

## ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Системы пикселизации неба  
для анализа протяжённого излучения

О.В. Верходанов, А.Г. Дорошкевич

*Дается обзор систем пикселизации на сфере, используемых для анализа протяжённого излучения, в частности космического микроволнового фона. Рассматриваются проблемы, возникающие при разбиении сферы на пикселы различными методами. Детально рассматривается сетка GLESP неиерархической пикселизации неба по методу Гаусса – Лежандра.*

PACS numbers: 95.75. – z, 95.85.Bh, 98.80. – k, 98.80.Es

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201308c.0849

## Содержание

1. Введение (849).
    - 1.1. Иерархическая треугольная сетка. 1.2. Разбиение сферы в эксперименте COBE.
  2. Введение в проблему построения карты (851).
  3. Сетки пикселизации (852).
    - 3.1. Пикселизация на основе икосаэдра. 3.2. Пикселизация Иглу. 3.3. Иерархическая пикселизация HEALPix.
  4. Пикселизация неба по методу Гаусса – Лежандра. Схема GLESP (856).
    - 4.1. Схема пикселизации. 4.2. Проблема репикселизации.
  5. Заключение (859).
  6. Приложения (860).
    - А. Нормированные присоединённые полиномы Лежандра.
    - Б. Описание программного пакета GLESP.
- Список литературы (861).

## 1. Введение

Последнее десятилетие исследований в области космологии связано с амбициозными экспериментами, включающими в себя космические и наземные наблюдения реликтового излучения, или космического микроволнового фона (Cosmic Microwave Background — CMB). Среди них особенно выделяются две космические миссии: WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)<sup>1</sup> Национального управления по авиации и исследова-

<sup>1</sup> <http://lambda.gsfc.nasa.gov>

**О.В. Верходанов.** Специальная астрофизическая обсерватория РАН, 369167 Нижний Архыз, Карачаево-Черкесская Республика, Российская Федерация. E-mail: vo@sao.ru  
**А.Г. Дорошкевич.** Астрокосмический центр Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация E-mail: dorr@asc.rssi.ru

Статья поступила 14 июня 2012 г.,  
после доработки 18 июля 2012 г.

нию космического пространства (NASA) [1, 2], завершившаяся в 2010 г., и Planck<sup>2</sup> Европейского космического агентства (ESA) [3], завершившаяся в 2013 г. Значение этих экспериментов определяется их важным вкладом в выбор модели Вселенной и измерение её главных параметров с хорошей точностью. Достигнутые успехи связаны, в первую очередь, с появлением новых технологий и инструментов в сантиметровой, миллиметровой и субмиллиметровой астрономии. Развитие методов обработки наблюдений космического микроволнового фона позволяет сравнить эти наблюдения с теоретическим описанием процессов в ранней Вселенной.

В технологической цепочке обработки микроволновых данных и измерения космологических параметров можно выделить несколько этапов:

- 1) регистрация временных рядов (Time Ordered Data — TOD);
- 2) пикселизация данных CMB и подготовка много-частотных карт наблюдений;
- 3) разделение компонент сигнала с использованием данных наблюдений на различных длинах волн (см., например, [4–9]);
- 4) анализ статистики сигнала на карте CMB (см., например, [10–21]);
- 5) гармонические преобразования "карта – сферические гармоники";
- 6) получение углового спектра мощности  $C(\ell)$  и его анализ (см., например, [22, 23]);
- 7) оценка космологических параметров (см., например, [24–26]).

Проблема представления и анализа карты неба возникает не только в микроволновых обзорах небесной сферы, но во всех диапазонах электромагнитного спектра (от гамма-диапазона до низкочастотного радиодиапазона, например, BATSE (Burst And Transient Source Experiment) [27] в гамма-диапазоне, ROSAT (от нем. Röntgensatellit) [28] в рентгеновском, SDSS (Sloan Digital

<sup>2</sup> <http://www.rssd.esa.int/Planck/>

Sky Survey) [29] в оптическом, IRAS (InfraRed Astronomical Satellite) [30] и 2MASS (Two Micron All Sky Survey) [31] в инфракрасном, NVSS (National Astronomy Observatory (NRAO) Very Large Array Sky Survey) [32] в радиодиапазоне (1,4 ГГц), обзор в радиодиапазоне (45 МГц) [33] и др.), а также при исследовании нейтрино (IceCube [34, 35]) и космических лучей. Кроме того, системы пикселизации неба оказываются важными при построении баз данных, требующих быстрого поиска небесных объектов (см. раздел 1.1).

В данной статье мы остановимся на одном пункте технологической цепочки, связанном с процедурой пикселизации неба. Процесс пикселизации неба — представление сферы в виде объединения соответствующих разрешению малых площадок (пикселей<sup>3</sup>) — в настоящее время является фактически решённой задачей.

Выбор той или иной схемы пикселизации зависит от особенностей решаемой задачи. Введение обычной пикселизации, используемой на ПЗС-матрицах (ПЗС — прибор с зарядовой связью), с одинаковыми по размеру квадратными пикселями, является сейчас достаточно простой (банальной) задачей, и в предельном, применяемом лишь для визуализации, случае такое разбиение сферы также может быть использовано. При анализе пикселей в прямоугольной (цилиндрической) системе координат на "развёрнутой" небесной сфере необходимо учитывать проекционные искажения и изменение площади пикселя в зависимости от удалённости от экватора.

Перед тем как перейти к описанию схем пикселизации карт протяжённого сигнала, отметим также один из применяемых для поиска объектов в базах данных методов разбиения сферы, которые позволяют индексировать на небе положение отдельных объектов.

### 1.1. Иерархическая треугольная сетка

Центральная проблема в гигантских (терабайтных) архивах наблюдательных данных — это быстрый доступ к выбранному участку или объекту на небесной сфере. Наиболее яркий пример — предназначенная как для работы профессиональных астрономов, так и для образовательных целей открытая база данных оптического Слоановского обзора (SDSS)<sup>4</sup>, содержащая информацию о порядка 200 млн небесных объектов (звёзд, галактик, квазаров и др.) в пяти оптических цветах. Для обеспечения Интернет-доступа к архиву был разработан сервер *SkyServer* [37], действующий в рамках специальной пикселизационной схемы: иерархической треугольной сетки (Hierarchical Triangular Mesh — HTM)<sup>5</sup> [38]. Пикселизация HTM основана на разбиении сферы на элементы сферического октаэдра (рис. 1), на поверхности которого каждый сферический треугольник рекурсивно разбивается на меньшие треугольники (рис. 2).

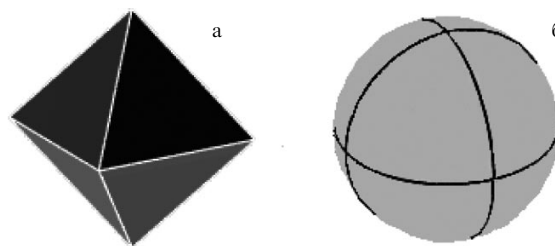


Рис. 1. Разбиение сферы в виде октаэдра: (а) октаэдр, (б) сферические треугольники с вершинами октаэдра.

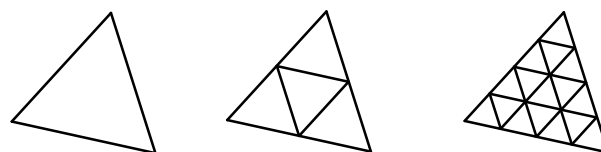


Рис. 2. Иерархическое разбиение треугольника с возрастанием разрешения.

При первичном разбиении на базовые пиксели выделяется восемь пикселей одного размера, получаемых пересечением на сфере трёх больших окружностей: экватора и двух меридианов, проходящих по долготам  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Иерархическая схема начинает работать при следующем шаге улучшения разрешения: каждый пиксел делится на четыре приблизительно равных по площади сферических треугольника, названных трикселями. Триксели образуются соединением середин трёх сторон треугольника предыдущего уровня, задаваемых дугами больших окружностей. Площади трикселей одного уровня иерархии отличаются в пределах  $\pm 70\%$  от средней площади, равной  $2\pi/4^{d+1}$ , где  $d$  — глубина уровня трикселя (шаг рекурсивного разбиения). Для заданной глубины число трикселей  $N_{\text{pix}} = 8 \times 4^d$ , длина минимальной стороны равна  $\pi/2^{d+1}$ , длина максимальной стороны больше минимальной приблизительно на  $\pi/2$  раз.

Разбиение на триксели является мощным средством индексации полей на картах и значительно ускоряет поиск небесных источников излучения в базах данных. Система индексации строится на основе восьми базовых трикселей (или трикселей нулевого уровня), обозначаемых соответственно для Севера (N) и Юга (S) как N0–N3 и S0–S3. Каждый триксел имеет три вершины, отмеченные номерами 0, 1 или 2. Середины противоположных отрезков отмечаются как 0, 1 и 2. На следующих уровнях номера трикселей образуются добавлением одной из цифр 0, 1 или 2, которые показывают вершину, разделяемую с родительским трикселем (рис. 3). Центральный триксел отмечается цифрой 3. Получающаяся длина имени трикселя также показывает уровень иерархии. В обозначение номера при таком разложении последовательно включаются обозначение нулевого уровня (от 0 до 7), а потом номера (от 0 до 3) трикселей следующих уровней. Такая нумерация позволяет связать центр трикселя с уникальным 64-битовым идентификатором (называемым HtmID), представляющим соответствующую иерархию. В этом представлении индексация работает до 31-го уровня. Например, 25-й уровень даёт разрешение до 60 см на Земле или 0,02 дуговой секунды на сфере. Отметим, что не каждому целому числу из данного диапазона соответствует какой-либо триксел.

<sup>3</sup> Слово "pixel" (от англ. picture element) было использовано Фредериком Биллингсли (Jet Propulsion Laboratory NASA) в 1965 г. для описания минимальных элементов видеоизображений Луны и Марса с космических аппаратов [36]. Понятие "пиксел" включает в себя координаты или номер элемента изображения, а также некоторые величины (измерения), соответствующие данной площадке: число зарегистрированных фотонов, температура, цвет и т.п.

<sup>4</sup> <http://www.sdss.org>

<sup>5</sup> <http://www.skyserver.org/htm/>

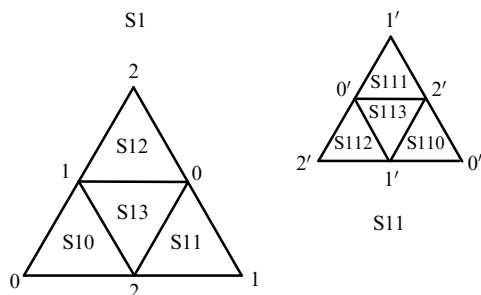


Рис. 3. Образование наименований трикселов с помощью нумерации углов.

