*Июнь 2013 г.* **Том 183, № 6**

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

# Фаза Берри для нейтрона

В.К. Игнатович

*Фаза Берри для нейтрона находится из точного аналитического решения уравнения Шрёдингера в постоянном магнитном поле $B_0$ и перпендикулярном ему вращающемся с частотой $\omega$ радиочастотном поле $b$, при произвольных значениях $B_0$, $b$ и $\omega$. Показывается, что фаза Берри является линейным приближением точной фазы по параметру $\omega/B_0$, когда этот параметр мал.*

PACS numbers: **03.65.–w**, 03.65.Vf, 14.20.Dh, **76.50.+g** DOI: 10.3367/UFNr.0183.201306e.0631

## Содержание



## 1. Введение

Представим себе нейтрон в бесконечном пространстве, заполненном постоянным магнитным полем $\mathbf{B}_0$. Спинорная волновая функция нейтрона удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}_0\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle\,. \tag{1}$$

Здесь для удобства обычное гиромагнитное отношение для нейтрона $\gamma_\mathrm{n} = |\mu_\mathrm{n}|/\hbar$ $(\mu_\mathrm{n} < 0)$ включено в определение поля. Уравнение имеет решение

$$\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}_0 t\right)\big|\Psi(0)\big\rangle\,. \tag{2}$$

Если $|\Psi(0)\rangle = |\mathbf{B}_0\rangle$, т.е. начальное состояние соответствует поляризации нейтрона вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$, то выражение (2) приводится к виду

$$\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}B_0 t\right)\big|\Psi(0)\big\rangle\,. \tag{3}$$

Отсюда следует, что начальная поляризация сохраняется и волновая функция со временем приобретает только фазу $\varphi_\mathrm{d}(t) = B_0 t$, называемую динамической.

Пусть теперь кроме постоянного поля $\mathbf{B}_0$, которое будем считать направленным по оси $z$, имеется переменное поле

$$\mathbf{b}(t) = b\big(\cos(2\omega t), \sin(2\omega t), 0\big)\,, \tag{4}$$

где множитель 2 выделен для удобства, чтобы в дальнейшем не иметь дела с дробными величинами. Суммарное поле $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(t)$ можно представить, как показано на рисунке, вектором длиной $B = (B_0^2 + b^2)^{1/2}$, конец которого описывает окружность с периодом $T = 2\pi/2\omega$. При этом сам вектор $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(t)$ за период $T$ описывает конус. Будем считать, что $\omega \ll B_0$, т.е. угловая скорость вращения вектора $\mathbf{B}$ значительно меньше частоты $B$ прецессии спина вокруг самого поля $\mathbf{B}$. При этом условии спин будет адиабатически следовать за изменяющимся во времени полем $\mathbf{B}(t)$, но возникает вопрос: после того как вектор $\mathbf{B}(T)$ через период времени $t = T$ вернётся к первоначальному положению $\mathbf{B}(0)$, будет ли фаза спинорной волновой функции равна динамической фазе $\varphi_\mathrm{d}(T) = BT$, как и в случае неподвижного вектора $\mathbf{B}$, или нет? Ответ на этот вопрос гласит, что фаза волновой функции через период времени $T$ составит $\varphi(T) = \varphi_\mathrm{d}(T) + \phi_\mathrm{B}$, т.е. будет отличаться от динамической фазы на величину так называемой фазы Берри [1]

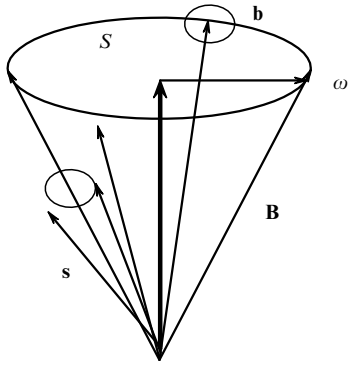


**Рисунок.** Спин нейтрона **s** прецессирует вокруг вектора магнитного поля **B**, который медленно, с малой частотой $\omega$, вращается вокруг оси $z$. После возвращения через период $T$ магнитного поля к своему первоначальному направлению фаза прецессии спина оказывается отличной от фазы прецессии $\varphi_\mathrm{d} = Bt$ вокруг неподвижного вектора поля **B**. Имеется дополнительная фаза, называемая фазой Берри, величину, которая равна $\phi_\mathrm{B} = \Omega/2$, где $\Omega$ — телесный угол, под которым видна площадь, описываемая концом вектора **B**.

