

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Возбуждение циклических волн Зоммерфельда и аномалии Вуда при скользящем падении плоской волны на диэлектрический цилиндр

А.Д. Прямиков, А.С. Бирюков

*Анализируется процесс рассеяния плоской электромагнитной волны при её скользящем падении на диэлектрический цилиндр кругового сечения. В определённых условиях процесс сопровождается возбуждением поверхностных циклических волн Зоммерфельда (ВЗ), способных распространяться на большие расстояния вдоль цилиндра. Показано, что взаимодействие ВЗ низких азимутальных порядков с модами цилиндра непрерывного спектра (радиационными модами) приводит к возникновению циклических резонансов Зоммерфельда (РЗ), аналогичных известным аномалиям Вуда, возникающим при рассеянии плоской волны на одномерной металлической дифракционной решётке. Установлены условия, необходимые для эффективного возбуждения ВЗ и РЗ. Обсуждается роль ВЗ и РЗ в формировании мод микроструктурированных световодов.*

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 42.25.Fx

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201308d.0863

### Содержание

1. Введение (863).
  2. Возбуждение циклических волн Зоммерфельда на поверхности диэлектрического цилиндра. Аналогии с рассеянием плоской волны на одномерной дифракционной решётке (866).
  3. Результаты расчётов (870).
  4. Заключение (872).
- Список литературы (872).

### 1. Введение

Появление в последние годы ряда перспективных для волоконной оптики световодов, в которых механизм формирования направленного излучения (мод), отличный от механизма на основе полного внутреннего отражения, пока, на наш взгляд, ещё до конца не понят, послужило поводом к написанию данной статьи. Речь идёт об одном из типов так называемых микроструктурированных световодов (МС) с сердцевинной, менее оптически плотной, чем оболочка, в том числе о МС с поллой (заполненной окружающим воздухом) сердцевинной.

Хорошо известно, что волноводное распространение пучка света обеспечивается при полной компенсации его

дифракционной расходимости рефракцией от слоёв среды, окружающих область распространения света. Весьма общий механизм формирования направленного излучения в волноводах состоит в отражении излучения на границе сердцевина – оболочка с последующей конструктивной интерференцией рассеянных волн в сердцевине. В частности, в стандартных телекоммуникационных световодах этот механизм обусловлен явлением полного внутреннего отражения от оболочки, а в волноводах, где полное внутреннее отражение не играет роли, — иными явлениями. Последнее определяется структурой оболочки. Например, для полых световодов со сплошной однородной оболочкой — это обычное френелевское отражение, для световодов с микроструктурированной оболочкой — брэгговское отражение (в случае упорядоченной микроструктуры с характерным периодом изменения диэлектрической проницаемости, сравнимым с длиной волны) или отражения других типов (например, рассеяние Ми для мелкомасштабных неоднородностей оболочки).

Что касается оптических потерь в волноводах, то также хорошо известно, что они складываются из потерь двух видов — материальных и волноводных. При этом большие или меньшие материальные потери имеются всегда, тогда как волноводные играют главную роль в световодах, принцип действия которых основан не на полном внутреннем отражении, а на других явлениях. Потери в таких световодах определяются несовершенствами элементов, составляющих неоднородную структуру их оболочки, приводящими к более или менее значительному взаимодействию возбуждаемых в оболочке мод с модами сердцевины и, соответственно, к перекачке энергии направляемого световодом

А.Д. Прямиков, А.С. Бирюков. Научный центр волоконной оптики РАН, ул. Вавилова 38, 119333 Москва, Российская Федерация  
Тел. (499) 503-81-93. Факс (499) 135-81-39  
E-mail: pryamikov@fo.gpi.ru, biriukov@fo.gpi.ru

Статья поступила 28 ноября 2012 г.,  
после доработки 26 февраля 2013 г.

излучения в оболочку. Иными словами, структура оболочки таких световодов играет решающую роль в уровне их оптических потерь. При этом в ряде многочисленных теоретических и экспериментальных исследований обращается внимание на участие резонансного рассеяния на элементах структуры оболочки в механизме формирования мод световодов подобного рода.

В настоящей статье анализируются природа и типы этого резонансного рассеяния, а также его влияние на уровень оптических потерь МС.

Существует весьма широкий круг задач, для решения которых требуется анализ процесса рассеяния света на диэлектрическом стержне (или капилляре). Именно в этот круг задач и входит интересная и актуальная как с научной, так и практической точек зрения физическая задача — установить адекватный механизм формирования направленного излучения для ряда упомянутых выше перспективных с точки зрения волоконной оптики МС.

Напомним, что со временем под МС стали понимать вообще все световоды, в оболочке которых имеются простирающиеся вдоль всей их длины оптические неоднородности, расположенные в той или иной симметрии в поперечном сечении. Поперечные размеры этих непрерывающихся между собой неоднородностей, как правило, сравнимы с длиной волны направляемого световодом излучения, а их диэлектрические проницаемости могут быть как ниже, так и выше диэлектрической проницаемости материала окружающей матрицы. Достаточно подробный обзор МС представлен, например, в [1].

К обсуждаемому в настоящей статье типу МС принадлежат, в частности, полностью стеклянные волоконные световоды, оболочка которых в поперечном сечении в большинстве случаев является двумерным фотонным кристаллом конечных размеров с гексагональной симметрией расположения цилиндрических включений с показателем преломления, более высоким, чем у окружающей их матрицы из кварцевого стекла. Далее такую микроструктуру будем именовать полностью твердотельной (ПТ) (соответствующий английский термин — "all-solid"). Сердцевину образуют посредством удаления из фотонного кристалла одного или нескольких наиболее близко расположенных друг к другу цилиндров, создавая тем самым дефект в структуре кристалла. Считается, что основным свойством ПТ-световодов является наличие в их спектре пропускания так называемых запрещённых фотонных зон (ЗФЗ), внутри которых излучение с данной длиной волны эффективно отражается от периодической структуры фотонного кристалла, а свет при этом может распространяться лишь вдоль дефектов последнего (подробнее см., например, обзор [2]). Именно наличие ЗФЗ в фотонных кристаллах и непричастность полного внутреннего отражения к формированию направленного излучения послужили основанием для исследований МС такого рода.

В то же время в [3] было показано, что излучение в ПТ-световодах достаточно эффективно локализуется не только в случае упорядоченного расположения стержней в оболочке в виде фотонного кристалла, но и при их случайном расположении. Иными словами, наличие ЗФЗ, определяемое периодичностью пространственного распределения диэлектрической проницаемости среды, не

является необходимым для локализации света в сердцевине ПТ-световода. Как правило, поперечные размеры  $d$  неоднородностей в оболочке превышают длину волны  $\lambda$  направляемого света ( $d > \lambda$ ). При этом как частоты, отвечающие границам ЗФЗ в световодах с оболочкой в виде фотонного кристалла, так и частоты, соответствующие наименьшему пропусканию световодов с неупорядоченным расположением стержней в оболочке (не обладающих ЗФЗ), совпадают. Эти частоты совпадают также с частотами отсечек собственных мод диэлектрических стержней оболочки [3, 4], которые в соответствующих спектральных диапазонах сами могут рассматриваться как индивидуальные световоды, свет в которых распространяется за счёт полного внутреннего отражения. (Под "частотами отсечек" в литературе по волоконной оптике понимаются частоты, при которых та или иная мода световода перестаёт быть направляемой и становится вытекающей.)

Возможность формирования направленного излучения и в отсутствие ЗФЗ свидетельствует об ином механизме локализации света в ПТ-световодах, который, однако, формирует спектры пропускания, подобные спектрам световодов с ЗФЗ. Но что представляет собой этот механизм? Данный вопрос обсуждается, например, в работах [3, 5–8]. В частности, при получении спектров пропускания ПТ-световодов с различной геометрией оболочки в [3] неизменным параметром их структуры, наряду с показателями преломления стёкол, составляющих конструкции световодов, являлся лишь диаметр стержней в оболочке. Поэтому естественно заключить, как это и сделано в [3], что подобие спектров пропускания всех исследованных в [3] вариантов ПТ-световодов в значительной степени определяется оптическими свойствами отдельного стеклянного цилиндра в оболочке (точнее, его взаимодействием с модой световода — рассеянием).