Также нет уникального триксела, соответствующего выбранной точке неба, так как одна точка сферы может принадлежать трикселам разной иерархии. Но каждому трикселу с индексом HtmID соответствует уникальная площадка на сфере.

## 1.2. Разбиение сферы в эксперименте COBE

В задачах, связанных с гармоническим разложением сигнала, применяются специальные схемы разбиения сферы. Актуальность проблемы пикселизации значительно возросла с появлением данных космического эксперимента COBE (COsmic Background Explorer)<sup>6</sup> [39]. Команда COBE применила так называемую квадрилатерализованную (т.е. представленную в виде шести квадратов) небесную проекцию куба (Quadrilateralized Sky Cube (QSC) Projection) [40–42]. На рисунке 4 показан пример квадрилатерализованной проекции карты Земли.

На основе такой проекции строится следующая система пикселизации (рис. 5).

1. В сферу вписывается куб, и стороны сферы, соответствующие граням куба, разбиваются на пикселы с помощью равномерной квадратной сетки. Пиксел представляет собой множество точек, ближайших к данному узлу сетки по сравнению с другими узлами.

2. В пикселах интегрируется излучение, регистрируемое в стягиваемых ими телесных углах.

3. Центры пикселов немного смещены по окружности, для того чтобы они были приблизительно равными по площади.

В QSC-сетке пиксел будет примерно квадратным со стороной  $\sqrt{4\pi/N}$ , где  $N$  — число пикселов. Точки, наиболее удалённые от центров пикселов, лежат в углах этих квадратов, так что соответствующее расстояние  $d_{\text{cube}} \approx \sqrt{2\pi/N}$ . Для минимизации расстояния  $d$  удобно перейти к пикселизации на основе платоновых тел, но с другой формой ячейки. Это будет обсуждаться в разделе 3.1.

Уже при применении схемы разбиения неба на основе QSC-сетки стало понятным, что система пикселизации при анализе протяжённого излучения на сфере существенно влияет на качество описания данных. Однако надо сразу отметить, что выбор схемы пикселизации, хотя он и важен, всё же не является финальным шагом анализа данных СМВ. В этой задаче важную роль играют разложение измеренных анизотропии температуры и поляризации по сферическим гармоникам и

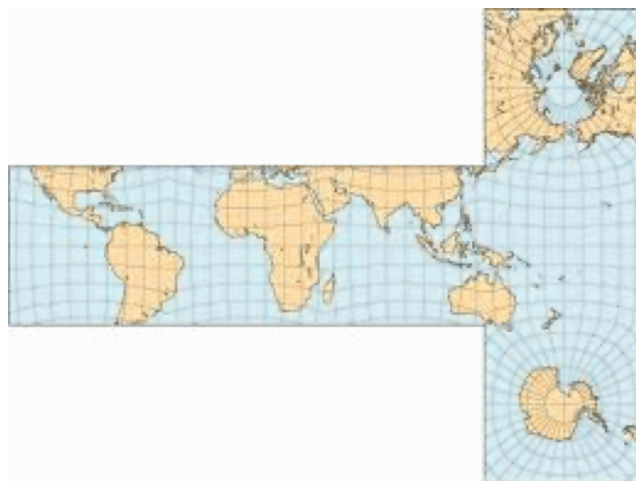


Рис. 4. Квадрилатерализованная проекция карты Земли.

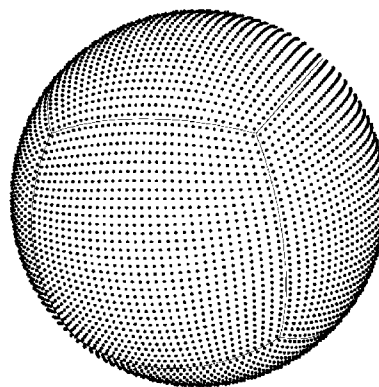


Рис. 5. Пикселизация на основе куба. (Из работы [43].)

анализ их спектра мощности. Однако некоторые схемы пикселизации могут очень точно описывать карту, но в то же время быть неудобными для гармонического разложения. Это показывает, что выбор лучшей схемы пикселизации карт неба зависит от целей проводимого исследования. Мы вернёмся к обсуждению этого вопроса в разделе 4.

В данной статье мы рассмотрим несколько предложенных схем пикселизации карт неба и свяжем их с гармоническим разложением сигнала СМВ. Мы начнём с описания в разделе 2 процедуры создания карты из временных рядов. В разделе 3 кратко опишем несколько различных схем пикселизации. В разделе 4 более детально рассмотрим схему GLESP, в которой реализуются наиболее эффективное гармоническое разложение карт анизотропии температуры и поляризации и описание пространственно-частотных свойств СМВ. Заключение приведено в разделе 5. Некоторые технические детали представлены в приложениях А и Б.

## 2. Введение в проблему построения карты

Процедура пикселизации неба тесно связана с задачей построения карты (map-making), решение которой позволяет получить двумерную карту распределения излучения на сфере. Для представления ситуации рассмотрим простейший алгоритм map-making при наблюдениях с однорупорным приёмом [44].

<sup>6</sup> <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>

Предположим, что сигнал  $\mathbf{d}$  в TOD и сигнал  $\mathbf{m}$  в пикселе связаны линейной зависимостью

$$\mathbf{d} = P\mathbf{m} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор данных, описывающий шум,  $P$  — известная матрица, связывающая сигналы  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{m}$ . Будем называть такую прямоугольную матрицу  $P$ , имеющую размерность  $N_d \times N_p$ , матрицей наведения (pointing matrix), где  $N_d$  — число наблюдений,  $N_p$  — число пикселей на небе (обычно размер пикселя  $\sim \text{FWHM}/3$ , где FWHM (Full Width Half Maximum) — полуширина диаграммы направленности антенны на половине максимума). Применяя подобный матричный оператор  $P$  к карте неба, можно "раскрутить" эту карту на TOD в соответствии с принятой стратегией сканирования неба. И наоборот, применяя  $P^T$  к временным рядам, можно просуммировать их в карту. Значением сигнала в пикселе этой карты будет сумма сигналов во всех наблюдениях, в которых TOD пересекали данный пиксел в различное время в заданной стратегии наблюдений.

Структура матрицы  $P$  зависит от того, каким предполагается массив  $\mathbf{m}$ . Если  $\mathbf{m}$  содержит пикселизованное, но несмазанное изображение неба, то тогда  $P$  должна учитывать размытие диаграммой. Несмотря на то что это предположение является самым общим, оно позволяет, в частности, правильно учесть несимметричные диаграммы направленности (ДН) антенны, такие, например, как квазигауссовы диаграммы в миссии WMAP (рис. 6), или возможные эффекты деградации антенны за время наблюдения [45]. В этом случае применение матрицы  $P$  к вектору  $\mathbf{m}$  означает и свёртку карты неба с откликом антенны, и "раскручивание"  $\mathbf{m}$  в поток временных данных. Если, с другой стороны, ДН будет по крайней мере приблизительно симметричной, то такая процедура станет возможной и тогда удобнее рассматривать  $P$  как ДН, сглаживающую пикселизованное небо. Для однорупорного эксперимента структура  $P$  становится очень простой. Только один элемент в строке

будет отличным от нуля — тот, который привязывает наблюдения в  $j$ -м пикселе к  $i$ -му элементу TOD. Для восстановления  $\mathbf{m}$  в уравнении (1) предложено несколько методов (см., например, обзор [46]). Так как задача нахождения решения линейна по  $\mathbf{m}$ , можно применить метод наименьших квадратов, в котором минимизируется величина

$$\chi^2 = \mathbf{n}^T V \mathbf{n} = (\mathbf{d}^T - \mathbf{m}^T P^T) V (\mathbf{d} - P\mathbf{m}) \quad (2)$$

для несингулярной симметрической матрицы  $V$ . Для того чтобы построить малозумящий алгоритм оценки  $\chi^2$  (так называемый эстиматор), необходимо найти такую матрицу  $V$ , которая минимизирует вариацию  $\tilde{\mathbf{m}}$ . Этого можно достичь, когда в качестве  $V$  выбирается обратная ковариантная матрица шума, т.е.  $V^{-1} = N \equiv \langle \mathbf{nn}^T \rangle$ . В результате можно построить эстиматор  $\tilde{\mathbf{m}}$  для карты:

$$\tilde{\mathbf{m}} = (P^T V P)^{-1} P^T V \mathbf{d}, \quad (3)$$

а решение для получения карты в процедуре map-making имеет вид

$$\tilde{\mathbf{m}} = \Sigma^{-1} P^T N^{-1} \mathbf{d}, \quad (4)$$

где

$$\Sigma = P^T N^{-1} P.$$

Процедура построения карты проводится для выбранной пикселизации неба, свойства которой обеспечивают также точность интегрирования при выполнении гармонического разложения сигнала (см. уравнение (7) в разделе 4.1). Проблема интегрирования на сфере обсуждалась ещё в 1970-е годы (см., например, [47–50]). Эта задача стала актуальной в астрофизике с появлением полных обзоров неба и необходимостью разложения по сферическим гармоникам протяжённого сигнала. В настоящее время алгоритм пикселизации карт неба, а именно метод разбиения неба на участки, в которых по определённым правилам интегрируются наблюдательные данные, является одним из важных моментов в теории обработки данных по реликтовому излучению [51].

### 3. Сетки пикселизации

В этом разделе мы рассмотрим некоторые предложенные и/или реализованные схемы пикселизации карты неба для исследования протяжённого излучения.

#### 3.1. Пикселизация на основе икосаэдра

Рассматривая возможные схемы пикселизации, Макс Тегмарк [43] впервые задался вопросом о том, что следует понимать под *хорошей* схемой пикселизации карт неба. Тегмарк акцентировал внимание на двух критериях, которые можно применить при выборе правила расположения  $N$  точек (или центров пикселей) на сфере:

1) необходимо минимизировать наибольшее расстояние  $d$  до ближайшего пикселя (например, от угловых точек до центров пикселей в квадратной сетке);

2) сетка должна обеспечивать возможность точного интегрирования в узлах.

