

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

**Конвективная неустойчивость Рэлея  
в присутствии фазовых переходов влаги.  
Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур**

Б.Я. Шмерлин, М.В. Калашник

*Конвективные движения во влажном насыщенном воздухе сопровождаются выделением скрытой теплоты конденсации. С учётом этого эффекта рассмотрена задача о конвективной неустойчивости слоя влажного насыщенного воздуха, обобщающая постановку классической задачи Рэлея. Представлено аналитическое решение задачи, демонстрирующее принципиальные отличия влажной конвекции от конвекции Рэлея. При потере устойчивости в двумерном случае развиваются либо уединённые конвективные валы, либо пространственно-периодические системы валов с узкими локализованными областями восходящих движений. В случае осевой симметрии возможен рост уединённых конвективных вихрей с циркуляцией, характерной для тропических циклонов (ураганов) на ранней стадии развития, и с масштабами от масштаба отдельного облака до масштаба урагана.*

PACS numbers: 44.25. + f, 47.20.Bp, 47.27.De, 47.55.P-, 92.60.Ox, 92.60.Qx

DOI: 10.3367/UFN.0183.201305d.0497

**Содержание**

1. Введение (497).
2. Условия возникновения конвекции в идеальной (невязкой, нетеплопроводной) атмосфере (498).
3. Постановка задачи о конвективной неустойчивости слоя влажного насыщенного воздуха (499).
4. Критические значения для "сухой" конвекции (500).
5. Функция Грина. Интегральное уравнение для амплитуды вертикальной скорости (500).
6. Конвективная неустойчивость относительно двумерных плоских возмущений. Периодические и локализованные структуры (501).
  - 6.1. Периодические решения.
  - 6.2. Локализованные решения.
  - 6.3. Области существования мод на плоскости  $\lambda_0, \lambda$ .
  - 6.4. Знакоопределённость и пространственная структура мод.
  - 6.5. Построение области влажноконвективной неустойчивости на плоскости определяющих параметров.

7. Локализованные осесимметричные структуры (конвективные вихри) (507).
  8. Численные оценки для локализованных мод (508).
  9. Некоторые экспериментальные данные и результаты численных расчётов (508).
  10. Выводы (510).
  11. Заключение (510).
- Список литературы (510).

**1. Введение**

Конвективные движения в жидкостях и газах, находящихся в поле силы тяжести, возникают при наличии пространственных неоднородностей плотности (температуры). Разнообразные формы конвективных движений наблюдаются в земной атмосфере, которую можно считать состоящей из сухого воздуха и водяного пара. Если водяной пар не насыщен, движение атмосферы с большой точностью описывается обычными уравнениями тепловой конвекции — уравнениями Буссинеска [1, 2]. Ситуация принципиально меняется, когда водяной пар находится в состоянии насыщения. Из-за уменьшения насыщающей плотности с увеличением высоты в поднимающихся объёмах влажного воздуха происходит конденсация водяного пара, сопровождающаяся выделением скрытой теплоты конденсации и выпадением осадков. Конденсационный нагрев, усиливающий архимедову силу плавучести, играет важную роль в процессах формирования конвективной облачности в атмосфере [3–5]. Ещё одним ярким примером возмущений, развивающихся из-за реализации скрытой теплоты, являются тропические циклоны или ураганы — крупномасштабные атмосферные вихри, формирующиеся над поверх-

**Б.Я. Шмерлин.** ФГБУ НПО "Тайфун", ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация  
Тел. (48439) 7-19-13. Факс (48439) 4-09-10  
E-mail: shmerlin@typhoon.obninsk.ru  
**М.В. Калашник.** ФГБУ НПО "Тайфун", ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация;  
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация;  
Обнинский институт атомной энергетики — филиал НИЯУ "МИФИ", Студгородок 1, 249040 Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация  
Тел. (48439) 5-23-17. Факс (48439) 4-09-10  
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Статья поступила 16 февраля 2012 г.,  
после доработки 30 марта 2012 г.

ностью океана в тропиках. Согласно оценкам [6], основным на подсчёте количества выпавших осадков, в центральной части урагана действует конденсационный источник тепла мощностью  $4 \times 10^8$  МВт, которая превосходит мощность всех электростанций США в  $10^3$  раз.

Детальное описание процессов фазовых переходов влаги представляет собой весьма сложную проблему микрофизики облаков. При изучении динамики влажной конвекции, как правило, используют упрощённый подход, основанный на включении в уравнения тепловой конвекции объёмного конденсационного источника тепла, который пропорционален вертикальной скорости на восходящей ветви циркуляции и отсутствует (обращается в нуль) на нисходящей. Такое представление отвечает выделению скрытой теплоты при подъёме влажного воздуха и отсутствию поглощения тепла на испарение капель при опускании (вследствие отсутствия капель). С включением конденсационного источника в целом ряде работ рассматривалась обобщённая постановка классической задачи Рэля — исследование устойчивости состояния механического равновесия слоя влажного насыщенного воздуха. Из-за неаналитической (кусочно-линейной) зависимости источника от вертикальной скорости рассмотрение ограничивалось либо проведением отдельных численных расчётов [7–15], либо анализом отдельных частных решений для невязкой (нетеплопроводной) атмосферы [16–19]. В настоящей работе, основанной на результатах [20–23], представлено аналитическое решение задачи, демонстрирующее принципиальные отличия влажной конвекции от конвекции Рэля. Наиболее яркие отличия связаны со структурой возмущений, развивающихся при потере устойчивости. Так, для двумерной задачи существует область значений параметров (чисел Рэля и Тейлора), при которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные возмущения, отвечающие уединённому конвективному валу. При других значениях параметров наибольшей скоростью роста обладают периодические структуры, описывающие пространственно-периодические системы конвективных валов с узкими (сконцентрированными) областями восходящих движений. Интенсификация осесимметричных локализованных структур во вращающейся атмосфере иллюстрирует возможность спонтанного роста вихревых возмущений типа урагана.

