

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Фазовые картины диспергирующих волн
от движущихся локализованных источников

П.Н. Свиркунов, М.В. Калашник

Предложен общий подход, позволяющий описывать фазовую структуру волновых возмущений от движущихся локализованных источников, опираясь только на закон дисперсии волн. В рамках предложенного подхода получено простое аналитическое представление для фазовых поверхностей. На основе этого представления исследованы особенности фазовой картины гравитационно-капиллярных волн, структуры волнового шлейфа в океане за движущимся тропическим циклоном (ураганом) и системы подветренных волн в атмосфере Земли.

PACS numbers: 47.10. – g, 47.35. – i, 47.35.Bb, 47.35.Pq

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201401d.0089

Содержание

1. Введение (89).
 2. Уравнения для фазовых поверхностей. Метод стационарной фазы (90).
 3. Метод гамильтоновых уравнений (92).
 4. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости (93).
 5. Волновой след за движущимся ураганом (94).
 6. Подветренные волны (95).
 7. Обтекание в отсутствие фонового вращения (97).
 8. Асимметрия волнового следа за ураганом в присутствии β -эффекта (98).
 9. Заключение (99).
 10. Приложение (100).
- Список литературы (100).

1. Введение

Распространение диспергирующих волн в сплошных средах имеет особенности, связанные с зависимостью скорости распространения от длины волны. Так, если в такой среде равномерно перемещается некоторый источ-

ник возмущения, то он создаёт вокруг себя волновую картину, основными особенностями которой являются поверхности (или линии — в двумерном случае) постоянной фазы. Структура этой картины на расстояниях, много больших размеров источника, практически не зависит от его формы и определяется в основном законом дисперсии и скоростью перемещения источника. Хорошо известный пример волновой картины даёт система корабельных волн, образующаяся при движении источника по поверхности глубокой воды (рис. 1). Ещё одна яркая картина (рис. 2, 3) — система подветренных волн, возникающих в атмосфере Земли при обтекании потоком орографических неоднородностей (изолированных гор, островов в океане). В формировании этой картины участвуют инерционно-гравитационные волны (ИГВ), обусловленные плотностной стратификацией атмосферы и её вращением как целого [1, 2].

П.Н. Свиркунов, ФГБУ НПО "Тайфун",
ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл.,
Российская Федерация

E-mail: ps@typhoon.obninsk.ru

М.В. Калашник, ФГБУ НПО "Тайфун",
ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл.,
Российская Федерация;

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация;
Обнинский институт атомной энергетики —
филиал НИЯУ "МИФИ", Студгородок 1, 249040 Обнинск,
Калужская обл., Российская Федерация
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Статья поступила 12 июля 2013 г.,
после доработки 19 сентября 2013 г.



Рис. 1. Картина корабельных волн. Канал им. Москвы, Икшинское водохранилище, 18.08.2013 (фото О.С. Калашник).

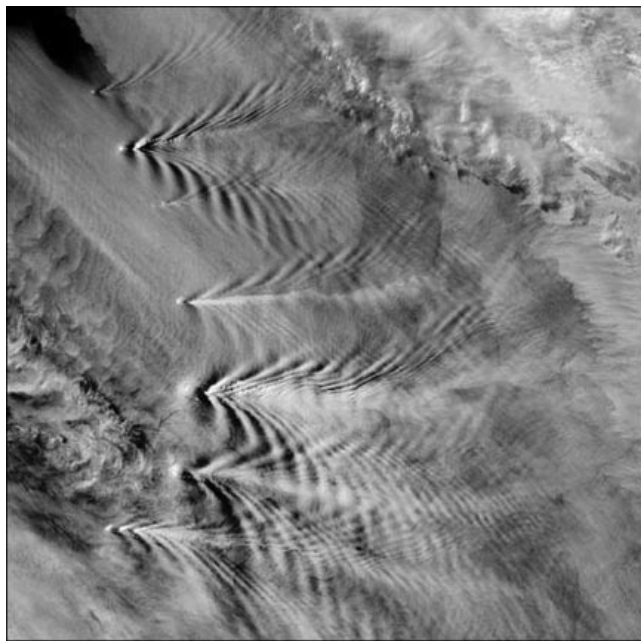


Рис. 2. Атмосферные гравитационные волны за Южными Сандвичевыми островами в Южной Атлантике (58° ю.ш., 36° з.д.) на снимке спутника Aqua (02.11.2004, 20:15 UTC) (UTC — Universal Time Coordinate, универсальное время (по Гринвичу)). Площадь наибольшего острова 110 км^2 , максимальная высота над уровнем моря 1372 м . (Фото NASA GSFC, сайт <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=651>.)

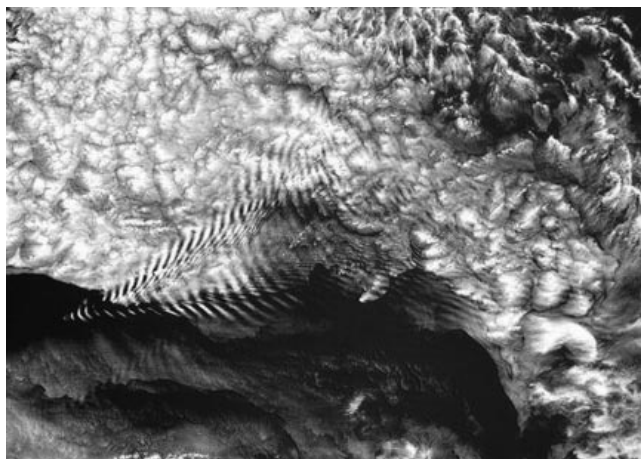


Рис. 3. Атмосферные гравитационные волны за о. Амстердам в Индийском океане на снимке спутника Terra (19.12.2005, 04:50 UTC). (Фото NASA GSFC, сайт <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=4174>.)

Описание волновой картины от движущегося источника представляет одну из классических задач теории волн. Для сравнительно простых случаев — гравитационных или капиллярных волн на поверхности жидкости — структуру волновой картины можно получить элементарными средствами, рассматривая источник как последовательность мгновенных воздействий, создающих круговые волны, и используя геометрические построения огибающих волновых фронтов [3, 4]. В общем случае используется решение волнового уравнения с движущимся источником, представленное в форме

фурье-интеграла, и его асимптотический анализ на основе метода стационарной фазы [5, 6]. Такой подход даёт достаточно полное описание волновых полей, однако для задачи определения фазовой структуры волновых возмущений он может оказаться излишне громоздким. Кроме того, на его основе трудно учесть возможную неоднородность и нестационарность среды.

В настоящей статье предлагается простой аналитический подход, позволяющий описывать фазовую структуру волновых возмущений, не обращаясь к решению волновых уравнений, а опираясь только на заданный закон дисперсии волн. Из методических соображений мы рассматриваем два варианта подхода. Первый вариант, пригодный для однородных и стационарных сред, опирается на общие соображения о фурье-представлении волновых полей и методе стационарной фазы. В другом, более общем варианте, позволяющем учесть слабую неоднородность и нестационарность среды, используется коротковолновое (эйкональное) приближение и гамильтоновы уравнения для описания динамики волновых пакетов [5–7].

Предложенный подход иллюстрируется на примере гравитационно-капиллярных волн, а также в решении двух важных геофизических задач — описания фазовой картины подветренных волн в атмосферах планет и структуры волнового шлейфа в океане за движущимся тропическим циклоном (ураганом). Обширная литература, посвящённая этим задачам, содержится, например, в [8, 9] и [10, 11] соответственно.

2. Уравнения для фазовых поверхностей. Метод стационарной фазы

Рассмотрим покоящуюся однородную среду, в которой перемещается локальный источник возмущения с постоянной скоростью \mathbf{U} . Предполагается, что в среде могут распространяться волны с заданным законом дисперсии

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где ω — циклическая частота, \mathbf{k} — волновой вектор. В общем случае закон дисперсии задаётся неявным соотношением $B(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Данное соотношение, как и (1), получается из условия разрешимости однородных волновых уравнений для решений вида плоских волн $A \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$.

Удобно проводить рассмотрение в системе отсчёта, связанной с источником, который считаем находящимся в начале координат. В этой системе среда движется со скоростью $-\mathbf{U}$, а дисперсионное соотношение (1) принимает вид [7]

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{U}. \quad (2)$$

Для стационарных источников, которые мы и будем рассматривать, $\omega = 0$ и из (2) следует условие для волновых векторов, формирующих фазовую картину (условие излучения):

$$\Omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{U}. \quad (3)$$

или, в более общей форме, $B(\mathbf{k}\mathbf{U}, \mathbf{k}) = 0$. Множество векторов \mathbf{k} , удовлетворяющих условию (3), представляет собой некоторую поверхность в пространстве волновых векторов (линию в двумерном случае), которую

можно задать в параметрическом виде, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta)$, где α, β — параметры. В качестве таковых можно использовать какие либо две компоненты k_1, k_2 волнового вектора, значения которых определяют третью компоненту из уравнения (3). Для других параметризаций будем требовать выполнения естественного условия — отличия от нуля якобиана преобразования от переменных (k_1, k_2) к (α, β) .

