Сентябрь 2013 г. **Том 183, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Релятивистская теорема вириала и масштабная инвариантность

Х. Гаите

Теорема вириала имеет отношение к поведению связанных состояний при преобразовании пространственного растяжения (дилатации). Это видно, в частности, из формулировки, приведённой в книге Ландау и Лифшица, где релятивистская теорема вириала выражается через след тензора энергии-импульса. В данной статье предлагается гамильтонов подход к описанию дилатаций, в котором релятивистская теорема вириала возникает естественным образом как условие стабильности относительно преобразований растяжения. Связанное состояние становится масштабно-инвариантным в ультрарелятивистском пределе, когда его полная энергия стремится к нулю. Однако для таких сильно релятивистских связанных состояний масштабная инвариантность нарушается квантовыми эффектами и теорема вириала должна учитывать аномалию следа тензора энергии-импульса. При этом теорема вириала в квантовой теории поля оказывается непосредственно связанной с уравнениями Каллана–Симанзика. Мы рассмотрим применение теоремы вириала в квантовой электродинамике, а также в хромодинамике (КХД) *на примере известной модели "мешка" в теории адронов. В КХД с безмассовыми кварками, согласно теореме вириала,* $3/4$ *адронной массы соответствуют кваркам и глюонам, а* $1/4$ *обусловлена аномалией.*

PACS numbers: **03.30.+p**, 11.10.St, 12.38.Aw, 12.39.Ba DOI: 10.3367/UFNr.0183.201309f.0973

Содержание

1. Введение

Классическая теорема вириала очень полезна в физике, в частности в астрофизике, для определения равновесия и стабильности динамических систем [1]. Эта теорема особенно важна для систем с потенциалами взаимодействия, которые являются однородными функциями расстояний между частицами (как, например, степенны́е потенциалы). Тогда теорема приводит к простому соотношению между средними по времени кинетической и потенциальной энергиями $2K = nU$, где n — степень однородности (например, показатель в степенно́м законе). Конечно, наиболее часто встречающиеся потенциалы — это квадратичный потенциал гармонического осциллятора ($n = 2$) и взаимодействие, обратно пропорциональное расстоянию, т.е. ньютоновский или кулоновский потенциалы ($n = -1$). Теорема вириала для однородных потенциалов может рассматриваться как следствие механического подобия или, иными словами, масштабной инвариантности в механике [2]. Связь теоремы вириала с масштабной инвариантностью изучалась в работах [3–5], а её соотношение с теоремой Нётер — в работах [6–8].

Существует несколько возможных обобщений классической теоремы вириала [1]. Наиболее очевидные из них — это обобщения на случаи релятивистской и квантовой механики. В то время как обобщение теоремы для нерелятивистской квантовой механики не представляет трудностей, релятивистское обобщение не вполне тривиально, поскольку концепции силы и потенциала не пригодны для описания взаимодействий в релятивистской области. И тем не менее релятивистские формулировки теоремы вириала существуют. Теорема вириала в электродинамике, выражающая энергию связанного состояния через след тензора энергии-импульса появляется уже в классическом учебнике Ландау и Лифшица [9]. Эту релятивистскую теорему вириала можно, в принципе, обобщить и на другие типы взаимодействий [1].

Релятивистская теорема вириала обсуждалась в целом ряде работ и некоторые из них были специально ей посвящены, как в классической [10, 11], так и в квантовой [12] теории поля. Однако, в то время как связь классической теоремы вириала с масштабной инвариантностью надёжно установлена, аналогичная связь для релятивистской теоремы, особенно в формулировке Ландау и Лифшица, едва ли изучалась. В данной статье мы обсудим эту

Х. Гаите. Instituto Universitario de Microgravedad "Ignacio Da Riva" de la Universidad Politécnica de Madrid, E-28040 Madrid, Spain
E-mail: jose.gaite@upm.es

Статья поступила 7 февраля 2013 г.

связь с самой общей точки зрения. При этом наш подход к релятивистской теореме вириала будет ближе к подходу работы [11], и особенно [12], чем к использованному в [10]. Основная цель состоит в установлении фундаментальной роли масштабных преобразований и масштабной инвариантности в релятивистской теореме вириала. Для этой цели оказывается удобным сначала перейти от классической теоремы к релятивистской и затем к теореме вириала в квантовой теории поля. При этом от классического случая $2K = nU$, в котором, в принципе, возможна любая степень однородности n, мы перейдем к взаимодействиям, переносимым полями, которые в нерелятивистском пределе дают потенциалы, обратные расстоянию, т.е. единственно допустимым значением будет $n = -1$. Иными словами, теорема вириала ограничивается только взаимодействиями, переносимыми безмассовыми калибровочными полями, т.е. электромагнитным взаимодействием и сильным, описываемым квантовой хромодинамикой (КХД). Последний случай имеет ряд особых черт, которые будут обсуждаться отдельно.

Классическая теорема вириала включает и гравитационное взаимодействие, но релятивистская формулировка гравитации неизбежно ведёт к общей теории относительности (ОТО), которая также может рассматриваться как взаимодействие, переносимое безмассовым калибровочным полем, хотя и не обычного типа. На самом деле, попытки сформулировать теорему вириала в ОТО уже были [1, с. 27], но они игнорировали связь с другими калибровочными теориями. Некоторые из результатов данной статьи могут быть применены в ОТО, но эта теория имеет ряд специфических черт, и, в особенности, понятия гравитационной энергии и масштабной инвариантности в ней непросты и трудны для использования. Эти проблемы находятся за рамками данной статьи и требуют дальнейших исследований.

Мы начнем в разделе 2 с гамильтоновой формулировки теоремы вириала, которая возникает непосредственно из понятия масштабной инвариантности для средних по времени величин. Эта формулировка применяется к электромагнитному взаимодействию в специальной теории относительности, вначале к взаимодействию частиц на расстоянии, а затем и к полной теории поля, следуя изложению Ландау и Лифшица [9]. Далее, в разделе 2.2 будет приведён совершенно общий вывод теоремы вириала в теории поля, основанный на масштабной инвариантности, полученный обобщением гамильтоновой формулировки теоремы для системы частиц. Некоторые следствия теоремы вириала для связанных состояний ультрарелятивистских частиц обсуждаются в разделе 2.3. Так как для этих связанных состояний становятся существенными квантовые эффекты, их необходимо рассматривать уже в рамках релятивистской квантовой механики. Теорема вирала в квантовой теории поля обсуждается в разделе 3, где вначале рассмотрена квантовая электродинамика (КЭД), а затем квантовая хромодинамика, в которой определяющую роль играет аномалия следа тензора энергии-импульса.

2. Релятивистская теорема вириала

Теорема вириала рассматривается Ландау и Лифшицем [2] как следствие изменения масштаба в лагранжевой механике. Эта линия рассуждений затем повторялась в работах ряда авторов [3–5, 8], некоторые из которых связывали теорему вириала с теоремой Нётер. Мы же, напротив, приведём сейчас общую теорию дилатаций в гамильтоновом формализме, которая обеспечит простую и удобную формулировку теоремы вириала.

В гамильтоновой механике канонические преобразования являются наиболее общими преобразованиями, сохраняющими структуру фазового пространства [2]. Каноническое преобразование фазового пространства (q, p) определяется производящей функцией, которая может быть любой функцией $F(q, p)$, где для простоты мы обозначили через q и p полный набор всех координат и импульсов. После инфинитезимального преобразования переменные равны:

$$Q = q + \varepsilon\delta_F q\,, \quad \delta_F q = \{q, F\} = \frac{\partial F}{\partial p}\,,$$

$$P = p + \varepsilon\delta_F p\,, \quad \delta_F p = \{p, F\} = -\frac{\partial F}{\partial q}\,,$$

где ε — малый параметр, и введены скобки Пуассона $\{f, g\} = \partial_p f \partial_q g - \partial_q f \partial_p g$. Элемент объёма фазового пространства $\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p$ при таких преобразованиях не изменяется. Среди канонических преобразований важную роль играют точечные преобразования, т.е. такие, которые задаются преобразованием координат q. Они генерируются функциями $F = f(q)\,p$, где $f(q)$ — любая функция. Если $F = qp$, имеем

$$\delta_F q = q\,, \quad \delta_F p = -p\,, \tag{1}$$

что отвечает однородному растяжению (дилатации) q и соответствующему однородному сжатию p, совместное действие которых оставляет неизменным объём фазового пространства. Но дилатация q обычно не является симметрией, поэтому

$$\delta_F H = \{H, F\} = q\,\frac{\partial H}{\partial q} - p\,\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0\,,$$

и F не есть интеграл движения, т.е. $\dot{F} = \{F, H\} \neq 0$, если только гамильтониан H не является очень специальным (например, $H = F$). Тем не менее, если как q, так и p ограничены, то среднее по времени от $\dot{F}$ обращается в нуль при усреднении по большому промежутку времени, т.е. в среднем

$$\{F, H\} = p\dot{q} - q\,\frac{\partial H}{\partial q} = H + L - q\,\frac{\partial H}{\partial q} = 0\,. \tag{2}$$

Заметим, что координаты q системы частиц могут быть ограничены только в их системе покоя, т.е. в системе отсчёта, где их полный импульс равен нулю.

Во многих механических задачах $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - U(q)$, т.е. кинетическая и потенциальная энергии разделяются и K, в свою очередь, квадратична по скоростям. Тогда $H = K + U$, так что

$$H + L - q\,\frac{\partial H}{\partial q} = 2K - q\,\frac{\partial U}{\partial q} = 0\,.$$

Выражение $q\,\partial_q U$ называется вириалом. Если далее $U(q)$ — однородная функция q степени n, то из теоремы Эйлера об однородных функциях следует, что $q\,\partial_q U = nU$, откуда и получается стандартная теорема вириала $2K = nU$, или в терминах полной энергии E, $K = nE/(n+2)$ [1, 2]. Эта теорема является следствием однородности K по $\dot{q}$ и однородности U по q, что в свою очередь подразумевает механическое подобие: уравнения движения допускают набор подобных движений, так что их траектории геометрически подобны, а отношения времён движения между соответствующими точками постоянны [2]. Например, когда $n = -1$, как в случае ньютоновского или кулоновского потенциалов, растяжению $q \to lq$ соответствует $t \to l^{3/2} t$ (третий закон Кеплера) и $E \to E/l$.