Представленные результаты, на наш взгляд, могут быть полезны широкому кругу читателей, интересующихся как конкретными задачами нелинейной динамики, так и общими вопросами теории самоорганизации (теории рождения структур) в диссипативных средах.

## 2. Условия возникновения конвекции в идеальной (невязкой, нетеплопроводной) атмосфере

Приведём вначале известные факты, касающиеся устойчивости состояния равновесия столба атмосферы в однородном поле силы тяжести. При этом термодинамические параметры  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  (давление, плотность, температура), связанные уравнением состояния  $p = R_a \rho T$ , зависят только от вертикальной координаты  $z$  (в направлении, противоположном направлению силы тяжести), и выполняется уравнение гидростатики

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $R_a$  — газовая постоянная. Об устойчивости состояния равновесия (1) можно судить, рассматривая адиабатические (без теплообмена) перемещения воздушных частиц между двумя различными уровнями. Как известно [3, 4], с увеличением высоты скорость уменьшения температуры в адиабатически поднимающейся частице определяется адиабатическим градиентом  $\gamma_a = g/c_p$ . Здесь  $c_p$  — теплоёмкость при постоянном давлении, для сухого воздуха  $\gamma_a \approx 1$  К/100 м. Если выполнено условие  $\gamma > \gamma_a$ , где  $\gamma = -dT/dz$  — градиент температуры в окружающем воздухе (в метеорологии градиенты принято брать с обратным знаком), то частица окажется теплее и легче окружения и будет непрерывно удаляться от начального положения. Такое состояние конвективно неустойчиво. Наоборот, при  $\gamma < \gamma_a$  сила тяжести будет возвращать более холодную частицу в исходное положение. Таким образом, в устойчивом состоянии температура с высотой должна убывать медленнее, чем  $\gamma_a$ , т.е. должно выполняться условие  $\gamma < \gamma_a$ . Отметим, что последнее условие следует также из общего условия роста энтропии  $\eta$  с высотой в устойчивом состоянии [1]. Используя уравнение (1) и явное выражение для энтропии сухого воздуха [3]  $\eta = c_p \ln T - (R_a/c_p) \ln p + \text{const}$ , получим  $d\eta/dz = c_p T^{-1}(\gamma_a - \gamma) > 0$  при  $\gamma < \gamma_a$ .

Приведённые рассуждения относились к сухому воздуху, содержащему ненасыщенный водяной пар. Если водяной пар находится в состоянии насыщения, то количество влаги, которое может содержать воздушная частица, с высотой уменьшается. Поэтому при перемещении частицы вверх происходит конденсация водяного пара, и из-за выделения скрытой теплоты скорость уменьшения температуры частицы с высотой оказывается меньше  $\gamma_a$ . Соответствующую скорость уменьшения температуры принято называть влажноадиабатическим градиентом  $\gamma_m$ . Из второго начала термодинамики для этой величины следует выражение [3–5]

$$\gamma_m = \gamma_a + \frac{L_v}{c_p} \frac{ds_m}{dz}, \quad (2)$$

где  $L_v$  — удельная теплота конденсации,  $s_m$  — массовая доля насыщенного пара (зависящая от температуры и давления). При рассмотрении конвекции в атмосфере обычно считают, что вся сконденсированная влага уходит в виде осадков. Отсюда следует, что понятие влажноадиабатического градиента применимо только к поднимающимся объёмам воздуха. При опускании объёма его температура меняется в соответствии с адиабатическим градиентом  $\gamma_a$  (нет поглощения тепла на испарение капель).

По отношению к градиентам  $\gamma_a$ ,  $\gamma_m$  в метеорологии принято различать абсолютно неустойчивую температурную стратификацию  $\gamma > \gamma_a > \gamma_m$ , влажнонеустойчивую, но сухоустойчивую (условно неустойчивую) стратификацию  $\gamma_a > \gamma > \gamma_m$ , влажноустойчивую стратификацию  $\gamma_a > \gamma_m > \gamma$ . При условно неустойчивой стратификации частицы, смещённые вниз, будут возвращаться к исходному положению, а частицы, смещённые вверх, будут непрерывно удаляться от него. Эта принципиальная зависимость от направления вертикальных смещений составляет одну из основных особенностей динамики конвективных процессов во влажном насыщенном воздухе.

### 3. Постановка задачи о конвективной неустойчивости слоя влажного насыщенного воздуха

В разделе 2 не учитывались диссипативные факторы (вязкость, теплопроводность). Рассмотрим постановку задачи об устойчивости состояния механического равновесия, приближенную к постановке классической задачи Рэлея [1, 2]. Имеется вращающийся слой вязкой теплопроводной насыщенной водяным паром атмосферы толщиной  $h$ , заключенный между двумя твердыми горизонтальными границами. На горизонтальных границах слоя поддерживаются постоянные температуры, так что распределение температуры в состоянии равновесия представляет собой линейную функцию вертикальной координаты. Требуется исследовать устойчивость равновесного состояния с учётом эффекта выделения скрытой теплоты конденсации при восходящих движениях насыщенного воздуха.