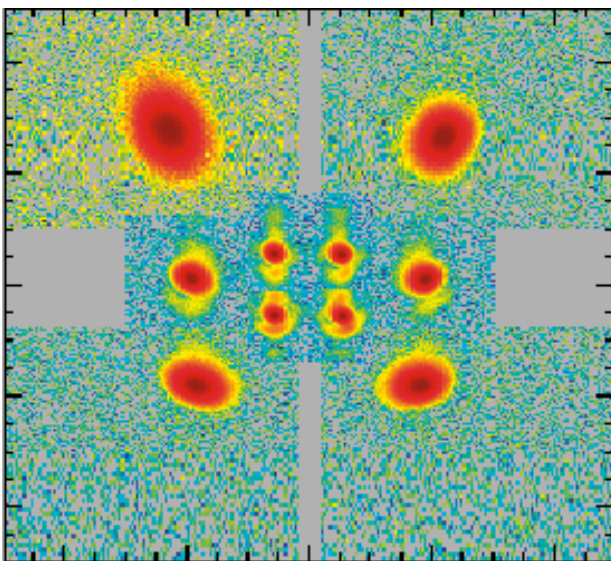


Рис. 6. Пример квазигауссовых диаграмм направленности. Показаны ДН в миссии WMAP для каналов K (0,88°), Ka (0,66°), Q (0,51°), V (0,35°), W (0,22°). (Рисунок взят с сайта <http://lambda.gsfc.nasa.gov>)



Критерий минимума  $d$  приводит к выбору более предпочтительной формы пикселей, чем квадрат. Так, для ячеистой сетки, в которой пиксел является шестиугольным, можно без труда вычислить величину  $d_{\text{icosa}} \approx [8\pi/(3\sqrt{3}N)]^{1/2}$ , которая оказывается приблизительно на 12 % меньше, чем в случае квадратной сетки. Чтобы использовать это преимущество, необходимо заменить куб на сфере платоновым телом с треугольными гранями, например тетраэдром, октаэдром или икосаэдром. Таким образом, выбор  $d$  не только задаёт разрешение и расположение пикселей, но и определяет их форму. Отметим, что одной из основных задач при построении сетки является получение равных по площади пикселей. Это условие становится важным при решении задач свёртки и интегрирования, так как равные веса позволяют использовать соответствующее одинаковое значение  $d\Omega$  в подинтегральном выражении.

В случае применения квадрилатерализованной проекции, как в COBE, когда пиксели располагаются на прямоугольной сетке на гранях куба (в тангенциальной плоскости), число "растягиваний" увеличивается к краям граней. Как тангенциальная, так и радиальная проекции немного деформируют пиксели таким образом, что при удалении от центра исходной грани большее число пикселей на сфере отличается от тех, которые были бы при равномерной сетке. В этом случае крайне желательно, чтобы грани были настолько малыми (и, следовательно, более плоскими), насколько этого удастся достичь. Платоново тело с наименьшими гранями и, следовательно, наибольшим числом таких граней — икосаэдр, содержащий 20 треугольников (рис. 7). Такое разбиение даёт преимущество более чем в три раза по числу граней по сравнению с таковым в случае куба, что в свою очередь приводит к улучшению качества вычислений благодаря близости площадей пикселей. Кроме того, треугольники покрывают небо более равномерно (с меньшим искажением площади) [43] (рис. 8).

Для построения сетки пикселизации на основе икосаэдра выбирается схема, подобная используемой в эксперименте COBE:

- 1) в сферу вписывается икосаэдр, грани которого в свою очередь разбиваются правильной треугольной сеткой;
- 2) точки (центры пикселей) наносятся на сферу в радиальной проекции;
- 3) точки немного смещаются, так чтобы все пиксели имели приблизительно одинаковую площадь.

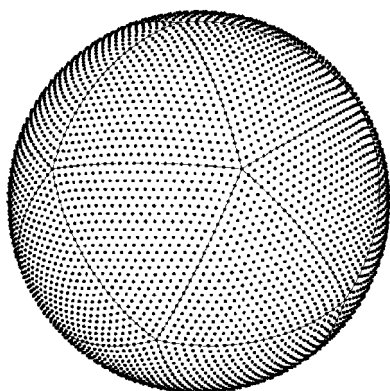


Рис. 7. Схема пикселизации на основе икосаэдра. (Из работы [43].)

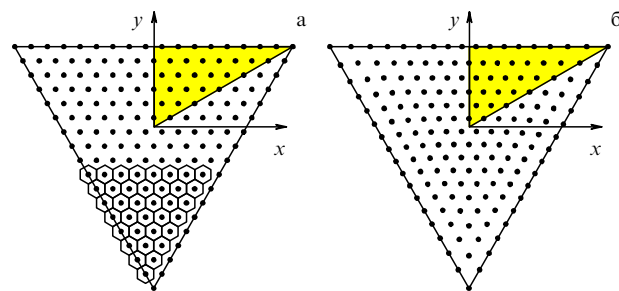


Рис. 8. Регулярная треугольная сетка (а) модифицируется таким образом, чтобы получить пиксели одинаковой площади. Пиксели имеют форму шестиугольника. Грань треугольного икосаэдра может быть симметрично разложена на шесть одинаковых правильных треугольников (один из них выделен тёмным цветом), а площадь выровнена для симметрии (б). При детальном рассмотрении рисунка видно, как искажается положение центров пикселей (сдвиг к центру большого треугольника на рис. б по сравнению с таковым на рис. а (ср. также положение пикселей вдоль оси  $x$ )), чтобы получить пиксели равной площади при проекции на сферу. (Воспроизведён рисунок из работы [43].)

Пикселизация на основе икосаэдра имеет преимущество перед квадрилатерализованной сеткой, так как обладает большим числом вращательных симметрий. Соответствующие матрицы вращения заранее могут быть внесены в программное обеспечение и в дальнейшем быстро вызываться при необходимости в процессе анализа данных.

### 3.2. Пикселизация Иглу

Критенден и Турок [52] предложили другой, названный ими Иглу (ввиду схожести с жилищем эскимосов), тип пикселизации, в результате которой сфера разбивается на кольца (или ряды пикселей) с краями, лежащими на постоянной широте, а каждый ряд разбивается на одинаковые пиксели линиями постоянной долготы (рис. 9). Такие пиксели имеют приблизительно трапециевидную форму, становясь почти прямоугольными вдали от полюсов. Северная и Южная полусферы разбиваются на пиксели одинаково. Среди преимуществ Иглу можно отметить следующие: 1) разбиение очень простое; 2) разбиение, являясь азимутальным, позволяет легко получить пиксели с одинаковой площадью, причём большинство из них будут практически квадратными; 3) самое большое преимущество — края пикселей задаются постоянными линиями в сферической полярной системе

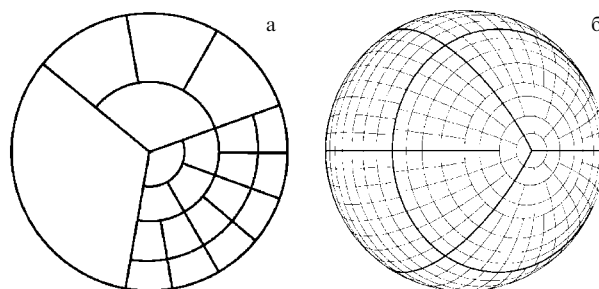


Рис. 9. Пикселизация Иглу. (а) Полярная шапка в случае разбиения типа Иглу, которое является иерархическим и даёт малое искажения пиксела. (б) Пикселизация типа 3:6:3, в которой каждый из 12 базовых пикселей разбит на 64 пиксела с равной площадью. (Воспроизведён рисунок из работы [52].)

координат  $\theta$  и  $\phi$ . Это позволяет проводить точные и быстрые интегральные вычисления сферических гармоник, используя значения пикселей, а также легко проводить моделирование и надёжно восстанавливать угловой спектр мощности из реальных данных.

Для оценки качества предлагаемой схемы Иглу авторы [52] рассматривают три следующих критерия.

I. *Отсутствие искажения пикселей.* Введение сетки пикселизации подавляет пространственные гармоники, более короткие, чем задаваемое пикселями разрешение. Чтобы минимизировать этот эффект, надо максимальное расстояние внутри пикселя (диагональ или диаметр) сделать как можно более малым. Идеальный, но недостижимый предел — пиксели в форме круга. Тогда максимальный диаметр будет  $D = 4/\sqrt{N_{\text{tot}}}$ , где  $N_{\text{tot}}$  — полное число пикселей на сфере. Для квадратных пикселей аналогичный размер  $D = \sqrt{8\pi/N_{\text{tot}}}$ , что на  $\sim 25\%$  больше, чем в случае кругов. Авторы работы [52] вводят понятие уровня искажения пикселя как отношение максимального диаметра к диаметру в идеальном (круговом) случае.

II. *Одинаковая площадь пикселей.* Выполнение этого критерия желательно, чтобы получить лучшее разрешение для фиксированного числа пикселей и, таким образом, в первом приближении иметь одинаковый статистический вес.

III. *Возможность построения иерархии.* Иерархическая схема пикселизации позволяет легко переходить к другому разрешению, что иногда необходимо при анализе данных. В пикселизации Иглу иерархию можно воспроизвести, точно вложив области с высоким разрешением в области с низким разрешением. В идеальном случае можно установить минимальный набор пикселей, имеющих минимальные искажения и приблизительно равные площади на каждом уровне.

Авторы [52] вводят четыре различные сетки в рамках подхода Иглу:

- простейшее разбиение — по широте  $\theta$  и долготе  $\phi$ , — которое можно построить в пикселизации Иглу, — это цилиндрическая сетка с равноудалёнными узлами (Equidistant Cylindrical Projection — ECP). При реализации схемы ECP пиксели около полюсов будут очень узкими;
- схема двенадцати пикселей (3:6:3) с разделением на пиксели с равной площадью. Разбиение по широте проводится по координате  $\theta = \pm 30^\circ$ ;
- схема двенадцати пикселей (3:6:3) с разделением на пиксели с равным шагом по широте;
- разбиение на 12116 базовых пикселей с одинаковой площадью.

При разбиении на пиксели с равной или почти равной площадью приходится уменьшать число элементов в кольце при приближении к полюсу (см. рис. 9). Можно построить пикселизацию Иглу с равными шагами по широте, подобную ECP, или с пикселями равномерной площади. Преимущество разбиения с равным шагом по широте состоит в том, что пикселизация может быть проведена простейшим бинированием ECP-пикселизации, позволяющей строить сетку с заданным числом пикселей. Кроме того, не запрещая площади пикселей меняться, их можно сделать менее искажёнными. Пикселизация с равными площадями не даст сетки с точно расставленными по широте узлами, но она обладает другим преимуществом, состоящим в том, что все пиксели будут иметь одинаковый статистический вес.