Уравнения для фазовых поверхностей получаем, опираясь на следующие соображения. Если искать решение волнового уравнения со стационарным источником в виде разложения по плоским волнам $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, то результат можно представить в виде [6]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \frac{Q(\mathbf{k})}{B(\mathbf{k}\mathbf{U}, \mathbf{k})} d\mathbf{k}.$$

Здесь $\psi(\mathbf{r})$ — некоторая компонента волнового поля, функция $Q(\mathbf{k})$ пропорциональна фурье-компоненте функции источника, а в знаменателе фигурирует функция, обращающаяся в нуль для волновых векторов, удовлетворяющих условию излучения (3). Правильное вычисление интеграла при наличии такой особенности опирается на принцип причинности (при $t \rightarrow -\infty$ возмущения отсутствуют) и реализуется путём добавления бесконечно малой комплексной добавки к слагаемому $\mathbf{k}\mathbf{U}$. Интегрирование вначале можно провести по одной компоненте, используя теорему о вычетах. При интегрировании по оставшимся проекциям волнового вектора, которые обозначим k_1, k_2 , используется метод стационарной фазы (детали вычислений см. в [6]). Условие стационарности фазы $S = \mathbf{k}\mathbf{r}$ теперь следует записывать с учётом того, что вектор \mathbf{k} принадлежит поверхности (3). Используя параметризацию поверхности (α, β) , данное условие можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \beta} = 0.$$

Отсюда следует, что поскольку векторы $\partial \mathbf{k} / \partial \alpha, \partial \mathbf{k} / \partial \beta$ лежат в плоскости, касательной к поверхности волновых векторов (3), то вектор \mathbf{r} перпендикулярен этой плоскости, т.е. параллелен вектору нормали к этой поверхности, или, что равносильно, вектору $\partial(\Omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{U}) / \partial \mathbf{k} = \mathbf{V}_g - \mathbf{U}$, где $\mathbf{V}_g = \partial \Omega / \partial \mathbf{k}$ — вектор групповой скорости в неподвижной среде.

Таким образом, можно записать: $\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{V}_g - \mathbf{U})$. Параметр λ определим из условия, что в точках фазовой поверхности $S = \mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$. Отсюда $\lambda = S / (\mathbf{k}\mathbf{V}_g - \mathbf{k}\mathbf{U})$. Подставляя данное λ в выражение для \mathbf{r} , с учётом (3) окончательно получаем параметрические уравнения фазовой поверхности:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) - \mathbf{U}}{\mathbf{k}\mathbf{V}_g - \Omega(\mathbf{k})} S, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta). \quad (4)$$

Для случая неявного задания закона дисперсии фазовая поверхность описывается уравнениями

$$\mathbf{r} = \frac{S(\partial B / \partial \mathbf{k})}{\mathbf{k} \partial B / \partial \mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta),$$

где $B = B(\mathbf{k}\mathbf{U}, \mathbf{k})$. Учитывая, что в этом случае групповая скорость определяется выражением

$$\mathbf{V}_g = - \frac{(\partial B / \partial \mathbf{k})_\omega}{(\partial B / \partial \omega)_\mathbf{k}},$$

нетрудно показать, что последние уравнения сводятся к уравнениям (4). Из приведённых условий стационарности фазы и определения огибающей [12] следует, что фазовые поверхности являются огибающими двухпараметрического семейства плоскостей $\mathbf{r}\mathbf{k}(\alpha, \beta) = S = \text{const}$.

Отметим, что уравнения (4) можно получить и другим способом, опираясь на два условия [13]: а) фаза $S = \mathbf{k}\mathbf{r}$ постоянна на фазовых поверхностях (гребнях и впадинах волновой структуры); б) как функция волнового вектора \mathbf{k} фаза S стационарна при выполнении условия (3). Действительно, в соответствии с условием б) фазовые поверхности находятся из решения задачи на условный экстремум $S = \mathbf{k}\mathbf{r} + \lambda(\mathbf{k}\mathbf{U} - \Omega(\mathbf{k})) \rightarrow \text{extr}$, где λ — лагранжеев множитель. Отсюда сразу следует, что $\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) - \mathbf{U})$. Определяя λ из условия а) и подставляя его в последнее выражение, получаем уравнения (4).

Подчёркнём общий характер уравнений (4). При заданном законе дисперсии определение фазовой поверхности сводится лишь к выбору удобной параметризации поверхности волновых векторов (3). Имеется, однако, случай, когда уравнения (4) неприменимы, а именно, когда $\Omega(\mathbf{k})$ является однородной функцией \mathbf{k} первой степени. При этом условии знаменатель правой части (4) тождественно обращается в нуль вследствие теоремы Эйлера об однородных функциях. Важным примером является закон дисперсии для акустических волн в движущейся среде: $\omega = c_s k + \mathbf{k}\mathbf{V}$, где c_s — скорость звука в неподвижной среде, \mathbf{V} — скорость движения среды, $k = |\mathbf{k}|$.

Проиллюстрируем использование уравнений (4) на примере описания фазовой картины гравитационных волн на поверхности жидкости (картины корабельных волн). В этом случае закон дисперсии $\Omega = \sqrt{gk}$, а условие излучения (3) запишется в виде $\sqrt{gk} = kU \cos \varphi$, где g — ускорение свободного падения, φ — угол между векторами \mathbf{U} и \mathbf{k} , который будем использовать как параметр. Из этого условия имеем $k = g / (U^2 \cos^2 \varphi)$. Выберем систему координат с осью x вдоль вектора \mathbf{U} и перпендикулярной ей осью y . С учётом того, что $\mathbf{V}_g = 0,5\sqrt{g/k^3} \mathbf{k}$, уравнения (4) в проекциях на оси x, y запишутся в виде

$$x = - \frac{2S}{\sqrt{gk}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \cos \varphi - U \right), \quad y = - \frac{S}{k} \sin \varphi.$$

Подставляя в эти уравнения выражение для k , получаем параметрические уравнения фазовых линий, формирующих известный волновой клин Кельвина [3, 4]:

$$\begin{aligned} x &= -Sg^{-1}U^2 \cos \varphi (2 - \cos^2 \varphi), \\ y &= -Sg^{-1}U^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

В связи с этими уравнениями можно напомнить классический результат Кельвина о независимости угла полураствора волнового клина θ от скорости движения источника. Тангенс этого угла определяется как максимальное значение функции

$$F(\varphi) = \frac{y}{x} = \frac{\tan \varphi}{2 \tan^2 \varphi + 1}. \quad (6)$$

Из (6) следует $\tan \theta = F_{\max} = 2^{-3/2}$, соответственно $\theta = 19^\circ 28'$.

Прежде чем переходить к дальнейшим обобщениям, обсудим условие (3), которое играет основную роль в

рассматриваемом вопросе. Данное условие означает, что при движении источника возбуждаются волны с абсолютной величиной фазовой скорости $\Omega(\mathbf{k})/k$, меньшей скорости движения источника. Оно также определяет угол между волновым вектором излучаемых волн и направлением движения источника. В электродинамике первое условие определяет возможность черенковского излучения, а угол (точнее, дополнение к нему до $\pi/2$) связывают с именем Маха. В статистической физике известно также и противоположное условие, записанное, правда, в других обозначениях: $U < \varepsilon(p)/p$, где $\varepsilon = \hbar\Omega$, $p = \hbar k$ — энергия и импульс элементарных возбуждений (фононов), U — скорость движения жидкости относительно твёрдой стенки. Это неравенство представляет собой критерий Ландау, определяющий условие сверхтекучести [14]. При его выполнении невозможна генерация фононов (волн) движущимся источником (стенкой капилляра).

3. Метод гамильтоновых уравнений

Рассмотрим теперь более общий случай слабонеоднородной и слабонестационарной среды [13, 15]. Эти термины, как обычно, означают, что характерные пространственные и временные масштабы неоднородности среды много больше характерных длин волн и периодов волновых возмущений. В этом случае дисперсионное уравнение дополнительно включает зависимость от координат и времени:

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t), \quad (7)$$

а частота и волновой вектор определяются соотношениями

$$\omega = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \nabla S. \quad (8)$$

Здесь S — фаза волны, которая вместе с амплитудой A задаёт представление, обобщающее плоские волны: $\psi = A(\mathbf{r}, t) \exp(iS(\mathbf{r}, t))$.

Уравнения для фазы и амплитуды получаются с использованием коротковолнового (эйконального) приближения [5, 7]. Для фазы формулируется уравнение в частных производных первого порядка, которое, разрешив его относительно $\partial S/\partial t$, можно представить в форме уравнения Гамильтона–Якоби. Для закона дисперсии (7) соответствующее уравнение получается подстановкой (8) в (7). Система уравнений для характеристик этого уравнения является гамильтоновой, где гамильтонианом является частота, а импульсом — волновой вектор. Этот подход аналогичен квазиклассическому приближению квантовой механики [16], а в теории волн носит название лучевой, или кинематической, теории.