Исследование устойчивости будем проводить в рамках системы уравнений, традиционно используемой при численном моделировании атмосферной конвекции [24, 25]. В соответствующей системе вместо молекулярных коэффициентов вязкости и теплопроводности используются их турбулентные аналоги (моделирующие эффект мелкомасштабной стохастической конвекции). Кроме того, делается допущение об анизотропном характере турбулентного обмена, различном в горизонтальном и вертикальном направлениях. С учётом этого допущения поведение малых возмущений равновесного состояния описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -\nabla p + g\theta\mathbf{k} + \mu\Delta\mathbf{u} + \nu\mathbf{u}_{zz}, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \theta_t + \Gamma w &= \mu\Delta\theta + \nu\theta_{zz} + Q, \end{aligned} \quad (3)$$

которую будем рассматривать вместе с краевыми условиями Рэлея (условиями скольжения) на горизонтальных границах

$$u_z = v_z = w = \theta = 0, \quad z = 0, h. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор скорости с компонентами  $u, v, w$  вдоль горизонтальных осей  $x, y$  и направленной вертикально вверх оси  $z$  соответственно,  $p = p'/\bar{\rho}$ ,  $\theta = \alpha T'$ ,  $p'$ ,  $T'$  — отклонения давления и температуры от их равновесных распределений,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $\bar{\rho}$  — постоянное среднее значение плотности,  $\Gamma = \alpha(\gamma_a - \gamma)$  — параметр стратификации,  $\gamma = -d\bar{T}/dz$  — градиент температуры в равновесном состоянии,  $\mu, \nu$  — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях,  $f$  — параметр Кориолиса,  $\Delta$  — двумерный (по горизонтальным координатам) оператор Лапласа,  $\mathbf{k}$  — вертикальный орт,  $Q = \alpha M/c_p$ ,  $M$  [Вт кг<sup>-1</sup>] — интенсивность источника тепла. Для обозначения частных производных по соответствующим координатам здесь и далее также используются буквенные индексы.

Источник, связанный с выделением скрытой теплоты конденсации, будем представлять в виде [7–19]  $M = -L_v w(ds_m/dz)$  для восходящего потока насыщенного воздуха,  $M = 0$  для нисходящего потока. Вводя функцию Хевисайда ( $H(w) = 1, w > 0$ ;  $H(w) = 0, w < 0$ ), для источника получим

$$M = c_p(\gamma_a - \gamma_m)wH(w), \quad (5)$$

где влажноадиабатический градиент  $\gamma_m$  определён выражением (2). Как указано выше, представление (5) означает, что в поднимающихся объёмах воздуха происходит конденсация водяного пара, причём весь конденсат выпадает в виде дождя. Влажноадиабатический градиент в общем случае зависит от температуры и давления равновесного состояния. В данной работе пренебрежём этой зависимостью и будем считать  $\gamma_m$  постоянным.

Отметим, что при записи системы (3) использовано уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. Приближение несжимаемости справедливо при описании конвекции в неглубоких слоях атмосферы. Условия применимости этого приближения приведены, например, в [24].

Система (3) с источником (5) относится к классу систем с неаналитической (кусочно-линейной или "прыгающей") нелинейностью. Данная нелинейность принципиально не допускает линеаризации. Присутствие нелинейного источника составляет основную математическую особенность задачи.

При построении решения задачи (3)–(5) будем использовать квазистатическое приближение. В этом приближении проекция уравнения для импульса на вертикальную ось заменяется уравнением гидростатики  $p_z = -g\theta$ . Квазистатический вариант системы (3) с краевыми условиями (4) допускает разделение переменных — решение и источник можно представить рядом по собственным функциям  $\cos(\pi n z/h)$ ,  $\sin(\pi n z/h)$  оператора  $d^2/dz^2$ . Будем рассматривать случай  $n = 1$  (первая вертикальная мода) и положим

$$(u, v, p) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}) \cos \frac{\pi z}{h}, \quad (w, \theta, Q) = (\tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{Q}) \sin \frac{\pi z}{h},$$

где в скобках правой части стоят амплитуды, не зависящие от  $z$ . Исключение давления с использованием уравнения гидростатики приводит к системе из трёх уравнений относительно  $\tilde{w}, \tilde{\theta}$  и вертикального компонента завихренности  $\tilde{\omega} = \tilde{v}_x - \tilde{u}_y$ . Примем в качестве масштабов переменных  $t, x, y, \tilde{w}, \tilde{\omega}$  соответственно  $d^2/\nu$ ,  $\sqrt{\mu/\nu} d$ ,  $\sqrt{\mu/\nu} d$ ,  $gd^2/\mu$ ,  $\nu g/(\mu f d)$ , где  $d = h/\pi$ . Опуская волну, в безразмерных переменных получим систему уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w + w + \omega + \Delta\theta &= 0, & \omega_t - \Delta\omega + \omega - Tw &= 0, \\ \theta_t - \Delta\theta + \theta + R w &= Q, & Q &= R_m w H(w), \end{aligned} \quad (6)$$

содержащую три безразмерных параметра

$$R = \frac{\alpha g(\gamma_a - \gamma)d^4}{\mu\nu}, \quad T = \frac{f^2 d^4}{\nu^2}, \quad R_m = \frac{\alpha g(\gamma_a - \gamma_m)d^4}{\mu\nu}. \quad (7)$$

Здесь  $R_m$  — параметр, характеризующий интенсивность конденсационного тепловыделения,  $R$  — аналог числа Рэлея. В формуле (7) и далее  $T$  — аналог числа Тейлора. Отметим, что используемая запись числа Рэлея отличается от традиционной [1, 2] знаком и множителем  $\pi^4$  в знаменателе. Вместо числа Тейлора часто удобно использовать число Экмана  $E = 1/\sqrt{T}$ . Цель дальнейшего анализа состоит в определении при заданном внешнем параметре  $R_m$  критических значений параметров  $R, T$ , при которых существуют неустойчивые решения системы (6), и в исследовании их структуры.

Отметим, что квазистатическое приближение не нарушает основной математической специфики задачи, свя-

занной с нелинейностью источника. Данное приближение также часто используется в атмосферных численных моделях; оно справедливо в условиях сильного анизотропного обмена,  $\mu \gg \nu$ .