Пикселизация Иглу также может быть иерархической. Чтобы сделать её такой, необходимо сначала построить на сфере сетку из относительно небольшого числа базовых пикселей. Сетка должна быть оптимизирована так, чтобы искажение пикселей было минимальным. Потом каждый из больших (базовых) пикселей делится на четыре с помощью сечений по долготе и широте. Разбиение по широте выбирается так, чтобы сохранить у пикселей равные площади или оставить постоянным шаг по широте между рядами. Таким образом получаются более мелкие пиксели с общим увеличением их числа в четыре раза. Процедура повторяется до достижения требуемого разрешения. Уменьшение числа пикселей приводит к увеличению уровня пиксельного искажения, так что приходится выбирать компромиссное решение. Несмотря на явные преимущества применения нескольких базовых пикселей, сложным является вычисление их весов, по сравнению со случаем равномерной сетки.

Иерархическое разбиение приводит к тому, что некоторые из субпикселей становятся более искажёнными, чем пиксели на уровне более низкого разрешения. Это происходит около полюсов. При удалении от полюсов искажения уменьшаются. Если полярную шапку просто делить по  $\theta$ - и  $\phi$ -сечениям, то пиксели будут становиться всё более искажёнными, как и в случае пикселизации ECP.

Для стандартной пикселизации Иглу авторы [52] выбрали сетку с исходным разбиением полярных шапок на три треугольные (клиновидные) грани. При разбиении с более высоким разрешением клин делится на четыре части: один центральный клин и три окружающие области (см. рис. 9). Процесс разбиения является итерационным.

### 3.3. Иерархическая пикселизация HEALPix

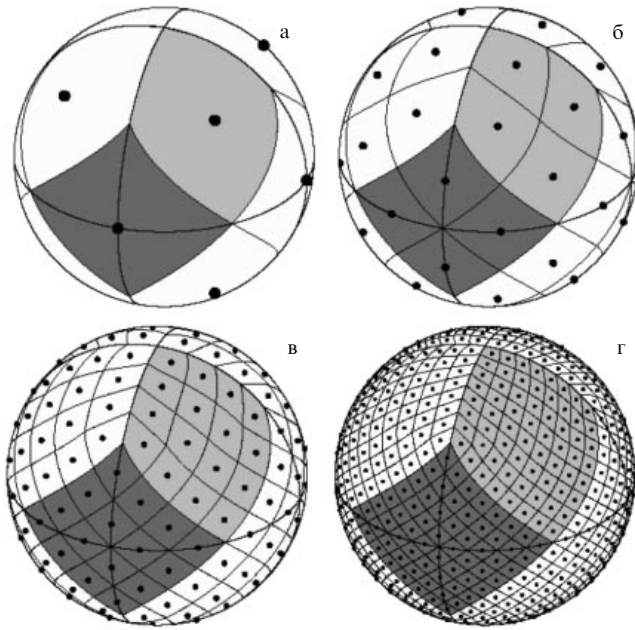
Фактически первой схемой пикселизации, сопровождаемой развитым программным обеспечением, стала иерархическая сетка пикселизации с равными площадями и положениями пикселей одного ряда на одной широте — HEALPix (Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelisation)<sup>7</sup> [53, 54].

Авторы [53] определили основные требования к математической структуре дискретной сетки на полном небе и объединили их в трёх пунктах.

1. *Иерархическая структура базы данных.* Требование иерархичности является необходимым для очень больших баз данных, и оно также постулировалось для квадрилатерализованного сферического куба. Простой аргумент, говорящий в пользу такого требования, заключается в том, что все элементы данных из прилежащего многомерного пространства (здесь — это поверхность сферы) являются также соседними в древовидной структуре базы данных. Это свойство облегчает применение различных топологических методов при анализе и позволяет легко конструировать вейвлет-преобразования на треугольных и квадратных сетках с быстрым выбором соседних пикселей.

2. *Равные площади дискретных элементов разбиения.* Это требование является очень полезным, так как белый шум на выборочной частоте инструмента при интегри-

<sup>7</sup> <http://healpix.jpl.nasa.gov>



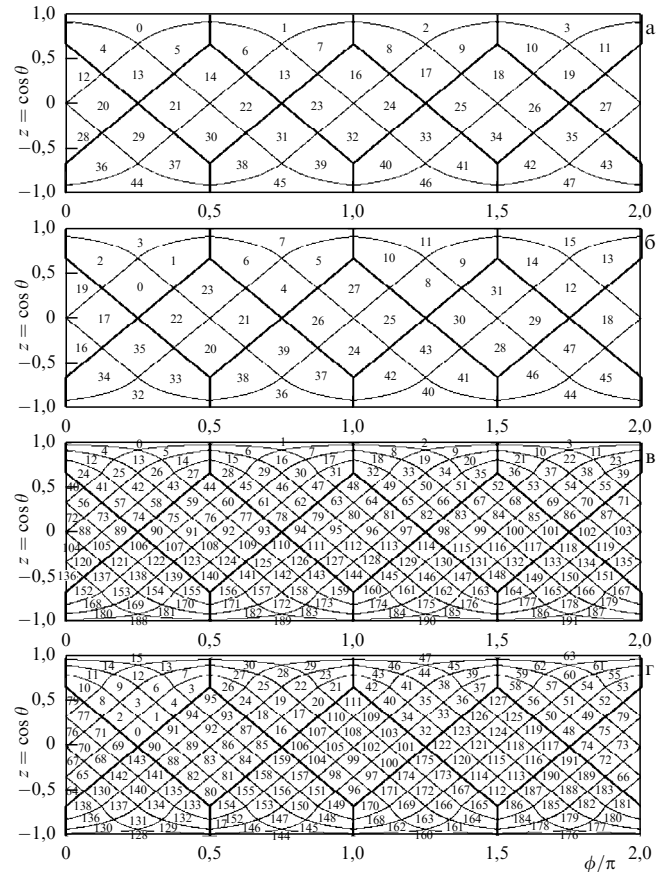
**Рис. 10.** Ортографический вид разбиения HEALPix на сфере. Наложенные экваторы и меридианы иллюстрируют восьмигранную симметрию HEALPix. Самое низкое разрешение соответствует 12 базовым пикселям. Сфера иерархически мозаично разбита на криволинейные четырёхугольники. Светло-серым цветом отмечен один из восьми (по четыре на юге и севере) идентичных полярных базовых пикселей. Тёмно-серым цветом показан один из четырёх одинаковых экваториальных базовых пикселей. Разрешение мозаики возрастает при делении каждого пикселя на четыре новых. Увеличение разрешения за три шага от базового уровня (от положения на рис. а последовательно к положениям на рис. б, в и г). Разрешение характеризуется параметром  $N_{\text{side}}$  (равным 1 (а), 2 (б), 4 (в), 8 (г)), который определяет полное число пикселей  $N_{\text{pix}} = 12N_{\text{side}}^2$ , т.е. сфера разбивается на 12 (а), 48 (б), 192 (в) и 768 (г) пикселей. Площади всех пикселей с выбранным разрешением одинаковы. Пиксели расположены на линиях постоянной широты, что важно для гармонического анализа с вычислением сферических гармоник. (Из работы [54].)

ровании точно приводит к белому шуму в пиксельном пространстве, а регистрируемый сигнал записывается вне зависимости от размера пикселя. Здесь, конечно, серьёзное внимание нужно также уделить выбору пикселей достаточно малого по сравнению с исходным инструментальным разрешением размера, для того чтобы избежать чрезмерного сглаживания сигнала и зависимости от формы пикселя.

3. *Распределение пикселей одного ряда на сфере вдоль одной широты.* Это свойство существенно для получения высокой скорости вычислений во всех операциях расчётов сферических гармоник. Так как присоединённые полиномы Лежандра рассчитываются посредством медленных рекурсий, отклонение узлов сетки от одной широты приведёт в результате к большим затратам времени при возрастании числа обрабатываемых точек.

На основе указанных требований к сетке для анализа карт микроволнового фона на сфере было предложено разбиение, схема которого представлена на рис. 10.

Базовое разрешение в HEALPix задаётся 12 пикселями (или гранями) на трёх кольцах вокруг полюсов и экватора. Следующий уровень иерархии формируется из предыдущего разбиением каждого пикселя предыдущего уровня на четыре равных пикселя. Таким образом, разрешение определяется параметром  $N_{\text{side}}$  (см. рис. 10), ко-



**Рис. 11.** Две системы индексации пикселей на сфере на сетке HEALPix для параметров разрешения  $N_{\text{side}} = 2$  (а, б) и  $N_{\text{side}} = 4$  (в, г). Показана нумерация вдоль колец одинаковой широты (isolatitude) (а, в) и в случае гнездовых деревьев (nested tree) (б, г).

торый задаёт число разбиений базового пикселя. Этот параметр применяется для выбора требуемого разрешения карты, обусловленного, например, диаграммой направленности антенны. Все кольца одинаковой широты находятся между верхними и нижними углами экваториальных граней (т.е.  $-2/3 < \cos \theta_* < 2/3$ ) или в экваториальной зоне. После разделения на одинаковое число пикселей получаем  $N_{\text{eq}} = 4N_{\text{side}}$ . Оставшиеся кольца располагаются внутри областей полярных шапок ( $|\cos \theta_*| > 2/3$ ) и содержат переменное число пикселей, возрастающее от кольца к кольцу с увеличением расстояния от полюса на один пиксель в каждом квадрате. Таким образом, карта с пикселизацией HEALPix имеет  $N_{\text{pix}} = 12N_{\text{side}}^2$  пикселей с одной и той же площадью  $\Omega_{\text{pix}} = \pi/(3N_{\text{side}}^2)$ .

Авторы [54] применяют две системы индексации, используемые при обработке и хранении карт в виде FITS-файлов (от англ. Flexible Image Transport System — гибкая система передачи изображений): с широтным (isolatitude), или кольцевым (ring), индексом и гнездовым (nested) индексом (рис. 11). В первом случае нумерация пикселей происходит последовательно вдоль их рядов по широте при обходе сферы от севера к югу. Во втором случае выделяются ячейки пикселей, внутри которых проводится их индексация по определённому алгоритму [54]. Гнездовая индексация позволяет использовать схему HEALPix для индексации внутри баз данных, как это ранее описывалось для HTM-сетки. Специальные про-

цедуры пакета HEALPix позволяют менять одну индексацию анализируемой карты на другую.

Программное обеспечение для пикселизации HEALPix, включающее в себя программы и библиотеки, содержит процедуры гармонического разложения на сфере для карт анизотропии температуры и поляризации. Среди наиболее широко используемых отмечаются следующие процедуры: *synfast* — для построения (и моделирования) карт; *anafast* — для разложения по мультиполям, вычисления углового спектра мощности (имеется возможность наложения маски); *map2gif* — для графического представления карт на сфере.