Интерес к ПТ-световодам обусловлен тем, что они могут эффективно использоваться в качестве компенсаторов дисперсии в полностью волоконных лазерных системах, а также в качестве световодов с большим поперечным сечением поля моды, что в перспективе позволит создавать на их основе мощные волоконные лазеры и усилители.

К этому же типу МС относятся и световоды с полостью (содержащей атмосферный воздух) сердцевиной. Принципиального различия между ними и ПТ-световодами нет, однако полые световоды вследствие более низкой нелинейности воздуха (как минимум, на три порядка) по сравнению с таковой кварцевого стекла, весьма перспективны для волоконной оптики, что будет являться предметом анализа в нашей отдельной статье.

Рассеяние плоской электромагнитной волны при её скользком падении (именно так можно с хорошим приближением трактовать взаимодействие моды с каждой неоднородностью оболочки ПТ-световода) на диэлектрический цилиндр бесконечной длины с круговым поперечным сечением рассматривалось многими авторами. Впервые решение этой задачи было дано в [9]. Позднее в работе [10] это решение использовалось для определения мод непрерывного спектра (радиационных мод) диэлектрического цилиндра. Авторы [11] численно нашли коэффициенты рассеяния и экстинкции при скользком падении плоской волны на цилиндр. Показано,

что в этих условиях коэффициенты экстинкции имеют значительно более высокочастотные резонансы по сравнению с таковыми для аналогичных коэффициентов в случае нормального падения плоской волны. Нами будут рассмотрены случаи рассеяния плоской волны на диэлектрическом цилиндре, в которых возможно возбуждение волн Зоммерфельда (ВЗ) и резонансов Зоммерфельда (РЗ) различных порядков.

Действительно, моды ПТ-световодов формируются в результате интерференции в сердцевине полей, рассеянных всеми неоднородностями (стержнями) оболочки. Однако, как свидетельствуют результаты, проведенных рядом авторов численных расчётов, многие характерные особенности рассеяния плоской волны на отдельном стержне отражаются и в спектрах пропускания ПТ-световодов. Именно поэтому представляет интерес вначале проанализировать задачу при наличии только одного стержня в оболочке. Более сложная задача формирования мод в реальных ПТ-световодах со многими стержнями в оболочке будет предметом наших последующих публикаций.

Известно [9], что компоненты рассеянного поля и поля внутри цилиндра, так же как и компоненты поля падающей волны, могут быть разложены в бесконечные ряды Фурье–Бесселя. Все члены разложения имеют зависимость  $\exp(\pm im\varphi)$ , где  $\varphi$  — азимутальный угол в цилиндрической системе координат, связанной с конкретным цилиндром,  $m$  — целое число. Ниже будет показано, что наличие определённых соотношений между амплитудами разложения одинаковых порядков волн противоположных азимутальных направлений приводит к возбуждению ВЗ на поверхности цилиндра.

Впервые возбуждение ВЗ и соответствующих им РЗ, образующихся при рассеянии плоской волны на диэлектрическом или металлическом цилиндре с нанометровым диаметром, было проанализировано в [12]. Оказалось, что возможно возбуждение поверхностных волн, распространяющихся на большие расстояния вдоль стержня, вследствие взаимодействия между модами непрерывного спектра стержня и его собственными вытекающими модами с низкими азимутальными порядками. РЗ, возникающие при таком взаимодействии, имеют намного более высокую добротность по сравнению с добротностью известных плазмонных резонансов, возбуждаемых на поверхности металлических наностержней.

В разделе 2 мы выясним условия возбуждения ВЗ и резонансную структуру РЗ при скользком падении плоской волны на диэлектрический цилиндр и покажем, что эти явления имеют тесную связь с системой резонансов, образующейся при рассеянии плоской волны на одномерной металлической дифракционной решётке (ДР).

Впервые система резонансов на ДР наблюдалась Робертом Вудом [13] в 1902 г. Вуд обнаружил существование узких ярких и тёмных полос в спектре излучения, рассеянного металлической ДР, облучаемой источником со слабо изменяющейся спектральной интенсивностью. Впоследствии эти аномалии в спектрах были названы его именем. Было также обнаружено, что возникновение таких полос в спектре рассеянного излучения сильно зависит от состояния поляризации падающего излучения, формы и глубины штрихов ДР.

Первое теоретическое объяснение аномалий Вуда было дано Рэлеем [14, 15] в 1907 г. Используя принцип

Гюйгенса, Рэлей показал [14], что каждый элемент ДР является источником рассеянной сферической волны. Рэлей предположил появление дифрагированных волн, скользящих вдоль поверхности ДР. Это означает, что часть рассеянной волны распространяется вдоль поверхности решётки и достигает соседнего углубления в фазе с падающей волной и волнами, рассеянными другими углублениями. В результате их интерференции возникают аномалии Вуда. В [15] рассеянные электромагнитные поля были разложены в ряды, содержащие только исходящие волны. В такой интерпретации рассеянные поля имеют особенности (сингулярности) на длинах волн, при которых образуется один из упомянутых выше дифракционных порядков, возникающих при скользких углах. Длины волн (называемые рэлеевскими), при которых появляются данные особенности, и отвечают аномалиям Вуда.

Один из главных недостатков теории Рэля заключается в невозможности описать форму (профиль, или спектральную зависимость) аномалий Вуда. У. Фано в работе [16] ввёл метод последовательных приближений для описания интерференционных эффектов, связанных с аномалиями Вуда, и дал объяснение аномалий в терминах поверхностных волн, возбуждаемых на поверхности металлической ДР. Эти поверхностные волны могут рассматриваться как квазистационарные поверхностные волны, теоретически полученные Зоммерфельдом при решении задачи об излучении диполя вблизи проводящей плоскости [17]. В работе [16] показано, что задача о распространении излучения вдоль одномерной ДР непосредственно связана с упомянутой задачей Зоммерфельда.

Похожий подход к объяснению механизма возникновения аномалий Вуда был предложен в работе [18]. Теория аномалий Вуда, развитая в [18], в отличие от широко известных методов, основанных на учёте многократного рассеяния [19], базируется на явлении возбуждения поверхностных волн ДР. Авторы [18] показали, что существует два типа аномалий: рэлеевский, характеризующийся появлением и исчезновением новых спектральных порядков, и резонансный, соответствующий резонансам комплексных поверхностных волн ДР. Установлено, что аномалии этих двух типов могут проявляться как по отдельности, так и одновременно. В разделах 2, 3 мы сравним резонансные явления, возникающие при скользком падении плоской волны на диэлектрический цилиндр и одномерную ДР, основываясь на работе [18].

Впервые резонансы типа Фано, появляющиеся в процессе рассеяния плоской волны при её скользком падении на диэлектрический цилиндр, были описаны в работе [8], где показано, что подобного рода резонансы имеют место в спектральных зависимостях мнимой части эффективного показателя преломления моды ПТ-световода. По мнению авторов [8], такое поведение спектра потерь возможно при малых значениях отношения  $d/\Lambda$ , где  $d$  — диаметр цилиндров в оболочке,  $\Lambda$  — расстояние между ними. В этом случае предполагается, что взаимодействие между цилиндрами оболочки мало и спектр потерь световода определяется рассеивающими свойствами отдельного цилиндра согласно модели ARROW (Anti-Resonant Reflective Optical Waveguides) [4, 20].

## 2. Возбуждение циклических волн Зоммерфельда на поверхности диэлектрического цилиндра.

### Аналогии с рассеянием плоской волны на одномерной дифракционной решётке

Поскольку решение задачи о рассеянии плоской волны на диэлектрическом цилиндре хорошо известно, мы только кратко остановимся на её основных моментах.