#### 4. Критические значения для "сухой" конвекции

Определим сначала критические значения параметров для сухой конвекции. При  $R_m = 0$  система (6) сводится к одному уравнению:

$$(\partial_t - \Delta + 1)^2 w + Tw - R\Delta w = 0. \quad (8)$$

Отыскивая экспоненциально возрастающие решения (8) вида  $w = \exp(\kappa t) \exp[i(k_1 x + k_2 y)]$ , для инкремента нарастания  $\kappa$  найдём:

$$\kappa_{1,2} = -(k^2 + 1) \pm \sqrt{-Rk^2 - T}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Полагая  $\kappa_1 = 0$ , отсюда получим критическое значение числа Рэлея для возмущения с данным значением модуля волнового вектора  $k$ :  $R = R_{cr}(k, T) = -((1 + k^2)^2 + T)/k^2$ . При  $R < R_{cr}(k, T)$  возмущение растёт, при  $R > R_{cr}(k, T)$  — затухает. Физический смысл имеет максимальное значение  $R = R_{cr}(k, T)$ , которое достигается при некотором значении  $k = k_{cr}(T)$ , соответствующем наиболее опасному возмущению:

$$R = R_{cr}(T) = -2(\sqrt{1+T} + 1), \quad k_{cr}^2 = \sqrt{1+T}. \quad (9)$$

Кривая  $R = R_{cr}(T)$  на плоскости параметров  $T^{1/2}$ ,  $R$  разделяет области устойчивости и неустойчивости (рис. 1). Значениям  $T^{1/2} < 0$  соответствует  $f < 0$ . Наиболее опасное возмущение представляет собой систему конвективных ячеек с горизонтальным размером  $S = \pi/k_{cr}$ .

Для сравнения приведём критические значения, полученные без использования квазистатического приближения. Нетрудно показать, что в отсутствие фонового вращения из полной системы (3) следует (при той же нормировке)  $R_{cr}(k, T) = -(1 + k^2)^2(1 + \varepsilon k^2)/k^2$ , где  $\varepsilon = \nu/\mu$ . Для наиболее опасного возмущения при изотропном обмене  $\varepsilon = 1$  отсюда получим классические значения

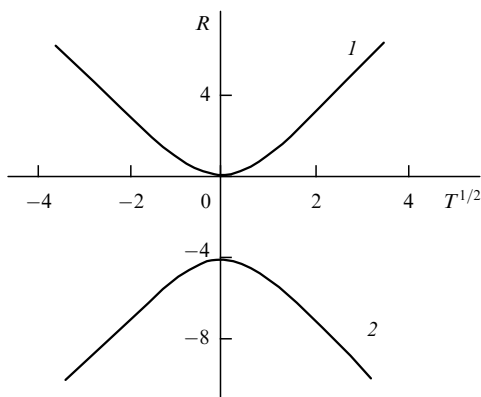


Рис. 1. 1 — кривая  $R = R_1(0, T)$ , разделяющая области с различной пространственной структурой функции Грина. 2 — кривая  $R = R_{cr}(T)$  на плоскости параметров  $\sqrt{T} \equiv E^{-1}$ ,  $R$ ; область неустойчивости сухой конвекции Рэлея лежит ниже кривой.

Рэлея [1, 2]:  $R_{cr} = -27/4$ ,  $k_{cr} = \sqrt{2}/2$ . Соответствующие значения (9) в квазистатическом приближении составляют  $R_{cr} = -4$ ,  $k_{cr} = 1$ , т.е. отличаются более чем в полтора раза. В то же время, при анизотропном обмене  $\varepsilon \ll 1$  получим  $R_{cr} \approx -4(1 + 2\varepsilon)$ ,  $k_{cr} \approx 1 - \varepsilon$  и, следовательно, в этом случае квазистатическое приближение приводит к асимптотически точным результатам.

#### 5. Функция Грина. Интегральное уравнение для амплитуды вертикальной скорости

Для нелинейной системы (6) можно пытаться строить решения отдельно для влажной ( $w > 0$ ) и сухой ( $w < 0$ ) областей, сшивая их на границах. Такой подход приводит к громоздким вычислениям. Более эффективный подход, состоящий из двух этапов, предложен в работах [20–23]. На первом этапе строится функция Грина задачи с заданным источником тепла. Далее в формулу для вертикальной скорости, представляющую собой свёртку источника тепла с функцией Грина, подставляется конденсационный источник тепла  $Q$  в форме (6) и таким образом получается интегральное уравнение для нахождения амплитуды вертикальной скорости. Анализ полученного интегрального уравнения позволяет определить как структуру, так и скорость роста неустойчивых возмущений в зависимости от параметров задачи.

Для нахождения функции Грина удобно записать систему (6) в векторно-матричной форме [26]:

$$\mathbf{q}_t + A\Delta \mathbf{q} + B\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -T & 1 & 0 \\ R & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{q} = (w, \omega, \theta)^{\text{tr}}$ ,  $\mathbf{F} = (0, 0, Q)^{\text{tr}}$  (верхний индекс здесь означает транспонирование). Отыскивая экспоненциально нарастающие решения  $\mathbf{q} = \exp(\kappa t) \mathbf{q}(x, y)$ ,  $\mathbf{F} = \exp(\kappa t) \mathbf{F}(x, y)$ , вместо (10) получим стационарное уравнение

$$\Delta \mathbf{q} - C\mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{F}, \quad C = -A^{-1}(B + \kappa I), \quad (11)$$

где  $I$  — единичная матрица. Собственные значения  $\lambda_j^2$  матрицы  $C$  различны:

$$\lambda_{1,2}^2 = 1 + \kappa + \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R(1 + \kappa) - T}, \quad \lambda_3^2 = 1 + \kappa, \quad (12)$$

