$\hat{P}\hat{T}\phi_k^i = c^{ij}\phi_k^j \,, \tag{П5.1}$$

поэтому матрица c^{ij} обладает теми же свойствами, что и оператор $\hat{P}\hat{T}$. Например, из соотношений $(\hat{P}\hat{T})^2 = \hat{1}$ и $(\hat{P}\hat{T})^+ = \hat{P}\hat{T}$ следует, что $c^{ij}c^{jl} = \delta^{il}$ и $(c^{ij})^* = c^{ji}$. Из эрмитовости матрицы c^{ij} следует, что c^{11}, c^{22} действительны и $c^{12} = (c^{21})^*$. Из матричного уравнения $c^{ij}c^{jl} = \delta^{il}$ получаем

$$(c^{11})^2 + c^{12}c^{21} = 1 \,, \tag{П5.2а}$$

$$c^{12}(c^{11} + c^{22}) = 0 \,, \tag{П5.2б}$$

$$c^{21}(c^{11} + c^{22}) = 0 \,, \tag{П5.2в}$$

$$(c^{22})^2 + c^{12}c^{21} = 1 \,. \tag{П5.2г}$$

Из уравнений (П5.2а) и (П5.2г) видно, что $c^{11} = \pm c^{22}$.

Если $c^{11} = c^{22}$, то из (П5.2б) и (П5.2в) следует, что $c^{12} = c^{21} = 0$. В этом случае $c^{11} = c^{22} = \pm 1$ и

$$c = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{П5.3}$$

Если $c^{11} = -c^{22}$, то уравнения (П5.2б) и (П5.2в) не накладывают дополнительных ограничений на c^{12} и c^{21}. При этом из условия $c^{12} = (c^{21})^*$ и уравнения (П5.2) следует, что

$$(c^{11})^2 + |c^{12}|^2 = 1 \,, \tag{П5.4а}$$

$$(c^{11})^2 + |c^{21}|^2 = 1 \,. \tag{П5.4б}$$

Благодаря тому что $c^{11} \in \mathbb{R}$ и $c^{11} = -c^{22}$, матрицу можно представить в виде

$$c = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\exp(\mathrm{i}\phi) \\ \sin\theta\exp(-\mathrm{i}\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{П5.5}$$

где θ и ϕ — произвольные действительные числа.

П6. Симметричность матрицы рассеяния оптической системы как следствие леммы Лоренца

Для линейных оптических систем, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых не зависят явно от времени и являются скалярами или симметричными тензорами ($\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$, $\mu_{\mu\nu} = \mu_{\nu\mu}$), выполняется лемма Лоренца [64], связывающая электрические и магнитные поля $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$, создаваемые электрическими и магнитными токами j_i^{e}, j_i^{m}, $i = \{1; 2\}$,

$$\int_S \big(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\big)\,\mathrm{d}S = \int_V \big(j_1^{\mathrm{m}}H_2 - j_2^{\mathrm{m}}H_1 + j_1^{\mathrm{e}}E_2 - j_2^{\mathrm{e}}E_1\big)\,\mathrm{d}V. \tag{П6.1}$$

Из леммы Лоренца следует, что матрица рассеяния системы симметрична:

$$s_{\mu\nu} = s_{\nu\mu} \,. \tag{П6.2}$$

Проведём доказательство для многомодового волновода с двумя открытыми концами, которые условно будем называть левым и правым. Пусть распределение полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ в сечении левого конца волновода совпадает с одной из собственных мод μ волновода и соответствует распространению слева направо, $\mathbf{E}_1^{\mathrm{l}} = \mathbf{E}_\mu^{(+)}$, $\mathbf{H}_1^{\mathrm{l}} = \mathbf{H}_\mu^{(+)}$, а в сечении правого конца волновода равно сумме по всем собственным модам волновода с неизвестными коэффициентами $\mathbf{E}_1^{\mathrm{r}} = \sum_{\kappa=1}^N s_{\mu\kappa}\mathbf{E}_\kappa^{(+)}$, $\mathbf{H}_1^{\mathrm{r}} = \sum_{\kappa=1}^N s_{\mu\kappa}\mathbf{H}_\kappa^{(+)}$. Пусть также распределение полей $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ в сечении правого конца волновода совпадает с одной из собственных мод ν волновода и соответствует распространению справа налево, $\mathbf{E}_2^{\mathrm{r}} = \mathbf{E}_\nu^{(-)}$, $\mathbf{H}_2^{\mathrm{r}} = \mathbf{H}_\nu^{(-)}$, а в сечении левого конца волновода равно сумме по всем собственным модам волновода с неизвестными коэффициентами[12]: $\mathbf{E}_2^{\mathrm{l}} = \sum_{\kappa=1}^N s_{\nu\kappa}\mathbf{E}_\kappa^{(-)}$, $\mathbf{H}_2^{\mathrm{l}} = \sum_{\kappa=1}^N s_{\nu\kappa}\mathbf{H}_\kappa^{(-)}$.