Пусть плоская электромагнитная волна с электрическим и магнитным векторами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp [i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})] \quad (1)$$

распространяется в среде с показателем преломления  $n$ . Абсолютная величина волнового вектора в (1)  $|\mathbf{k}| = nk_0$ , где  $k_0 = \omega/c$  — волновое число в вакууме,  $\omega$  и  $c$  — круговая частота и скорость света соответственно. Волна падает на однородный цилиндр с бесконечной длиной и радиусом  $a$ , выполненный из диэлектрика с показателем преломления  $n_1$ .

Введём соосную с цилиндром систему цилиндрических координат  $(\rho, \varphi, z)$  и для определённости, следуя, например, [9], положим, что вектор  $\mathbf{k}$  составляет малый угол  $\theta$  с отрицательным направлением оси  $z$ . Тогда экспоненциальный множитель в (1) можно представить в виде

$$\exp [i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})] = \exp [i(\omega t - \beta z)] \exp [i(k_{\perp} \rho \cos \varphi)], \quad (2)$$

где  $k_{\perp} = (k^2 - \beta^2)^{1/2} = k_0 n \sin \theta$  — поперечная составляющая волнового вектора,  $\beta = k_0 n \cos \theta$  — его продольная составляющая (постоянная распространения). Азимутальный угол  $\varphi$  для определённости условимся отсчитывать от плоскости  $(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ .

Одинаковый для всех компонент электромагнитного поля множитель  $\exp [i(\omega t - \beta z)]$  далее всюду для простоты записи будем опускать, а азимутальную зависимость в (2) разложим в ряд по цилиндрическим гармоникам (ряд Фурье–Бесселя). Для этого воспользуемся известным соотношением [21], следующим из интегральных представлений Зоммерфельда для цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} \exp [i(k_{\perp} \rho \cos \varphi)] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(k_{\perp} \rho) \exp(im\varphi) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(k_{\perp} \rho) \exp(-im\varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда продольные компоненты векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  падающей волны примут вид

$$\begin{aligned} H_z^i &= C_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(q) \exp(-im\varphi), \\ E_z^i &= C_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(q) \exp(-im\varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $q = k_{\perp} \rho = \rho k_0 n \sin \theta$ ,  $C_1 = H_0 \sin \theta \cos \delta$ ,  $C_2 = E_0 \sin \theta \sin \delta$ ,  $\delta$  — угол поворота компонент поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  относительно волнового вектора  $\mathbf{k}$ , отсчитываемый от выбранной нами выше плоскости  $(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ . Угол  $\delta$  характеризует поляризацию падающего излучения: например,  $\delta = 0$

отвечает случаю ТЕ-поляризации (ТЕ — Transverse Electric), когда в плоскости падения лежит вектор  $\mathbf{H}$  и  $C_2 = 0$ , а  $\delta = \pi/2$  — другому предельному случаю, ТМ-поляризации (ТМ — Transverse Magnetic), при  $C_1 = 0$ .

Для продольных компонент рассеянной волны при принятой зависимости поля от времени  $\sim \exp(i\omega t)$  решение волнового уравнения будем искать в виде, аналогичном (4):

$$\begin{aligned} E_z^s &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^s H_m^{(2)}(q) \exp(-im\varphi), \\ H_z^s &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^s H_m^{(2)}(q) \exp(-im\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $H_m^{(2)}(q)$  — функции Ганкеля второго рода, а для поля внутри цилиндра — в виде

$$\begin{aligned} E_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m J_m(q_1) \exp(-im\varphi), \\ H_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(q_1) \exp(-im\varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $a_m^s$ ,  $b_m^s$ ,  $a_m$ ,  $b_m$  — пока неопределённые амплитуды гармоник,

$$q_1 = k_{\perp 1} \rho = \rho \sqrt{(n_1 k_0)^2 - \beta^2} = \rho k_0 \sqrt{n_1^2 - n^2 \cos^2 \theta}.$$

Азимутальные компоненты поля находятся из известных соотношений:

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &= -i \frac{\rho^2}{q^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - k_0 \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right), \\ H_{\varphi} &= -i \frac{\rho^2}{q^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \varepsilon k_0 \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

следующих из уравнений Максвелла. Все переменные в (7) относятся к соответствующей среде (к стержню или его окружению);  $\varepsilon = n^2$  — диэлектрическая проницаемость. Магнитная восприимчивость для всех сред положена равной единице.

С учётом (4)–(7) азимутальные компоненты падающего и рассеянного полей, а также поля внутри цилиндра представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^i &= i \frac{\rho}{q} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q k_0} C_1 J_m(q) - \varepsilon C_2 J_m'(q) \right) i^m \exp(-im\varphi) \right], \\ E_{\varphi}^i &= i \frac{\rho}{q} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q k_0} C_2 J_m(q) + C_1 J_m'(q) \right) i^m \exp(-im\varphi) \right], \\ H_{\varphi}^s &= i \frac{\rho}{q} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q k_0} a_m^s H_m^{(2)}(q) - \varepsilon b_m^s H_m^{(2)'}(q) \right) \exp(-im\varphi) \right], \\ E_{\varphi}^s &= i \frac{\rho}{q} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q k_0} b_m^s H_m^{(2)}(q) + a_m^s H_m^{(2)'}(q) \right) \exp(-im\varphi) \right], \\ H_{\varphi} &= i \frac{\rho}{q_1} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q_1 k_0} a_m J_m(q_1) - \varepsilon_1 b_m J_m'(q_1) \right) \exp(-im\varphi) \right], \\ E_{\varphi} &= i \frac{\rho}{q_1} k_0 \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i \frac{\beta m}{q_1 k_0} b_m J_m(q_1) + a_m J_m'(q_1) \right) \exp(-im\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и всюду ниже штрих у цилиндрических функций означает дифференцирование по аргументу.

В результате граничные условия, требующие непрерывности тангенциальных компонент поля ( $H_z, E_z, H_\varphi, E_\varphi$ ) на поверхности цилиндра ( $\rho = a$ ), приводят к следующей системе линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно неопределённых амплитуд  $a_m^s, b_m^s, a_m, b_m$ :

$$\begin{aligned} a_m^s f + b_m^s i h &= X_m (C_1 g + C_2 i h), \\ a_m^s h + b_m^s i \varepsilon f_1 &= X_m (C_1 h + C_2 i \varepsilon g_1), \end{aligned} \quad (9)$$

причём

$$a_m = (a_m^s - C_1 X_m) \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \quad b_m = (b_m^s - C_2 X_m) \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)},$$

где  $q$  и  $q_1$  определены формулами (4) и (6). Ниже под  $q$  и  $q_1$  понимаются те же величины, но при фиксированной радиальной координате  $\rho = a$ . Для краткости записи введены обозначения

$$\begin{aligned} X_m &= -i^m \frac{J_m(q)}{H_m^{(2)}(q)}, \quad h = nm \cos \theta \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q_1^2} \right), \\ g &= \frac{J'_m(q)}{q J_m(q)} - \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)}, \quad g_1 = \frac{J'_m(q)}{q J_m(q)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)}, \\ f &= \frac{H_m^{(2)'}(q)}{q H_m^{(2)}(q)} - \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)}, \quad f_1 = \frac{H_m^{(2)'}(q)}{q H_m^{(2)}(q)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)}. \end{aligned}$$

Решение (9) таково:

$$\begin{aligned} b_m^s &= X_m \left[ C_2 + \left( C_2 i f - \frac{C_1 h}{\varepsilon} \right) Z_m \right], \\ a_m^s &= X_m [C_1 + (C_1 i f_1 + C_2 h) Z_m], \\ b_m &= X_m Z_m \left( C_2 i f - \frac{C_1 h}{\varepsilon} \right) \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \\ a_m &= X_m Z_m (C_1 i f_1 + C_2 h) \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Z_m &= \frac{2}{\pi q^2 J_m(q) H_m^{(2)}(q) D_m}, \\ D_m &= \left( \frac{H_m^{(2)'}(q)}{q H_m^{(2)}(q)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)} \right) \left( \frac{H_m^{(2)'}(q)}{q H_m^{(2)}(q)} - \frac{J'_m(q_1)}{q_1 J_m(q_1)} \right) - \\ &\quad - \left[ m \cos \theta \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q_1^2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Обратим внимание, что, приравняв нулю выражение (11) для  $D_m$ , получим широко известное дисперсионное уравнение для нахождения постоянных распространения мод диэлектрического цилиндра (когда источник излучения находится внутри него). Поэтому наличие  $D_m$  в знаменателях всех амплитуд разложений полей (10) порождает сингулярности этих амплитуд вблизи длин волн отсечек.