К сожалению, в релятивистской механике лагранжиан не имеет вида $L(q, \dot q) = K(\dot q) - U(q)$, где K — однородная функция $\dot q$. Тем не менее классическая теорема вириала легко обобщается для релятивистской частицы в поле внешних сил [13]. Более того, гамильтонова теорема вириала (2) — очень общая и справедлива для задачи многих тел в электродинамике, которая является наиболее известным примером релятивистской системы со взаимодействием. Но, прежде чем перейти к этой задаче, рассмотрим два важных обобщения гамильтоновой теоремы вириала. Первое касается квантовой механики. Оно очень прямое, так как гамильтонова формулировка канонических преобразований легко переносится на квантовую механику простой заменой скобок Пуассона на коммутаторы. Здесь нужно только соблюдать осторожность с упорядочением некоммутирующих операторов, например, симметризуя функции на фазовом пространстве по отношению к q и p. В любой функции, которая может быть разложена в ряд по q и p, такое упорядочение может быть достигнуто симметризацией каждого члена ряда (который есть полином). В частности, генератор дилатаций превращается в $F = (qp + pq)/2$ (в координатном представлении $p = -\mathrm{i}\hbar\,\partial/\partial q$).

Второе возможное обобщение теоремы вириала связано с использованием канонических преобразований, отличных от дилатаций. Действительно, среднее от $\dot F$ по большому интервалу времени обращается в нуль для любой ограниченной функции F, и это же справедливо для среднего от $\{F, H\}$. Поэтому мы имеем бесконечное число соотношений для средних. Однако общие канонические преобразования с функцией F, произвольно зависящей от p, не имеют большого физического смысла. Напротив, $F = f(q)\, p$, т.е. набор точечных преобразований включает в себя вращения и, более того, произвольные деформации геометрической "формы" механических систем. Эти преобразования приводят к обобщению стандартной теоремы, которое называется *тензорной теоремой вириала* [1] и будет обсуждаться в следующем разделе.

2.1. Теорема вириала для электромагнитного взаимодействия

N-частичный лагранжиан в теории электромагнетизма имеет вид [9, 14]

$$L = \sum_{a=1}^{N} \left(- m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} + \frac{e_a}{c}\, \mathbf{v}_a\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) - e_a \Phi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \right),$$

где $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{x}}_a$. Соответствующий гамильтониан есть

$$H = \sum_{a=1}^{N} \left(\sqrt{(c\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A})^2 + m_a^2 c^4} + e_a \Phi \right). \tag{3}$$

Электромагнитные потенциалы, описывающие взаимодействие между частицами, должны удовлетворять уравнению д'Аламбера с электромагнитным током самих частиц в правой части, так что потенциалы являются функционалами траекторий частиц. Если для решения волнового уравнения используется симметричная функция Грина (полусумма запаздывающей и опережающей функций), то эти лагражиан и гамильтониан соответствуют так называемой электродинамике с *действием на расстоянии* (action-at-a-distance) [15, 16], в которой нет излучения и поэтому нет необходимости вводить лагранжиан электромагнитного поля.

Ни N-частичный лагранжиан, ни гамильтониан не разбиваются на сумму кинетической и потенциальной частей, но мы все равно можем использовать (2).

Учитывая что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_a} \right)_{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{p}}_a = -\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} \right)_{\mathbf{v}},$$

уравнение (2) можно переписать как

$$H + L + \sum_a \mathbf{x}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \left(\sum_b \frac{e_b}{c}\, \mathbf{v}_b\, \mathbf{A} - e_b \Phi \right) = H + \sum_a \left[- m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} + \left(1 + \mathbf{x}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \right) \times \left(\sum_b \frac{e_b}{c}\, \mathbf{v}_b\, \mathbf{A} - e_b \Phi \right) \right] = 0, \tag{4}$$

где производные должны вычисляться при постоянных $\mathbf{v}_b$. Действие оператора $\sum_a (1 + \mathbf{x}_a\, \partial/\partial \mathbf{x}_a)$ на однородную функцию от $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ степени $n = -1$ согласно теореме Эйлера даёт нулевой результат. Иными словами, если мы предположим, что векторный и скалярный потенциалы могут быть представлены как однородные функции координат с $n = -1$, то каждый электромагнитный потенциал и соответствующий ему вириал сокращают друг друга. Поэтому мы получаем энергию

$$E = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Это и есть релятивистская теорема вириала для системы частиц в классической электродинамике. Если нужно добавить внешние силы, чтобы удерживать частицы, то, например, для сил, обеспечивающих постоянное давление P, приложенное к поверхности системы, E следует заменить на $E - 3PV$, где V — объём системы [9, § 35].

Хотя параметры электромагнитного взаимодействия и отсутствуют в (5), их эффект учтён неявным образом. Заметим также, что $E < \sum_a m_a c^2$, как и должно быть для связанного состояния. Связанное состояние становится нерелятивистским при малых скоростях, когда $|E - \sum_a m_a c^2| \ll \sum_a m_a c^2$, и тогда уравнение (5) сводится к классической теореме вириала $E - \sum_a m_a c^2 \approx -\sum_a m_a v_a^2/2 = -K$. Однако релятивистская динамика потеряла свойство подобия при пространственных и временны́х растяжениях, которое было присуще классической динамике. Это подобие теряется даже в том случае, когда Φ и $\mathbf{A}$ являются однородными функциями порядка $n = -1$. Более того, в релятивистской механике такого подобия нет даже для свободных частиц ($e_a = 0$) из-за вида гамильтониана. (Конечно, оно восстанавливается при малых скоростях, но энергия масштабируется правильным образом только после вычитания энергии покоя $\sum_a m_a c^2$.) Существует, однако, релятивистское понятие механического подобия [4], при котором пространство и время масштабируются одинаково, так что скорости не меняются. При таком преобразовании массы уже не остаются постоянными и должны уменьшаться, так что они преобразуются подобно энергии. Но это значит, что меняется природа частиц и соотношения подобия уже не связывают разные движения одной и той же системы. Тем не менее такое подобие приводит к (5), а в нерелятивистском пределе воспроизводит обычную теорему вириала [4].

Уравнения движения в электродинамике с действием на расстоянии не являются обычными дифференциальными уравнениями — это дифференциально-разностные уравнения, и их решения найти трудно. Простое решение релятивистской двухчастичной задачи выглядит как движение по кругу двух зарядов противоположного знака, для которого можно вычислить радиус и угловую скорость [15, с. 223]. Это решение удовлетворяет (5), причём усреднения по времени не требуется. Но, конечно, хотелось бы учесть и динамику электромагнитного поля, а также эффекты излучения. Однако, поскольку эти эффекты возникают только в третьем порядке разложения по степеням v/c, то движение частиц можно описывать обычными дифференциальными уравнениями, полученными с использованием потенциалов с поправками порядка $(v/c)^2$ [9, 14, 15]. Эти потенциалы, добавленные к разложению кинетической энергии до того же порядка, дают хорошо известные дарвиновские гамильтониан и лагранжиан. В этом приближении как векторный, так и скалярный потенциалы являются однородными функциями степени $n = -1$, так что теорема вириала (5) справедлива при разложении до членов второго порядка по v/c.

Что касается квантовой механики, то, как отмечалось выше, релятивистская теорема вириала доказывается с помощью канонического квантования гамильтоновых систем. Квантовые релятивистские версии теоремы вириала действительно появлялись в литературе [17, 18]. Однако применялись они в физике адронов, когда рассматривалась только простая задача о двух кварках, взаимодействующих через феноменологический скалярный потенциал U (заметим, что в КХД, которая является фундаментальной теорией сильных взаимодействий, взаимодействие включает также *векторный* потенциал, как и в электродинамике). При этом использовался скалярный корнельский потенциал, который есть сумма кулоновского и линейно растущего члена, обеспечивающего конфайнмент кварков. Луха и Шёберль [17], в частности, получили

$$\big\langle \mathbf{x}\,\nabla U(\mathbf{x})\big\rangle = c\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2+(m_1c)^2}}+\frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2+(m_2c)^2}}\right\rangle, \quad (6)$$

и, следовательно,

$$E = \big\langle \mathbf{x}\,\nabla U(\mathbf{x})\big\rangle + \big\langle U(\mathbf{x})\big\rangle + c^3\left\langle \frac{m_1^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2+(m_1c)^2}}+\frac{m_2^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2+(m_2c)^2}}\right\rangle, \quad (7)$$

где средние вычисляются по нормированным собственным состояниям. Уравнение (6) утверждает равенство средних значений центростремительного и центробежного вириалов. С другой стороны, если учесть релятивистское тождество

$$1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{(mc)^2}{\mathbf{p}^2+(mc)^2}\,,$$

то видно, что уравнение (7) есть квантовая версия уравнения (4) для случая двух частиц с $\mathbf{A} = 0$, причём временно́е усреднение, неявно присутствующее в (4), заменяется средними по стационарным состояниям. В уравнении (7) кулоновская часть потенциала и её вириал сокращают друг друга, как и в (4). Но в любом случае гамильтониан сильного взаимодействия, использованный в работах [17, 18], не является полностью релятивистским, а описывает только релятивистскую кинематику (потенциал U может быть интерпретирован как низшее приближение по скорости движения к релятивистскому взаимодействию). Формулировка полностью релятивистской теоремы вириала для связанных состояний кварков требует теоретико-полевой формулировки и будет рассмотрена в разделе 3.

Возвращаясь к классической электродинамике, рассмотрим полную динамику, учитывающую как частицы, так и поле, и её локальные законы сохранения, а именно сохранение энергии и импульса. Теорема вириала Ландау и Лифшица [9] опирается на этот закон сохранения, выраженный через тензор энергии-импульса. Этот закон означает, что после усреднения по большому промежутку времени тензор напряжений (пространственная часть тензора энергии-импульса) является бездивергентным, т.е.

$$\partial_j \overline{T_i^j} = 0\,, \quad (8)$$

где латинские индексы обозначают пространственные координаты, а черта сверху означает временно́е усреднение. Умножая (8) на x^i и интегрируя по всему пространству, получаем (при подходящих граничных условиях на бесконечности), что временно́е среднее для интеграла по пространству от следа тензора напряжений равно нулю:

$$\int \overline{T_i^i}\,\mathrm{d}V = 0\,. \quad (9)$$

На самом деле обращение в нуль интеграла от *полного* тензора напряжений для замкнутой (самосвязанной) и *статической* системы было доказано Лауэ [19] ещё на заре становления релятивистской теории [1]. Зануление интеграла от среднего по времени тензора напряжений составляет содержание *тензорной теоремы вириала*, которая выполняется как в классической, так и в релятивистской механике ([1], § II.1 и § II.3). Она может быть доказана умножением уравнения (8) на x^k, т.е. использованием произвольного индекса k вместо i в предыдущем выводе, и последующим интегрированием по всему пространству. Что касается связи тензорной теоремы вириала с произвольными преобразованиями пространственных координат, отмечавшейся выше, эта теорема может быть понята просто как условие *динамического* равновесия, т.е. стабильности усреднённой формы системы относительно деформаций, (см. также раздел 2.2). Конечно, тензорная теорема подразумевает и скалярную (зануление следа), которая в свою очередь означает условие стабильности системы по отношению к растяжениям.