#### 4. Пикселизация неба по методу Гаусса – Лежандра. Схема GLESP

Всё, что обсуждалось ранее в связи с пикселизацией, в основном было посвящено выбору оптимальной формы пикселей или заполнения сферы, а вопрос о точности вычисления интегралов гармонического анализа ставился после выбора схемы пикселизации. Напомним, однако, что пикселизация данных CMB на сфере является лишь частью основной проблемы, состоящей в определении коэффициентов  $a_{\ell m}$  разложения сигнала CMB на сферические гармоники.

##### 4.1. Схема пикселизации

Коэффициенты  $a_{\ell m}$  вычисляются с помощью стандартного разложения карты анизотропии температуры  $\Delta T(\theta, \phi)$  по сферическим гармоникам:

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (5)$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(x) \exp(im\phi), \quad x = \cos \theta, \quad (6)$$

где  $P_{\ell}^m(x)$  — присоединённые полиномы Лежандра (см., например, [55], а также приложение А),  $\ell$  — номер сферической гармоники (мультиполя),  $m$  — номер моды мультиполя. Для непрерывной функции  $\Delta T(x, \phi)$  коэффициенты разложения  $a_{\ell m}$  вычисляются следующим образом:

$$a_{\ell m} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} d\phi \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi), \quad (7)$$

где  $Y_{\ell m}^*$  — величина, комплексно-сопряжённая  $Y_{\ell m}$ . Несколько более сложная схема используется при анализе поляризации CMB.

В 2003 г. была предложена схема пикселизации GLESP (Gauss – Legendre Sky Pixelization), ориентированная прежде всего на гармонический анализ [56–59]. В этом случае первостепенное значение приобретает именно точность вычисления интеграла в уравнении (7), связанного с координатой  $\theta$ . Используя этот момент как отправной пункт построения сетки, можно изменить подход к проблеме обработки данных на сфере, который, в частности, определяет и схему пикселизации. Для точного вычисления интеграла в (7) удобно использовать метод гауссовых квадратур, предложенный Гауссом ещё в 1814 г. и развитый Кристоффелем в 1877 г. Основная идея метода состоит в том, чтобы при интегрировании по  $x$  в формуле (7) использовать весовые функции  $w(x)$  [60]

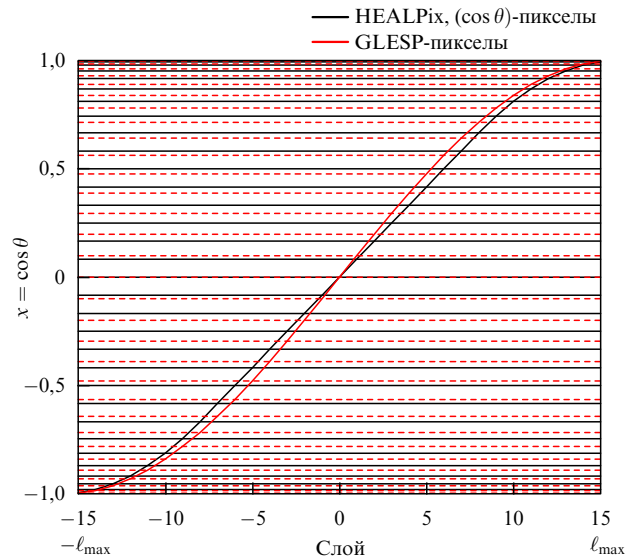


Рис. 12. Два типа пикселизации неба: узлы по оси  $\cos \theta$  HEALPix (сплошная линия) и GLESP (штриховая линия).

для достижения точного равенства

$$\int_{-1}^1 dx \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi) = \sum_{j=1}^N w_j \Delta T(x_j, \phi) Y_{\ell m}^*(x_j, \phi), \quad (8)$$

где  $N$  — максимальный ранг полинома Лежандра. Здесь и весовая функция  $w_j = w(x_j)$ , и функция  $\Delta T(x_j, \phi) Y_{\ell m}^*(x_j, \phi)$  должны браться в корнях сетки

$$P_N(x_j) = 0. \quad (9)$$

Известно, что уравнение  $P_N(x_j) = 0$  имеет точно  $N$  нулей в интервале  $-1 \leq x \leq 1$ . Для метода Гаусса – Лежандра (уравнение (8)) весовые коэффициенты даются формулой [60]

$$w_j = \frac{2}{1 - x_j^2} [P_N'(x_j)]^{-2} \quad (10)$$

и они могут быть заранее вычислены совместно с набором  $x_j$ , например, с помощью процедуры *gauleg* [60]. Применение подобного метода вычисления интеграла (7), основанного на квадратуре Гаусса (7), позволяет без итераций проводить расчёты, связанные с преобразованием сигнала, с точностью, ограниченной лишь машинным представлением чисел с плавающей запятой. Такое решение задачи гармонического разложения карт анизотропии температуры и поляризации является наиболее эффективным с точки зрения минимизации вычислительных ошибок по сравнению с другими подходами.

Сетку пикселизации, в которой центры пикселей совпадают с узлами в квадратуре Гаусса – Лежандра, а пиксели имеют квазиравные площади, мы называем пикселизацией неба по методу Гаусса – Лежандра, или GLESP<sup>8</sup> [56]. Для сравнения сеток HEALPix и GLESP на рис. 12 показаны положения центров колец на сфере  $x = \cos \theta$ , используемых при интегрировании в обеих схемах пикселизации. Заметим, что вычисление интеграла (уравнение (7)) может быть проведено различными

<sup>8</sup> <http://www.glesp.nbi.dk>



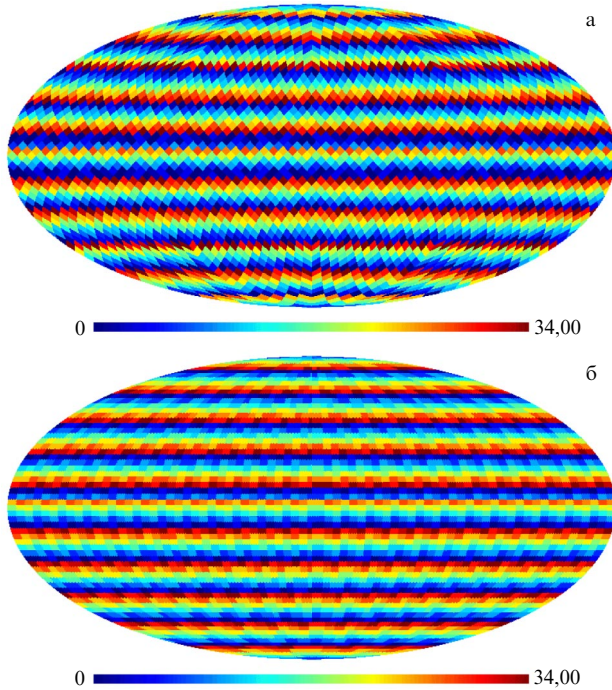


Рис. 13. Два типа пикселизации на сфере: пиксели в проекции Молвейде HEALPix (а) и GLESP (б).

способами, однако построение схемы пикселизации проводится по фиксированным узлам, в которых проводится усреднение временных рядов.

В действительности все данные СМВ имеют некоторый предел разрешения и, следовательно, верхний предел суммирования по  $\ell$  в уравнении (8) ограничен:  $\ell \leq \ell_{\max}$ , где  $\ell_{\max}$  — максимальный мультиполь, принятый при обработке данных на сфере. Это означает, что при построении сетки нулей в точках  $x_j$  и весов  $w_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) можно использовать  $N = N_{\max}$ , где значение  $N_{\max}$  связано с  $\ell_{\max}$ .

Трапецеидальные пиксели в GLESP ограничены линиями по координатам  $\theta$  и  $\phi$ , а их центры (по направлению  $\theta$ ) расположены в точках с  $x_j = \cos \theta_j$ . Таким образом, интервал  $-1 \leq x \leq 1$  покрывается кольцами пикселей (число колец  $N$ ). Угловое разрешение, достигаемое при измерении данных СМВ, определяет верхний предел суммирования в уравнении (5),  $\ell \leq \ell_{\max}$ . Чтобы избежать ограничений Найквиста, мы используем число колец пикселей  $N \geq 2\ell_{\max}$ . Для того чтобы сделать пиксели в экваториальном кольце (вдоль координаты  $\phi$ ) приблизительно квадратными, число пикселей  $N_{\phi}^{\max}$  в этом направлении выбирается как  $N_{\phi}^{\max} \approx 2N$ . Число пикселей по другим кольцам,  $N_{\phi}^j$ , должно определяться из условия задания размеров пикселей равными размерам экваториальных с как можно более высокой точностью.

На рисунке 12 сравниваются особенности пикселизационных схем, используемых в HEALPix и GLESP. На рисунке 13 сравниваются форма пикселей и их распределение на сфере в эллиптической проекции для HEALPix и GLESP. На рисунке 14 показаны весовые коэффициенты  $w_j$  и положение центров пикселей для  $N = 31$ .

Согласно предыдущим рассуждениям, мы определяем новую схему пикселизации GLESP следующими пунктами:

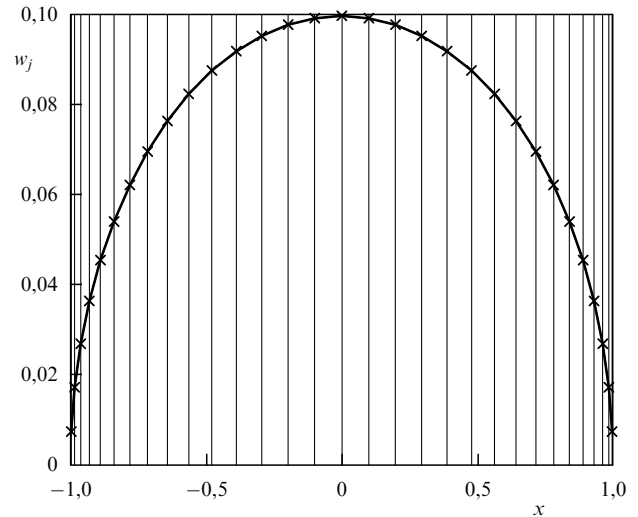


Рис. 14. Взвешивающие коэффициенты Гаусса–Лежандра  $w_j$  в зависимости от нулей полиномов Лежандра ( $x_j = \cos \theta_j$ ), являющихся центрами колец, используемых в GLESP (для  $N = 31$ ). Положения нулей отмечены вертикальными прямыми.

- в полярном направлении  $x = \cos \theta$  мы задаём набор  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  как сетку корней уравнения (9);
- каждый корень  $x_j$  определяет положение кольца с  $N_{\phi}^j$  центрами пикселей с  $\phi$ -координатами  $\phi_j$ ;
- все пиксели имеют почти равные площади;
- каждый пиксел имеет вес  $w_j$  (см. (10)).