Выберем объём интегрирования в уравнении (П6.1) таким образом, чтобы волновод лежал внутри этого объёма и поверхность интегрирования пересекала волновод только по сечениям открытых концов волновода. Будем также считать, что в пределах объёма интегрирования нет внешних электрических и магнитных токов. В этом случае выражение (П6.1) преобразуется в следующее:

$$\int_{S^{\mathrm{l}}} \big(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\big)\,\mathrm{d}S = \int_{S^{\mathrm{r}}} \big(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\big)\,\mathrm{d}S \,, \tag{П6.3}$$

где S^{l} и S^{r} — поверхности сечений левого и правого концов волновода. Подставив выражения для полей $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ в левом и правом сечении волновода, получим

$$\int_{S^{\mathrm{l}}} \left[\mathbf{E}_\mu^{(+)}\times\left(\sum_{\kappa=1}^N s_{\nu\kappa}\mathbf{H}_\kappa^{(-)}\right) - \left(\sum_{\kappa=1}^N s_{\nu\kappa}\mathbf{E}_\kappa^{(-)}\right)\times\mathbf{H}_\mu^{(+)}\right]\mathrm{d}S = \int_{S^{\mathrm{r}}} \left[\left(\sum_{\kappa=1}^N s_{\mu\kappa}\mathbf{E}_\kappa^{(+)}\right)\times\mathbf{H}_\nu^{(-)} - \mathbf{E}_\nu^{(-)}\times\left(\sum_{\kappa=1}^N s_{\mu\kappa}\mathbf{H}_\kappa^{(+)}\right)\right]\mathrm{d}S \,. \tag{П6.4}$$

Вынося суммы за скобки,

$$\sum_{\kappa=1}^N s_{\nu\kappa}\int_{S^{\mathrm{l}}} \big(\mathbf{E}_\mu^{(+)}\times\mathbf{H}_\kappa^{(-)} - \mathbf{E}_\kappa^{(-)}\times\mathbf{H}_\mu^{(+)}\big)\,\mathrm{d}S = \sum_{\kappa=1}^N s_{\mu\kappa}\int_{S^{\mathrm{r}}} \big(\mathbf{E}_\kappa^{(+)}\times\mathbf{H}_\nu^{(-)} - \mathbf{E}_\nu^{(-)}\times\mathbf{H}_\kappa^{(+)}\big)\,\mathrm{d}S \,, \tag{П6.5}$$

и воспользовавшись тем, что для волновода с постоянным сечением можно нормировать амплитуды собствен-

[12] Для мод с одинаковыми индексами, но разным направлением распространения выполняется условие $\mathbf{E}_\mu^{(+)}\times\mathbf{H}_\mu^{(+)} = -\mathbf{E}_\mu^{(-)}\times\mathbf{H}_\mu^{(-)}$.

ных мод так, чтобы выполнялось условие [64]

$$\int_{S^1, S^r} \left(\mathbf{E}_\mu^{(+)} \times \mathbf{H}_\nu^{(-)} - \mathbf{E}_\nu^{(-)} \times \mathbf{H}_\mu^{(+)} \right) \mathrm{d}S = \delta_{\mu\nu} ,$$

получим

$$s_{\nu\mu} \int_{S^1} \left(\mathbf{E}_\mu^{(+)} \times \mathbf{H}_\mu^{(-)} - \mathbf{E}_\mu^{(-)} \times \mathbf{H}_\mu^{(+)} \right) \mathrm{d}S = \\ = s_{\mu\nu} \int_{S^r} \left(\mathbf{E}_\nu^{(+)} \times \mathbf{H}_\nu^{(-)} - \mathbf{E}_\nu^{(-)} \times \mathbf{H}_\nu^{(+)} \right) \mathrm{d}S , \qquad (\Pi 6.6)$$

$$s_{\nu\mu} = s_{\mu\nu} . \qquad (\Pi 6.7)$$

Так как равенство (П6.7) верно при любых μ и ν, матрица рассеяния системы симметрична относительно перестановки индексов.