так что существует матрица  $U$ , приводящая  $C$  к диагональному виду. Полагая в (11)  $\mathbf{q} = U\boldsymbol{\sigma}$ , после умножения на  $U^{-1}$  получим систему из трёх уравнений Гельмгольца  $\Delta \sigma_j - \lambda_j^2 \sigma_j = \tilde{F}_j$ , где правые части  $\tilde{F}_j$  линейно выражаются через источник тепла  $Q$ . Решения этих уравнений представляют собой свёртки  $\tilde{F}_j$  с известными функциями Грина уравнения Гельмгольца. Осуществляя обратное линейное преобразование, для каждой из компонент  $w$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  вектора  $\mathbf{q}$  получим выражения, представляющие собой свёртки источника тепла с соответствующими функциями Грина, являющимися линейными комбинациями функций Грина уравнения Гельмгольца. Подстановка источника  $Q = R_m w H(w)$  в выражение для  $w$  приводит к искомому интегральному уравнению для нахождения амплитуды вертикальной скорости. Если  $w$  зависит только от координаты  $x$  (плоская геометрия задачи),

уравнение имеет вид

$$w(x) = R_m \int_{w>0} G(x-x') w(x') dx', \quad (13)$$

$$G(x) = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 \exp(-\lambda_1|x|) - \lambda_2 \exp(-\lambda_2|x|)). \quad (14)$$

В общем случае имеем уравнение

$$w(x, y) = R_m \iint_{w>0} G(x-x', y-y') w(x', y') dx' dy', \quad (15)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)), \quad (16)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где  $K_0(r)$  — цилиндрическая функция Макдональда. Подчеркнём, что интегрирование в уравнениях (13), (15) ведётся по областям  $w > 0$ , которые заранее неизвестны и должны быть найдены в процессе решения задачи.

Остановимся подробнее на структуре функции Грина для вертикальной скорости (14), которая определяется значениями собственных чисел  $\lambda_{1,2}$ . Обозначим

$$R_{1,2}(\kappa, T) = \pm 2 \left( \sqrt{1 + \kappa^2 + T} \mp (1 + \kappa) \right).$$

Из (12) следует, что при  $R > R_1(\kappa, T)$  собственные значения  $\lambda_{1,2}^2$  положительны, при  $R < R_2(\kappa, T)$  — отрицательны, при  $R_2 < R < R_1$  — комплексно сопряжены. В случае положительных значений  $\lambda_{1,2}^2$  функция Грина локализована в окрестности источника тепла  $G(0) = 1/(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$ . На полуоси  $x > 0$  она один раз меняет знак при переходе через точку  $x_G = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \ln(\lambda_1/\lambda_2)$  и на бесконечности монотонно затухает. Комплексно-сопряжённым  $\lambda_{1,2}^2$  отвечают значения  $\lambda_{1,2} = \xi_2 \pm i\xi_1$ , где  $\xi_2 = 0,5\sqrt{R - R_2}$ ,  $\xi_1 = 0,5\sqrt{R_1 - R}$ . Соответствующая функция Грина

$$G(x) = \delta \exp(-\xi_2|x|) \cos(\xi_1|x| + \chi),$$

$\delta = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}/(4\xi_1\xi_2)$ ,  $\tan \chi = \xi_2/\xi_1$ , носит осциллирующий характер — имеет бесконечное число точек смены знака. Кривая  $R = R_1(0, T)$ , разделяющая области с различным поведением функции Грина, показана на рис. 1. Кривая  $R = R_2(0, T)$  совпадает с критической кривой (9) для конвекции Рэлея (кривая 2 на рис. 1). При приближении к этой кривой  $G(x) \rightarrow \infty$ , пространственный период осцилляций функции Грина  $2\pi/\xi_1$  стремится к пространственному периоду наиболее опасных возмущений сухой конвекции Рэлея (9), а пространственное затухание исчезает. При приближении числа Рэлея к границе  $R = R_1(0, T)$ , разделяющей области с различным поведением функции Грина, пространственный период осцилляций функции Грина стремится к бесконечности, и переход через границу происходит непрерывным образом.

По своему физическому содержанию функции Грина для компонент  $w$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  описывают циркуляцию, создаваемую точечным по горизонтальным координатам источником тепла. Поскольку с восходящими движениями связано конденсационное тепловыделение, из физических соображений понятно, что пространственная структура наиболее неустойчивых возмущений во влажной атмосфере должна определяться простран-

ственной структурой функции Грина для вертикальной скорости. В случае локализованной функции Грина при достаточно большом конденсационном тепловыделении (значении числа  $R_m$ ) наибольшую скорость роста будут иметь локализованные в пространстве возмущения. В случае осциллирующей функции Грина наибольшей скоростью роста должны обладать пространственно-периодические структуры, пространственный период которых определяется периодом осцилляций функции Грина. Дальнейшее изложение подтверждает эти предположения строгими аналитическими результатами.

В разделе 6 построены локализованные и периодические решения уравнения (13). При построении решений, периодических с периодом  $2L_*$ , вместо функции Грина (14) удобно использовать периодическую функцию Грина

$$G_{L_*}(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left( \frac{\lambda_1 \cosh(\lambda_1(L_* - |x|))}{\sinh(\lambda_1 L_*)} - \frac{\lambda_2 \cosh(\lambda_2(L_* - |x|))}{\sinh(\lambda_2 L_*)} \right). \quad (17)$$

Данная функция есть линейная комбинация функций Грина краевых задач с условиями периодичности  $\sigma_j'' - \lambda_j^2 \sigma_j = \tilde{F}_j$ ,  $\sigma_j(-L_*) = \sigma_j(L_*)$ ,  $\sigma_j'(-L_*) = \sigma_j'(L_*)$ . Функция Грина (14) есть предел (17) при  $L_* \rightarrow \infty$ .