Наши вычисления, реализованные для схемы GLESP, проведены при следующих условиях.

— Границы всех пикселей проходят вдоль координатных линий  $\theta$  и  $\phi$ . Таким образом, с большой точностью пиксели являются трапецеидальными.

— Число пикселей вдоль азимутального направления  $\phi$  зависит от номера кольца. Число их в кольце программа позволяет выбирать произвольно. Число пикселей зависит от  $\ell_{\max}$ , принятого для обработки данных протяжённого излучения.

— Для того чтобы удовлетворить теореме Найквиста, вдоль оси  $x = \cos \theta$  число колец должно удовлетворять условию  $N \geq 2\ell_{\max} + 1$ .

— Чтобы экваториальные пиксели были приблизительно квадратными, число пикселей вдоль азимутальной оси  $\phi$  берётся как  $N_{\phi}^{\max} = \lfloor (2\pi/d\theta_k + 0,5) \rfloor$ , где  $\lfloor \dots \rfloor$  обозначает целую часть числа,  $k = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ ,  $d\theta_k = 0,5(\theta_{k+1} - \theta_{k-1})$ .

— Номинальный размер каждого пикселя определяется как  $S_{\text{pixel}} = d\theta_k d\phi$ , где  $d\theta_k$  и  $d\phi = 2\pi/N_{\phi}^{\max}$  — размеры пикселя в экваториальном кольце.

— Число пикселей  $N_{\phi}^j$  в  $j$ -м кольце при  $x = x_j$  вычисляется как  $N_{\phi}^j = \lfloor (2\pi(1 - x_j^2)^{1/2}/S_{\text{pixel}} + 0,5) \rfloor$ .

— Полярные пиксели являются треугольными.

— Поскольку число  $N_{\phi}^j$  отличается от  $2^k$ , где  $k$  — целое, для вычисления быстрого преобразования Фурье вдоль азимутального направления мы применяем код FFTW (Fast Fourier Transform in the West) [61]. Этот код позволяет применять не только подход, в котором используется основание 2 и число точек равно  $2^n$ , но и подходы с другими значениями оснований. Код обеспечивает самую большую скорость вычислений среди доступных в настоящее время процедур.

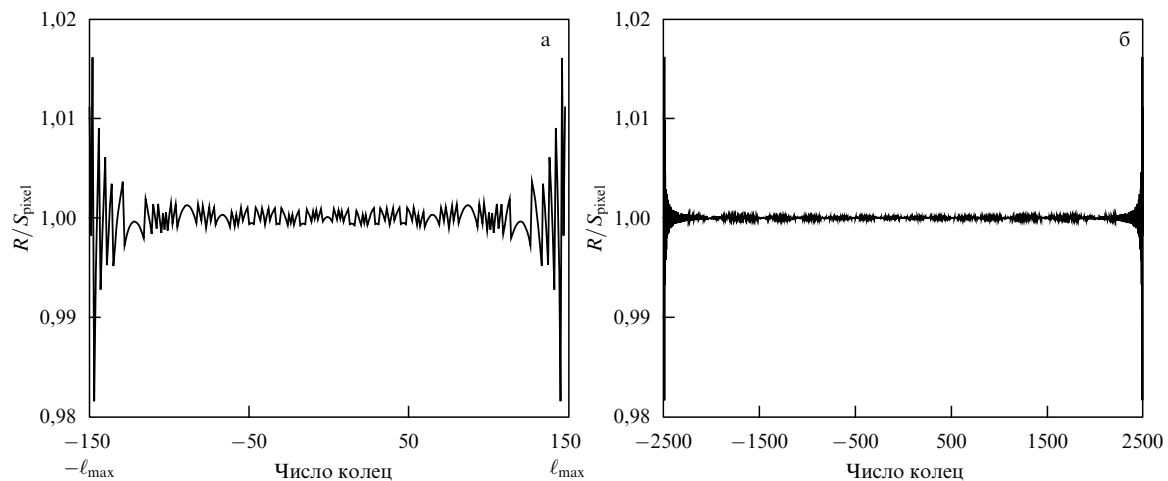


Рис. 15. Отношение  $R$  размера пиксела к его площади  $S_{\text{pixel}}$  на экваторе в зависимости от номера кольца в GLESP для числа колец  $N = 300$  (а) и  $N = 5000$  (б).

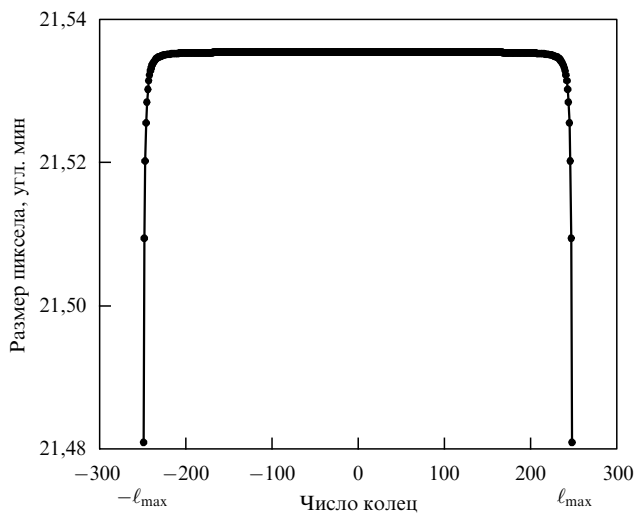


Рис. 16. Размер пиксела вдоль полярного угла ( $\ell_{\text{max}} = 250$ ).

В предложенной схеме размеры пикселей одинаковы в пределах каждого кольца и максимальное различие между пикселями различных колец составляет  $\approx 1,5\%$  вблизи полюсов (рис. 15). Большая часть пикселей вдали от полюсов имеет приблизительно одинаковый размер по полярному углу (рис. 16). Увеличение разрешения уменьшает абсолютную ошибку разности площадей, поскольку неэквивалентность полярных и экваториальных пикселей пропорциональна  $N^{-2}$ .

GLESP не является иерархической структурой, но проблемы выборки пикселей, ближайших к заданному положению, элементарно решаются на уровне программного обеспечения. Кроме того, можно и в рамках GLESP осуществить иерархическое разбиение, подобное применяемому в пикселизации Иглу [52], разделив каждый пиксел на четыре части, используя меридианы и параллели. Хотя это и нарушит расположение узлов сетки GLESP по полярному углу на следующем иерархическом уровне, но зато предоставит возможность для организации хранения и поиска объектов во вложенных структурах, подобных HTM. При необходимости гармонического анализа на верхнем уровне, где сетка GLESP

работает, значения во вложенных пикселях можно проинтегрировать, но с потерей разрешения. Вообще, если фиксировать некоторый стандартный набор заданных разрешений карты, то можно так же, как и в некоторых других системах пикселизации, провести индексирование пикселей и использовать GLESP для поиска источников на небе в базах данных. Выбор углового разрешения при введении пикселизации GLESP для списков источников позволяет применить гармонические методы для поиска структур и их корреляций на сфере [62–65].

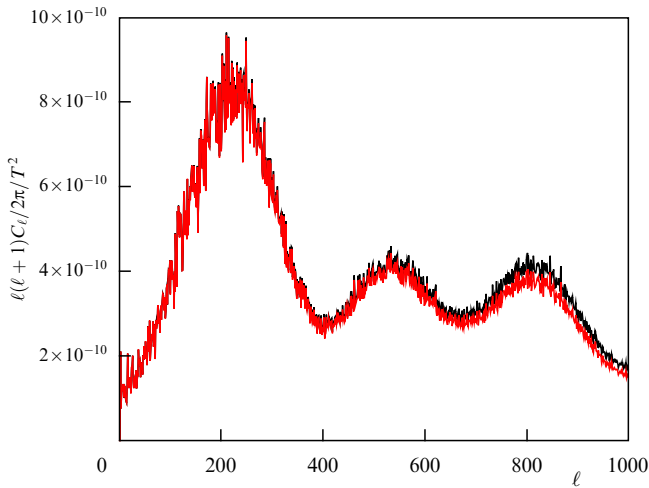
Отметим, что, несмотря на схожесть GLESP и схемы пикселизации Иглу по азимутальному подходу, между ними имеется большая разница, связанная с выбором шагов расположения пикселей по полярному углу  $\theta$ . Поэтому мы не можем объединить эти две схемы пикселизации. Схема Иглу, применённая к дискретам широты GLESP, даст слишком разные размеры пикселей. Пиксели не будут ни равно расположенными по высоте, ни однородными по площади, как того требует Иглу.

#### 4.2. Проблема репикселизации

Идея о неиерархической структуре пикселизации была реализована в пакете программ GLESP [58] (см. также приложение Б), ориентированном только на точность вычисления коэффициентов гармонического разложения. Точность вычислений в процедурах пакета ограничивается лишь точностью машинного представления данных. Тем не менее, конечно, существуют также естественные пределы точности, ограничивающие качество получаемых карт:

- уровень шума системы;
- уровень знаний о локальных, галактических и внегалактических компонентах, от которых очищается искомым фоновый сигнал (см., например, [9]);
- нестабильность методов разделения компонент измеренного сигнала и выделения сигнала СМВ;
- привнесённые систематические ошибки.

Один из типов привнесённых ошибок связан с проблемой репикселизации. Чтобы преобразовать карту с распределённым сигналом с одной сеткой пикселей в карту с другой сеткой (например, при переходе от HEALPix к GLESP или повороте сферы для исследования одной из проекций), не прибегая вновь к сложной



**Рис. 17.** Угловые спектры мощности, рассчитанные для исходной карты HEALPix (тёмная кривая) с  $\ell_{\max} = 1000$ ,  $N_{\text{side}} = 1024$ , размером пиксела  $= 11,8026''$  и числом пикселей  $N_{\text{tot}} = 12\,582\,912$  и для результирующей репикселизованной карты GLESP (светлая кривая) с ближайшим возможным размером пиксела  $= 11,8038''$ ,  $N_{\text{tot}} = 12\,581\,579$ . Отклонения спектров мощности при больших  $\ell$  показывают отношение функций окон для HEALPix и GLESP.

процедуре map-making (см. раздел 2), мы должны использовать один из двух методов:

1) рассчитать соответствующие коэффициенты  $a_{\ell m}$ , после чего восстановить новую карту;

2) использовать процедуры репикселизации для измеренного распределения яркости.