Далее, используя свойства цилиндрических функций (см., например, [22]), из (10) легко находим связи между

амплитудами одноименных гармоник, входящих в разложение (5), (6), (8) с разными знаками при  $m$ :

$$\begin{aligned} a_{-m}^s &= (-1)^m a_m^s A, \quad a_{-m} = (-1)^m a_m \bar{A}, \\ b_{-m}^s &= (-1)^m b_m^s B, \quad b_{-m} = (-1)^m b_m \bar{B}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_1 + (C_1 i f_1 - C_2 h) Z_m}{C_1 + (C_1 i f_1 + C_2 h) Z_m}, \quad B = \frac{C_2 + (C_2 i f + C_1 h/\varepsilon) Z_m}{C_2 + (C_2 i f - C_1 h/\varepsilon) Z_m}, \\ \bar{A} &= \frac{C_1 i f_1 - C_2 h}{C_1 i f_1 + C_2 h}, \quad \bar{B} = \frac{C_2 i f + C_1 h/\varepsilon}{C_2 i f - C_1 h/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Подстановка этих связей, например, в разложение (5) для продольной магнитной компоненты рассеянного поля даёт

$$\begin{aligned} H_z^s &= a_0^s H_0^{(2)}(q) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s H_m^{(2)}(q) \times \\ &\quad \times [(A+1) \cos(m\varphi) + i(A-1) \sin(m\varphi)]. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом выясняется, что другие компоненты поля, как рассеянного, так и внутри цилиндра, представляют собой, подобно (13), суперпозиции стоячих азимутальных гармоник. Иными словами, поверхностные гармоники  $\exp(im\varphi)$  и  $\exp(-im\varphi)$ , имеющие одинаковые по величине, но разные по знаку проекции азимутальных "импульсов"  $m$ , описывают стоячую волну (волну Зоммерфельда).

Найденное решение (10) заметно упрощается, когда на цилиндр падает либо ТЕ-поляризованная, либо ТМ-поляризованная волна.

В случае ТЕ-поляризации ( $C_2 = 0$ ) решение (10) таково:

$$\begin{aligned} b_m^s &= -X_m Z_m \frac{h}{\varepsilon}, \quad a_m^s = X_m (Z_m i f_1 + 1), \\ b_m &= -X_m Z_m \frac{h}{\varepsilon} \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \quad a_m = X_m Z_m i f_1 \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$X_m = -C_1 i^m \frac{J_m(q)}{H_m^{(2)}(q)} = -H_0 \sin \theta i^m \frac{J_m(q)}{H_m^{(2)}(q)}. \quad (15)$$

Связи (12) также приобретают более простой вид ( $A = \bar{A} = 1, B = \bar{B} = -1$ ):

$$\begin{aligned} a_{-m}^s &= (-1)^m a_m^s, \quad a_{-m} = (-1)^m a_m, \\ b_{-m}^s &= (-1)^{m+1} b_m^s, \quad b_{-m} = (-1)^{m+1} b_m, \end{aligned} \quad (16)$$

а рассмотренное выше в качестве примера разложение для продольной магнитной компоненты рассеянного поля сводится к следующему:

$$H_z^s = a_0^s H_0^{(2)}(q) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s H_m^{(2)}(q) \cos(m\varphi).$$

Вообще, все компоненты поля оказываются чётными функциями  $m$ , представляя собой суперпозиции стоячих азимутальных гармоник.

В случае ТМ-поляризации падающей плоской волны ( $C_1 = 0$ ) решение (10) принимает вид

$$b_m^s = X_m C_2 (Z_m i f + 1), \quad a_m^s = X_m C_2 h Z_m,$$

$$b_m = X_m C_2 Z_m i f \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)}, \quad a_m = X_m C_2 h Z_m \frac{H_m^{(2)}(q)}{J_m(q_1)},$$

где  $C_2 = E_0 \sin \theta = (H_0/n) \sin \theta$  и учтено известное соотношение между числовыми значениями напряжённостей электрического и магнитного полей в плоской волне [23]. Остальные обозначения прежние. Связи между амплитудами разложений компонент поля с разными знаками  $m$  при ТМ-поляризации выражаются как

$$a_m^s = (-1)^{m+1} a_{-m}^s, \quad a_m = (-1)^{m+1} a_{-m},$$

$$b_m^s = (-1)^m b_{-m}^s, \quad b_m = (-1)^m b_{-m}.$$

В этом случае все компоненты поля также оказываются чётными функциями  $m$  и представляют собой суперпозиции стоячих азимутальных гармоник.

Произвольная поляризация должна рассматриваться как случай, промежуточный между случаями ТЕ- и ТМ-поляризации, который, однако, требует привлечения для его анализа более сложного общего решения (10). В дальнейшем для простоты ограничимся анализом процесса рассеяния ТЕ-поляризованной волны на цилиндре.

Далее, используем полученные результаты для нахождения величин, характеризующих эффективность процесса рассеяния плоской волны на цилиндре.

Способность совокупности диэлектрических цилиндров, размещённых в оболочке световода, локализовать свет в его сердцевине во многом может характеризоваться, например, вектором Умова – Пойнтинга рассеянного отдельным цилиндром излучения. Наиболее наглядно эффективность процесса рассеяния плоской волны на цилиндре характеризуется средним значением (за период колебаний поля) радиальной компоненты вектора Умова – Пойнтинга

$$S_r^s = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}^s \mathbf{H}^{s*}]_r = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_\varphi^s H_z^{s*} - E_z^s H_\varphi^{s*}). \quad (17)$$

При этом, исходя из физических соображений, нас будут интересовать лишь значения  $S_r^s$  в дальней зоне (при  $\rho \rightarrow \infty$ ). Конструктивная интерференция в сердцевине световода волн, рассеянных всеми цилиндрами оболочки преимущественно назад, и определит процесс формирования мод.

Для вычисления (17) воспользуемся выражениями (5), (8) для рассеянных компонент поля и асимптотическими зависимостями функций Ганкеля  $H_m^{(2)}(q)$  и их производных при больших значениях аргумента  $q$  (см. [22]), опускаемая при этом слагаемые, убывающие с его возрастанием быстрее, чем  $\sim q^{-\alpha}$  ( $\alpha > 1/2$ ):

$$H_m^{(2)}(q) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi q}} i^m \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$H_m^{(2)'}(q) = -H_{m+1}^{(2)}(q) + \frac{m}{q} H_m^{(2)}(q) \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \left( \frac{m}{q} - \exp \frac{i\pi}{2} \right) \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \approx -i H_m^{(2)}(q).$$

Тогда компоненты поля в (17) в случае ТЕ-поляризации падающей волны примут вид

$$H_z^s \cong \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left( a_0^s + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \cos(m\varphi) \right),$$

$$E_z^s \cong -2i \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \right] \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \sin(m\varphi), \quad (18)$$

$$H_\varphi^s \cong 2i \frac{\rho}{q} k_0 \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \right] \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \sin(m\varphi),$$

$$E_\varphi^s \cong \frac{\rho}{q} k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \exp \left[ -i \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left( a_0^s + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \cos(m\varphi) \right).$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$S_r^s(\rho, \varphi) = \frac{\rho k_0 c}{\pi^2 q^2} \left[ \left| \frac{a_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \cos(m\varphi) \right|^2 + \varepsilon \left| \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \sin(m\varphi) \right|^2 \right]. \quad (19)$$