В системе отсчёта, связанной с источником, уравнение для фазы можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Omega'(\nabla S, \mathbf{r}, t) - \mathbf{U} \nabla S = 0. \quad (9)$$

Данная запись отвечает дисперсионному соотношению

$$\omega = \Omega'(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{k} \mathbf{U}, \quad \Omega'(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{U}t, t). \quad (10)$$

Характеристическая система уравнений, вместе с уравнением для S , записывается как [5, 7]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_g - \mathbf{U}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \Omega'}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{V}_g = \frac{\partial \Omega'}{\partial \mathbf{k}}, \quad (11)$$

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{k} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \omega = \mathbf{k} \mathbf{V}_g - \Omega'. \quad (12)$$

Решение характеристической системы (11) ищется на некотором временном промежутке (t_0, t) . Начальные условия для неё формулируются с учётом того, что характеристики должны выходить из места положения источника возмущений, который находится в начале координат, а начальные волновые векторы должны удовлетворять условию излучения $\Omega'(\mathbf{k}, 0, t_0) = \mathbf{k} \mathbf{U}$, обобщающему условие (3) на случай слабонеоднородной и нестационарной среды. Считаем, что его можно представить в параметрической форме: $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta, t_0)$. Таким образом, начальные условия для системы (11) имеют вид

$$t = t_0: \quad \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta, t_0).$$

Алгоритм нахождения фазовой поверхности заключается в следующем. Обозначим решение системы (11) с заданными начальными условиями через $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t_0, \alpha, \beta)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t, t_0, \alpha, \beta)$. Подставляя эти выражения в правую часть (12) и интегрируя с начальным условием $S|_{t=t_0} = 0$, получаем выражение для фазы $S = S(t, t_0, \alpha, \beta)$. Здесь учтено, что, поскольку характеристики выходят из одной точки (центрированная волна [5]), фаза волны приобретает в процессе распространения и её начальное значение можно считать нулевым. Фиксируя определённое значение фазы S , из предыдущего соотношения определим соответствующий ему начальный момент времени $t_0 = t_0(S, t, \alpha, \beta)$, который подставим в выражение для \mathbf{r} . В результате получаем искомое представление фазовых поверхностей:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, S, \alpha, \beta).$$

Фазовая картина волн от источника будет нестационарной ("плывущей") даже для стационарной слабонеоднородной среды с законом дисперсии $\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Важный частный случай, при котором в такой среде формируется стационарная волновая картина, отвечает ситуации, когда частота $\Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ не зависит от координаты вдоль направления движения источника (циклической координаты). В этом случае в характеристической системе (11) $\Omega' = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ и отвечающая циклической координате компонента волнового вектора (импульса) не меняется со временем.

Проиллюстрируем рассмотренный подход на примере однородной стационарной среды, когда $\Omega' = \Omega(\mathbf{k})$. В этом случае уравнения (11), (12) элементарно интегрируются:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) - \mathbf{U})(t - t_0), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta), \quad (13)$$

$$S = (\mathbf{k} \mathbf{V}_g - \Omega(\mathbf{k}))(t - t_0).$$

Выразив множитель $t - t_0$ через S из последнего соотношения (13) и подставив его в первое, найдём параметрические уравнения фазовой поверхности:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) - \mathbf{U}}{\mathbf{k} \mathbf{V}_g - \Omega(\mathbf{k})} S, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\alpha, \beta), \quad (14)$$

ранее полученные из других соображений. Отметим, что из условия $t - t_0 > 0$ следует, что коэффициент при $V_g(\mathbf{k}) - U$ в (14) всегда неотрицателен.

Отметим также следующее обстоятельство. Для некоторых законов дисперсии знаменатель в (14) может обращаться в нуль для некоторого множества \mathbf{k} . Для этих значений \mathbf{k} скорость изменения фазы на траектории в соответствии с (12) равна нулю. Исключая отмеченный ранее случай тождественного обращения в нуль знаменателя, можно считать, что это множество также образует поверхность в пространстве \mathbf{k} . Её пересечение с поверхностью, задающей начальные условия (если оно существует), будет представлять некоторую линию $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\gamma, \beta(\gamma)) = \mathbf{k}_0(\gamma)$ (γ — соответствующий параметр). При $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0(\gamma)$ и $S \neq 0$, как следует из (13), $t - t_0 \rightarrow \infty$ и $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Участки фазовой поверхности при этом будут близки к конической поверхности с образующими $\mathbf{r} = [V_g(\mathbf{k}_0(\gamma)) - U]\xi$, $\xi \in (0, \infty)$. Для двумерного случая это будут прямые, проходящие через начало координат. Фаза как функция \mathbf{r} в этих точках будет иметь особенность, характер которой можно определить только на основе более полного анализа волновых уравнений. Обратим внимание, что для закона дисперсии $\Omega = \Omega(|\mathbf{k}|)$ условие $\mathbf{k}V_g - \Omega(\mathbf{k}) = 0$ означает равенство групповой и фазовой скоростей при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\gamma)$, а в общем случае — равенство проекции групповой скорости на направление \mathbf{k} и фазовой скорости. Стоит также отметить, что выполнение данного условия связано со стационарностью угла φ между волновым вектором излучаемой волны и скоростью источника как функции $|\mathbf{k}|$. Для закона дисперсии $\Omega = \Omega(|\mathbf{k}|)$ это тривиально устанавливается на основе соотношения (3), а общий случай рассмотрен в приложении.

В следующих разделах будут рассмотрены примеры использования полученных уравнений для анализа некоторых фазовых волновых картин. В геофизических приложениях для компонент волнового вектора вдоль соответствующих осей будем использовать обозначения k_x, k_y, k_z .

4. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости

Закон дисперсии для этих волн имеет вид [5, 7]

$$\Omega(k) = \sqrt{gk + \delta k^3}, \quad (15)$$

где g — ускорение свободного падения, δ — отношение коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости.

Используя модуль волнового вектора k в качестве параметра, запишем условие излучения (3) в виде

$$\cos \varphi = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{g}{k} + \delta k}. \quad (16)$$

Интервал изменения k определится из условия $\cos \varphi \leq 1$. Его границами будут

$$k_{1,2} = \frac{U^2 \pm \sqrt{U^4 - 4g\delta}}{2\delta}.$$

В этой задаче имеются два характерных параметра — волновое число $k_* = \sqrt{g/\delta}$ и скорость $U_* = \sqrt{2}(\delta g)^{1/4}$. Первый равен значению k , при котором $\cos \varphi$ достигает

минимума, т.е. угол φ максимален. Качественно можно сказать, что интервал (k_1, k_*) отвечает части волновой картины, которую формирует в основном гравитация, а (k_*, k_2) — соответственно силы поверхностного натяжения. Параметр U_* равен нижней границе скорости источника, начиная с которой движущийся источник возбуждает волны ($k_{1,2}$ действительны).

Для рассматриваемого закона дисперсии имеет место особенность, о которой говорилось выше, — групповая скорость $V_g = (g + 3\delta k^2)/2\Omega$ равна фазовой $V_{ph} = \Omega/k$ при $k = k_*$, что нетрудно установить, решая соответствующее уравнение или приняв во внимание, что при этом значении k угол φ стационарен. Таким образом, в фазовой картине будут участки, близкие к прямолинейным.

Выпишем уравнения для фазовых линий в системе координат с осью x вдоль \mathbf{U} и перпендикулярной ей осью y . Проецируя уравнения (14) на оси (x, y) , после простых преобразований с учётом (16) получаем

$$\begin{aligned} x &= \frac{2SU}{\delta k^2 - g} \sqrt{\frac{g}{k} + \delta k} \left[\frac{1}{2U^2} \left(\frac{g}{k} + 3\delta k \right) - 1 \right], \\ y &= \frac{S}{\delta k^2 - g} \left(\frac{g}{k} + 3\delta k \right) \sqrt{1 - \frac{1}{U^2} \left(\frac{g}{k} + \delta k \right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда непосредственно следует, что при $k \rightarrow \sqrt{g/\delta}$ $|x| \rightarrow \infty$, $|y| \rightarrow \infty$. При этом

$$\frac{y}{x} \rightarrow \frac{U_*}{\sqrt{U^2 - U_*^2}}. \quad (18)$$

Правую часть (18) можно также получить из следующих соображений. Минимальное значение $\cos \varphi$, соответствующее максимальному углу φ , достигается при $k = k_*$ и равно, как следует из (16), U_*/U . Угол наклона прямых, к которым приближаются фазовые линии, дополнителен до $\pi/2$ к φ , и, следовательно, $y/x \rightarrow \cot \varphi = U_*/\sqrt{U^2 - U_*^2}$.

Из выражений (17) можно получить предельные случаи, отвечающие гравитационным и капиллярным волнам, формально переходя в них к пределу $\delta \rightarrow 0$ для гравитационных волн и $g \rightarrow 0$ для капиллярных волн. Таким образом, получаем для гравитационных волн

$$x = \frac{2SU}{\sqrt{gk}} \left(\frac{g}{2U^2 k} - 1 \right), \quad y = -\frac{S}{k} \sqrt{1 - \frac{g}{U^2 k}} \quad (19)$$

и для капиллярных волн

$$x = \frac{2SU}{\sqrt{\delta k^3}} \left(\frac{3\delta k}{2U^2} - 1 \right), \quad y = \frac{3S}{k} \sqrt{1 - \frac{\delta k}{U^2}}. \quad (20)$$

Для перехода к обычному представлению с углом φ в качестве параметра определим k как функцию φ из уравнения (16). Таким образом получим $k = g/(U^2 \cos^2 \varphi)$ для гравитационных волн и $k = U^2 \cos^2 \varphi / \delta$ для капиллярных волн. Подставляя эти зависимости в (19), (20), получаем известные выражения [5].