[1] Работа Лауэ была посвящена энергии и импульсу замкнутой статической системы и, согласно Оханиану [20], содержит *первое* настоящее доказательство эквивалентности массы и энергии $E = mc^2$.

Для системы из N тел с электромагнитным взаимодействием,

$$T_i^i = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}_a^2/c^2}}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2\right). \qquad (10)$$

Кажется, что интеграл по пространству от T_i^i строго положителен и поэтому теорема вириала (9) не может выполняться. Чтобы объяснить уравнение (9) и соответствующую теорему вириала, разложим электрическое поле на продольную и поперечную составляющие, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{L}} + \mathbf{E}_{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{E}_{\mathrm{L}} = -\nabla\Phi$ и $\nabla\,\mathbf{E}_{\mathrm{T}} = 0$. Тогда электромагнитная энергия равна

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V(\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^2 + \mathbf{E}_{\mathrm{T}}^2 + c^2\mathbf{B}^2)\,, \qquad (11)$$

где

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^2 = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}V\,\mathrm{d}V'\,\frac{\rho(\mathbf{x})\,\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \qquad (12)$$

— кулоновская электростатическая энергия. В то время как эта электростатическая энергия очевидно положительна для непрерывных распределений заряда, электростатическая энергия системы из N положительных и отрицательных *точечных* зарядов может стать отрицательной после вычитания (бесконечной) собственной энергии зарядов, которая даёт перенормировку их масс [9, 14]. С другой стороны, что касается вкладов $\mathbf{E}_{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{B}$ в энергию, мы должны исключить приходящие или уходящие поля излучения, которые могут дать в $\mathbf{E}_{\mathrm{T}}^2 + c^2\mathbf{B}^2$ вклады произвольной величины. Действительно, вывод уравнения (9) подразумевал зануление некоторых поверхностных интегралов, связанных с полем излучения [9]. Как уже говорилось, отсутствие излучения неявно подразумевается и в электродинамике с действием на расстоянии. Эти проблемы были замечены уже Дудасом и Пирьолем [12], которые подчеркивали роль симметричной по времени формулировки электродинамики Уилера – Фейнмана для их решения.

Четырёхмерный след тензора энергии-импульса $T_\mu^\mu = -T^{00} + T_i^i$ (наш выбор сигнатуры метрики $(-,+,+,+)$). Поэтому условие, эквивалентное (9), которое вводит полную энергию $E = T^{00}$, есть [9]

$$E = -\int T_\mu^\mu\,\mathrm{d}V \qquad (13)$$

(как и раньше, усреднение по времени подразумевается, если оно не указано явно). Для системы частиц, взаимодействующих электромагнитным образом, тензор энергии-импульса поля является бесследовым и не даёт вклада в (13). Это отсутствие электромагнитных параметров в условии равновесия аналогично сокращению электромагнитных потенциалов с их вириалами в уравнении (4). Действительно, (13) снова приводит к (5) [9].

Заметим, что, в отличие от (5), уравнение (13) вообще не содержит ссылок на частицы. Поэтому его можно применить к полям, формирующим *одну* частицу, и тогда оно может относиться к проблеме построения модели электрона или любой другой частицы в рамках классической электродинамики [14, гл. 16]. Действительно, тогда (13) связывает энергию частицы со следом тензора энергии-импульса напряжений Пуанкаре (вводимых для обеспечения устойчивости), поскольку след электромагнитного тензора равен нулю. Если мы предположим для простоты, что тензор напряжений Пуанкаре не имеет бесследовой части, т.е. пропорционален $g_{\mu\nu}$, то полный тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} = T_{\mathrm{em}}^{\mu\nu} + T_\alpha^\alpha g^{\mu\nu}/4$, где $T_{\mathrm{em}}^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Поэтому в системе покоя

$$E = \int\left(T_{\mathrm{em}}^{00} + \frac{g^{00}}{4}\,T_\alpha^\alpha\right)\mathrm{d}V = \int T_{\mathrm{em}}^{00}\,\mathrm{d}V + \frac{E}{4}\,, \qquad (14)$$

т.е. три четверти энергии покоя частицы происходят из её электромагнитной энергии, а остающаяся одна четверть — из напряжений Пуанкаре (3/4 — это на самом деле отношение электромагнитной массы к инерционной массе в уравнении движения, что и составляет знаменитую проблему 4/3, которая решается введением напряжений Пуанкаре [14, гл. 16]). Если же тензор энергии-импульса напряжений Пуанкаре $T_{\mathrm{P}}^{\mu\nu}$ имеет ненулевую бесследовую часть, то она может быть рассмотрена так же, как и бесследовый тензор энергии-импульса электромагнитного поля, так что оба вклада в сумме дают 3/4 полной энергии покоя частицы. Вклад в энергию бесследовой части тензора энергии-импульса напряжений Пуанкаре даётся интегралом по пространству от

$$T_{\mathrm{P}}^{00} - T_{\mathrm{P}\,\alpha}^{\;\alpha}\,\frac{g^{00}}{4} = \frac{3}{4}\,T_{\mathrm{P}}^{00} + \frac{1}{4}\,T_{\mathrm{P}\,i}^{\;i}\,. \qquad (15)$$

Этот интеграл неотрицателен, хотя $\int T_{\mathrm{P}\,i}^{\;i}\,\mathrm{d}V < 0$, поскольку напряжения Пуанкаре удерживают частицу, или, иными словами, полный тензор напряжений удовлетворяет (9). Неотрицательность правой части (15) может быть доказана, если учесть *условие энергодоминантности* (null energy condition), которое выводится из неотрицательности плотности энергии [21, с. 89]. В итоге, вклад в энергию от напряжений Пуанкаре по крайней мере не меньше одной четверти, а вклад электромагнитной энергии меньше или равен трём четвертям.

В модели протяжённой частицы распределение заряда непрерывно и его можно рассматривать как некое заряженное поле или жидкость. Интересная модель классического электрона была предложена Бялыницки-Бирулей [22]. В ней электрон образован из идеальной заряженной жидкости с плотностью энергии ρ и давлением P и электромагнитного поля. Бесследовая часть тензора энергии-импульса жидкости пропорциональна $\rho + P$ и даёт вклад в энергию $(3/4)\int(\rho + P)\,\mathrm{d}V$, который неотрицателен, хотя везде $P < 0$.

Модель с непрерывным распределением заряда имеет смысл как для составной частицы, так и для элементарной, поскольку в классической электродинамике нет квантования заряда. По аналогии с КЭД предположим, что материя описывается дираковским полем ψ со стандартным лагранжианом. Тогда

$$T_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,c\left(\bar\psi\gamma_{(\mu}\mathcal{D}_{\nu)}\,\psi - \mathcal{D}^*_{(\mu}\bar\psi\gamma_{\nu)}\,\psi\right),$$

где $\mathcal{D}_\mu = \hbar\partial_\mu + \mathrm{i}(e/c)\,A_\mu$, а $\mathcal{D}^*$ — комплексно-сопряжённая величина. Поэтому

$$T_\mu^\mu = \frac{\mathrm{i}}{2}\,c\left(\bar\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}_\mu^*\bar\psi\gamma^\mu\psi\right) = -mc^2\bar\psi\psi \qquad (16)$$

и, согласно уравнению (13), энергия составной или элементарной частицы, построенной из полей, равна

$$E = mc^2\int\bar\psi\psi\,\mathrm{d}V\,. \qquad (17)$$

Это выражение связано со старым результатом Фока для уравнения Дирака во внешнем центральном кулоновском поле [23] и с более общей теоремой вириала Розе и Вельтона [24] (см. также [11]).

Поскольку мы рассматриваем дираковское поле ψ как *классическое* поле, которое представляет собой как бы некую жидкость, $n(\mathbf{x}) = \bar{\psi}\psi$ есть полная плотность числа частиц, вычисленная в сопутствующей системе отсчёта, причём частицы и античастицы входят с одинаковым весом. Может показаться, что согласно (17) энергия связанного состояния равна просто числу частиц, умноженному на энергию покоя отдельной частицы, как если бы они были свободными и покоились, но это не так, потому что плотность $n(\mathbf{x})$ должна вычисляться именно в *сопутствующей* системе отсчёта. Если мы хотим перейти в лабораторную систему, т.е. в систему покоя связанного состояния, то

$$mn(\mathbf{x}) \to r(\mathbf{x}) \sqrt{1 - \frac{v^2(\mathbf{x})}{c^2}}\,,$$

где $r(\mathbf{x})$ — обычная нерелятивистская плотность массы, а $v(\mathbf{x})$ — скорость элемента жидкости с массой $\mathrm{d}m = r(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V$. Тогда мы получаем

$$E = c^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2(\mathbf{x})}{c^2}}\, r(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V\,, \tag{18}$$

что является непрерывной формой уравнения (5). Конечно, эта теорема вириала применима только к решениям типа связанных состояний для нелинейных уравнений классического дираковского поля, взаимодействующего с электромагнитным, которые очень плохо изучены (см., например, [25, 26]). Поскольку эти уравнения имеют стабильные решения типа связанных состояний, то соответствующие модели частицы не нуждаются во внешних напряжениях Пуанкаре.

2.2. Гамильтонова формулировка теоремы в теории поля

Мы можем получить общую теорему вириала в теории поля в гамильтоновом формализме, обобщая прежний вывод для системы с конечным числом степеней свободы (см. раздел 2). Рассмотрим произвольное поле, которое обозначим через φ, но которое при этом может быть набором нескольких независимых полей (оно также может быть векторным полем и т.д.), и обозначим лагранжиан и гамильтониан как $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Плотность импульса поля равна

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\,.$$

В механике частиц дилатации действуют на координаты просто как $q \to lq$, а на импульсы — как $p \to p/l$, что в инфинитезимальной форме соответствует (1). В теории поля дилатации исходно действуют на пространственные координаты и уже через них на полевые координаты φ и импульсы π. Поэтому инфинитезимальный генератор дилатаций $\varphi(\mathbf{x}) \to l^D \varphi(l\mathbf{x})$, где D — матрица размерностей, даётся производной Ли

$$\delta\varphi = D\varphi - x^i\,\partial_i\varphi\,.$$

Матрицу размерностей D можно считать диагональной, т.е. полагать, что поля φ — собственные состояния D. Производная Ли $\delta\varphi$ отличается от δq в (1) наличием транспортного члена, содержащего $x^i\partial_i$, а также присутствием матрицы D, которая обобщает тривиальную размерность q. Канонический производящий функционал F, такой, что $\delta\varphi = \delta F/\delta\pi$, равен

$$F = \int \pi(D\varphi - x^i\partial_i\varphi)\,\mathrm{d}V\,. \tag{19}$$

Поэтому

$$\delta\pi = -\frac{\delta F}{\delta\varphi} = (-3 - D)\,\pi - x^i\,\partial_i\,\pi\,,$$

с точностью до зануляющегося поверхностного интеграла. Мы заключаем, что как $\delta\varphi$, так и $\delta\pi$ описывают инфинитезимальные дилатации в гамильтоновом формализме. При конечном растяжении $\pi(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}) \to l^{-3}\pi(l\mathbf{x})\,\varphi(l\mathbf{x})$, так что F есть инвариант.