Список литературы

1. Vinogradov A P, Romanenko V E, in *4th Intern. Conf. on Chiral, Bi-Isotropic, and Bianisotropic Media* (Eds A Sihvola et al.) (State College: The Pennsylvania State Univ., 1995) p. 143
2. Pendry J B et al. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 2075 (1999)
3. Lagarkov A N et al. *J. Electromagn. Waves Appl.* **6** 1159 (1992)
4. Lagarkov A N, Sarychev A K *Phys. Rev. B* **53** 6318 (1996)
5. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967); Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)
6. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
7. Виноградов А П *Электродинамика композитных материалов* (М.: УРСС, 2001)
8. Belov P A et al. *Phys. Rev. B* **67** 113103 (2003)
9. Климов В В *Наноплазмоника* (М.: Физматлит, 2010)
10. Joannopoulos J D, Villeneuve P R, Fan S *Nature* **386** 143 (1997)
11. Joannopoulos J D et al. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2011)
12. Cao H et al. *Phys. Rev. Lett.* **82** 2278 (1999)
13. Vinogradov A P, Dorofeenko A V *Opt. Commun.* **256** 333 (2005)
14. ШатровАД*Радиотехникаиэлектроника***52**909(2007);ShatrovAD *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 842 (2007)
15. Шатров А Д *Радиотехника и электроника* **52** 1430 (2007); Shatrov A D *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 1324 (2007)]
16. Ramakrishna S A et al. *J. Mod. Opt.* **50** 1419 (2003)
17. Xiao S et al. *Nature* **466** 735 (2010)
18. Лагарьков А Н и др. *УФН* **179** 1018 (2009); Lagarkov A N et al. *Phys. Usp.* **52** 959 (2009)
19. Noginov M A et al. *Opt. Lett.* **31** 3022 (2006)
20. Noginov M A et al. *Opt. Express* **16** 1385 (2008)
21. Popov A K, Shalaev V M *Opt. Lett.* **31** 2169 (2006)
22. Sarychev A K, Pukhov A A, Tartakovsky G *PIERS Online* **3** 1264 (2007)
23. Wuestner S et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 127401 (2010)
24. Yu Z et al. *Appl. Phys. Lett.* **92** 041117 (2008)
25. El-Ganainy R et al. *Opt. Lett.* **32** 2632 (2007)
26. Makris K G et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904 (2008)
27. Klaiman S, Günther U, Moiseyev N *Phys. Rev. Lett.* **101** 080402 (2008)
28. Bender C M, Boettcher S *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243 (1998)
29. Mostafazadeh A *J. Math. Phys.* **43** 205 (2002)
30. Bender C M, Brody D C, Jones H F *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401 (2002)
31. Bender C M *Rep. Prog. Phys.* **70** 947 (2007)
32. Weigert S *Phys. Rev. A* **68** 062111 (2003)
33. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2006); Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1982)
34. Weinberg S *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003); Вайнберг С *Квантовая теория поля* (М.: Физматлит, 2003)
35. Wigner E P, in *Seminar on Theoretical Physics, Trieste, July 16 – August 25, 1962* (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1963) p. 59
36. Kaempffer F A *Concepts in Quantum Mechanics* (New York: Academic Press, 1965); Кемпфер Ф *Основные положения квантовой механики* (М.: URSS, 2007)
37. Боголюбов Н Н *Собрание научных трудов* Т. 9 *Квантовая теория поля 1949 – 1966* (Ред.-сост. А Д Суханов) (М.: Наука, 2007)
38. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Физматлит, 2005); Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980); Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамикасплошныхсред*(М.:ГИФМЛ,1959);LandauLD, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1960)
39. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2004); Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
40. Burckhardt C B *J. Opt. Soc. Am.* **56** 1502 (1966)
41. Виноградов А П и др. *УФН* **180** 249 (2010); Vinogradov A P et al. *Phys. Usp.* **53** 243 (2010)
42. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005); Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
43. Zyablovsky A A et al. *Phys. Rev. A* **89** 033808 (2014)
44. Ablowitz M J, Fokas A S *Complex Variables: Introduction and Applications* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1997)
45. Solimeno S, Crosignani B, DiPorto P *Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation* (Orlando: Academic Press, 1986); Солимено С, Крозиньяни Б, Ди Порто П *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989)
46. Дорофеенко А В и др. *УФН* **182** 1157 (2012); Dorofeenko A V et al. *Phys. Usp.* **55** 1080 (2012)
47. Бреховских Л М *Волны в слоистых средах* (М.: Наука, 1973); Brekhovskikh L M *Waves in Layered Media* (New York: Academic Press, 1980)
48. Рытов С М *ЖЭТФ* **29** 605 (1955); Rytov S M *Sov. Phys. JETP* **2** 466 (1956)
49. Guo A et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902 (2009)
50. Haus H A, Huang W *Proc. IEEE* **79** 1505 (1991)
51. Yariv A *IEEE J. Quantum Electron.* **9** 919 (1973)
52. Fan S et al. *Science* **335** 38 (2012)
53. Chong Y D, Ge L, Stone A D *Phys. Rev. Lett.* **106** 093902 (2011)
54. Longhi S *Phys. Rev. A* **82** 031801(R) (2010)
55. Lin Z et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901 (2011)
56. Ge L, Chong Y D, Stone A D *Phys. Rev. A* **82** 063824 (2010)
57. Zyablovsky A A et al. *Photon. Nanostruct. Fundament. Appl.* **9** 398 (2011)
58. Chong Y D et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 053901 (2010)
59. Liertzer M et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 173901 (2012)
60. Белов П А и др., в сб. *Проблемы когерентной и нелинейной оптики* (Под ред. И П Гурова, С А Козлова) (СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006) с. 6
61. Tucker R S *Nature Photon.* **4** 405 (2010)
62. Feng L et al. *Science* **333** 729 (2011)
63. Jalas D et al. *Nature Photon.* **7** 579 (2013)