На рисунке 4 приведены фазовые линии рассматриваемых волн. В качестве масштаба длины выбрана величина $\lambda = U^2/g$, масштаба частоты — g/U . При заданном λ относительная роль поверхностного натяжения определяется безразмерным параметром $\varepsilon = (k_* \lambda)^{-1} =$

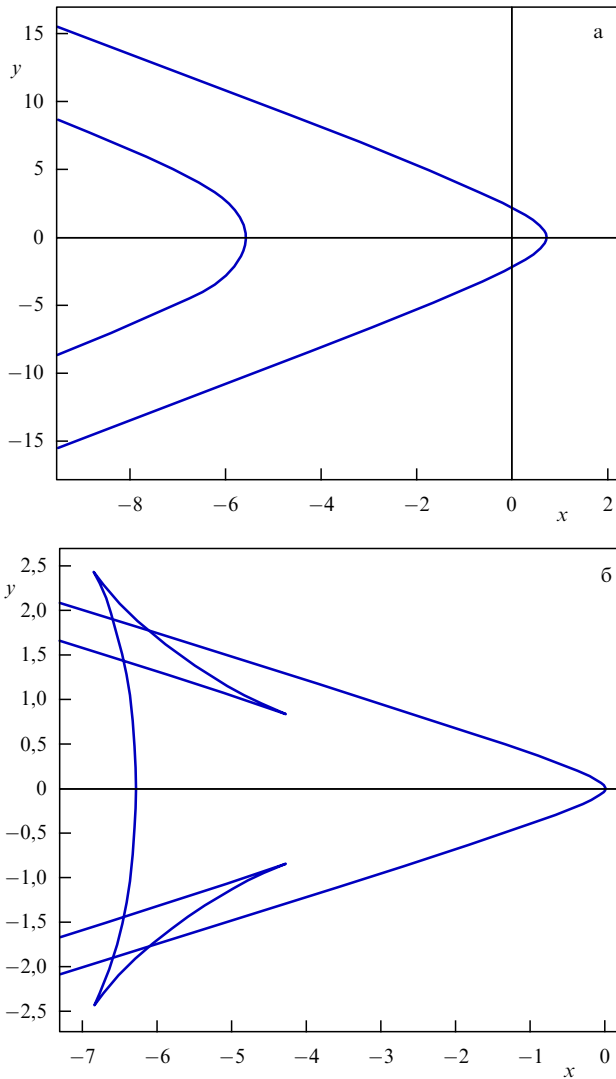


Рис. 4. Фазовые картины гравитационно-капиллярных волн: $\varepsilon^2 = 0,1$ (а), $\varepsilon^2 = 0,001$ (б).

$= 0,5U_*^2/U^2$. Приведены результаты расчётов для $\varepsilon^2 = 0,1$ (рис. 4а), $\varepsilon^2 = 0,001$ (рис. 4б) и одного значения $S = 2\pi$. При $\varepsilon \sim 0,1$ в формировании фазовой структуры в равной степени участвуют капиллярные (передняя ветвь на рисунке) и гравитационные (задняя ветвь) силы. При меньших значениях ε волны приобретают характер гравитационных — на гравитационной ветви появляется характерная точка возврата. Кроме неё, появляется ещё одна точка возврата, связанная с существованием асимптот. При $\varepsilon \rightarrow 0$ вторая точка приближается к началу координат, а асимптоты — к оси абсцисс.

Коснёмся вопроса о возможности наблюдения прямолинейных участков фазовых линий гравитационно-капиллярных волн. Одно из основных условий их наблюдения заключается в том, чтобы интервал волновых чисел генерируемых волн заметно превосходил значение k_* . Поскольку амплитуды возбуждаемых волн пропорциональны фурье-компонентам функции источника [6], убывающим при $k > a^{-1}$ (a — характерный размер источника), то должно выполняться условие $a < k_*^{-1}$. Для воды $k_*^{-1} \approx 0,27$ см, так что наблюдение данного эффекта возможно только в специально организованных условиях.

5. Волновой след за движущимся ураганом

Касательное напряжение ветра, создаваемое движущимся ураганом, формирует в океане структуру в виде волнового шлейфа, или следа [10, 11]. Экспериментальное обнаружение этой структуры явилось одним из впечатляющих достижений современной океанологии. В существующих численных моделях волнового следа [11, 17] океан, как правило, представляют системой, состоящей из верхнего перемешанного слоя с плотностью ρ_1 и толщиной H_1 и нижнего слоя с плотностью $\rho_2 > \rho_1$ и толщиной H_2 . В качестве H_2 обычно берут нижнюю границу термоклина. При наличии фонового вращения в подобной двухслойной системе возможно существование лишь двух классов волновых движений — баротропной ($n = 0$) и бароклинной ($n = 1$) моды ИГВ, описывающих соответственно колебания свободной поверхности и поверхности раздела. В длинноволновом приближении (длина волны много больше толщины слоя) и при выполнении условия $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \ll 1$ дисперсионные соотношения для мод имеют вид [11, 18]

$$\omega^2 = \Omega_n^2(\mathbf{k}) = f^2 + c_n^2(k_x^2 + k_y^2), \quad n = 0, 1. \quad (21)$$

Здесь f — параметр Кориолиса (удвоенная проекция вектора угловой скорости вращения планеты на местную вертикаль), c_n — фазовые скорости мод в отсутствие вращения [18]:

$$c_0 = \sqrt{gH}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{g\delta H_1 H_2}{H}}, \quad H = H_1 + H_2.$$

При характерных для океана значениях $H_1 = 100-150$ м, $H_2 = 4000$ м, $\delta = 3 \times 10^{-3}$ эти скорости составляют: $c_0 = 200$ м с⁻¹, $c_1 = 2-3$ м с⁻¹.

Будем рассматривать источник (ураган), движущийся вдоль оси x со скоростью $\mathbf{U} = (U, 0)$. Для двумерного волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ условие излучения (3) преобразуется к виду

$$(U^2 - c_n^2)k_x^2 - c_n^2k_y^2 = f^2. \quad (22)$$

Непосредственно из (22) следует условие формирования волнового следа:

$$M^2 = \frac{U^2}{c_n^2} > 1, \quad (23)$$

где параметр M представляет собой некоторый аналог числа Маха. При выполнении этого условия уравнение (22) определяет гиперболу на плоскости волновых чисел. Важная особенность состоит в том, что характерная скорость перемещения урагана $U = 5$ м с⁻¹ превосходит скорость бароклинной моды, но остаётся значительно меньше скорости баротропной моды: $c_1 < U \ll c_0$. Таким образом, в образовании волнового следа за движущимся ураганом участвует только бароклинная мода. Далее считаем $n = 1$.

Для двумерного вектора групповой скорости из (21) следует выражение $\mathbf{V}_g = c_n^2 \mathbf{k} / \omega$. С учётом этого выражения и соотношения (21) общие уравнения (4) для фазовых линий принимают вид

$$x = (U^2 - c_n^2) \frac{S}{f^2} k_x, \quad y = -c_n^2 \frac{S}{f^2} k_y. \quad (24)$$

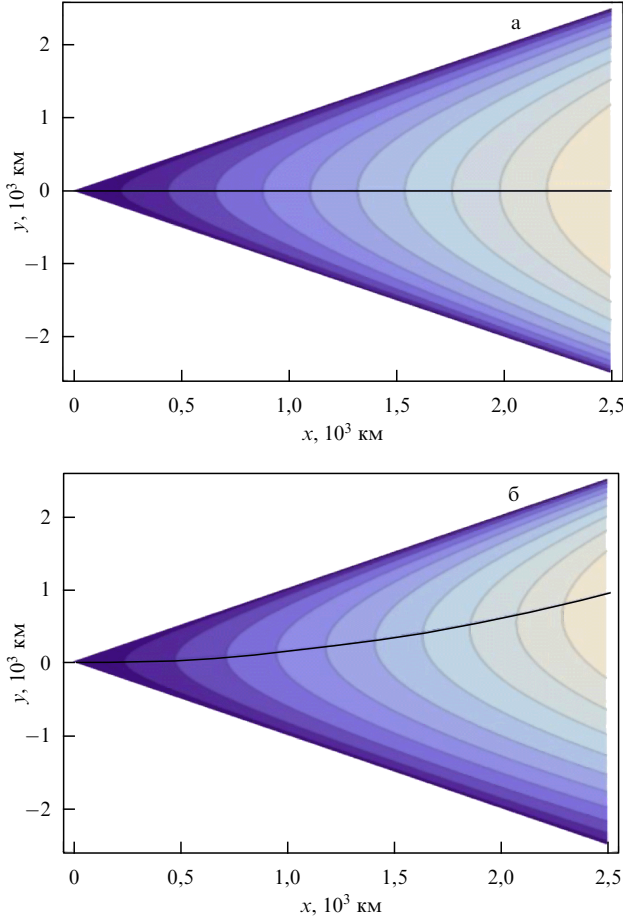


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Фазовые линии при постоянном значении параметра Кориолиса (а), в присутствии β -эффекта (б). Указано положение оси следа: прямая $y = 0$ (а), парабола (56) (б).