## 6. Конвективная неустойчивость относительно двумерных плоских возмущений. Периодические и локализованные структуры

### 6.1. Периодические решения

Будем искать периодические с периодом  $2L_*$  решения уравнения (13) с ядром (17) в классе чётных функций, удовлетворяющих условиям знакоопределённости:  $w \geq 0$ ,  $x \in (0, x_0)$ ;  $w \leq 0$ ,  $x \in (x_0, L_*)$ . Для определения  $w(x)$  во влажной области  $x \in (0, x_0)$  из (13) получим уравнение

$$w(x) = R_m \int_0^{x_0} (G_{L_*}(x-x') + G_{L_*}(x+x')) w(x') dx' \quad (18)$$

с очевидным краевым условием  $w(x_0) = 0$ . После того как решение во влажной области найдено, выражение для  $w(x)$  в сухой области  $x \in (x_0, L_*)$  получается соответствующим интегрированием в (18). От классического уравнения Фредгольма уравнение (18) отличается тем, что на решение накладывается достаточно сильное условие знакоопределённости и параметр  $x_0$  (радиус области выпадения осадков) подлежит определению в ходе построения решения.

В области  $x \in (0, x_0)$  система (6) может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению относительно  $w(x)$  четвёртого порядка. Поскольку решение уравнения (18) принадлежит классу чётных функций, будем искать решение (определённое с точностью до множителя) в форме

$$w(x) = \frac{\cos(p_1 x)}{\cos(p_1 x_0)} - \frac{\cos(p_2 x)}{\cos(p_2 x_0)}, \quad 0 < x < x_0, \quad (19)$$

с неопределёнными действительными коэффициентами  $p_1, p_2$ . Краевое условие при этом автоматически удовлетворяется. При подстановке (19) в (18) в правой части

уравнения появятся слагаемые, пропорциональные  $\cos(p_j x)$ ,  $\cosh(\lambda_j x)$ . Приравнивая коэффициенты при  $\cos(p_j x)$  в левой и правой частях, получим уравнения для определения  $p_j$ :

$$p_j^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - R_m)p_j^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 0, \quad j = 1, 2.$$

Полагая для определённости  $p_2 > p_1$ , отсюда найдём

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= 0,5\sqrt{R_m}(\sqrt{1-\lambda} \mp \sqrt{1-\lambda_0}), \\ \lambda &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{R_m}, \quad \lambda_0 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{R_m}; \\ \lambda_{1,2} &= 0,5\sqrt{R_m}(\sqrt{\lambda_0} \pm \sqrt{\lambda}). \end{aligned} \quad (20)$$

На плоскости параметров  $\lambda_0, \lambda$ , играющих важную роль в последующем рассмотрении, действительным значениям  $p_2 > p_1$  отвечает область  $\lambda \leq \lambda_0 \leq 1$ . В области  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$  значения  $\lambda_{1,2}$  действительны, в области  $0 \leq \lambda_0 \leq 1, \lambda < 0$  — комплексно сопряжены.

Приравнивая нулю коэффициенты при  $\cosh(\lambda_j x)$  в (18), получим уравнения

$$\frac{p_2 \tan(p_2 x_0) - \lambda_j \tanh(\lambda_j L)}{p_2^2 + \lambda_j^2} - \frac{p_1 \tan(p_1 x_0) - \lambda_j \tanh(\lambda_j L)}{p_1^2 + \lambda_j^2} = 0, \quad j = 1, 2,$$

где  $L = L_* - x_0$ . Эти уравнения удобно разрешить относительно  $\tan(p_{1,2} x_0)$ :

$$\tan(p_1 x_0) = 0,5(B_1 - B_2), \quad \tan(p_2 x_0) = -0,5(B_1 + B_2). \quad (21)$$

Учитывая последнее из соотношений (20), при  $\lambda \geq 0$  для  $B_{1,2}$  имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} \left( \tanh((\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_0})Z) + \tanh((\sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda})Z) \right), \\ B_2 &= \sqrt{\lambda^{-1} - 1} \left( \tanh((\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_0})Z) - \tanh((\sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda})Z) \right), \\ Z &= 0,5\sqrt{R_m} L. \end{aligned} \quad (22)$$

При  $\lambda < 0$ , переходя от гиперболических функций к тригонометрическим, получим

$$\begin{aligned} B_1 &= D^{-1} \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} \sinh(2\sqrt{\lambda_0} Z), \\ B_2 &= D^{-1} \sqrt{1 + |\lambda|^{-1}} \sin(2\sqrt{|\lambda|} Z), \\ D &= \cos^2(\sqrt{|\lambda|} Z) + \sinh^2(\sqrt{\lambda_0} Z). \end{aligned} \quad (23)$$

Дальнейший анализ фактически сводится к нахождению условий совместности уравнений (21) и проверке выполнения условия знакоопределённости для решений. Как показывает анализ, при комплексных значениях  $p_1, p_2$  уравнения (21) заведомо несовместны (этим, в частности, мотивирован выбор формы решения (19)).

Из уравнений (21) следуют соотношения

$$\begin{aligned} p_1 x_0 &= \arctan(0,5(B_1 - B_2)) + \pi n, \\ p_2 x_0 &= -\arctan(0,5(B_1 + B_2)) + \pi m, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $n, m$  могут принимать неотрицательные целочисленные значения. Поскольку  $B_1 > 0$  и  $p_2 > p_1$ , заведомо должно быть  $m > n$ . Будем далее называть решения, соответствующие различным значениям  $n, m$ , модами.