Любая процедура репикселизации приведёт к потере информации и внесёт новые ошибки и невязки. Тем не менее в ряде случаев использование этой процедуры оправдано. Потерю точности в результате этой операции можно продемонстрировать с помощью воспроизведения углового спектра мощности  $C(\ell)$ :

$$C(\ell) = \frac{1}{2\ell+1} \left( |a_{\ell 0}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \right). \quad (11)$$

Результат восстановления спектра при репикселизации карт показан на рис. 17. Спектры очень близки между собой лишь при  $\ell$ , меньших  $\ell_{\max}/4$ .

Пакет GLESP предоставляет возможность репикселизации карт с использованием двух различных методов в пиксельной области  $\Delta T(\theta, \phi)$ : первый заключается в усреднении входящих величин в соответствующем пикселе, второй связан со сплайновой интерполяцией внутри сетки пикселей. В первом методе мы рассматриваем входящие пиксели, которые попадают в наш новый пиксел с величинами  $\Delta T(\theta_i, \phi_i)$ , с дальнейшим усреднением с помощью весовой функции. Реализованная весовая функция — простое усреднение с равными весами. Этот метод является широко распространённым при присвоении заданных значений пикселу с соответствующим номером.

Во втором методе репикселизации мы используем интерполяцию сплайнами. Если имеется карта  $\Delta T(\theta_i, \phi_i)$ , записанная в узлах, отличных от узлов сетки Гаусса–Лежандра, то мы можем пересчитать её на нашу новую сетку  $\Delta T(\theta'_i, \phi'_i)$ , используя приблизительно равное число пикселей и стандартную интерполяционную схему, основанную на кубических сплайнах. При таком подходе

вычисления являются достаточно быстрыми, так как сплайн рассчитывается один раз для одного вектора табулированных данных (например, в одном кольце), а для нахождения величины интерполируемой функции для любого входного аргумента требуется единственный вызов отдельной процедуры.

Отметим, что в пакете GLESP имеется возможность избежать проблем с репикселизацией при преобразовании карт из HEALPix в GLESP и обратно, а также при повороте карт. В первом случае используются промежуточные вычисления коэффициентов  $a_{\ell m}$  с дальнейшим преобразованием в карту, а во втором случае поворот карты можно осуществить внутри GLESP посредством реализованной процедуры поворота с применением рекурсивных методов на уровне сферических гармоник [66, 67].

## 5. Заключение

Мы рассмотрели несколько схем пикселизации на сфере, предложенных для анализа протяжённого излучения. Две из них, иерархическая HEALPix и неиерархическая GLESP, распространяются с сопровождающим программным обеспечением. В настоящее время использование того или другого типа пикселизации является делом вкуса и предпочтения в выборе предоставляемых пользовательских функций пакета программ. Скорость вычисления на современных ноутбуках для обоих пакетов почти одна и та же (например, разложение карты по мультиполям или её восстановление из сферических гармоник занимают несколько секунд при числе мультиполей вплоть до  $\ell_{\max} = 2000$ ). Последние версии HEALPix (текущая — N2.15) при четырёх вычислительных итерациях дают приблизительно такую же точность, как и GLESP. Оба подхода могут быть использованы для анализа поляризации излучения. GLESP продолжает развиваться, при этом используются основные преимущества её сетки пикселизации:

- обеспечение высокоточного вычисления коэффициентов  $a_{\ell m}$ ;
- возможность выбора оптимального разрешения для заданной диаграммы направленности, т.е. оптимальных размера и числа пикселей.

Важнейшими из особенностей пикселизации GLESP стали её гибкость в заполнении колец на сфере и возможность проекции распределения сигнала на цилиндр и обратно с дальнейшим применением гармонического анализа. В частности, в пакет GLESP включён программный компонент для фазового и статистического анализа множественных событий в столкновениях релятивистских тяжёлых ионов на Большом адронном коллайдере, а также для идентификации и исследования явлений, подобных струям и несимметричным истечениям или их комбинации [68].

В завершение отметим, что если коэффициенты  $a_{\ell m}$  разложения по сферическим гармоникам известны, то их можно применить для построения карты в любой пикселизации для заданных центров пикселей: GLESP, HEALPix, Иглу, Икосаэдр и др.

**Благодарности.** Авторы благодарны своим коллегам П.Р. Кристенсену, П.Д. Насельскому, И.Д. Новикову и В.И. Турчанинову за ценные дискуссии при построении схемы пикселизации GLESP. Авторы выражают призна-

тельность рецензенту, сделавшему ценные замечания, позволившие улучшить текст. При анализе данных и некоторых результатов применялся пакет HEALPix [54]. Для анализа протяжённого излучения на сфере использовался пакет GLESP [56, 59]. Работа поддержана грантами 11-02-00244 и 13-02-00027 РФФИ. О.В.В. также признателен некоммерческому фонду Дмитрия Зимина "Династия".

## 6. Приложения

### А. Нормированные присоединённые полиномы Лежандра

В пакете GLESP при гармоническом преобразовании используются нормированные присоединённые полиномы Лежандра  $f_\ell^m$ :

$$f_\ell^m(x) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(x), \quad (12)$$

где  $x = \cos \theta$ ,  $\theta$  — полярный угол. Такие полиномы  $f_\ell^m(x)$  могут быть рассчитаны с помощью стандартных рекуррентных соотношений. Первое из них позволяет получить  $f_\ell^m(x)$  для заданной моды  $m$  и всех моментов  $\ell > m$ :

$$f_\ell^m(x) = x \sqrt{\frac{4\ell^2-1}{\ell^2-m^2}} f_{\ell-1}^m - \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-3} \frac{(\ell-1)^2-m^2}{\ell^2-m^2}} f_{\ell-2}^m. \quad (13)$$

Вычисления начинаются с соотношения

$$f_m^m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2m+1)!!}{(2m-1)!!}} (1-x^2)^{m/2},$$

$$f_{m+1}^m = x \sqrt{2m+3} f_m^m.$$

Второе рекуррентное соотношение определяет  $f_\ell^m(x)$  для данного  $\ell$  и всех  $m \leq \ell$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell-m-1)(\ell+m+2)} f_\ell^{m+2}(x) + \frac{2x(m+1)}{\sqrt{1-x^2}} f_\ell^{m+1}(x) + \\ & + \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} f_\ell^m(x) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Это соотношение начинает работать с  $f_\ell^\ell(x)$  и  $f_\ell^0(x)$ , которые вычисляются с помощью (13).

Как обсуждается в [69], первое рекуррентное соотношение (13) формально является неустойчивым при числе итераций, стремящемся к бесконечности. Теоретических рекомендаций о максимальном числе итераций в квази-стабильной области нет. Тем не менее это соотношение может использоваться, поскольку нас интересует так называемое *доминантное* решение [69], которое приблизительно устойчиво. Второе рекуррентное соотношение (14) является стабильным для всех  $\ell$  и  $m$ .

### Б. Описание программного пакета GLESP

Пакет GLESP, основанный на одноимённой пикселизации, является свободно распространяемым, работающим в Unix-окружении, программным обеспечением, собираемым с помощью компилятора GNU C. Для

работы GLESP требуется библиотека быстрого преобразования Фурье FFTW [61]. В GLESP имеются четыре типа процедур для работы с картами на сфере и гармониками (соответствующие утилиты GLESP указаны в скобках):

#### • Операции с картами.

1. Разложение по сферическим гармоникам с коэффициентами  $a_{\ell m}$  карты распределённого сигнала (*cl2map*).
2. Моделирование карты по спектру мощности  $C(\ell)$  (*cl2map*).
3. Разложение по сферическим гармоникам карт анизотропии температуры и (Q,U)-поляризации с вычислением коэффициентов  $a_{\ell m}$  и  $e, b_{\ell m}$  (*polalm*).
4. Сглаживание карты гауссовой диаграммой (*cl2map*).
5. Сложение/вычитание/усреднение карт (*difmap*).
6. Скалярные операции, умножение/деление карт (*difmap*).
7. Вращение карты (*difmap*).
8. Перепикселизация с преобразованием координат (галактические/эклиптические/экваториальные) (*difmap*).
9. Обрезание по пределам сигнала (*mapcut*).
10. Выделение зон на карте и из карты (*mapcut*).
11. Построение сечений карты (*mapcut*).
12. Подготовка шаблонов карт по стандартным образцам и по введённым аналитическим формулам (*mappat*).
13. Преобразование ASCII-таблиц в карту (*mappat*).
14. Нанесение точечных и эллиптических источников на карту (*mappat*).
15. Распечатка значений пикселей карты в ASCII-таблицу (*mapcut*).
16. Вычисление простейшей статистики на карте: среднее, дисперсия, экстремумы (*difmap*).
17. Расчёт корреляционных коэффициентов и мозаичных корреляций двух карт (*difmap*).
18. Наложение масок и экранирование пикселей на карте (*difmap, mapcut, f2fig*).
19. Подбор требуемого разрешения для карты и подсчёт числа пикселей (*ntot*).
20. Графическое построение карты, нанесение сеток координат и векторная графика (*f2fig*).

#### • Операции с коэффициентами $a_{\ell m}$ .

1. Синтез карты по данным  $a_{\ell m}$  (*cl2map*).
  2. Синтез карт анизотропии температуры и (Q,U)-поляризации по данным коэффициентам  $a_{\ell m}$  и  $e, b_{\ell m}$  (*polmap*).
  3. Вычисление сумм и разностей двух наборов  $a_{\ell m}$  (*difalm*).
  4. Скалярное произведение/деление  $a_{\ell m}$  (*difalm*).
  5. Векторное произведение/деление  $a_{\ell m}$  (*difalm*).
  6. Добавление заданной фазы ко всем гармоникам (*difalm*).
  7. Вращение карты в гармонической области (*difalm*).
  8. Выделение из гармоник заданных мод (*difalm*).
  9. Вычисление углового спектра мощности  $C_\ell$  (*alm2dl*).
  10. Вычисление фаз гармоник (*alm2dl*).
  11. Выделение гармоник по заданным фазам (*alm2dl*).
  12. Вычисление производных карт по гармоникам (*dalm*).
- Операции с угловым спектром мощности  $C_\ell$ .
1. Вычисление углового спектра мощности  $C_\ell$  (*alm2dl*).

2. Моделирование карты по заданному спектру  $C_\ell$  (*cl2map*).

3. Моделирование коэффициентов  $a_{\ell m}$  по заданному спектру  $C_\ell$  (*createalm*).

4. Сложение/вычитание/усреднение спектров мощностей (*difcl*).

• Операции с фазами  $\varphi_{\ell m}$ , определяемыми из комплексного представления коэффициентов  $a_{\ell m} = |a_{\ell m}| \exp(i\varphi_{\ell m})$ , и амплитудами  $|a_{\ell m}|$  сферических гармоник.