В уравнениях (24) волновые числа k_x, k_y связаны соотношением (22), причём если $U < 0$, то $k_x < 0$, $S < 0$. Используя параметрические уравнения гиперболы (22) и подставляя их в (24), получаем уравнения фазовых линий. Ещё проще выразить k_x, k_y через x, y из (24) и подставить в (22). Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{x^2}{U^2 - c_n^2} - \frac{y^2}{c_n^2} = \frac{S^2}{f^2}, \quad (25)$$

описывающее однопараметрическое семейство гипербол с асимптотами $y = \pm(c_n/\sqrt{U^2 - c_n^2})x$. Эти асимптоты отделяют клиновидную область, занятую волновыми возмущениями, от покоящейся жидкости (рис. 5а). Тангенс угла полураствора клина составляет

$$\tan \theta = \frac{c_n}{\sqrt{U^2 - c_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (26)$$

соответственно $\sin \theta = 1/M$. Отметим, что выражение (26), совпадающее с выражением для тангенса угла полураствора конуса Маха в газовой динамике [5], впервые было получено в работе [19] путём прямого решения линеаризованной системы гидродинамических уравнений. Выше был представлен вывод на основе кинематического подхода.

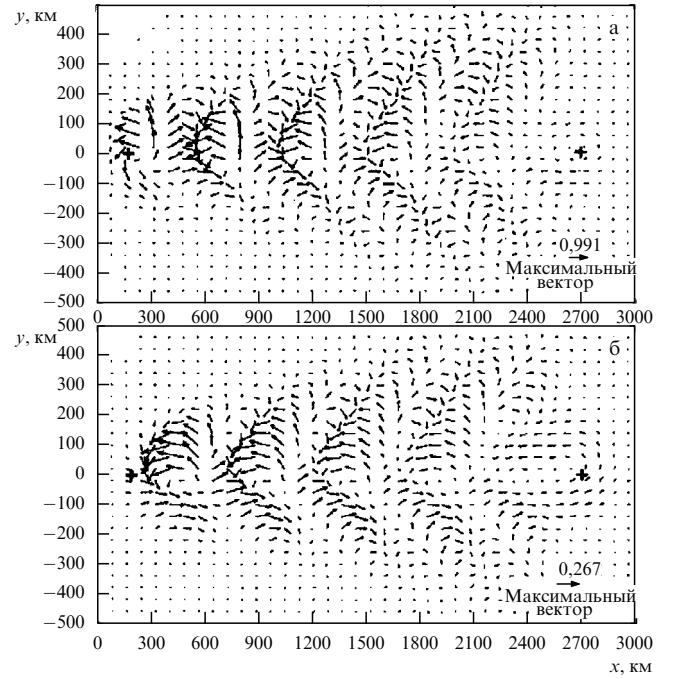


Рис. 6. Волновой след за ураганом в численной модели [17].

Приведённые результаты хорошо согласуются с результатами численного моделирования волнового шлейфа за движущимся ураганом в рамках полной нелинейной системы уравнений гидродинамики [17]. В качестве примера на рис. 6 показаны полученные в работе [17] изолинии поля скорости в верхнем и нижнем слое через шесть суток после начала перемещения урагана.

6. Подветренные волны

Орографические препятствия, обтекаемые потоком сплошной среды, движутся относительно среды со скоростью потока. Для определения возникающей при обтекании картины подветренных волн используем модель вращающейся непрерывно стратифицированной атмосферы с постоянной частотой плавучести (частотой Брента) N . Будем предполагать, что атмосфера заключена между двумя горизонтальными границами $z = 0, H$, отвечающими соответственно подстилающей поверхности и тропопаузе. В этом случае существует дискретное (счётное) число бароклинных мод ИГВ с дисперсионными соотношениями [1, 2]:

$$\omega^2 = \Omega_n^2(\mathbf{k}) = \frac{f^2 m^2 + N^2 k^2}{m^2 + k^2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (27)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, вертикальное волновое число $k_z \equiv m = \pi n/H$, $n = 1, 2, \dots$. Для земной атмосферы в средних широтах характерные значения частоты плавучести N и инерционной частоты f (параметра Кориолиса) отличаются на два порядка: $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

В длинноволновом приближении $k^2 \ll m^2$ и при выполнении условия $N^2 \gg f^2$ из (27) следуют дисперсионные соотношения для так называемых волн Пуанкаре [1]:

$$\omega^2 = f^2 + c_n^2(k_x^2 + k_y^2), \quad c_n = \frac{N}{m} = \frac{NH}{\pi n}, \quad (28)$$

аналогичные соотношениям (21). Отсюда сразу следует, что при выполнении условия (23) (для фиксированной моды) впереди препятствия формируется клиновидный волновой след с углом полураствора (26) и фазовыми линиями (25). Этот результат, очевидно, справедлив только для препятствий с горизонтальным масштабом, много большим толщины атмосферы. Далее исследуем структуру фазовых линий без использования длинноволнового приближения, т.е. на основе точного дисперсионного соотношения (27). Это позволит распространить результаты на препятствия небольших горизонтальных масштабов (малоразмерных островов, см. рис. 2, 3). Отметим, что при $H = 10$ км фазовая скорость первой бароклинной моды (28) в отсутствие вращения составляет $c_1 = 20$ м с⁻¹. Поскольку с ростом n скорость $c_n \rightarrow 0$, начиная с некоторого значения n условие (23) будет всегда выполняться.

Для потока, направленного вдоль оси x , и волновых мод (27) условие излучения (3) можно представить в виде

$$U^2 k_x^2 = \frac{f^2 m^2 + N^2 k^2}{m^2 + k^2}. \quad (29)$$

С учётом явного выражения для двумерного (горизонтального) вектора групповой скорости,

$$\mathbf{V}_g = \frac{(N^2 - f^2) m^2}{\omega k^4} \mathbf{k}, \quad \kappa^2 = m^2 + k^2,$$

уравнения (4) для фазовых линий запишутся как

$$\begin{aligned} x &= \frac{U^2 \kappa^4 - (N^2 - f^2) m^2}{(N^2 - f^2) \kappa^4 + f^2 \kappa^4} k_x S, \\ y &= -\frac{(N^2 - f^2) m^2}{(N^2 - f^2) \kappa^4 + f^2 \kappa^4} k_y S. \end{aligned} \quad (30)$$

В анализе (29), (30) удобно использовать безразмерные переменные, нормированные на фиксированное вертикальное волновое число: $\bar{k}_x = k_x/m$, $\bar{k}_y = k_y/m$, $\bar{x} = mx$, $\bar{y} = my$. Кроме того, будем считать $U > 0$ и использовать представление безразмерного волнового вектора в полярных координатах $\bar{k}_x = -\bar{k} \cos \varphi$, $\bar{k}_y = \bar{k} \sin \varphi$. Условие (29) при этом можно записать в виде

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{M^2} \frac{\varepsilon^2 + \alpha}{\alpha(1 + \alpha)}, \quad \alpha = \bar{k}^2 = \bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2, \quad (31)$$

где $M = U/c_n$, $\varepsilon^2 = f^2/N^2$, α — квадрат модуля безразмерного волнового вектора, который далее используется в качестве параметра. Из (31) и условия $\cos^2 \varphi \leq 1$ следует, что в формировании системы подветренных волн участвуют волны с $\alpha \geq \alpha_*$, где

$$\alpha_* = \frac{1 - M^2 + \sqrt{(1 - M^2)^2 + 4\varepsilon^2 M^2}}{2M^2}. \quad (32)$$

Выражая с учётом (31) \bar{k}_x , \bar{k}_y через α и подставляя в (30), получаем в безразмерных переменных однопараметрическое представление фазовых линий с параметром α :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M^2(1 + \alpha)^2 - \eta}{\varepsilon^2(1 + 2\alpha) + \alpha^2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \alpha}{1 + \alpha}} \frac{S}{M}, \quad \eta = 1 - \varepsilon^2, \\ \bar{y} &= \pm \frac{\eta}{\varepsilon^2(1 + 2\alpha) + \alpha^2} \sqrt{\frac{M^2 \alpha^2 + (M^2 - 1)\alpha - \varepsilon^2}{1 + \alpha}} \frac{S}{M}. \end{aligned} \quad (33)$$

При $U > 0$ волновое число $k_x < 0$ и в уравнениях (33) значение фазы берётся по модулю. Если из (31) выразить параметр α через φ , то можно получить другое представление фазовых линий с параметром φ . Соответствующее представление достаточно громоздко. Далее будет изучена структура фазовых линий (33) в характерном случае $\varepsilon \ll 1$.