Поскольку  $q$  пропорционально расстоянию от стержня  $\rho$ , соотношение (19) означает, что приходящаяся на единицу площади поверхности мощность рассеянного излучения убывает обратно пропорционально  $\rho$ . В то же время сама эта площадь удаляющейся с возрастанием  $\rho$  поверхности, наоборот, возрастает как  $2\pi\rho$  (на единицу длины стержня вдоль  $z$ ). В результате мощность  $P_s$ , рассеиваемая единицей длины стержня, оказывается не зависящей от  $\rho$  и определяется лишь азимутальным углом  $\varphi$ :

$$P_s(\varphi) = \frac{c\lambda}{(\pi n \sin \theta)^2} \left[ \left| \frac{a_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \cos(m\varphi) \right|^2 + \varepsilon \left| \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \sin(m\varphi) \right|^2 \right]. \quad (20)$$

Воспользовавшись известным определением плотности электромагнитной энергии в плоской волне [23] и умножив эту плотность на нормальную к поверхности цилиндра компоненту фазовой скорости, найдём интенсивность  $I_i$  падающего на цилиндр излучения. В результате дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как  $\sigma_d = P_s/I_i$ , примет вид

$$\sigma_d(\varphi) = \frac{8\lambda}{\pi n H_0^2 \sin^3 \theta} \left[ \left| \frac{a_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \cos(m\varphi) \right|^2 + \varepsilon \left| \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \sin(m\varphi) \right|^2 \right]. \quad (21)$$

Поскольку все коэффициенты разложений в (14) пропорциональны произведению  $H_0 \sin \theta$ , множитель перед скобками в (21) на самом деле от  $H_0$  не зависит, а зависит как  $1/\sin \theta$  от угла падения волны.

В частности, для рассеянного строго назад излучения ( $\varphi = 0$ ) из (21) следует

$$\sigma_d(0) = \frac{8\lambda}{\pi n H_0^2 \sin^3 \theta} \left| \frac{a_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \right|^2. \quad (22)$$

Для ТМ-поляризованной падающей волны соответственно получим

$$\sigma_d(\varphi) = \frac{8\lambda}{\pi n H_0^2 \sin^3 \theta} \left[ \varepsilon \left| \frac{b_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \cos(m\varphi) \right|^2 + \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s i^m \sin(m\varphi) \right|^2 \right], \quad (23)$$

$$\sigma_d(0) = \frac{8\lambda}{\pi n H_0^2 \sin^3 \theta} \left| \frac{b_0^s}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^s i^m \right|^2. \quad (24)$$

Далее, обратим внимание на аналогии, которые просматриваются между процессами рассеяния плоской волны на одномерной металлической ДР и возбуждением циклической волны Зоммерфельда на поверхности диэлектрического цилиндра. При рассмотрении рассеяния плоской волны на ДР будем основываться на работах [16, 18].

Пусть имеется бесконечная в направлениях  $z$  и  $y$  ДР с периодом модуляции показателя преломления  $d$  вдоль оси  $z$ . Согласно [18], периодическая зависимость показателя преломления такой ДР может быть представлена поверхностным импедансом

$$Z^s(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n^s \exp\left(i \frac{2\pi n}{d} z\right). \quad (25)$$

При этом предполагается, что на ДР из вакуума падает ТМ-поляризованная плоская волна (вектор магнитного поля направлен вдоль оси  $y$ ). Угол падения по отношению к нормали решётки равен  $\theta$ , а вектор  $H$  представляется в виде

$$H_y^i(x, z) = H_0 \exp(ipx) \exp(-i\beta z), \quad (26)$$

где  $\beta = k \cos \theta$ ,  $p = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$ ,  $k = \omega/c$  — волновое число свободного пространства.

Поле рассеянной волны в этом случае может быть записано как

$$H_y^s(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\beta) \exp(ip_n x) \exp\left(-i \frac{2\pi n z}{d}\right) \exp(-i\beta z), \quad (27)$$

где  $x \geq 0$ ,  $p_n = [k^2 - (\beta + 2\pi n/d)^2]^{1/2}$ .

Далее, используя периодические граничные условия для импеданса (25) в плоскости  $x = 0$ , получаем бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений для амплитуд рассеянных полей  $A_n(\beta)$  [18]. В итоге каждая из амплитуд гармоник  $n$ -го порядка находится из соотношения

$$A_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (28)$$

где  $\Delta$  — детерминант соответствующей системы линейных однородных уравнений,  $\Delta_n$  — детерминант, получающийся заменой  $n$ -го столбца детерминанта  $\Delta$  вектором-столбцом, содержащим правую часть системы линейных неоднородных уравнений, связанную с амплитудой поля падающей плоской волны.

Согласно [16, 18], получаемая таким образом бесконечная система уравнений определяет два типа резонансов, образующих структуру аномалий Вуда. Первый связан с существованием собственных распространяющихся мод ДР (её вытекающих мод), постоянные распро-

странения которых находятся из решения дисперсионного уравнения  $\Delta = 0$ . Эти постоянные распространения являются комплексными, а соответствующие резонансы имеют лоренцев спектральный профиль. Второй тип резонансов связан с быстрым изменением амплитуд дифракционных порядков, соответствующих возникновению или исчезновению того или иного из них в узком спектральном диапазоне.

Рассмотрим, например,  $(n - 1)$ -й дифракционный порядок с амплитудой  $A_{n-1}(\beta)$ , и пусть детерминант  $\Delta_{n-1}$  для какой-либо длины волны равен нулю. Если в непосредственной близости детерминант  $\Delta$ , определяющий вытекающую моду ДР, также обращается в нуль, то выражение (28) будет представлять собой произведение двух сомножителей, один из которых обладает комплексным полюсом, а другой — нулём первого порядка в узкой спектральной области. В результате  $A_{n-1}(\beta)$  имеет близко расположенные друг к другу минимум и максимум. Это означает, что профиль спектральной зависимости резонанса будет иметь асимметричную форму типа резонанса Фано. Иными словами, аномалии этого типа определяются сосуществованием в узкой спектральной области резонансного пропускания и резонансного отражения, что соответствует взаимодействию мод дискретного спектра, связанных с ДР, и континуумом распространяющихся радиационных мод [24].

В [16] дифракция плоской волны на ДР рассматривалась как процесс передачи импульса от решётки падающей волне. При этом пара волн с тангенциальными компонентами волнового вектора (импульса волны)  $k_{pt} = k_0 \pm 2\pi n/d$ , возбуждённых падающей плоской волной на поверхности ДР, может рассматриваться как вынужденные колебания. При выполнении условия фазового синхронизма, заключающегося в совпадении  $k_{pt}$  отдельных дифракционных порядков и действительной части постоянной распространения поверхностной квазистационарной волны, эти вынужденные колебания могут осциллировать с такой же интенсивностью, как и сама квазистационарная волна. Поверхностные квазистационарные волны (superficial quasi-stationary waves) такого типа, возбуждаемые на поверхности ДР, имеют ту же природу, что и поверхностные волны, возбуждаемые на металлической поверхности колеблющимся над ней диполем (волны Зоммерфельда). Именно эти волны, по мнению Фано, и являются причиной аномалий Вуда.

Итак, можно сказать, что рассеяние плоской ТЕ-поляризованной волны на цилиндре соответствует рассеянию плоской ТМ-волны на одномерной ДР, если поверхность цилиндра рассматривать как дифракционную квазирешётку с периодом  $2\pi$  в азимутальном направлении. Аналогия между процессами рассеяния на двух физически разных объектах состоит в том, что передача импульса падающей волне от ДР в направлении распространения волны в одном случае и передача импульса падающей волне с определённым состоянием поляризации при её скользком падении на цилиндр за счёт кривизны и циклической периодичности цилиндрической поверхности в другом приводят к наличию обоих состояний поляризации в поле рассеянной волны. Таким образом, по физическому смыслу процесс рассеяния плоской волны на диэлектрическом цилиндре аналогичен рассеянию плоской волны на ДР, поэтому резонансные явления, аналогичные известным аномалиям Вуда, должны наблюдаться и при рассеянии на цилиндре.

Проиллюстрируем эти заключения на конкретных примерах.