$$\phi_\mathrm{B} = \frac{1}{2}\,\Omega\,, \tag{5}$$

равной половине телесного угла, под которым из начала вектора **B** видна площадь окружности $S = \pi b^2$, описываемой концом вектора **B**. Множитель $1/2$ — характерный признак частиц со спином $1/2$. При малых $b$ выражение (5) приводится к часто используемому виду

$$\phi_\mathrm{B} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi b^2}{B^2}\,. \tag{6}$$

**В.К. Игнатович.** Объединённый институт ядерных исследований, ул. Ж. Кюри 6, 141980 Дубна, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: v.ignatovi@gmail.com

*Статья поступила 26 мая 2012 г., после доработки 17 мая 2013 г.*

В разделе 2 будет показано, что уравнение Шрёдингера

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(t)\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle \tag{7}$$

в поле $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(t)$ легко решается аналитически при любых значениях $b$, $B_0$ и $\omega$. Из этого решения находятся точное выражение для фазы $\varphi(T)$, которое в адиабатическом случае, т.е. при любом малом значении параметра $\eta = \omega/B_0$ разлагается по степеням $\eta$, и линейное приближение по этому параметру как раз и даёт точное выражение для фазы Берри (5), в котором при произвольных значениях поля $b$ телесный угол $\Omega$ имеет вид

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{B_0}{B}\right) \equiv 4\pi\sin^2\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi b^2}{B^2\cos^2(\theta/2)}\,, \tag{8}$$

где $\theta$ — угол между осью и образующей конуса, описываемого вектором $\mathbf{B}(t)$, $\cos\theta = B_0/B$. Метод решения, который восходит к работе Раби [2], в представленном здесь виде использовался во многих работах, например в [3].

## 2. Решение уравнения Шрёдингера

Для решения уравнения Шрёдингера (7) воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}(t) &= b\big(\sigma_x\cos(2\omega t) + \sigma_y\sin(2\omega t)\big) = \\ &= b\exp(-\mathrm{i}\omega\sigma_z t)\sigma_x\exp(\mathrm{i}\omega\sigma_z t)\,,\end{aligned} \tag{9}$$

и подставим в (7) решение в виде

$$\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle = \exp(-\mathrm{i}\omega\sigma_z t)\,\big|\chi(t)\big\rangle\,. \tag{10}$$

В результате получим уравнение

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\big|\chi(t)\big\rangle}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{B}}\,\big|\chi(t)\big\rangle\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (b, 0, B_0 - \omega)$ — вектор, не зависящий от времени $t$. Решение уравнения (11) записывается так же, как и решение (2) уравнения (1):

$$\big|\chi(t)\big\rangle = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{B}}t)\big|\chi(0)\big\rangle\,, \tag{12}$$

а с учётом (10) решение уравнения (7) имеет вид

$$\big|\boldsymbol{\Psi}(t)\big\rangle = \exp(-\mathrm{i}\omega\sigma_z t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{B}}t)\big|\chi(0)\big\rangle\,. \tag{13}$$

Полученное решение позволяет найти направление спина нейтрона в любой момент времени, если известно его направление при $t = 0$. Начальное направление спина, т.е. спинор $|\chi(0)\rangle$, может быть выбрано произвольно. Для удобства возьмём $|\chi(0)\rangle = |\boldsymbol{\mathcal{B}}\rangle$, т.е. выберем первоначальное состояние нормированным и поляризованным вдоль единичного вектора $\boldsymbol{\mathcal{B}}/|\boldsymbol{\mathcal{B}}|$, где $|\boldsymbol{\mathcal{B}}| = (b^2 + (B_0 - \omega)^2)^{1/2}$. Это состояние является собственным состоянием матрицы $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{B}}$ с собственным значением $|\boldsymbol{\mathcal{B}}|$. Амплитуда вероятности $A(t)$ сохранения поляризации с течением времени $t$ имеет вид

$$\begin{aligned}A(t) &= \langle\boldsymbol{\mathcal{B}}|\exp(-\mathrm{i}\omega\sigma_z t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{B}}t)|\boldsymbol{\mathcal{B}}\rangle = \\ &= \exp\big(-\mathrm{i}|\boldsymbol{\mathcal{B}}|t\big)\langle\boldsymbol{\mathcal{B}}|\exp(-\mathrm{i}\omega\sigma_z t)|\boldsymbol{\mathcal{B}}\rangle = \\ &= \exp\big(-\mathrm{i}|\boldsymbol{\mathcal{B}}|t\big)\big(\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)\langle\boldsymbol{\mathcal{B}}|\sigma_z|\boldsymbol{\mathcal{B}}\rangle\big)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