Анализ кривых (33) начнём с определения угла полураствора клина θ , внутри которого сосредоточены волновые возмущения. В полярных координатах $\bar{x} = r \cos \psi$, $\bar{y} = r \sin \psi$ для тангенса угла ψ из (33) следует выражение (первая четверть)

$$\tan \psi = \frac{y}{x} = \frac{\eta}{M^2(1 + \alpha)^2 - \eta} \sqrt{\frac{M^2 \alpha^2 + (M^2 - 1)\alpha - \varepsilon^2}{1 + \alpha}} \equiv F(\alpha). \quad (34)$$

Неотрицательная функция $F(\alpha)$ (34) определена на полуоси $\alpha > \alpha_*$, причём $F(\alpha_*) = 0$, $F(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Отсюда следует существование точки максимума α_{\max} , в которой функция достигает максимального значения F_{\max} . Соответствующее значение, зависящее от M^2 и ε , равно тангенсу угла полураствора волнового клина $\tan \theta = F_{\max}(M^2, \varepsilon)$. При $\varepsilon \ll 1$ асимптотически:

$$\tan \theta \approx \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad M^2 - 1 \gg O(\varepsilon), \quad (35)$$

$$\tan \theta \approx \frac{\sqrt[4]{3}}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad M^2 = 1, \quad \tan \theta \approx \frac{3\sqrt{3}}{16} M^2, \quad M^2 \ll 1.$$

Как видно, при обтекании препятствия волновая картина возникает при произвольных числах Маха. Максимальное значение угла полураствора достигается при $M = 1$. Соответствующее значение $\theta \approx \arctan(0,31\sqrt{N/f})$ при $N/f = 10^2$ составляет $\theta \approx 72^\circ$. Полученный численно график зависимости $\tan \theta$ от квадрата числа Маха при $\varepsilon = 0,01$ представлен на рис. 7. Данную зависимость можно использовать для оценок скорости набегающего потока по натурным данным. Так, в верхней части рис. 2 значение $\theta \approx 26^\circ$, $\tan \theta = 0,49$. Предполагая, что волновая картина образована первой модой с фазовой скоростью $c_1 = 20$ м с⁻¹ [6] и $M < 1$, по графику найдём $M^2 \approx 0,65$ и соответственно $U = 16$ м с⁻¹.

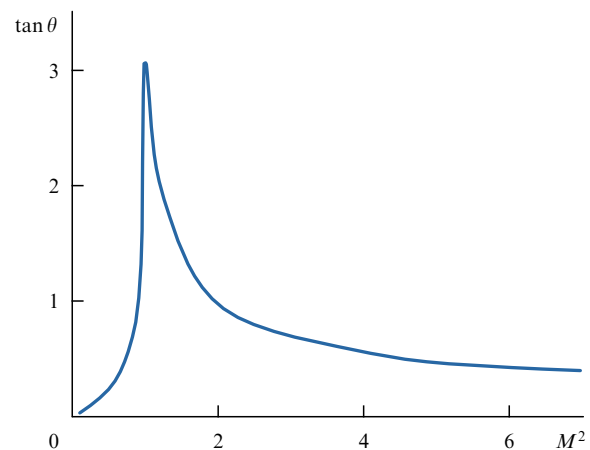


Рис. 7. Зависимость тангенса угла полураствора волнового клина от квадрата числа Маха.

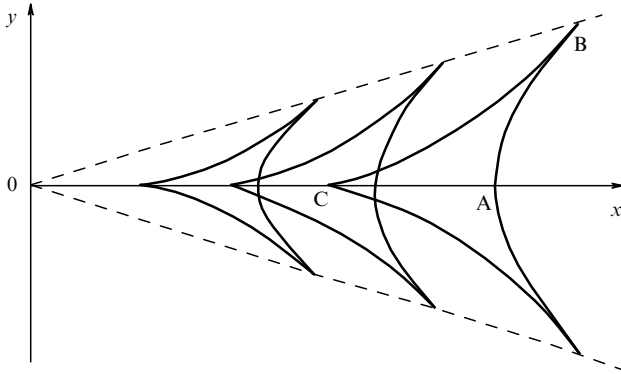


Рис. 8. Структура фазовых линий для подветренных волн в присутствии фонового вращения.

Остановимся на структуре фазовых линий $S = \text{const}$. Для определённости рассмотрим случай $M^2 - 1 \gg O(\varepsilon)$. В этом случае $\alpha_* \approx \varepsilon^2/(M^2 - 1)$, $\alpha_{\max} \approx \varepsilon/2$. Из (33) следует, что при изменении α от α_* до α_{\max} координата \bar{x} растёт от $\bar{x}_* \approx \varepsilon^{-1}\sqrt{M^2 - 1}S$ до $\bar{x}_{\max} \approx M^{-1}\varepsilon^{-3/2}(\sqrt{2}/3) \times (M^2 - 1)S$. Соответственно в первой четверти \bar{y} растёт от нуля до $\bar{y}_{\max} \approx \bar{x}_{\max}/\sqrt{M^2 - 1}$. Данному диапазону изменения α отвечает участок кривой АВ на рис. 8. Далее, с ростом α от α_{\max} до бесконечности координаты \bar{x} , \bar{y} убывают, причём $\bar{y} \rightarrow 0$, а $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_{\min} \approx MS$. Этим значениям α отвечает участок кривой ВС. Таким образом, в первой четверти фазовая кривая состоит из двух ветвей с точками возврата В и С. Из-за симметрии кривой относительно горизонтальной оси в нижней полуплоскости лежат аналогичные ветви. Аналогично выглядят фазовые кривые для других значений M .

Представленная на рис. 8 картина фазовых линий качественно подобна картине корабельных волн от движущегося источника [3, 4]. Здесь также присутствуют боковые и поперечные волны, отвечающие различным ветвям фазовых кривых. Основное отличие состоит в том, что для корабельных волн угол полураствора волнового клина не зависит от скорости перемещения источника. Для подветренных волн в стратифицированной вращающейся атмосфере Земли эта зависимость очень сильная. Картины подветренных волн обнаруживаются также в атмосферах других планет. Фотография картины подветренных волн в атмосфере Марса, образующейся при обтекании кратера, представлена в монографии [20].

7. Обтекание в отсутствие фонового вращения

Применительно к условиям лабораторных экспериментов или атмосферных движений в районе экватора самостоятельный интерес представляет случай отсутствия фонового вращения, $\varepsilon = 0$. В этом случае поведение фазовых кривых качественно меняется при переходе через значение $M = 1$. Таким образом, не существует равномерного предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что волновые движения стратифицированной среды в отсутствие вращения принято называть внутренними гравитационными волнами.

В отсутствие вращения условие излучения (31) принимает вид

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{M^2} \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (36)$$

Из (36) следует ограничение на квадрат модуля волнового вектора: $\alpha \geq \alpha_*$, где $\alpha_* = 0$ при $M^2 \geq 1$, $\alpha_* = M^{-2} - 1$ при $M^2 < 1$. Параметрические уравнения фазовых кривых (33) запишутся в виде

$$\bar{x} = \frac{M^2(1 + \alpha)^2 - 1}{\alpha\sqrt{\alpha(1 + \alpha)}} \frac{S}{M}, \quad \bar{y} = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{M^2(1 + \alpha) - 1}{\alpha(1 + \alpha)}} \frac{S}{M}. \quad (37)$$

Выразив из (36) α через φ , можно получить другое представление фазовых линий с углом φ в качестве параметра:

$$\bar{x} = \frac{M(1 - M^2 \cos^4 \varphi)}{(1 - M^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} S, \quad \bar{y} = \frac{M^3 \sin \varphi \cos^3 \varphi}{(1 - M^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} S. \quad (38)$$

В уравнениях (38) $|\varphi| \leq \varphi_*$, где $\varphi_* = \pi/2$ при $M^2 \leq 1$, $\varphi_* = \arccos M^{-1}$ при $M^2 > 1$. Хотя обе параметризации эквивалентны, далее используем параметризацию (37).

С учётом (37) тангенс угла полураствора волнового клина θ есть максимальное значение функции

$$\tan \psi = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{M^2(1 + \alpha) - 1}}{M^2(1 + \alpha)^2 - 1} \equiv F(\alpha) \quad (39)$$

на полуоси $\alpha > \alpha_*$. Из (39) получим точное выражение

$$\tan \theta = F_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, & M^2 \geq 1, \\ \frac{3\sqrt{3} M^2 \sqrt{4 - 3M^2 - 1}}{(2 + \sqrt{4 - 3M^2})^2 - 9M^2}, & M^2 < 1. \end{cases} \quad (40)$$

Согласно (40), $\tan \theta \approx 3\sqrt{3} M^2/16$, $M^2 \ll 1$, $\tan \theta \approx M^{-1}$, $M^2 \gg 1$. При $M^2 = 1$ $\tan \theta = \infty$ ($\theta = \pi/2$) — фазовые кривые целиком заполняют полуплоскость впереди препятствия. В этом состоит важное отличие от случая с учётом фонового вращения, где при $M^2 = 1$ тангенс угла полураствора всегда конечен. График зависимости $\tan \theta$ от квадрата числа Маха представлен на рис. 9.

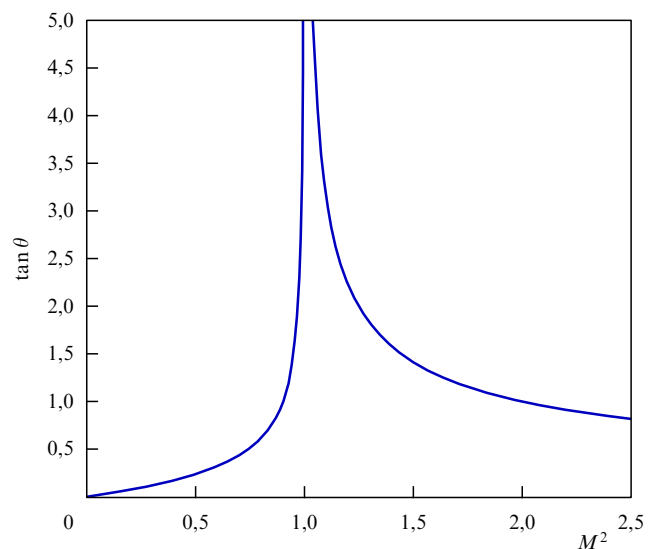


Рис. 9. Зависимость тангенса угла полураствора волнового клина от квадрата числа Маха в отсутствие фонового вращения.