Производящий функционал F, определённый в (19), есть интеграл от суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует собственному изменению поля, а другое — пространственному сдвигу. Последнее может быть записано как $x^i T_{\mathrm{C}}{}^0_i$, где $T_{\mathrm{C}}{}^\mu_\nu$ — четыре сохраняющихся тока, связанных с пространственно-временны́ми трансляциями теоремой Нётер [27]; т.е. это *канонический* тензор энергии-импульса. Например, для скалярного поля φ с $\mathcal{L} = -\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi/2 - \mathcal{V}(\varphi)$,

$$T_{\mathrm{C}}{}^\mu_\nu = \partial^\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\,,$$

$$T_{\mathrm{C}}{}^0_i = -\dot{\varphi}\,\partial_i\varphi = -\pi\,\partial_i\,\varphi\,.$$

Для электромагнитного поля

$$T_{\mathrm{C}}{}^\mu_\nu = F^{\mu\rho}\,\partial_\nu A_\rho + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\,,$$

и в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$,

$$T_{\mathrm{C}}{}^0_i = -\dot{A}_j\,\partial_i A^j = -\pi_j\,\partial_i A^j\,.$$

Поэтому в общем случае

$$F = \int (\pi D\varphi + x^i T_{\mathrm{C}}{}^0_i)\,\mathrm{d}V\,. \tag{20}$$

Однако $T_{\mathrm{C}}{}^0_i$ может быть переопределён добавлением к нему $\partial_j t_i^j$, где t_i^j — произвольная функция φ и π. Подходящим выбором t_i^j мы можем сократить первое слагаемое в правой части (20) (с точностью до поверхностного интеграла). Иными словами, всегда существует "улучшение" тензора энергии-импульса, такое, что генератор дилатаций приобретает вид

$$F = \int x^i T_i^0\,\mathrm{d}V\,.$$

Это связывает гамильтонову формулировку теоремы вириала с подходом Ландау и Лифшица [9]. Действительно, используя закон сохранения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, получаем

$$\dot{F} = \int T_i^i\,\mathrm{d}V\,.$$

Обращение в нуль временно́го среднего от $\dot{F}$ и, следовательно, интеграла по пространству от временно́го среднего T_i^i приводит к теореме вириала (9).

Заметим, что вместо дилатаций мы могли бы рассмотреть общие (анизотропные) координатные преобразования и таким способом вывести тензорную теорему вириала.

Общее условие точной масштабной инвариантности есть $\delta_F H = -\dot{F} = 0$, или

$$\dot{F} = \int T_i^{\,i}\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (21)$$

без усреднения. Это условие не выполняется для конфигураций общего типа в обычных теориях поля. Естественно, $\dot{F}$ должно зануляться для любой статической конфигурации, и это же справедливо для интеграла от следа тензора напряжений. Это находится в согласии с теоремой Лауэ (см. раздел 2.1), применимой к любой статической релятивистской системе и, в частности, для любой модели элементарной частицы, в частности, электрона. Например, в модели Бялыницки-Бирули условие (21) действительно необходимо для релятивистской инвариантности [22].

Отметим одно интересное следствие уравнения (21) для статических полевых конфигураций. В случае скалярного поля с $\mathcal{L} = -\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi/2 - \mathcal{V}(\varphi)$ для статического поля получаем

$$T_{\mathrm{C}\,i}^{\ \ i} = \frac{2-d}{2}\,(\nabla\varphi)^2 - d\mathcal{V}(\varphi)\,, \qquad (22)$$

где d — размерность пространства (мы используем здесь канонический, неулучшенный тензор энергии-импульса, поскольку интеграл по пространству от тензора напряжений не изменяется при улучшении). Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathcal{V}(\varphi) \geqslant 0$ и потенциал обращается в нуль в своих абсолютных минимумах, т.е. считать, что имеется несколько таких минимумов с $\mathcal{V} = 0$. Тогда из (21) и (22) для $d \geqslant 2$ следует, что $\varphi(\mathbf{x})$ постоянно и равно своему значению в одном из минимумов. Отсутствие статических локализованных решений для скалярного поля при $d \geqslant 2$ известно как теорема Хобарта – Деррика [28, 29] и обычно доказывается прямым перемасштабированием поля. Обобщение этой теоремы для других теорий поля, более сложных, чем скалярное, также получается из (21), хотя может быть доказано и прямым перемасштабированием соответствующих полей [30, гл. 6].

В данном рассмотрении масштабных преобразований мы выбрали примеры релятивистских полей, но следует заметить, что для получения теоремы вириала нет необходимости накладывать условие лоренцевой инвариантности. Когда лоренцевой инвариантности нет, обычно используется лагранжева формулировка масштабных преобразований, использующая $\mathcal{L}$, вместо гамильтоновой, поскольку она ковариантна и поэтому явным образом релятивистская. Лагранжева формулировка масштабных преобразований основана на *пространственно-временных* дилатациях, таких что

$$\delta\varphi = D\varphi - x^\alpha\,\partial_\alpha\varphi\,.$$

Для случая статических полей они совпадают с растяжениями пространства. *Локальный* ток, связанный по теореме Нётер с пространственно-временны́ми дилатациями, всегда может быть записан как $j_{\mathrm{D}}^\mu = x_\nu T^{\mu\nu}$, и масштабная инвариантность может быть выражена в локальной форме $\partial_\mu j_{\mathrm{D}}^\mu = 0$ [30, 31]. Поэтому в теории поля масштабная инвариантность обычно связывается с бесследовостью тензора энергии-импульса. Хотя сохраняющийся симметричный тензор энергии-импульса масштабно-инвариантной теории поля не обязательно бесследовый, всегда возможно "улучшить" его и преобразовать в бесследовый, при том, что он останется симметричным и сохраняющимся [30, 31]. Тогда бесследовость тензора энергии-импульса подразумевает, кроме Пуанкаре и масштабной инвариантности, ещё и полную конформную инвариантность (относительно конформной группы, которая получается добавлением дискретной инверсии к пуанкаре- и масштабной инвариантностям). Уравнения Максвелла без источников, конечно, конформно инвариантны, и в этом случае след тензора энергии-импульса, возникающего после симметризации его канонической формы, уже равен нулю [9], и улучшения не требуется. Однако такое улучшение требуется в других теориях поля, например в теории безмассового скалярного поля.

2.3. Масштабная инвариантность в ультрарелятивистской области

Что касается теоремы вириала для N-частичного связанного состояния в электродинамике (5), то существует возможность существования связанных состояний с почти нулевой энергией, таких, что $E \ll \sum_a m_a c^2$, когда связанные частицы становятся ультрарелятивистскими и их скорость приближается к скорости света. В таком связанном состоянии кинетическая энергия стремится к бесконечности, но это компенсируется уменьшением потенциальной энергии, которая стремится к минус бесконечности, когда частицы приближаются друг к другу и система сжимается в точку.

Обращение в нуль энергии ультрарелятивистского связанного состояния следует из масштабной инвариантности. Как отмечалось в разделе 2.1, релятивистская формулировка механического подобия предполагает изменение масштаба масс, поскольку в релятивистской механике масса неразрывно связана с энергией. Поэтому полное подобие требует отсутствия масс. В ультрарелятивистском пределе $p_a \gg m_a c$ электродинамический гамильтониан (3) становится равным

$$H = \sum_a |c\mathbf{p}_a - e\mathbf{A}| + e\Phi\,,$$

что можно также получить, просто полагая $m_a = 0$. Отсутствие масс предполагает масштабную инвариантность. Действительно, при условии что $\mathbf{A}$ и Φ — однородные функции степени $n = -1$, H переходит в H/l при изменении масштаба координат фазового пространства $\mathbf{x} \to l\mathbf{x}$ и $\mathbf{p} \to \mathbf{p}/l$. Но система ультрарелятивистских частиц такова, что энергия растёт пропорционально p, поэтому в пределе $p \to \infty$ для энергии связанного состояния должно точно выполняться равенство $E = 0$ и такое состояние будет масштабно-инвариантным. В противном случае E будет конечной функцией m_a и связанное состояние уже не масштабно-инвариантно.

Масштабно-инвариантное релятивистское состояние с нулевой энергией — это вакуум, который нейтрален и не имеет никаких измеримых свойств. Фактически, можно представить себе, как любая нейтральная N-частичная система теряет энергию на излучение и проходит через ряд ультрарелятивистских связанных состояний с уменьшающейся энергией, заканчивающийся вакуумом. Однако исследование последних стадий этого процесса требует квантово-механического рассмотрения. Типичным примером такого распада является аннигиляция позитрония (связанного состояния электрона и позитрона), но позитроний — слабосвязанная система, и аннигиляция происходит раньше, чем он попадёт в ультрарелятивистскую область. Кроме этого, можно рассмотреть также ультрарелятивистские состояния с ненулевым зарядом. Простой пример ультрарелятивистской динамики в атомной физике кратко обсуждается ниже. Этот пример полезен ещё и потому, что он вводит явление *распада вакуума*, важного в КХД (см. раздел 3.2).

Хотя, по-видимому, не существует связанных состояний обычной материи, которые были бы полностью релятивистскими, самые быстрые электроны в некоторых атомах — вполне ультрарелятивистские. Рассмотрим один из наиболее быстрых и близких к ядру электронов в тяжёлом атоме и для простоты пренебрежём взаимодействием с другими электронами, т.е. рассмотрим одноэлектронный гамильтониан

$$H = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2} - \frac{Ze^2}{4\pi r}\,, \qquad (23)$$

(ядро можно считать покоящимся). Для круговой орбиты радиальное уравнение движения просто утверждает равенство центробежной и кулоновской сил, что в терминах их вириалов может быть записано как

$$\frac{c\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}} = \frac{Ze^2}{4\pi r}\,. \qquad (24)$$

Для орбиты общего вида равенство вириалов выполнено только в среднем по времени. Учитывая, что

$$\frac{c\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}} = \mathbf{p}\,\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}\,,$$

временнóе среднее от (24) есть, по-сути, частный случай теоремы вириала (9)–(12) (с $\mathbf{E}_\mathrm{T} = \mathbf{B} = 0$). Следует также отметить связь с уравнением (6). Что касается энергии, то теорема вириала утверждает, что отношение $E/(mc^2)$ равно среднему по времени от

$$\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}}\,.$$

Как обычно, соотношения вириала могут быть использованы для того, чтобы сделать заключения о динамике, не решая уравнений движения. В частности, из (24) и

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}} \leqslant \frac{1}{p}$$

мы получаем, что в среднем $cp \geqslant Ze^2/(4\pi r)$. Равенство $cp = Ze^2/(4\pi r)$ имеет место в ультрарелятивистском пределе, когда $r \to 0$, $p \to \infty$, $E \to 0$ и мы приближаемся к масштабной инвариантности. Для круговой орбиты угловой момент равен $M = pr$, так что имеем условие $M \geqslant Ze^2/(4\pi c)$. Если $M < Ze^2/(4\pi c)$, то не существует стабильных орбит и электрон должен упасть на ядро по спиральной траектории [9, § 39]. Когда электрон приближается к ядру и становится ультрарелятивистским, его траектория стремится к логарифмической спирали, которая является *самоподобной*. Тем не менее для каждого $E > 0$ существуют стабильные орбиты, хотя при $E \to 0$ единственно стабильными являются круговые орбиты, но и они лежат на границе стабильности. При $E < 0$ стабильных орбит нет.