При $t = T$ имеем $\omega t = \pi$, $\sin(\omega T) = 0$, $\cos(\omega T) = -1 \equiv \exp(-\mathrm{i}\omega T)$. Поэтому выражение (14) сводится к виду

$$A(t) = \exp\big[-\mathrm{i}\big(|\boldsymbol{\mathcal{B}}| + \omega\big)T\big]\,, \tag{15}$$

т.е. при завершении цикла вращения спиновое состояние остаётся поляризованным вдоль вектора $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ и у волновой функции меняется только фаза. Эта фаза имеет точное значение:

$$\varphi(T) = \big(\omega + |\boldsymbol{\mathcal{B}}|\big)T\,. \tag{16}$$

Если из неё вычесть динамическую фазу $\phi_{\mathrm{d}}(T) = BT$, то получим дополнительную фазу

$$\phi_{\mathrm{B}} = \Delta\varphi(T) = \varphi(T) - \varphi_{\mathrm{d}}(T) = \big(\omega + |\boldsymbol{\mathcal{B}}| - B\big)T\,. \tag{17}$$

Заметим, что до сих пор в наших рассуждениях нигде не требовалось, чтобы $\omega$ было мало. Поэтому выражение (16) справедливо при любых соотношениях между параметрами $B_0$, $b$ и $\omega$. В случае $\omega \ll B_0$ добавку $\phi_{\mathrm{B}}$ можно представить в виде

$$\phi_{\mathrm{B}} = \left(\omega + \frac{|\boldsymbol{\mathcal{B}}|^2 - B^2}{|\boldsymbol{\mathcal{B}}| + B}\right)T \approx \left(1 - \frac{B_0}{B}\right)\omega T\,, \tag{18}$$

где были сохранены только линейные по $\omega$ члены. Учитывая, что $\omega T = \pi$, получим

$$\phi_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left[2\pi\left(1 - \frac{B_0}{B}\right)\right] \equiv \frac{\Omega}{2} \equiv \frac{\pi b^2}{B(B + B_0)} \equiv \frac{\pi b^2}{B^2(1 + \cos\theta)}\,. \tag{19}$$

При $b \ll B_0$ имеем $\theta \ll 1$ и выражение (19) сводится к виду (6).

## 3. Заключение

Представленный здесь простой вывод фазы Берри аналогичен опубликованному в [4], но значительно более прост. Он доступен даже студенческой аудитории и позволяет легко понять физический смысл этой фазы для спинорных частиц. Для более полного знакомства с фазой Берри в случае частиц с произвольным спином полезен обзор [5], а для тех, кому простой вывод кажется неубедительным, полезно ознакомиться с теоретическими обоснованиями фазы Берри с помощью вторичного квантования [6] или на основе исследования топологических свойств пространства [7].

## Список литературы


1. Berry M V *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 45 (1984)
2. Rabi I I *Phys. Rev.* **51** 652 (1937)
3. Игнатович В К *Физика ультрахолодных нейтронов* (М.: Наука, 1986) с. 194 [Ignatovich V K *The Physics of Ultracold Neutrons* (Oxford : Clarendon Press, 1990)]
4. Deguchi S, Fujikawa K *Phys. Rev. A* **72** 012111 (2005)
5. Виницкий С И и др. *УФН* **160** (6) 1 (1990) [Vinitskii S I et al. *Sov. Phys. Usp.* **33** 403 (1990)]
6. Wang Sh-J *Phys. Rev. A* **42** 5107 (1990)
7. Fujikawa K *Mod. Phys. Lett. A* **20** 335 (2005)


**The neutron Berry phase**

**V.K. Ignatovich.** *Joint Institute for Nuclear Research, ul. Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russian Federation*
*E-mail*: *v.ignatovi@gmail.com*

The neutron Berry phase is found from a precise analytical solution of the Shrödinger equation in a constant magnetic field $B_0$ and perpendicular to it radiofrequency field $b$ rotating with an angular frequency $\omega$. The solution is found for arbitrary values of $B_0$, $b$, and $\omega$. The Berry phase is shown to be a linear in parameter $\omega/B_0$ approximation to the precise value, when this parameter is small.

PACS numbers: **03.65.–w**, 03.65.Vf, 14.20.Dh, **76.50.+g**
Bibliography — 7 references
*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (6) 631 – 632 (2013)

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201306e.0631
*Received 26 May 2012, revised 17 May 2013*
*Physics – Uspekhi* **56** (6) (2013)