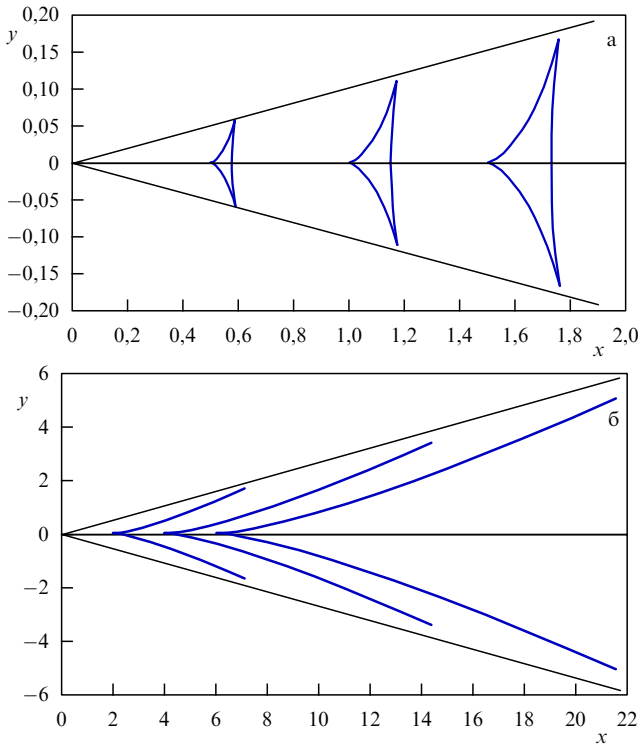


Рис. 10. Структура фазовых линий для подветренных волн в отсутствие фонового вращения при $M < 1$ (а) и $M > 1$ (б).

При использовании параметризации (38) тангенс угла полураствора определится как максимальное значение функции

$$\tan \psi = \frac{M^2 \tan \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)^2 - M^2} \equiv \Phi(\varphi)$$

на отрезке $|\varphi| \leq \varphi_*$. Нахождение соответствующего экстремума также приводит к выражению (40).

Исследуем поведение фазовых кривых (37). Рассмотрим вначале случай $M^2 > 1$. Как и в присутствии вращения, при $\alpha \rightarrow \infty$ фазовая кривая подобна полукубической параболе с вершиной в точке $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = MS$. При $\alpha \rightarrow \alpha_* = 0$ каждая фазовая кривая приближается к прямым $\bar{y} = \pm \bar{x}/\sqrt{M^2 - 1}$ (границам угла раствора клина). Поведение фазовых кривых в этом случае представлено на рис. 10б.

При $M^2 = 1$ фазовые кривые (37) целиком заполняют полуплоскость $x > 0$ впереди препятствия. При $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$ асимптотики каждой фазовой кривой даются уравнениями $8(\bar{y}/S)^2 = (\bar{x}/S - 1)^3$ и $4\bar{y}/S = (\bar{x}/S)^2$, отвечающими соответственно полукубической и обычной параболам.

При $M^2 < 1$ фазовые кривые замкнуты и имеют структуру, характерную для случая с вращением (структуру "клюва"). При изменении α от $\alpha_* = M^{-2} - 1$ до $\alpha_{\max} = [(2 + \sqrt{4 - 3M^2})/3M^2] - 1$ из (37) получим ветвь фазовой кривой, отвечающей поперечным волнам. Далее, с ростом α от α_{\max} до бесконечности получим боковую ветвь (рис. 10а). Таким образом, в зависимости от значений M^2 поведение фазовых кривых качественно различно.

8. Асимметрия волнового следа за ураганом в присутствии β -эффекта

При постоянных значениях параметров среды изученный в разделе 5 волновой след симметричен относительно направления перемещения источника (урагана) (рис. 5а). В экспедиционных исследованиях [21, 22] была обнаружена достаточно неожиданная асимметрия структуры волнового следа, состоящая в смещении его оси вправо относительно траектории перемещения вихря. Предложенное в этих работах качественное объяснение связывало асимметрию следа с асимметрией поля касательного напряжения ветра, создаваемого движущимся ураганом. В данном разделе показано, что ещё одним источником асимметрии может быть так называемый β -эффект [1, 18] — зависимость параметра Кориолиса от широты. Характерный горизонтальный масштаб волнового следа (порядка 1000 км) представляет масштаб, на котором этот эффект становится значимым. Рассмотренный ниже пример иллюстрирует применение общей теории к определению структуры фазовых поверхностей в стационарных неоднородных средах.

Как и в разделе 5, будем рассматривать источник, движущийся вдоль оси x со скоростью $\mathbf{V} = (U, 0)$ и оставляющий волновой след в двухслойной системе, моделирующей океан. Этот след сформирован первой бароклинной модой с фазовой скоростью $c = c_1$ и дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \Omega^2(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = f^2(y) + c^2(k_x^2 + k_y^2). \quad (41)$$

В рамках традиционного приближения β -плоскости параметр Кориолиса в окрестности широты ϑ_0 представляется в виде $f = f(y) = f_0 + \beta y$, где $f_0 = 2\Omega_* \sin \vartheta_0$ — постоянное среднее значение, $\beta = (2\Omega_*/R) \cos \vartheta_0$, Ω_* , R — соответственно угловая скорость вращения и радиус Земли [1]. Данное приближение справедливо в полосе широт $|y| \leq L_* = f_0/\beta = R \tan \vartheta_0$. Отметим, что на широте $\vartheta_0 = 30^\circ$ значения $f_0 = 0,8 \times 10^{-4}$ с, $\beta = 2 \times 10^{-11}$ м⁻¹ с⁻¹, соответственно масштаб длины $L_* = f_0/\beta = 4000$ км.

Для волн с дисперсионным соотношением (41) условие излучения $\Omega(\mathbf{k}, 0) = \mathbf{kU}$ преобразуется к виду

$$U^2 k_x^2 = f_0^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2). \quad (42)$$

На плоскости волновых чисел оно определяет гиперболу (22) с действительной и мнимой полуосями $a = f_0/\sqrt{U^2 - c^2}$, $b = f_0/c$. Здесь предполагается выполненным условие существования волнового следа $M^2 > 1$. Если $U < 0$ (источник перемещается на запад), то волновое число $k_x < 0$ и параметрические уравнения гиперболы (левая ветвь) $k_x = -a \cosh \alpha$, $k_y = b \sinh \alpha$, где α — параметр.

Поскольку дисперсионное соотношение (41) не зависит от координаты x вдоль траектории источника, структура фазовых линий, образующих стационарный след, находится из решения уравнений (11), (12), где $\Omega' = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. С учётом явного выражения для групповой скорости эти уравнения можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{c^2 - U^2}{U}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{c^2 k_y}{U k_x}, \\ \frac{dk_x}{dt} &= 0, & \frac{dk_y}{dt} &= -\frac{\beta(f_0 + \beta y)}{U k_x}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{(f_0 + \beta y)^2}{Uk_x}. \quad (44)$$

К уравнениям (43), (44) присоединяются начальные условия

$$t = 0: \quad x = y = S = 0, \quad k_x = -a \cosh \alpha, \quad k_y = b \sinh \alpha \quad (45)$$

(без ограничения общности для стационарных сред можно считать $t_0 = 0$). Уравнения характеристик (43) образуют замкнутую систему для нахождения координат и компонент волнового вектора.

Непосредственно из системы (43) получим $k_x = -a \cosh \alpha = \text{const}$ (сохранение компоненты импульса, отвечающей циклической координате) и

$$x = \frac{(c^2 - U^2)t}{U}. \quad (46)$$

Из второго и четвертого уравнений (43) для меридиональной координаты y следует линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda^2 y + \frac{f_0 \lambda^2}{\beta} = 0, \quad \lambda = \frac{c\beta}{|Uk_x|} \quad (47)$$

с начальными условиями

$$t = 0: \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{c^2}{U} \frac{b}{a} \tanh \alpha. \quad (48)$$

После интегрирования (47), (48) из уравнения (44) найдём значение фазы S . В соответствующих решениях удобно выразить t через x , используя соотношение (46). Обозначая $\bar{\beta} = \beta/f_0\sqrt{M^2 - 1}$, получаем

$$y = \frac{1}{\bar{\beta}\sqrt{M^2 - 1}} (\sinh \alpha \sin X + \cos X - 1), \quad X = \frac{\bar{\beta}x}{\cosh \alpha}, \quad (49)$$

$$S = \frac{f_0}{2c\sqrt{M^2 - 1}} \left[-x \cosh \alpha + \frac{\sinh^2 \alpha - 1}{2\bar{\beta}} \sin(2X) + \frac{\sinh \alpha}{\bar{\beta}} (\cos(2X) - 1) \right]. \quad (50)$$

Выражения (49), (50) определяют зависимости $y = y(x, \alpha)$, $S = S(x, \alpha)$, исключение из которых параметра α даёт уравнения фазовых кривых в явной, $y = y(x, S)$, или неявной, $S = S(x, y)$, форме.