### 3. Результаты расчётов

Пусть ТЕ-поляризованная плоская волна падает под углом  $\theta = 1^\circ$  из среды с показателем преломления  $n = 1,45$  на цилиндр с радиусом поперечного сечения  $a = 1,2$  мкм, выполненный из диэлектрика с показателем преломления  $n_1 = 1,48$ . Такое малое различие между показателями преломления типично для ПТ-световодов. Спектральные зависимости амплитуд цилиндрических гармоник (радиационных мод) первых пяти порядков (до  $m = 4$ ) рассеянного магнитного поля представлены на рис. 1. Ярко выраженный резонансный характер носят зависимости амплитуд гармоник и более высоких порядков ( $m > 4$ ). Представленные на рисунке зависимости весьма похожи на полученные в [18] для процесса рассеяния света на ДР.

Для подробного анализа резонансного поведения амплитуд рассеянных цилиндрических гармоник в качестве примера рассмотрим спектральную зависимость амплитуды нулевой гармоники  $a_0^s(\lambda)$ . Из рисунка 1 видно, что эта зависимость содержит как резонансы типа Фано, так и резонанс лоренцева типа в длинноволновой области спектра, что также напоминает структуру

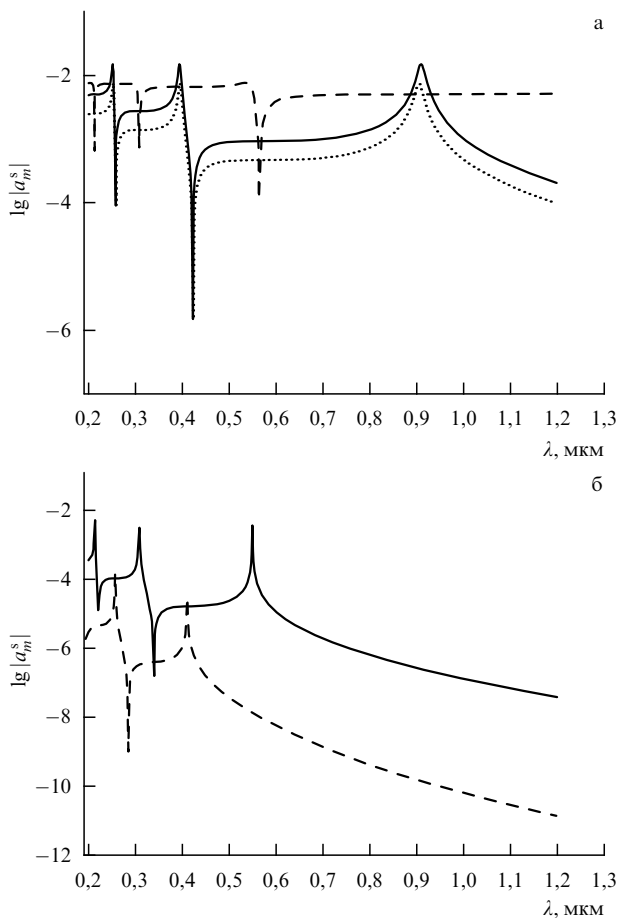


Рис. 1. Спектральная зависимость абсолютных величин амплитуд  $a_m^s(\lambda)$  гармоник рассеянного магнитного поля, нормированных на  $H_0$ : (а)  $m = 0$  (сплошная кривая),  $m = 1$  (штриховая кривая),  $m = 2$  (пунктирная кривая); (б)  $m = 3$  (сплошная кривая),  $m = 4$  (штриховая кривая).

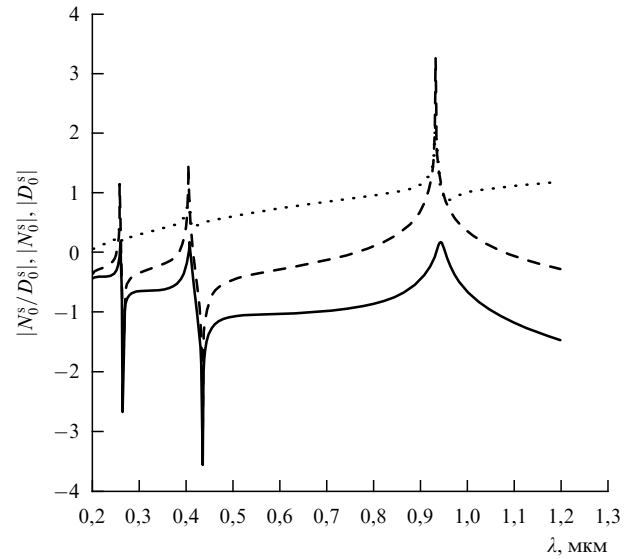


Рис. 2. Спектральные зависимости абсолютных величин числителя  $N_0^s(\lambda)$  выражения (29) (штриховая кривая), его знаменателя  $D_0^s(\lambda)$  (пунктирная кривая) и отношения  $N_0^s(\lambda)/D_0^s(\lambda)$  (сплошная кривая) (логарифмический масштаб).

резонансов при рассеянии плоской волны на ДР [18]. С помощью выражения (14), которое для  $a_0^s(\lambda)$  приводится к виду

$$a_0^s = X_0 \left( \frac{1}{q} \frac{J_0'(q)}{J_0(q)} - \frac{1}{q_1} \frac{J_0'(q_1)}{J_0(q_1)} \right) \left( \frac{1}{q} \frac{H_0^{(2)'}(q)}{H_0^{(2)}(q)} - \frac{1}{q_1} \frac{J_0'(q_1)}{J_0(q_1)} \right)^{-1}, \quad (29)$$

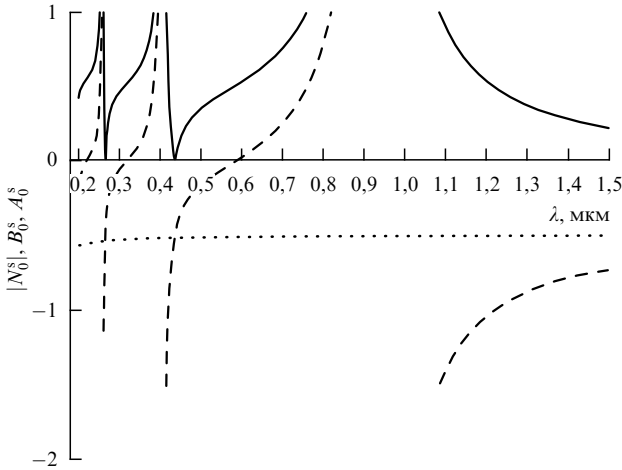
можно проанализировать зависимость  $a_0^s(\lambda)$  с точки зрения взаимодействия мод дискретного спектра цилиндра с его же распространяющимися модами непрерывного спектра [25]. С этой целью рассмотрим по отдельности спектральные зависимости числителя и знаменателя в (29), которые сами по себе имеют резонансное поведение. Эти зависимости без учёта множителя  $X_0$  приведены на рис. 2, из которого видно, что резонансы  $a_0^s(\lambda)$  в основном определяются резонансами числителя (29). Для более детального анализа спектральной зависимости  $a_0^s(\lambda)$  целесообразно исследовать оба слагаемых числителя,  $A_0^s(\lambda) = J_0'(q_1)/(J_0(q_1)q_1)$  и  $B_0^s(\lambda) = J_0'(q)/(J_0(q)q)$ , по отдельности. Их спектральные зависимости представлены на рис. 3.