Учитывая (20) и складывая уравнения (24), получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\sqrt{R_m(1-\lambda)}} \left( (n+m)\pi + \arctan(0,5(B_1 - B_2)) - \right. \\ &\quad \left. - \arctan(0,5(B_1 + B_2)) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Исключение из (24) параметра  $x_0$  даёт уравнение

$$\begin{aligned} F(\lambda_0, \lambda, Z) &\equiv \pi m - \arctan(0,5(B_1 + B_2)) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{1-\lambda_0}}{\sqrt{1-\lambda} - \sqrt{1-\lambda_0}} \left( \pi n + \arctan(0,5(B_1 - B_2)) \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

которое определяет функциональную зависимость, связывающую параметры  $\lambda_0, \lambda, Z$  и обеспечивающую существование нетривиальных периодических решений интегрального уравнения (18). Для каждой моды на плоскости параметров  $\lambda_0, \lambda$  зависимость (26) задаёт однопараметрическое (с параметром  $Z$ ) семейство кривых  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ , в каждой точке которых существует решение. При фиксированном  $Z$  кривая отвечает периодическому решению с  $L = 2Z/\sqrt{R_m}$  и значением  $x_0$ , определяемым выражением (25).

## 6.2. Локализованные решения

Локализованные решения могут быть получены аналогичным образом, если в уравнении (18) периодическую функцию Грина  $G_L$  заменить на функцию Грина  $G$  точечного источника тепла (14). С другой стороны, локализованные решения можно рассматривать как периодические решения с бесконечным периодом, чему соответствует  $Z = \infty$ . При  $Z = \infty$  из (22), (23) получаем  $B_1 = (\lambda_0^{-1} - 1)^{1/2}$ ,  $B_2 = 0$ , и уравнения (21) сводятся к следующему:

$$\tan(p_1 x_0) = \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1}, \quad \tan(p_2 x_0) = -\sqrt{\lambda_0^{-1} - 1}.$$

Отсюда вместо (24)–(26) имеем

$$p_1 x_0 = \arctan \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi n, \quad (27)$$

$$p_2 x_0 = -\arctan \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi m,$$

$$x_0 = \frac{\pi(n+m)}{\sqrt{R_m(1-\lambda)}}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= f(\lambda_0) = 1 - (1 - \lambda_0) \times \\ &\quad \times \left( \frac{m-n}{m+n} - \frac{2}{\pi(m+n)} \arcsin \sqrt{1-\lambda_0} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Зависимость (29) обеспечивает существование локализованных решений уравнения (18). При этом параметры  $n, m$  выбираются так, чтобы выполнялось условие знакоопределённости.

## 6.3. Области существования мод на плоскости $\lambda_0, \lambda$

Построение таких областей позволит в дальнейшем определить область неустойчивости на плоскости исходных параметров задачи. Детальный анализ поведения кривых  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  для различных мод выполнен в работах [20–23]. Для каждой моды в области  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$ , отвечающей действительным значениям  $\lambda_{1,2}$ , кривые  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  при различных  $Z$  не пересекаются и расположены левее соответствующей кривой

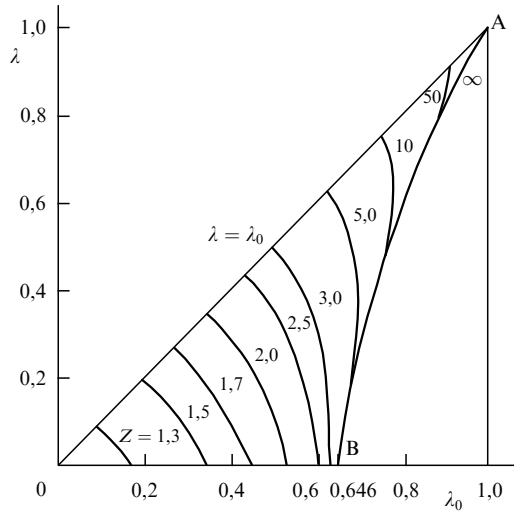


Рис. 2. Кривые  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  при различных  $Z$  в области  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$  для моды  $n = 0, m = 1$ . АВ — кривая  $\lambda = f(\lambda_0)$  для локализованной моды  $n = 0, m = 1$ .

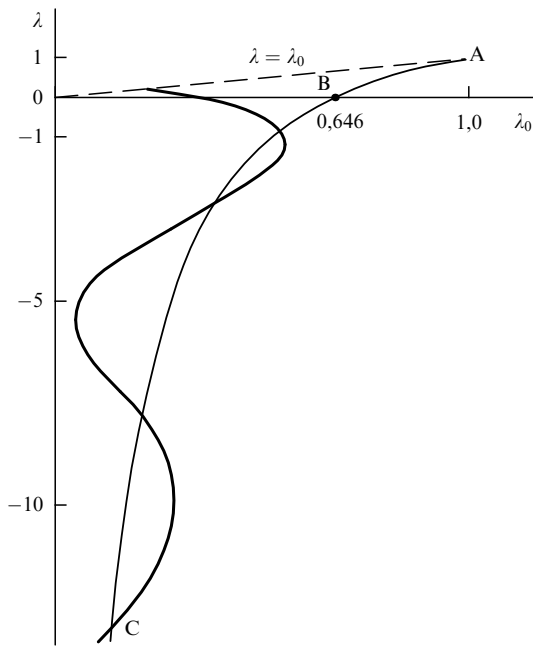


Рис. 3. Кривая  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  при  $Z = 1,5$  для моды  $n = 0, m = 1$  (жирная сплошная линия), АВС — кривая  $\lambda = f(\lambda_0)$  для локализованной моды  $n = 0, m = 1$ .