1. Вычисление фаз  $\varphi_{\ell m}$  (*alm2dl*).

2. Вычисление амплитуд  $|a_{\ell m}|$  (*alm2dl*).

3. Моделирование  $a_{\ell m}$  по заданным фазам (*createalm*).

4. Выбор гармоник с заданными фазами (*alm2dl*).

5. Добавление фазы ко всем гармоникам (*difalm*).

6. Построение двумерных цветовых диаграмм фаз и амплитуд (*f2fig*).

Запись карт пикселизации GLESP, представляемая в формате FITS Binary Table [70], содержит самодокументированный описывающий данные ASCII-заголовок и три двоичные таблицы с положениями нулей полиномов Лежандра по оси  $\cos \theta$ , количество пикселей в кольцах на сфере и значение сигнала в пикселях при прохождении последовательно по кольцам от севера к югу в соответствии с положением узлов  $\cos \theta$ .

## Список литературы

- Bennett C L et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 1 (2003); astro-ph/0302207
- Jarosik N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 14 (2011); arXiv:1001.4744
- Tauber J A et al. *Astron. Astrophys.* **520** A1 (2010)
- Hinshaw G et al. *Astrophys. J. Suppl.* **170** 288 (2007); astro-ph/0603451
- Tegmark M, de Oliveira-Costa A, Hamilton A J S *Phys. Rev. D* **68** 123523 (2003)
- Leach S M et al. *Astron. Astrophys.* **491** 597 (2008); arXiv:0805.0269
- Stolyarov V et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **336** 97 (2002)
- Kim J, Naselsky P, Christensen P R *Phys. Rev. D* **79** 023003 (2009)
- Doroshkevich A, Verkhodanov O *Phys. Rev. D* **83** 043002 (2011); arXiv:1008.4094
- Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 119 (2003); astro-ph/0302223
- Chiang L-Y, Naselsky P D, Verkhodanov O V, Way M J *Astrophys. J.* **590** L65 (2003); astro-ph/0303643
- Naselsky P D, Doroshkevich A G, Verkhodanov O V *Astrophys. J.* **599** L53 (2003); astro-ph/0310542
- Coles P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **350** 989 (2004)
- Vielva P et al. *Astrophys. J.* **609** 22 (2004); astro-ph/0310273
- Park C-G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349** 313 (2004)
- Eriksen H K et al. *Astrophys. J.* **612** 64 (2004); astro-ph/0401276
- Eriksen H K et al. *Astrophys. J.* **605** 14 (2004)
- Hansen F K et al. *Astrophys. J.* **607** L67 (2004)
- Larson D L, Wandelt B D *Astrophys. J.* **613** L85 (2004)
- Schwarz D J et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 221301 (2004)
- Верходанов О В *УФН* **182** 1177 (2012) [Verkhodanov O V *Phys. Usp.* **55** 1098 (2012)]
- Larson D et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 16 (2011); arXiv:1001.4635
- Kim J, Naselsky P *Astrophys. J.* **714** L265 (2010)
- Spergel D N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (2007); astro-ph/0603449
- Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **180** 330 (2009); arXiv:0803.0547
- Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 18 (2011); arXiv:1001.4538
- Paciesas W S et al. *Astrophys. J. Suppl.* **122** 465 (1999); astro-ph/9903205
- Voges W et al. *Astron. Astrophys.* **349** 389 (1999); astro-ph/9909315
- Abazajian K et al. (SDSS Collab.) *Astron. J.* **126** 2081 (2003)
- Beichman C A et al. *Infrared Astronomical Satellite (IRAS) Catalogs and Atlases* Vol. 1 *Explanatory Supplement* (Washington, DC: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1988)
- Cutri R M et al. "Explanatory supplement to the 2MASS Second Incremental Data Release" (2002), <http://www.ipac.caltech.edu/2mass/releases/second/doc/explsup.html>
- Condon J J et al. *Astron. J.* **115** 1693 (1998)
- Guzmán A E et al. *Astron. Astrophys.* **525** A138 (2011)
- Abbasi R et al. (IceCube Collab.) *Phys. Rev. D* **82** 072003 (2010)
- Böser S (for the IceCube Collab.), in *Proc. of the XLVIIth Rencontres de Moriond "Electroweak Interactions and Unified Theories"*, 4–10 March 2012; arXiv: 1205.6405
- Lyon R F "A brief history of 'pixel'" *Proc SPIE* **6069** 606901 (2006); in *Digital Photography II — Invited Paper. IS&T/SPIE Symp. on Electronic Imaging*, 15–19 January 2006, San Jose, Calif., USA; <http://www.foveon.com/files/ABriefHistoryofPixel2.pdf>
- Szalay A et al., cs/0111015
- Kunszt P Z, Szalay A S, Thakar A R, in *Mining the Sky. Proc. of the MPA/ESO/MPE Workshop, Garching, Germany, July 31 – August 4, 2000* (ESO Astrophysics Symp., Eds A J Banday, S Zaroubi, M L Bartelmann) (Heidelberg: Springer, 2001) p. 631
- Smoot G F et al. *Astrophys. J. Lett.* **396** L1 (1992)
- Chan F K, O'Neil E M, Computer Sciences Corp. EPRF Technical Report (1976)
- O'Neill E M, Laubscher R E, Computer Sciences Corp. EPRF Technical Report (1976)
- Greisen E W, Calabretta M *Bull. Am. Astron. Soc.* **25** 808 (1993); American Astronomical Society, 182nd AAS Meeting (1993) 09.01
- Tegmark M *Astrophys. J.* **470** L81 (1996)
- Natoli P et al. *Astron. Astrophys.* **372** 346 (2001); astro-ph/0101252
- Насельский П Д, Верходанов О В, Кристенсен П Р, Чанг Л-И *Астрофиз. бюл.* **62** 301 (2007) [Naselsky P D, Verkhodanov O V, Christensen P R, Chiang L-Y *Astrophys. Bull.* **62** 285 (2007)]; astro-ph/0211093
- Tegmark M *Astrophys. J.* **480** L87 (1997); astro-ph/9611130
- Stroud A H *Approximate Calculation of Multiple Integrals* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971)
- Соболев С Л *Введение в теорию кубатурных формул* (М.: Наука, 1974) [Sobolev S L *Cubature Formulas and Modern Analysis: an Introduction* (Philadelphia, Pa.: Gordon and Breach, 1992)]
- Мысовских И П, in *Quantitative Approximation. Proc. of a Symp. on Quantitative Approximation, Bonn, West Germany, August 20–24, 1979* (Eds R A DeVore, K Scherer) (New York: Academic Press, 1980) p. 217
- Коняев С И *Матем. заметки* **25** 629 (1979) [Konyaev S I *Math. Notes Acad. Sci. USSR* **25** 326 (1979)]
- Verkhodanov O V, Doroshkevich A G, in *Advances in Machine Learning and Data Mining for Astronomy* (Eds M J Way et al.) (Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2012) Ch. 8, p. 133
- Crittenden R G, Turok N G "Exactly azimuthal pixelizations of the sky", Report DAMTP-1998-78 (1998); astro-ph/9806374
- Górski K M, Hivon E, Wandelt B D, in *Evolution of Large-Scale Structure: From Recombination to Garching, August 2–7 1998. MPA/ESO Cosmology Conf.* (Eds A J Banday, R S Sheth, L Da Costa) (Garching, 1999) p. 37
- Górski K M et al. *Astrophys. J.* **622** 759 (2005)
- Gradshteyn I S, Ryzhik I M *Tables of Integrals, Series, and Products* 6th ed. (San Diego: Academic Press, 2000)
- Doroshkevich A G et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **14** 275 (2005); astro-ph/0305537



57. Doroshkevich A G et al., astro-ph/0501494
58. Верходанов О В и др. *Бюлл. Спец. астрофиз. обсерв.* **58** 40 (2005) [Verkhodanov O V et al. *Bull. Spec. Astrophys. Obs.* **58** 40 (2005)]
59. Doroshkevich A G et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **20** 1053 (2011); arXiv: 0904.2517
60. Press W H et al. *Numerical Recipes in FORTRAN* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992); <http://www.nr.com>
61. Frigo M, Johnson S G, Technical Report MIT-LCS-TR-728 (1997)
62. Верходанов О В, Хабибуллина М Л, Майорова Е К *Астрофиз. бюлл.* **64** 272 (2009) [Verkhodanov O V, Khabibullina M L, Majorova E K *Astrophys. Bull.* **64** 263 (2009)]; arXiv:0912.3073
63. Верходанов О В и др. *Астрофиз. бюлл.* **65** 252 (2010) [Verkhodanov O V et al. *Astrophys. Bull.* **65** 238 (2010)]; arXiv: 1009.3720
64. Верходанов О В, Хабибуллина М Л *Астрофиз. бюлл.* **64** 413 (2010) [Verkhodanov O V, Khabibullina M L *Astrophys. Bull.* **65** 390 (2010)]; arXiv:1108.4128
65. Верходанов О В, Найден Я В *Астрофиз. бюлл.* **67** 1 (2012) [Verkhodanov O V, Naiden Ya V *Astrophys. Bull.* **67** 1 (2012)]
66. Varshalovich D A, Moskalev A N, Khersonskii V K *Quantum Theory of Angular Momentum* (Singapore: World Scientific, 1988)
67. Risbo T J. *Geodesy* **70** 383 (1996)
68. Naselsky P et al. *Phys. Rev. C* **86** 024916 (2012); arXiv:1204.0387
69. Press W H et al. *Numerical Recipes in FORTRAN* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) Sect. 5.5
70. Hanisch R J et al. *Astron. Astrophys.* **376** 359 (2001)

### Sky pixelization for the analysis of extended emission

**O.V. Verkhodanov**

*Special Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences,  
369167 Nizhnii Arkhyz, Karachaevo-Cherkesia, Russian Federation*

*E-mail: vo@sao.ru*

**A.G. Doroshkevich**

*Astro Space Center of P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,  
Profsoyuznaya ul. 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation*

*E-mail: dorr@asc.rssi.ru*

Spherical pixelization schemes are reviewed for analyzing extended emission, and in particular for investigating the cosmic microwave background. Problems with implementing different schemes are considered. The nonhierarchical Gauss–Legendre sky pixelization (GLESP) approach is discussed in detail.

PACS numbers: **95.75.−z**, **95.85.Bh**, **98.80.−k**, **98.80.Es**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201308c.0849

Bibliography — 70 references

*Received 14 June 2012, revised 18 July 2012*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (8) 849–862 (2013)

*Physics–Uspekhi* **56** (8) (2013)