Первое из слагаемых связано с наличием собственных поперечных резонансов цилиндра (его дискретных мод, отвечающих  $m = 0$ ). В рассматриваемом спектральном диапазоне ( $\lambda \leq 1,2$  мкм) аргумент  $q_1$  велик и можно воспользоваться асимптотическим приближением для цилиндрических функций. В таком приближении рассчитанная зависимость для  $A_0^s(\lambda)$  (рис. 3) хорошо описывается функцией

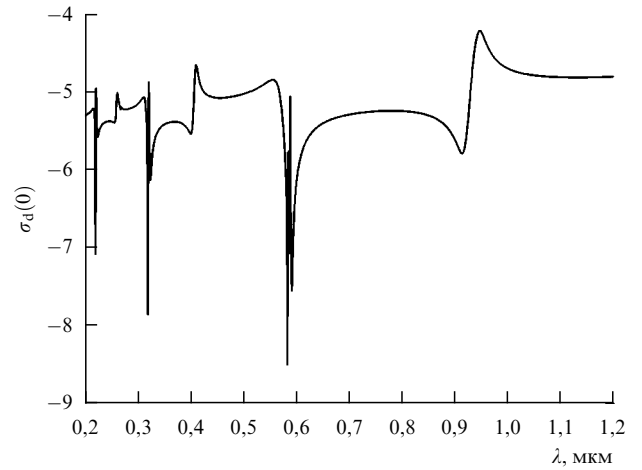
$$A_0^s(\lambda) \approx -\frac{\tan(q_1 - \pi/4)}{q_1}. \quad (30)$$

Эта функция является знакопеременной и имеет разрывы в точках, соответствующих длинам волн отсечек, которые для  $m = 0$ , как известно [26], определяются из характеристического уравнения  $J_0(q_1) = 0$ ; в данном





**Рис. 3.** Спектральные зависимости абсолютной величины  $N_0^s(\lambda) = B_0^s(\lambda) - A_0^s(\lambda)$  (сплошная кривая) и слагаемых  $A_0^s(\lambda)$  (штриховая кривая) и  $B_0^s(\lambda)$  (пунктирная кривая) (линейный масштаб).



**Рис. 4.** Дифференциальное сечение рассеяния назад  $\sigma_d(0)$  [мкм] для скользящего угла  $\theta = 1^\circ$  падения плоской волны (логарифмический масштаб).

случае значения длин волн отсечек (в мкм) составляют:  $\lambda = 0,936; 0,417; 0,270$  и т.д.

Второе слагаемое,  $B_0^s(\lambda)$ , в числителе (29) связано с континуумом распространяющихся мод непрерывного спектра, и, как видно из рис. 3, в данном спектральном диапазоне оно носит нерезонансный характер (нет корней функции  $J_0(q)$ ) и представляет собой весьма слабо изменяющуюся функцию.

Очевидно, что в точках пересечения зависимостей  $A_0^s(\lambda)$  и  $B_0^s(\lambda)$  числитель (29) оказывается равным нулю, причём в основном именно вблизи длин волн отсечек (исключение составляет наибольшая из них,  $\lambda = 0,936$  мкм, справа от которой асимптотическое приближение для  $A_0^s(\lambda)$  перестаёт выполняться, а пересечение с  $B_0^s(\lambda)$  отсутствует). Наличие у числителя в непосредственной близости как нулевого значения, так и полюса определяет возникновение характерных асимметричных форм резонансов типа Фано на спектральной зависимости его абсолютной величины. Однако при наибольшей длине волны отсечки возникает обычный симметричный резонанс лоренцевой формы (см. рис. 2).

Аналогичный анализ может быть проведён и для амплитуд гармоник более высокого порядка ( $m \geq 1$ ), однако он более сложен, поскольку для этих гармоник нельзя получить столь простого выражения, как (29).

Наличие резонансов на спектральных зависимостях амплитуд азимутальных гармоник рассеянного цилиндрического поля обуславливает и похожее поведение спектральной зависимости дифференциального сечения рассеяния назад  $\sigma_d(0)$  (рис. 4), из которого следует, что подавляющий вклад в это сечение вносит азимутальная гармоника с  $m = 1$  (см. рис. 1) — амплитуда этой гармоники по спектру сравнительно слабо изменяется и лишь на некоторых длинах волн имеет минимумы (в областях  $\lambda \approx 0,9; 0,55; 0,3$  мкм и т.д.). Вклад прочих гармоник (в основном это гармоники с  $m = 0$  и  $m = 2$ ) заметен лишь в отдельных небольших спектральных диапазонах (например, около  $\lambda = 0,40; 0,26$  мкм). Последнее связано со знакопеременностью слагаемых в сумме под знаком модуля в (22). В самом деле, из (22) и определения  $a_m^s$  (14) видно, что каждое слагаемое этой суммы содержит множитель  $(-1)^{m+1}$ , откуда и следует

немонотонное поведение  $\sigma_d(0)$  в указанных спектральных областях. Отмеченным обстоятельством обусловлена и неоднородность зависимости  $\sigma_d(0)$  по спектру в областях вдали от резонансов — сечение в первой области ( $\lambda \geq 1$  мкм) примерно на порядок выше, чем во второй ( $0,6 \leq \lambda \leq 0,9$  мкм), во второй, наоборот, настолько же меньше, чем в третьей ( $0,40 \leq \lambda \leq 0,55$  мкм) и т.д.

Похожие спектральные зависимости имеют  $\sigma_d(\varphi)$  и для других, отличных от нуля, углов рассеяния.

Заметим, что дифференциальное сечение рассеяния строго назад или в направлении какого-либо иного угла невелико и оно содержит сравнительно мало физической информации, поскольку очевидно, что мода световода формируется интерференцией волн, рассеиваемых цилиндрами оболочки не в конкретный угол, но в некоторый диапазон изменения углов рассеяния преимущественно назад ( $|\varphi| \leq \pi/2$ ). Здесь это сечение приведено лишь с целью продемонстрировать участие гармоник различных азимутальных порядков в рассеянии.

Проинтегрировав (21) по азимутальному углу с раствором  $2\varphi \leq \pi$  (от  $-\varphi$  до  $+\varphi$ ), найдём интегральное сечение рассеяния:

$$\begin{aligned} \sigma_s(\varphi) = & \frac{8\lambda}{\pi n H_0^2 \sin^3 \theta} \left\{ \varphi \left( \frac{|a_0^s|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} |a_m^s|^2 + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} |b_m^s|^2 \right) + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_m^s|^2 - \varepsilon |b_m^s|^2) \frac{\sin(2m\varphi)}{2m} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} i^m [a_0^{s*} a_m^s + a_0^s a_m^{s*} (-1)^m] \frac{\sin(m\varphi)}{m} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} [(a_n^s a_m^{s*} + \varepsilon b_n^s b_m^{s*}) \frac{\sin[(m-n)\varphi]}{m-n} + \\ & \left. + (a_n^s a_m^{s*} - \varepsilon b_n^s b_m^{s*}) \frac{\sin[(m+n)\varphi]}{m+n}] i^{n-m} \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Спектральные зависимости  $\sigma_s$  для трёх значений раствора углов рассеяния изображены на рис. 5. Видно, что все рассчитанные кривые являются подобными друг

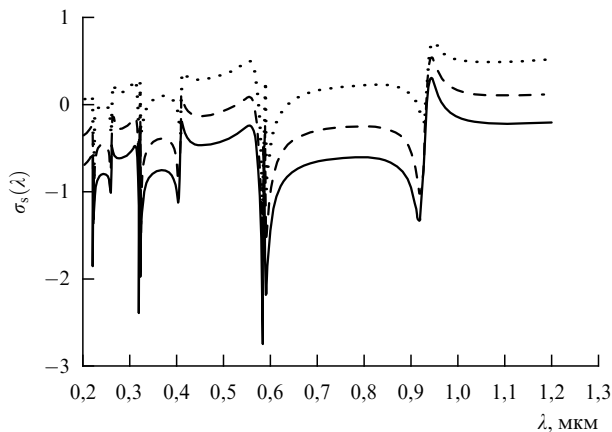


Рис. 5. Интегральное сечение  $\sigma_s$  [мкм] для телесных углов рассеяния  $2\varphi = \pi/4$  (сплошная кривая),  $2\varphi = \pi/3$  (штриховая кривая) и  $2\varphi = \pi/2$  (пунктирная кривая).

другу и хорошо коррелируют с дифференциальным сечением рассеяния назад (см. рис. 4). Они не только обладают резонансными свойствами, но и проявляют неоднородное поведение в чередующихся через одну спектральных областях, разделённых особенностями. Также обращает на себя внимание большая величина интегрального сечения, которая при  $2\varphi \geq \pi/3$  становится сравнимой с поперечным размером цилиндра (радиусом 1,2 мкм) и даже превышает его. Последнее свидетельствует о высокой эффективности процесса рассеяния назад (в сторону сердцевин), что должно обеспечить благоприятные условия для формирования моды световода, оболочка которого содержит такие цилиндры. Результаты наших расчётов и расчётов других авторов это подтверждают.