Найдём асимптотики фазовых кривых для значений $\bar{\beta}x \ll 1$ или $x \ll \bar{\beta}^{-1} = L_*\sqrt{M^2 - 1}$. Для этих значений $X \ll 1$ и, удерживая главные члены в разложении тригонометрических функций по степеням X , из (49), (50) получим

$$y = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} [x \tanh \alpha - 0,5\bar{\beta}x^2(1 - \tanh^2 \alpha)], \quad (51)$$

$$S = -\frac{f_0}{c\sqrt{M^2 - 1} \cosh \alpha} (x + \bar{\beta}x^2 \tanh \alpha). \quad (52)$$

При $\bar{\beta}x \ll 1$ из (51) асимптотически следует

$$\tanh \alpha = \frac{\bar{y}}{x} - 0,5\bar{\beta}x \left[\left(\frac{\bar{y}}{x} \right)^2 - 1 \right], \quad (53)$$

где для краткости обозначено $\bar{y} = y\sqrt{M^2 - 1}$. С использованием (53) из выражения (52) можно исключить параметр α . Возводя (52) в квадрат и используя тождество $1/\cosh^2 \alpha = 1 - \tanh^2 \alpha$, с учётом (53) получим искомыми уравнения фазовых кривых:

$$x^2 - \bar{y}^2 + \bar{\beta}\bar{y}(x^2 - \bar{y}^2) = c^2(M^2 - 1) \left(\frac{S}{f_0} \right)^2. \quad (54)$$

В этих уравнениях удержано главное слагаемое разложения по степеням $\bar{\beta}$.

При $\bar{\beta} = 0$ из (54) следуют уравнения $x^2 - \bar{y}^2 = c^2(M^2 - 1)(S/f_0)^2$, представляющие другую запись уравнений семейства гипербол (25). Вершины этих гипербол лежат на прямой $y = 0$ (оси симметрии волнового следа). Графики кривых $S = \text{const}$ (54), построенные численно для приведённых выше значений f_0 , β и $M = \sqrt{2}$, представлены на рис. 5б. Как видно, в присутствии β -эффекта симметрия исчезает. Вблизи начала координат фазовые кривые аналогичны гиперболам с вершинами, смещёнными в область $y > 0$. Простые асимптотические уравнения этих кривых можно получить для значений $\bar{\beta}\bar{y} \ll 1$. Обозначая правую часть (54) через A^2 , запишем уравнения (54) в виде $x^2 - \bar{y}^2 = A^2/(1 + \bar{\beta}\bar{y}) \approx A^2(1 - \bar{\beta}\bar{y})$. Выделяя полный квадрат, получаем отсюда уравнения гипербол

$$x^2 - (\bar{y} - 0,5A^2\bar{\beta})^2 = A^2 - 0,25A^4\bar{\beta}^2$$

с вершинами в точках

$$x = \sqrt{A^2 - 0,25A^4\bar{\beta}^2}, \quad \bar{y} = 0,5A^2\bar{\beta}. \quad (55)$$

Исключение из (55) параметра A^2 (значения фазы) даёт уравнение кривой, на которой расположены вершины: $0,5\bar{\beta}(x^2 + \bar{y}^2) - \bar{y} = 0$ (асимптотическое уравнение оси следа). При $\bar{\beta}\bar{y} \ll 1$ соответствующая кривая (рис. 5б) есть парабола $\bar{y} = 0,5\bar{\beta}x^2$ или

$$y = \frac{\beta}{2f_0(M^2 - 1)} x^2. \quad (56)$$

Отметим, что характерные траектории перемещения ураганов в северной части Атлантического океана, как правило, имеют западное или северо-западное направление. Можно показать, что для всех таких траекторий (не только зональных) будет иметь место асимметрия структуры волнового следа.

9. Заключение

В настоящей статье предложен подход, позволяющий описывать фазовую структуру волновых возмущений, не обращаясь к решению волновых уравнений, а опираясь только на заданный закон дисперсии волн. В рамках предложенного подхода получено аналитическое представление для фазовых поверхностей (линий), образующих волновую картину от движущегося локализованного источника. На основе этого представления исследованы особенности фазовой картины гравитационно-капиллярных волн, структуры волнового шлейфа в океане за движущимся тропическим циклоном (ураганом) и системы подветренных волн в атмосфере Земли.

Авторы благодарят Г.С. Голицына за ценные замечания, Л.Х. Ингеля и С.В. Козлова за помощь в работе. Особая благодарность М.С. Аксентьевой за вдохновляющий оптимизм и поддержку при подготовке окончательного варианта статьи. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 12-05-00400-а).

10. Приложение

Покажем, что из стационарности угла φ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{U} как функции k вытекает равенство $\mathbf{kV}_g - \Omega(\mathbf{k}) = 0$. Используем сферическую систему координат в \mathbf{k} -пространстве с полярной осью вдоль вектора \mathbf{U} и азимутальным углом ψ . При этом декартовы компоненты вектора \mathbf{k} будут равны соответственно $k \cos \varphi$, $k \sin \varphi \cos \psi$, $k \sin \varphi \sin \psi$. Условие излучения (3) представим в виде

$$U \cos \varphi = \frac{\Omega(k \cos \varphi, k \sin \varphi \cos \psi, k \sin \varphi \sin \psi)}{k}.$$

Рассматривая φ как функцию k и ψ и беря частную производную по k от обеих частей этого равенства, приведём результат к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial k} (-U \sin \varphi + \Omega'_1 \sin \varphi - \Omega'_2 \cos \varphi \cos \psi - \Omega'_3 \cos \varphi \sin \psi) = \\ = \frac{1}{k^2} (\mathbf{kV}_g - \Omega(\mathbf{k})), \end{aligned}$$

где Ω'_i ($i = 1, 2, 3$) — частные производные $\Omega(\mathbf{k})$ по декартовым компонентам k_x , k_y , k_z . Из этого равенства непосредственно следует доказываемое утверждение.

Список литературы

- Gill A *Atmosphere-Ocean Dynamics* (New York: Academic Press, 1982) [Гилл А *Динамика атмосферы и океана* (М.: Мир, 1986)]
- Монин А С *Теоретические основы геофизической гидродинамики* (Л.: Гидрометеиздат, 1988) [Monin A S *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)]
- Lamb H (Sir) *Hydrodynamics* (New York: Dover Publ., 1945) [Ламб Г *Гидродинамика* (М.–Л.: Гостехиздат, 1947)]
- Кочин Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Ч. 1 (М.: Физматгиз, 1963) [Kochin N E, Kibel' I A, Roze N V *Theoretical Hydromechanics* (New York: Interscience Publ., 1964)]
- Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974) [Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)]
- Lighthill J *Waves in Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978) [Лайтхилл Дж *Волны в жидкостях* (М.: Мир, 1981)]
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
- Scorer R S *Environmental Aerodynamics* (New York: Halsted Press, 1978) [Скорер Р *Аэрогидродинамика окружающей среды* (М.: Мир, 1980)]
- Baines P G *Topographic Effects in Stratified Flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
- Ханн А П, Сутырин Г Г *Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном* (Л.: Гидрометеиздат, 1983)
- Ginis I *Adv. Fluid Mech.* **33** 83 (2002)
- Залгаллер В А *Теория огибающих* (М.: Наука, 1975)
- Свиркунов П Н, в сб. *Труды Института экспериментальной метеорологии* Вып. 27(162) (СПб.: Гидрометеиздат, 1996)
- Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика* Ч. 2 *Теория конденсированного состояния* (М.: Физматлит, 2002) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Statistical Physics* Vol. 2 *Theory of the Condensed State* (Oxford: Pergamon Press)]
- Свиркунов П Н, Калашник М В *Докл. РАН* **447** 396 (2012) [Svirgunov P N, Kalashnik M V *Dokl. Phys.* **57** 474 (2012)]
- Блохинцев Д И *Основы квантовой механики* (М.: Наука, 1976)
- Ginis I, Sutyurin G J. *Phys. Oceanogr.* **25** 1218 (1995)
- LeBlond P H, Mysak L A *Waves in the Ocean* (Amsterdam: Elsevier, 1978) [Ле Блон П, Майсек Л *Волны в океане* (М.: Мир, 1981)]
- Geisler J E *Geophys. Fluid Dyn.* **1** 249 (1970)
- Голицын Г С *Введение в динамику планетных атмосфер* (Л.: Гидрометеиздат, 1973)
- Пудов В Д, Варфоломеев А А, Федоров К Н *Океанология* **18** 218 (1978)
- Пудов В Д, Петриченко С А *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **36** 700 (2000) [Pudov V D, Petrichenko S A *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **36** 645 (2000)]

Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources

P.N. Svirgunov

Research and Production Association "Typhoon",
ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation
E-mail: ps@typhoon.obninsk.ru

M.V. Kalashnik

Research and Production Association "Typhoon",
ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation;
A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation;
Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering of the National Research Nuclear University "MEPhI",
Studgorodok 1, 249040 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

A general approach is proposed within which the phase structure of wave perturbations caused by a moving localized source can be described based on the wave dispersion law alone. Using this approach, a simple analytical expression for the phase surfaces is obtained. It is used to study the details of phase patterns of gravity-capillary waves, the structure of wave trains in the ocean in the wake of a moving tropical hurricane and the system of lee waves in the Earth atmosphere.

PACS numbers: **47.10.**–g, **47.35.**–i, 47.35.Bb, 47.35.Pq

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201401d.0089

Bibliography — 22 references

Received 12 July 2013, revised 19 September 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (1) 89–100 (2014)

Physics—Uspekhi **57** (1) (2014)