Рассмотрим теперь одноэлектронный тяжёлый атом в квантовой механике, когда принцип неопределённости ограничивает размер атома снизу, т.е. и r, и E ограничены снизу и их наименьшие значения соответствуют основному состоянию гамильтониана. Это справедливо независимо от того, является электрон релятивистским или нет, но в релятивистском случае для гамильтониана H из (23) возникает новая черта: состояния с низким M, а значит, с наименьшей положительной энергией могут быть нестабильными, т.е. состояния с $M \sim \hbar$ стабильны лишь при $Z\alpha < 1$, где $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) = 1/137$. Это подтверждается решением задачи с релятивистскими волновыми уравнениями, например, уравнениями Клейна–Гордона, Дирака или Солпитера: основное состояние нестабильно для больших $Z\alpha$, и критическое значение $Z\alpha$, которое зависит от выбранного уравнения, всегда порядка единицы[2]. Эта нестабильность может быть понята как квантово-механический коллапс, при котором обычный вакуум распадается и переходит в отрицательно заряженный вакуум [33, § 7]. Заряженный вакуум можно представлять себе как облако электронов, окружающих ядро. Это облако соответствует классическим спиральным траекториям, которые падают на ядро и асимптотически самоподобны. Заметим, что здесь существенно наличие неэлектромагнитного взаимодействия (в данном случае сильного), которое удерживает положительный заряд Ze внутри ядра достаточно малого размера, чтобы его электрическое поле было очень сильным.

В отличие от этого, в электрон-позитронной системе нет состояний с отрицательной энергией из-за малости α. Последовательное решение этой задачи требует методов квантовой теории поля, но в некотором приближении она может быть сведена к уравнению Шрёдингера с гамильтонианом (23) [34]. Если бы существовали электрон-позитронные состояния с отрицательной энергией, то обычный вакуум КЭД был бы неустойчив по отношению к образованию электрон-позитронных пар. Такой распад вакуума не происходит в КЭД, но распад вакуума и кварк-антикварковый конденсат имеют место в КХД [34]. Это свойство КХД вакуума важно для физики адронов (см. раздел 3.2).

Что касается масштабной инвариантности, то фундаментальный эффект квантовой механики состоит в том, что появляется новая постоянная $\hbar$, поэтому при известной скорости c остаётся неопределённой только одна размерная величина, например, длина. Поэтому массы частиц могут быть связаны с масштабами длин, а именно с их комптоновскими длинами волн. Заметим, что это соотношение согласуется с релятивистским подобием Андерсена–Байера [4]. Комптоновская длина волны $\hbar/(mc)$ задаёт масштаб, на котором неопределённости импульса или энергии достаточно велики, чтобы стало возможным рождение пар, так что само понятие частицы

[2] Спектр гамильтониана (23) изучался Хербстом [32]. Он доказал, что уравнение (24) выполняется как уравнение для средних по собственным состояниям гамильтониана H, а также, что спектр не содержит отрицательных значений для $Z\alpha \leqslant 2/\pi$, но неограничен снизу при $Z\alpha > 2/\pi$.

теряет смысл. Соответствующая длина волны для атома $\hbar/(mv) \sim \hbar/(mcZ\alpha)$, конечно, больше, чем комптоновская длина волны электрона, если $Z\alpha \ll 1$. В противоположном случае, $Z\alpha \gtrsim 1$, электрон становится ультрарелятивистским и потенциал (точечного) ядра достаточен, чтобы началось рождение электрон-позитронных пар. Масштабная инвариантность может иметь место только в ультрарелятивистской области, для расстояний много меньших $\hbar/(mcZ\alpha)$, где одноэлектронное описание уже неприменимо. В общем случае любая шкала масс нарушает масштабную инвариантность в релятивистской квантовой механике и может восстановиться только в ультрарелятивистской области, но там уже преобладают квантовые эффекты, связанные с рождением пар. Таким образом, оказывается, что кроме явного нарушения масштабной инвариантности любыми массами, она *всегда* нарушается квантовыми эффектами на малых масштабах, даже в безмассовых системах [30, 31]. Нарушение классической симметрии квантовыми эффектами называется *квантовой аномалией*. Аномалия масштабной инвариантности важна для связанных состояний, особенно в КХД, и проявляется в квантово-полевой формулировке теоремы вириала, к которой мы теперь переходим.

3. Теорема вириала в квантовой теории поля

Как уже говорилось, в релятивистской квантовой механике масштабная инвариантность нарушена на масштабах порядка комптоновской длины волны частиц. С другой стороны, на таких масштабах связанное состояние не может быть описано в терминах фиксированного набора частиц, взаимодействующих посредством поля, поскольку уравнение Шрёдингера для них не учитывает возможного рождения новых частиц. Как хорошо известно, релятивистская квантовая механика приводит к квантовой теории поля, в которой частицы и поля рассматриваются с единых позиций, так что в уравнении Шрёдингера нужно учитывать все имеющиеся поля. Поэтому формулировка теоремы вириала для определённого набора частиц (5) естественным образом должна замениться на полевую формулировку (9) или (13). Квантовая версия этих уравнений [12] может быть выведена по аналогии с доказательством Ландау и Лифшица или непосредственно из (21) и даёт

$$\int \langle T_i^i \rangle \, \mathrm{d}V = 0\,, \quad E = -\int \langle T_\mu^\mu \rangle \, \mathrm{d}V\,, \tag{25}$$

где средние значения берутся по нормированному стационарному состоянию, представляющему связанное состояние в его системе покоя.

Если имеет смысл квазиклассическое (пертурбативное) разложение, то (25) сводится к классической полевой теореме вириала (9) или (13) плюс квантовые поправки. Простейшая квантовая поправка получается в приближении редуцированного фоковского пространства (limited Fock space) [34] — вариационного приближения, эквивалентного уравнению Шрёдингера в части пространства Фока без учёта эффектов перенормировки. Если это приближение применить к связанному электрон-позитронному состоянию [12], то его энергия E будет равна либо (7) без члена с U и, конечно, с $m_1 = m_2$, либо (18). В обоих случаях классическое движение заменяется распределением вероятности, которое определяется квантовой волновой функцией в первом случае или классической "плотностью массы" во втором. Приближение редуцированного фоковского пространства для связанных состояний связано со стандартным рассмотрением связанных состояний в квантовой теории поля, которое включает несколько приближений, ведущих к уравнению Бете – Солпитера [33, § 6].

В приближении редуцированного фоковского пространства для спинорной КЭД бесконечностей не возникает [34, 12], но в общем случае придётся иметь дело с бесконечностями, которые неизбежно возникают в квантовой теории поля. Эти бесконечности требуют регуляризации, т.е. ультрафиолетового обрезания, которое неизбежно нарушает масштабную инвариантность. Заметим, однако, что некоторые бесконечности возникали уже в классической теории поля с точечными частицами и из-за этой проблемы классическая электродинамика частиц с массой m и зарядом e несогласована на расстояниях, меньших их классического радиуса $e^2/(mc^2)$ [9, 14]. Как отмечалось в разделе 2.1, классическая релятивистская теорема вириала выполняется только после вычитания бесконечной собственной энергии точечных зарядов. Поскольку классический радиус частицы $e^2/(mc^2)$ меньше её комптоновской длины волны $\hbar/(mc)$ — масштаба, на котором начинают доминировать квантовые эффекты, — регуляризация бесконечностей есть существенно квантовая задача [3]. Для теоремы вириала в форме (25), существенные квантовые эффекты перенормировки проявляют себя в виде аномалии следа тензора энергии-импульса, как было указано Дудасом и Пирьолем [12].

3.1. Теорема вириала в квантовой электродинамике и аномалия следа

Прежде чем рассматривать процесс перенормировки для связанных состояний в квантовой теории поля, напомним, почему для справедливости классической теоремы вириала необходима перенормировка (см. раздел 2.1). Для системы электромагнитно связанных частиц, для которых справедливо (10), теорема вириала (9) подразумевает, что их положительное кинетическое "давление" должно уравновешиваться отрицательными электромагнитными напряжениями. Поэтому их электростатическая энергия, определённая в (12), должна быть отрицательной, в то время как она очевидно положительна. На самом деле эта энергия бесконечна, но она может стать отрицательной после подходящего вычитания, подразумевающего *перенормировку массы*. Перенормировка массы также необходима и в квантовой теории поля из-за появления бесконечных собственных энергий, но структура расходимостей существенно изменяется. Кроме этого, в квантовой теории поля также необходимо перенормировать заряд.

В квазиклассическом приближении вычисление первой квантовой поправки к энергии связанного состояния требует только анализа малых отклонений от соответствующего классического решения. Например, для тяжёлого атома это квазиклассическое разложение эквивалентно старому гидродинамическому подходу Блоха в модели атома Томаса – Ферми [35]. Но это нерелятивист-

[3] Это утверждение нуждается в уточнении: в исключительном случае, когда сильное взаимодействие удерживает заряд Ze в почти точечном ядре, e^2 нужно заменить на Ze^2, и тогда условие $Z\alpha > 1$ в точности означает, что $Ze^2/(mc^2)$ больше чем $\hbar/(mc)$.