#### 4. Заключение

В результате проведённого анализа установлено, что рассеяние плоской электромагнитной волны на диэлектрическом стержне осуществляется через возбуждение стоячих циклических волн (волн Зоммерфельда) на его поверхности. На длинах волн отсечек собственных мод стержня этот процесс носит резонансный характер, обусловленный интерференцией соответствующих вытекающих квазидискретных мод и континуума рассеянного излучения.

Понятно, что на возбуждение ВЗ должна расходоваться некоторая часть энергии падающей волны, что, наряду с материальными потерями, определяет полные оптические потери ПТ-световода. Величина потерь на возбуждение ВЗ определяется плотностью собственных состояний стержня. Эти потери можно снизить заменой сплошного стержня равновеликим по диаметру капилляром.

Расчёты показывают, что чем меньше толщина стенок капилляра, тем меньше плотность его собственных состояний и меньше затраты энергии на возбуждение ВЗ. В самом деле, большая плотность собственных состояний сплошного цилиндра определяет и большой поток мощности в нём по сравнению с потоком мощности в стенках капилляра. Это в свою очередь вызывает и большие материальные потери в стержне по сравнению с таковыми в равновеликом капилляре. Последнее под-

тверждается результатами многих расчётов для МС с оболочкой из одного ряда цилиндров или капилляров.

Впервые замена стержней в ПТ-световодах капиллярами была рассмотрена в [27].

Однако если на сплошных стержнях рассеяние сопровождается возбуждением ВЗ в основном низких азимутальных порядков, то в случае капилляров, напротив, преобладают моды с большими азимутальными числами (похожие на моды "шепчущей галереи"). Как отмечалось, анализу МС-световодов с поллой сердцевинной и оболочкой из капилляров будет посвящена наша отдельная публикация.

В настоящей статье показано, что найденные резонансы, как типа Фано, так и лоренцева типа, являются аналогами известных аномалий Вуда, возникающих при рассеянии плоской волны на ДР. Аналогия оказывается более наглядной, если стержень представить как квазирешётку, период которой, в отличие от периода планарной ДР, определяется криволинейной азимутальной координатой и равняется  $2\pi$ .

Следует отметить, что задача рассеяния на стержне рассматривалась нами с точки зрения применимости результатов к микроструктурированным ПТ-световодам, оболочка которых содержит цилиндрические неоднородности с круглым поперечным сечением. Выше показано, что уже при полном угле рассеяния с раствором  $2\varphi \approx \pi/3$  сечение рассеяния на цилиндре становится сравнимым с поперечным размером цилиндра или даже превышает его, что и обеспечивает достаточную эффективность для формирования моды световода.

Для неоднородностей поперечного сечения иной формы (прямоугольной, треугольной и т.д.) проведённое выше рассмотрение не годится, поскольку в нём оказывается существенным использование цилиндрических координат. По-видимому, только в этом случае (и, пожалуй, ещё для неоднородностей эллиптического сечения) возможно возбуждение циклических стоячих поверхностных волн, в основном и определяющих эффективность процесса рассеяния.

В своих первых работах [28, 29] по исследованию МС с поллой сердцевинной основным их достоинством по сравнению с существующими аналогами мы считали наличие отрицательной кривизны границы раздела сердцевина – оболочка. Однако сейчас мы убеждаемся в том, что отрицательная кривизна является хотя и необходимым, но не достаточным условием для получения малых потерь в этих световодах. Существенно, чтобы для неоднородностей в структуре оболочки имелась возможность возбуждения стоячих азимутальных волн Зоммерфельда. Заметим, что данному условию не удовлетворяют, например, неоднородности, составляющие оболочки световодов с поллой сердцевинной, исследованных в работах [30, 31].

#### Список литературы

1. Russell P St J *J. Lightwave Technol.* **24** 4729 (2006)
2. Желтиков А М *УФН* **174** 1301 (2004) [*Zheltikov A M Phys. Usp.* **47** 1205 (2004)]
3. White T P et al. *Opt. Lett.* **27** 1977 (2002)
4. Litchinitser N M et al. *Opt. Lett.* **27** 1592 (2002)
5. Litchinitser N M et al. *Opt. Express* **12** 1540 (2004)
6. Steinvurzel P et al. *Opt. Express* **12** 5424 (2004)
7. Renversez G, Boyer P, Sagrini A *Opt. Express* **14** 5682 (2006)
8. Steinvurzel P et al. *Opt. Express* **14** 8797 (2006)

9. Wait J R *Can. J. Phys.* **33** 189 (1955)
10. Snyder A W *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **19** 720 (1971)
11. Lind A C, Greenberg J M J. *Appl. Phys.* **37** 3195 (1966)
12. Feng S et al. *Opt. Express* **17** 19823 (2009)
13. Wood R W *Philos. Mag.* **6** 4 396 (1902)
14. Rayleigh (Lord) *Philos. Mag.* **6** 14 60 (1907)
15. Rayleigh (Lord) *Proc. R. Soc. Lond. A* **79** 399 (1907)
16. Fano U J. *Opt. Soc. Am.* **31** 213 (1941)
17. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941) [Страттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948)]
18. Hessel A, Oliner A A *Appl. Opt.* **4** 1275 (1965)
19. Twersky V J. *Opt. Soc. Am.* **52** 145 (1962)
20. Duguay M A et al. *Appl. Phys. Lett.* **49** 13 (1986)
21. Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971) [Gradshteyn I S, Ryzhik I M *Tables of Integrals, Series, and Products* (New York: Academic Press, 1980)]
22. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (US. National Bureau of Standards Applied Mathematics Ser., 55) (Washington: U.S. Govt. Print. Off., 1964)
23. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1989) [Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)]
24. Miroshnichenko A E, Flach S, Kivshar Yu S *Rev. Mod. Phys.* **82** 2257 (2010)
25. Snyder A W, Love J D *Optical Waveguide Theory* (London: Chapman and Hall, 1983)
26. Snitzer E J. *Opt. Soc. Am.* **51** 491 (1961)
27. Stone J M et al. *Opt. Express* **14** 6291 (2006)
28. Pryamikov A D et al. *Opt. Express* **19** 1441 (2011)
29. Kosolapov A F et al. *Opt. Express* **19** 25723 (2011)
30. Wang Y Y et al. *Opt. Lett.* **36** 669 (2011)
31. Yu F, Wadsworth W J, Knight J C *Opt. Express* **20** 11153 (2012)

### Excitation of cyclical Sommerfeld waves and Wood's anomalies in plane wave scattering from a dielectric cylinder at oblique incidence

A.D. Pryamikov, A.S. Biriukov

*Fiber Optics Research Center, Russian Academy of Sciences,  
ul. Vavilova 38, 119333 Moscow, Russian Federation  
Tel. +7 (499) 503 81 93. Fax +7 (499) 135 81 39  
E-mail: pryamikov@fo.gpi.ru, biriukov@fo.gpi.ru*

An analysis is presented of the scattering of a plane electromagnetic wave at oblique incidence from a circular dielectric cylinder. Under certain conditions this scattering process involves the excitation of cyclic surface Sommerfeld waves (SWs) capable of traveling large distances along the cylinder. It is shown that the interaction of SWs of low azimuthal order with the cylinder's continuous (radiation) modes gives rise cyclic Sommerfeld resonances (SRs) analogous to the well-known Wood's anomalies in the plane wave scattering from one-dimensional metallic diffraction gratings. Conditions necessary for the effective excitation of SWs and SRs are established and how SWs and SRs contribute to mode formation in microstructured optical fibers is discussed.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 42.25.Fx

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201308d.0863

Bibliography — 31 references

*Received 28 November 2012, revised 26 February 2013*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (8) 863–873 (2013)

*Physics–Uspekhi* **56** (8) (2013)