64. Каценеленбаум Б З *Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами* (М.: Изд-во АН СССР, 1961)
65. Chtchelkatchev N M et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 150405 (2012)
66. Sukhorukov A A, Xu Z, Kivshar Y S *Phys. Rev. A* **82** 043818 (2010)
67. Dmitriev S V et al. *Phys. Rev. A* **84** 013833 (2011)
68. Suchkov S V et al. *Phys. Rev. E* **84** 046609 (2011)
69. Sukhorukov A A et al. *Opt. Lett.* **37** 2148 (2012)
70. Suchkov S V et al. *Phys. Rev. A* **85** 033825 (2012)
71. Barashenkov I V et al. *Phys. Rev. A* **86** 053809 (2012)

PT-symmetric in optics

A.A. Zyablovsky
All-Russian Research Institute of Automatics,
ul. Sushchevskaya 22, 127055 Moscow, Russian Federation;
Moscow Institute of Physics and Technology (*State University*),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation
Tel./Fax +7 (*495*) *408 72 77. E-mail*: *info@mipt.ru*
A.P. Vinogradov, A.A. Pukhov, A.V. Dorofeenko
Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics, Russian Academy of Sciences,
ul. Izhorskaya 13, 125412 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (*495*) *484 23 83. Fax* +7 (*495*) *484 26 33. E-mail*: *itae@itae.ru*
Moscow Institute of Physics and Technology (*State University*),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation
Tel./Fax +7 (*495*) *408 72 77. E-mail*: *info@mipt.ru*
All-Russian Research Institute of Automatics,
ul. Sushchevskaya 22, 127055 Moscow, Russian Federation
A.A. Lisyansky
Department of Physics, Queens College of the City University of New York,
Flushing, New York 11367, USA
Tel./Fax +*718 997 3371*

Quantum-mechanical and optical pseudo-Hermitian systems are reviewed with emphasis on PT-symmetric systems important for optics and electrodynamics. One of the most interesting and much discussed consequences of PT-symmetry is a phase transition with the breaking of the symmetry of the system's eigenstates. We show in the review that, although this phase transition is difficult to realize experimentally, a similar transition can be observed in quasi-PT-symmetric systems. Other effects predicted for PT-symmetric systems are not specific for these systems and can be observed in ordinary fully-passive systems.

PACS numbers: 03.65.Ca, 41.20.Jb, **42.79.–e** DOI: 10.3367/UFNr.0184.201411b.1177

Bibliography — 71 references *Received 11 February 2014, revised 16 April 2014*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (11) 1177–1198 (2014) *Physics–Uspekhi* **57** (11) (2014)