ская модель. Правильные релятивистские примеры получаются с помощью локализованных решений классической релятивистской теории поля ("классические солитоны") [30, гл. 6]. В общем случае вычисление квантовых поправок начинается с определения собственных мод малых колебаний поля и их частот. Полная энергия равна классической энергии плюс вклад этих колебаний. Если малые колебания проквантовать, то первая квантовая поправка к классической энергии равна

$$\delta E = \frac{\hbar}{2} \sum_i \omega_i \,,$$

где суммирование идёт по всем модам колебаний и ω_i — частота i-й моды. Эта сумма расходится на больших частотах, т.е. в ультрафиолетовой (УФ) области. Моды характеризуются тремя независимыми числами, и для больших частот это могут быть компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$. Поэтому УФ-расходимости можно выделить, представляя сумму как интеграл по $\mathbf{k}$ (для больших k) и выбирая $\omega_i \approx ck$, что отвечает свободным модам, т.е.

$$\delta E = \hbar c V \int^{\Lambda} \left[k + \mathrm{O}(1)\right] \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\hbar c}{8\pi^2}\, V\left[\Lambda^4 + \mathrm{O}(\Lambda^3)\right] ,$$

где V — объём системы, введено УФ-обрезание Λ и учтено суммирование по двум поляризациям, поскольку предполагается, что свободные моды соответствуют фотонам. Можно сделать δE конечным и придать этой поправке физический смысл, выбрав физическое обрезание Λ, например $\Lambda \sim mc/\hbar$, т.е. равное обратной комптоновской длине. В любом случае ведущий положительный член, пропорциональный Λ^4, присутствует в отсутствие вещества и должен быть вычтен. Следующие расходящиеся члены зависят от деталей спектра ω_i, а значит, от состояния материи, и могут иметь любой знак. После перенормировки (или выбора конечного Λ) эти члены вносят вклад в измеряемые энергии.

Расходящиеся части вакуумной энергии действительно необходимо вычитать при вычислениях сил Казимира или Ван-дер-Ваальса [36]. В качестве иллюстрации кратко рассмотрим случай, когда частоты ω_i легко вычислить, а именно случай разреженного газа в объёме V, с N атомами в единичном объёме [36, § 3.7]. Допустимые частоты свободного поля модифицируются показателем преломления газа $n(\omega)$, т.е. $\omega_i = ck/n$. Если мы для простоты предположим, что существует только одна резонансная частота, ω_0, то можно взять

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)} \,.$$

Тогда

$$\delta E = \frac{\hbar c V}{(2\pi)^3} \int \frac{k\,\mathrm{d}^3 k}{n(k)} =$$
$$= \frac{\hbar c V}{2\pi^2}\left[\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{Ne^2\Lambda^2}{4mc^2} + \frac{Ne^2}{4mc^2}\left(k_0^2 + \frac{Ne^2}{2mc^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\ln\left|\frac{\Lambda^2}{k_0^2 + Ne^2/(2mc^2)} - 1\right|\right] ,$$

где $k_0 = \omega_0/c$. Квадратичная расходимость пропорциональна числу атомов NV, но не зависит от ω_0, а коэффициент пропорциональности определяется только фундаментальными константами. Действительно, этот член соответствует энергии NV *свободных* электронов, и если мы снова возьмём $\Lambda \sim mc/\hbar$, то энергия на электрон будет порядка $e^2/(\hbar/mc)$, т.е. порядка квантовой собственной энергии. Поэтому эта расходимость может быть включена в перенормировку массы. Логарифмический член имеет меньшую величину и зависит от ω_0. Если $Ne^2/m \ll \omega_0^2$ (условие разрежённости газа), то логарифмический член может быть идентифицирован с лэмбовским сдвигом [36, § 3.7]. Заметим, что после перенормировки квантовые поправки не просто конечны, а ещё и малы (порядка α). Если вместо $\Lambda \sim mc/\hbar$ мы возьмём гораздо более низкое обрезание $\Lambda = k_0$, так что $n(k) > 1$ во всей области интегрирования, то δE будет отрицательной, что соответствует притягивающим силам Ван-дер-Ваальса.

Результат этого вычисления δE и в особенности его зависимость от обрезания типичны для вычислений *однопетлевого эффективного потенциала*. Действительно, энергия E в общем случае может быть вычислена в терминах минимума эффективного действия, соответствующего связанному состоянию. Вклад, пропорциональный Λ^4, уже присутствует в вакууме, если используется общий метод регуляризации, и ведёт к хорошо известной проблеме *космологической постоянной*. В этой связи Оссола и Сирлин [37] изучили вклад фундаментальных частиц в плотность энергии вакуум, сравнивая различные методы регуляризации, и заключили, что для невзаимодействующих частиц расходимость может быть сделана квадратичной, а не квартичной (т.е. член Λ^4 отсутствует), и что безмассовые частицы вклада не дают. Этот результат следует из аккуратного рассмотрения релятивистской ковариантности и масштабной инвариантности свободных теорий в безмассовом пределе, что позволяет вычислять $\langle T^{00}\rangle$ или любую другую компоненту $\langle T^{\mu\nu}\rangle$ через след $\langle T^{\lambda}_{\lambda}\rangle$, используя соотношение $\langle T^{\mu\nu}\rangle = \langle T^{\lambda}_{\lambda}\rangle g^{\mu\nu}/4$. Расходимости следа $\langle T^{\lambda}_{\lambda}\rangle$ легко получить для свободных полей, но когда есть взаимодействия, возникают новые расходимости, а именно квартичные, квадратичные и логарифмические. После перенормировки след тензора энергии-импульса приобетает квантовые поправки, и появляется *аномалия следа*. Тогда след становится ненулевым даже в безмассовом случае. Поскольку теорема вириала использует след тензора энергии-импульса, она должна учитывать квантовую аномалию следа [12], так как эта аномалия возникает даже в вакууме.

Аномалия следа в фермионной КЭД была в общем виде вычислена Адлером и др. [38]:

$$T^{\mu}_{\mu} = -K_1 m_0 c^2 \bar{\psi}\psi + K_2 N\left[F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}\right] , \tag{26}$$

где $N[.]$ обозначает нормальное упорядочение определённого типа (см. [38]) и

$$K_1 = 1 + \delta(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha}{2\pi} + \ldots ,$$

$$K_2 = \frac{1}{4}\,\beta(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\alpha}{3\pi} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \ldots\right) .$$

Функции δ и β связаны с аномальной размерностью фермионного поля ψ и перенормировкой константы связи соответственно. Заметим, что первый член в аномалии следа состоит из классической части (16) с квантовой поправкой из-за перенормировки массы, в то время как второй член имеет чисто квантовое происхождение и обусловлен перенормировкой заряда.

Аномалия следа в КЭД действительно мала из-за малости α, что делает возможной теорию возмущений. Это означает, что перенормированное значение квантовой поправки δE к классической энергии связанного состояния также мало. С фундаментальной точки зрения это значит, что вакуум не меняется, т.е. распада вакуума нет. Распад вакуума в сильном поле ядра, естественно, является исключением, связанным с тем, что фактическая константа связи $Z\alpha$ уже не мала (см. раздел 2.3). Интересно, однако, рассмотреть общий случай сильно связанных состояний. Сильно связанным следует считать такое состояние, для которого бóльшая часть его энергии обусловлена взаимодействием составляющих частей, а не их массами покоя. Это условие естественно возникает для адронных состояний, образованных кварками, которые связаны сильным взаимодействием, описываемым КХД.

3.2. Нарушение масштабной инвариантности, уравнения Каллана – Симанзика и квантовая хромодинамика

КХД — это теория сильных взаимодействий, хотя эффективные низкоэнергетические теории, такие как теория взаимодействия мезонов с нуклонами, всё ещё могут быть полезными. Такая мезон-нуклонная теория, включающая только легчайшие мезоны, немного похожа на теорию электронов и фотонов в КЭД, за исключением того, что силы имеют конечный радиус действия. Однако величина константы связи в такой теории $g^2/(4\pi\hbar c) \simeq 1$, т.е. связанные состояния могут быть ультрарелятивистскими и их энергия почти равна нулю. Конечно, она не зануляется полностью потому, что масштабная инвариантность сильно нарушена квантовыми эффектами. Коулмен [30, гл. 3] использует мезон-нуклонную модель для иллюстрации нарушения масштабной инвариантности, анализируя пертурбативное поведение корреляционных функций глубоко в евклидовой области: наряду с простыми степенями масштаба (которые определяются размерностями полей), появляются также и логарифмы. Затем Коулмен показывает, что некоторые ряды логарифмов преобразуются в аномальные размерности полей, в то время как другие логарифмы остаются, но их ряды описывают перенормировку, констант связи. В общем случае зависимость от масштаба, индуцированная процедурой перенормировки, может быть описана набором простых дифференциальных уравнений для корреляционных функций, которые есть уравнения ренормализационной группы, в то время как эффект нарушения масштабной инвариантности выражается уравнениями Каллана – Симанзика. Естественно, оба набора уравнений связаны между собой [30, гл. 3]. Существует бесконечный набор уравнений Каллана – Симанзика, по одному уравнению на каждую корреляционную функцию. Для того чтобы применить эти уравнения к связанным состояниям, полезно понимать, что все они могут быть выведены из мастер-уравнения Каллана – Симанзика, которое, кроме этого, связано с аномалией тензора энергии-импульса.

Для того чтобы получить мастер-уравнение Каллана – Симанзика, введём производящий функционал

$$Z[\lambda^j, g_{\mu\nu}] = \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left(\mathrm{i}S[\varphi, \lambda^j]\right),$$

который есть амплитуда перехода вакуум – вакуум в квантовой теории поля, где действие S в искривлённом пространстве-времени зависит от набора полей φ и констант связи λ^j, и определим функционал $W = -\mathrm{i}\log Z$. Действие масштабных преобразований может быть реализовано через вариации метрики, так что

$$l\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = 2\int \mathrm{d}^4x\, g^{\mu\nu}(x)\,\frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\,\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle\,,$$

где l — масштаб, или через изменение констант связи, так что

$$l\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \sum_i \beta^i(\lambda)\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\,\langle\mathcal{O}_i\rangle + \mathcal{A}\,,$$

где $\beta^i(\lambda) = l\,\mathrm{d}\lambda^i/\mathrm{d}l$ ("бета-функции"), $\{\mathcal{O}_i\}$ — набор членов взаимодействия (некоторое множество "композитных полей"), удовлетворяющих

$$\frac{\delta W}{\delta\lambda^i} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\,\langle\mathcal{O}_i\rangle\,,$$

а $\mathcal{A}$ — дополнительный аномальный вклад, возникающий в кривом пространстве. Поэтому в плоском пространстве-времени

$$\int \mathrm{d}^4x\,\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = \sum_i \beta^i(\lambda)\int \mathrm{d}^4x\,\langle\mathcal{O}_i\rangle\,. \qquad (27)$$

Это уравнение [4] генерирует бесконечную иерархию уравнений для корреляторов $\mathcal{O}_i$ при дифференцировании по константам связи λ^i. Уравнения для корреляторов других полей, отличных от $\mathcal{O}_i$, и, в частности, элементарных полей φ, могут быть получены добавлением в W соответствующих источников. Это, в сущности, обычные уравнения Каллана – Симанзика. Мастер-уравнение Каллана – Симанзика (27) демонстрирует общую структуру аномалии следа [41]. Например, для КЭД уравнение (27) эквивалентно операторному уравнению (26). Чтобы в этом убедиться, нужно заметить, что набор констант связи λ^i содержит также и размерные константы. Однако безразмерные константы связи играют особую роль, поскольку они дают вклад в каждую $\beta^i(\lambda)$, в то время как размерные константы (соответствующие суперперенормируемым взаимодействиям, например, массовым членам) могут давать вклад только в некоторые из них, как показывает простой анализ размерностей. Действительно, в формуле (6) α даёт вклад в оба члена, но m_0 присутствует только в первом из них, и в первой степени. Заметим также, что "бета-функции" размерных констант связи классически не равны нулю и дают классическое значение T^{μ}_{μ}, в то время как функции безразмерных констант чисто "аномальные".

Уравнение (7) можно обобщить, заменяя среднее по вакууму на среднее по стационарному связанному состоянию, т.е. вводя подходящие граничные условия в производящий функционал Z. Для стационарных состояний четырёхмерные интегралы в (27) становятся пространственными интегралами и уравнение прямо даёт квантовые поправки к релятивистской теореме вириала (13), выраженные через бета-функции и средние значения $\langle\mathcal{O}_i\rangle$. Бета-функции могут быть вычислены по теории

[4] Уравнение (27) хорошо известно. Оно играет важную роль в двумерной теории поля [39, 40], а в общем случае обсуждается в работе Осборна [41].

возмущений, но вычислить $\langle \mathcal{O}_i \rangle$ труднее, потому что они существенно непертурбативны.

Для того чтобы оценить важность квантовых поправок к релятивистской теореме вириала, рассмотрим теорию адронов в КХД. Как хорошо известно, ключевое отличие между КЭД и КХД состоит в том, что их бета-функции имеют разный знак, так что КХД является *асимптотически свободной* и взаимодействие исчезает при больших импульсах. Но зато кварки сильно взаимодействуют при малых импульсах, и фактически адроны, состоящие из легких кварков, имеют такие размеры, что вклад взаимодействия в их энергию гораздо больше, чем вклад кварковых масс. В то же время вклад аномалии следа является крайне важным. Чтобы прояснить этот вопрос, рассмотрим конкретную модель адронов.

В модели "мешка" Массачусетсского технологического института (MIT bag model) [42] постоянная положительная потенциальная энергия B (на единицу объёма) добавляется к плотности лагранжиана свободных полей в ограниченной области пространства. Квазиклассическое описание этой простой теории поля напоминает статистическую модель адрона. В модели мешка частицы, когда-то называвшиеся "партонами", а теперь известные как кварки и глюоны, считаются свободными и безмассовыми внутри мешка и движутся со скоростью света. Поэтому адроны — это настоящие ультрарелятивистские связанные состояния, рассмотренные в разделе 2.3. Вакуум внутри мешка соответствует малым расстояниям и большим импульсам и поэтому это пертурбативный вакуум КХД. Когда частицы внутри мешка удаляются друг от друга, они попадают в фазу сильной связи, в которой пертурбативный вакуум нестабилен и распадается в обычный вакуум КХД (конденсат кварк-антикварковых пар). И, наоборот, этот КХД-вакуум нестабилен при больших импульсах и переходит в пертурбативный вакуум. Предполагается, что переход происходит в очень узкой области пространства вблизи поверхности мешка. В этой модели удерживающее взаимодействие просто заменено вакуумным давлением, обусловленным разностью между нулевым вакуумным давлением снаружи мешка и *отрицательным* "вакуумным давлением" изнутри. Роль этой разницы давлений просто в том, чтобы удержать частицы внутри мешка, как если бы это давление действовало на его поверхности.

Применение теоремы вириала к газу безмассовых частиц в статической модели мешка очевидно: теорема просто утверждает, что плотность энергии в три раза больше, чем разность давлений [9, § 35]. С другой стороны, тензор энергии-импульса пертурбативного вакуума постоянен и пропорционален метрике $g^{\mu\nu}$, что соответствует постоянному члену в лагранжиане. Поэтому мы имеем следующие соотношения: соотношение вириала $E_{\text{quarks+gluons}}/V = 3P_{\text{quarks+gluons}}$ (где V — объём мешка), баланс давлений в мешке $P_{\text{quarks+gluons}} = -P_{\text{vac}}$, и вакуумное соотношение $E_{\text{vac}} = -P_{\text{vac}}V$. Заметим, что баланс давлений также является соотношением вириала, т.е. частным случем уравнения $\int \overline{T_i^i}\,\mathrm{d}V = 0$. Все эти уравнения означают, что

$$\begin{aligned} &E_{\text{quarks+gluons}} = 3E_{\text{vac}}\,, \\ &E = E_{\text{quarks+gluons}} + E_{\text{vac}} = 4E_{\text{vac}} = 4BV\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, удерживающее взаимодействие даёт одну четвёртую полной энергии, как и в классической модели частицы с электрическим зарядом (см. разделе 2.1), где тензор энергии-импульса удерживающих сил Пуанкаре также пропорционален $g^{\mu\nu}$.

Поверхность мешка была фиксирована, но это ограничение можно ослабить в случае если поверхность может перемещаться, достаточно просто заменить V на среднее $\overline{V}$, так что $E = 4B\overline{V}$. Это уравнение было получено Чодосом и др. [42] как релятивистская теорема вириала, специально приспособленная для лагранжиана модели мешка и доказанная без использования тензора энергии-импульса.

Поскольку в модели мешка классический (улучшенный) тензор энергии-импульса не имеет следа, конфайнмент обусловлен квантовой частью следа тензора энергии-импульса (пропорциональной $g^{\mu\nu}$), т.е. аномалией следа. В модели мешка эта величина постоянна в пространстве, но в КХД аномалия следа даётся уравнением, подобным (26), с добавлением подходящих цветных индексов, т.е. она содержит член $\bar{\psi} m \psi$, где m — массовая матрица кварков, и член F^2, в котором все цветные индексы свёрнуты. Согласно вириальной теореме (25) и в предположении, что кварки безмассовые, энергия определяется интегралом по пространству от $-\langle T_\lambda^\lambda \rangle = -\beta(g)\langle F^2 \rangle/(2g)$ (далее мы полагаем $\hbar = c = 1$). Поэтому в первом порядке по $\alpha_{\mathrm{s}} = g^2/(4\pi)$,

$$E = -\int \mathrm{d}V \langle T_\lambda^\lambda \rangle = \frac{9\alpha_{\mathrm{s}}}{8\pi}\,\langle F^2 \rangle$$

(для трёх ароматов кварков). Это уравнение есть частный случай уравнения (27) для стационарного состояния и только одной константы связи. Искомый интеграл по пространству,

$$\int \langle F^2 \rangle\,\mathrm{d}V = -2\int (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\,\mathrm{d}V\,,$$

должен быть вычислен с граничными условиями мешка. Для низших энергетических состояний интеграл может быть вычислен через соответствующие интегралы от $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{B}^2$, которые также возникают при вычислении глюонных поправок к основному состоянию модели мешка [43, § 3.12]. Эти интегралы содержат расходящиеся члены, соответствующие самодействию, которые уходят в перенормировку массы. Как и следовало ожидать, окончательный результат состоит в том, что интеграл от электрического поля равен нулю, а интеграл от магнитного пропорционален $1/R$, т.е. обратному радиусу мешка с коэффициентом пропорциональности порядка единицы. Действительно, партоны в низших энергетических состояниях мешка должны иметь энергию порядка $NV^{-1/3}$, где N — малое целое число, что следует из размерного анализа [42]. Аномалия следа не может фиксировать N, поскольку α_{s} не определено.

Для одного из низших адронных состояний соотношение мешка $E = 4BV \sim N/R$ с $V \sim R^3$ подразумевает, что $B \sim R^{-4}$, где R — радиус адрона. Поэтому фундаментальный размерный параметр B можно заменить на R. Однако в качестве фундаментального размерного параметра КХД лучше взять ренормгрупповой инвариант Λ_{QCD}, который естественно возникает в безмассовой КХД в процессе перенормировки, в результате так называемой *размерной трансмутации*. Λ_{QCD} может быть определён, например, как масштаб, на котором бегущая константа связи КХД становится порядка единицы, $\alpha_{\mathrm{s}}(\Lambda_{\mathrm{QCD}}) = 1$. Масштаб Λ_{QCD} определяет размер низших состояний адронов $R \sim 1/\Lambda_{\mathrm{QCD}}$. Поэтому имеем $B \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}^4$ и $E_{\mathrm{vac}} = BV \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}$. Так же $E \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}$. Конечно, R и E можно выразить через Λ_{QCD} для любых моделей адронов, а не только в модели мешка, поскольку они выводятся просто из размерной трансмутации. Сама же размерная трансмутация есть следствие нарушения масштабной инвариантности, которая также ведёт к аномалии следа. Заметим, однако, что теорема вириала позволяет нам установить только *одно* соотношение, которое является *точным* и по-существу говорит, что удерживающий член, т.е. аномалия следа, даёт одну четвертую часть полной энергии для безмассовых кварков, как в (28). Это точное соотношение выводится из очевидного равенства $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{quarks+gluons}} + T^{\alpha}_{\alpha} g^{\mu\nu}/4$, где в классическом случае $T^{\alpha}_{\alpha} = 0$ и

$$T^{\mu\nu}_{\text{quarks+gluons}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{(\mu}\mathcal{D}^{\nu)}\psi - \mathcal{D}^{*(\mu}\bar{\psi}\gamma^{\nu)}\psi\right) - \\ - \frac{g^{\mu\nu}}{4}F^2 + F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma}\,.$$

Поэтому, по аналогии с (14) с учётом квантово-полевой теоремы вириала (25) получаем

$$E = \int \langle T^{00}_{\text{quarks+gluons}} \rangle \, \mathrm{d}V + \frac{E}{4}\,. \tag{29}$$

Естественно, $T^{\alpha}_{\alpha} = 0$ приводило бы к $E = 0$, но аномалия следа даёт ненулевое значение E. Уравнение (29) является точным для КХД с безмассовыми кварками и приближённо справедливым для адронов с лёгкими кварками. С другой стороны, есть ещё одно соотношение, всегда приближённое, которое определяет размер низших состояний адронов через фундаментальный параметр, скажем, Λ_{QCD} (или B в модели мешка). Очевидно, что это последнее соотношение не может выполняться для высоких возбуждённых состояний, в то время как теорема вириала справедлива и для них.

В более реалистичных моделях адронов можно рассмотреть массы кварков m_{Q}, так что классический тензор энергии-импульса уже не будет бесследовым. Тем не менее для лёгких кварков u и d (а также для s-кварка) $m_{\mathrm{Q}} \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}}$, и основной вклад в аномалию следа всё равно даёт член с F^2. Если бы в природе условие $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \ll m_{\mathrm{Q}}$ выполнялось для всех кварков, то КХД, по-прежнему оставаясь асимптотически свободной и сохраняя конфайнмент кварков, имела бы ряд свойств КЭД: все адроны были бы нерелятивистскими связанными состояниями кварков.

4. Выводы

Теорема вириала выражает условие равновесия в среднем по времени для связанного состояния, т.е. то, что его средняя форма и средний размер остаются постоянными. Первое условие выражается тензорной теоремой вириала, а второе — обычной скалярной теоремой (9), которая на самом деле получается из тензорной взятием следа. Теорема означает, что положительное давление частиц или полей, соответствующее бесследовой части тензора энергии-импульса, должно компенсироваться отрицательными напряжениями, связанными со следом этого тензора. Уравнение (9) выполняется и в классической, и в релятивистской физике, но в последней эквивалентная форма в виде следа тензора энергии-импульса (13) более удобна. Это уравнение означает, что часть энергии связанного состояния, обусловленная бесследовым тензором энергии-импульса, равна трём четвертям. Эта доля связана, в частности, с тем коэффициентом $4/3$, который возникает в классической проблеме электромагнитной массы.

Как след тензора напряжений, так и след тензора энергии-импульса связаны с генераторами пребразований: пространственных и пространственно-временны́х растяжений соответственно. Связь с дилатациями возникает, конечно, из-за того, что эти преобразования меняют размер системы. Теорема вириала показывает, что средний размер системы определяется её энергией E. Полная пространственно-временна́я масштабная инвариантность имеет место только тогда, когда след тензора энергии-импульса зануляется (в среднем), что соответствует $E = 0$, т.е., по сути, почти вакуумному состоянию.

В то время как нерелятивистская механика допускает подобие движений, если кинетическая и потенциальная энергии — однородные функции своих переменных, эта симметрия теряется в релятивистской механике, где кинетическая энергия никогда не бывает однородной функцией скоростей. Существует, однако, релятивистское понятие подобия, когда скорости не меняются, а массы перемасштабируются как энергии. Поэтому единственная ситуация, когда может возникнуть полная масштабная инвариантность, — это ультрарелятивистская область, когда массы полагаются равными нулю и теорема вириала утверждает, что энергия состояния равна нулю. Такая ультрарелятивистская масштабная инвариантность появляется, например, в сильном электрическом поле тяжёлого ядра.

С другой стороны, только в контексте квантовой теории поля масштабная инвариантность приобретает свое самое глубокое значение, поскольку там естественным образом существует только одна шкала — длины или массы. В теории с фундаментальными безмассовыми частицами связанная система должна была бы иметь $E = 0$ и тоже быть безмассовой, так что в теории не было бы выделенного масштаба и она естественно была бы масштабно-инвариантной. Однако в квантовой теории поля вакуум нетривиален, в нём появляются виртуальные пары частиц и античастиц, дающие бесконечные квантовые вклады в энергию, что после перенормировки приводит к зависимости от масштаба, выражаемой уравнениями Каллана–Симанзика (или уравнениями ренормгруппы). Это нарушение симметрии по отношению к дилатациям может быть выражено как аномалия тензора энергии-импульса, которая должна быть учтена в квантово-полевой теореме вириала. Поэтому эта теорема есть, в сущности, просто обобщение уравнений Каллана–Симанзика или аномалии следа в применении к связанным состояниям. Полная масштабная инвариантность имеет место только в фиксированных точках преобразования ренормализационной группы, где теорема вириала становится тривиальной.

Аномалия следа тензора энергии-импульса в КЭД пропорциональна константе связи $\alpha = 1/137$ и поэтому мала. Вообще в КЭД квантовые поправки к релятивистским связанным состояниям малы. Так как эти состояния слабо связаны, они также слабо релятивистские. Правда, сильные взаимодействия в тяжёлых ядрах способны создать такие концентрации положительного заряда, что соответствующее электрическое поле уже будет достаточно сильным, чтобы привести к важным релятивистским эффектам, в частности изменить квантовый вакуум вблизи ядра: электрон, связанный с ядром, может иметь *отрицательную* энергию, и такое связанное состояние распадается в новый вакуум с нулевой энергией.

Если бы константа связи α в КЭД была достаточно велика, то нестабильность вакуума не была бы чем то исключительным, потому что тогда позитроний мог бы иметь состояния с отрицательной энергией и стандартный вакуум КЭД был бы нестабилен по отношению к рождению электрон-позитронных пар. Явление такого рода имеет место в КХД, так что вакуум КХД отличен от пертурбативного вакуума и содержит конденсат кварк-антикварковых пар. Это явление связано с нарушением симметрии относительно дилатаций и аномалией следа в КХД. Фактически существование адронов в безмассовой КХД обусловлено аномалией следа, которая в этом случае существенно меняет теорему вириала. Нарушение этой симметрии есть размерная трансмутация, которая приводит к появлению масштаба Λ_{QCD}, инварианта ренормализационной группы. Этот масштаб заведомо больше, чем массы лёгких кварков, поэтому существенные черты адронов, образованных ими, описываются безмассовой КХД. В предположении, что кварки не имеют массы, теорема вириала утверждает, что одна четверть энергии (или массы) адрона происходит из аномалии следа, в то время как три четверти — от кварков и глюонов. Как было показано, для непосредственного применения теоремы вириала и вычисления аномалии следа очень полезна модель мешка в теории адронов.

Другой тип сильных взаимодействий имеет место в астрофизике, в компактных объектах, где аддитивная природа гравитации приводит к сильным гравитационным полям, помимо сильных квантовых эффектов. Однако обобщение теоремы вириала на общую теорию относительности сталкивается с проблемами, выходящими за пределы этой заметки. Тем не менее можно быть уверенным, что мастер-уравнение Каллана – Симанзика (27), которое включает аномалию следа $\mathcal{A}$, зависящую от кривизны, должно играть важную роль в таком обобщении.

Я благодарю Сергея Апенко и Андрея Семенова за комментарии к тексту.

Список литературы

1. Collins G W (II) *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics* (Tucson, Ariz.: Pachart Publ. House, 1978)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
3. Löwdin P-O *J. Mol. Spectrosc.* **3** 46 (1959)
4. Andersen C M, von Baeyer H C *Am. J. Phys.* **39** 914 (1971)
5. Kleban P *Am. J. Phys.* **47** 883 (1979)
6. van Kampen N G *Rep. Math. Phys.* **3** 235 (1972)
7. Nachtergaele B, Verbeure A *J. Geom. Phys.* **3** 315 (1986)
8. Bludman S, Kennedy D C *J. Math. Phys.* **52** 042902 (2011)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1962)]
10. Rafelski J *Phys. Rev. D* **16** 1890 (1977)
11. Brack M *Phys. Rev. D* **27** 1950 (1983)
12. Dudas E A, Pirjol D *Phys. Lett. B* **260** 186 (1991)
13. Goldstein H *Classical Mechanics* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, 1950) p. 214
14. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 3rd ed. (New York: Wiley, 1999)
15. Anderson J L *Principles of Relativity Physics* (New York: Academic Press, 1967)
16. Barut A O *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (New York: Dover Publ., 1980)
17. Lucha W, Schöberl F F *Phys. Rev. Lett.* **64** 2733 (1990)
18. Hwang D S, Kim C S, Namgung W *Phys. Lett. B* **406** 117 (1997)
19. von Laue M *Ann. Physik* **35** 524 (1911)
20. Ohanian H C *Stud. Hist. Philos. Sci. B* **40** 167 (2009)
21. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973)
22. Bialynicki-Birula I *Phys. Rev. D* **28** 2114 (1983)
23. Fock V *Z. Phys.* **63** 855 (1930)
24. Rose M E, Welton T A *Phys. Rev.* **86** 432 (1952)
25. Wakano M *Prog. Theor. Phys.* **35** 1117 (1966)
26. Radford C J *J. Phys. A Math. Phys.* **36** 5663 (2003)
27. Weinberg S *The Quantum Theory of Fields* Vol. 1 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
28. Hobart R H *Proc. Phys. Soc.* **82** 201 (1963)
29. Derrick G H *J. Math. Phys.* **5** 1252 (1964)
30. Coleman S *Aspects of Symmetry* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985)
31. Callan C G (Jr.), Coleman S, Jackiw R *Ann. Phys.* **59** 42 (1970)
32. Herbst I W *Commun. Math. Phys.* **53** 285 (1977); *Commun. Math. Phys.* **55** 316 (1980), addendum
33. Greiner W, Reinhardt J *Quantum Electrodynamics* (Berlin: Springer, 2003)
34. Finger J, Horn D, Mandula J E *Phys. Rev. D* **20** 3253 (1979)
35. Ball J A, Wheeler J A, Firemen E L *Rev. Mod. Phys.* **45** 333 (1973)
36. Milonni P W *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics* (Boston: Academic Press, 1994)
37. Ossola G, Sirlin A *Eur. Phys. J. C* **31** 165 (2003)
38. Adler S L, Collins J C, Duncan A *Phys. Rev. D* **15** 1712 (1977)
39. Замолодчиков А Б *Письма в ЖЭТФ* **43** 565 (1986) [Zamolodchikov A B *JETP Lett.* **43** 730 (1986)]
40. Замолодчиков А Б *ЯФ* **46** 1819 (1987) [Zamolodchikov A B *Sov. J. Nucl. Phys.* **46** 1090 (1987)]
41. Osborn H *Nucl. Phys. B* **363** 486 (1991)
42. Chodos A et al. *Phys. Rev. D* **9** 3471 (1974)
43. Greiner W, Schramm S, Stein E *Quantum Chromodynamics* (Berlin: Springer, 2002)

The relativistic virial theorem and scale invariance

J. Gaite
Instituto Universitario de Microgravedad "Ignacio Da Riva" de la Universidad Politécnica de Madrid, E-28040 Madrid, Spain
E-mail: *jose.gaite@upm.es*

The virial theorem is related to the dilatation properties of bound states, as seen in particular from the relativistic virial theorem formulated (by Landau and Lifshitz) in terms of the energy-momentum tensor trace. In the Hamiltonian formulation of dilatations we propose here, the relativistic virial theorem naturally arises as a stability condition against dilatations. A bound state becomes scale invariant in the ultrarelativistic limit, in which its energy vanishes. However, for very relativistic bound states, scale invariance is broken by quantum effects, necessitating including the energy-momentum tensor trace anomaly into the virial theorem. This quantum field theory virial theorem is directly related to the Callan – Symanzik equations. The virial theorem is applied to QED and then to QCD, focusing on the hadronic bag model. In massless QCD, 3/4 of the hadron mass corresponds to quarks and gluons and 1/4 to the trace anomaly, according to the virial theorem.

PACS numbers: **03.30.+p**, 11.10.St, 12.38.Aw, 12.39.Ba
Bibliography — 43 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (9) 973 – 986 (2013)

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201309f.0973
Received 7 February 2013
Physics – Uspekhi **56** (9) (2013)