$\lambda = f(\lambda_0)$  для локализованной моды  $Z = \infty$ . Для моды  $n = 0, m = 1$  эти кривые приведены на рис. 2. Попадая в область  $\lambda < 0$ , отвечающую комплексно-сопряженным значениям  $\lambda_{1,2}$ , кривые  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ , соответствующие различным значениям  $Z$ , начинают многократно пересекаться друг с другом. При фиксированном значении  $Z$  кривая  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  обвивается вокруг кривой  $\lambda = f(\lambda_0)$ , как это показано на рис. 3 для моды  $n = 0, m = 1$ . Назовём участки кривой  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ , лежащие правее кривой  $\lambda = f(\lambda_0)$ , гребнями, левее — ложбинами. Прономеруем для каждой кривой гребни и ложбины подряд сверху вниз. Гребни и ложбины с фиксированным номером образуют однопараметрические с параметром  $Z$  семейства. Найдём на плоскости  $\lambda_0, \lambda$  огибающие

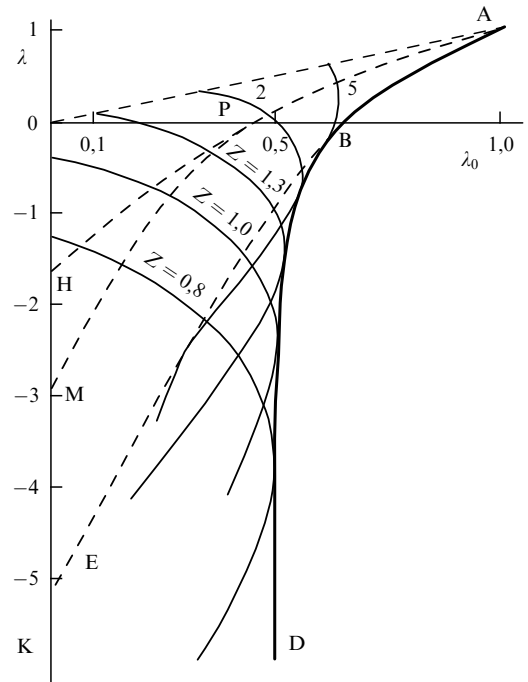


Рис. 4. Область существования решений задачи на плоскости  $\lambda_0, \lambda$ . Граница области АВД — кривая  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ .

указанных семейств. Уравнения огибающих получаются исключением параметра  $Z$  из системы уравнений  $F(\lambda_0, \lambda, Z) = 0, F_Z(\lambda_0, \lambda, Z) = 0$ . Используя (26), (23), легко показать, что  $F_Z(\lambda_0, \lambda, Z) = 0$  при

$$Z = \frac{\pi j}{2\sqrt{|\lambda|}}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{30}$$

Из (23) следует, что на огибающих  $B_2 = 0$ . Подстановка найденных значений  $Z$  в (23), (26) даёт уравнения огибающих:

$$\begin{aligned} \arctan \left( \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} \tanh^{(-1)^j} \left( \frac{j\pi\sqrt{\lambda_0}}{2\sqrt{|\lambda|}} \right) \right) = \\ = \frac{\pi}{2} \left( (m - n) - (n + m) \sqrt{\frac{1 - \lambda_0}{1 + |\lambda|}} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

Нетрудно проверить, что огибающие являются гладким продолжением кривых  $\lambda = f(\lambda_0)$  для соответствующих локализованных мод в область  $\lambda < 0$ . В (30), (31)  $j = 1$  относится к огибающей первых гребней,  $j = 2$  — к огибающей вторых ложбин и т.д. Для каждой моды правее всех остальных огибающих на плоскости  $\lambda_0, \lambda$  лежит огибающая первых гребней  $j = 1$ . Для моды  $n = 0, m = 1$  она имеет асимптоту

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \tag{32}$$

На рисунке 4 приведены огибающая ВД семейства первых гребней ( $j = 1$ ) и огибающая ВЕ семейства вторых ложбин ( $j = 2$ , штриховая кривая), а также для иллюстрации изображены несколько кривых  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$  для моды  $n = 0, m = 1$ . Кривая АВ — кривая  $\lambda = f(\lambda_0)$  для этой моды в области  $\lambda > 0$ . Штриховые кривые РМ — огибающая первых гребней ( $j = 1$ ), РН — огибающая

вторых ложбин ( $j = 2$ ), АР — кривая  $\lambda = f(\lambda_0)$  для моды  $n = 0, m = 2$  в области  $\lambda > 0$ .

Соотношение (30) означает, что в точке  $\lambda$  с огибающей соприкасается кривая  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ , для которой параметр  $Z$  определяется соотношением (30). Таким образом, каждой точке  $\lambda$  огибающей соответствует решение, для которого

$$L = \frac{j\pi}{\sqrt{R_m|\lambda|}}, \quad \frac{x_0}{L} = \frac{n+m}{j\sqrt{1+|\lambda|^{-1}}}, \quad x_0 = \frac{(n+m)\pi}{\sqrt{R_m(1+|\lambda|)}}. \quad (33)$$

**6.4. Знакоопределённость и пространственная структура мод**

Установим структуру локализованных решений и решений, соответствующих огибающим, для различных мод. Поскольку  $B_2 = 0$ , из (24), (27) следует  $\cos(p_2x_0) = (-1)^{m-n} \cos(p_1x_0)$ . Таким образом, в области  $x \in (0, x_0)$  с точностью до положительного множителя  $w(x) = (-1)^n [\cos(p_1x) + (-1)^{m-n+1} \cos(p_2x)]$ . Используя это выражение и соотношения (24), (27), легко показать, что условие знакоопределённости во влажной области  $w \geq 0$ ,  $x \in (0, x_0)$  выполняется только для мод  $n = 0, m = 1$  и  $n = 0, m = 2$ . Решения, отвечающие этим двум случаям, будем называть первой и второй модами. Локализованные первая и вторая моды знакоопределены в сухой области  $x_0 < x < \infty$  при  $\lambda \geq 0$  на соответствующих кривых  $\lambda = f(\lambda_0)$  и незнакоопределены при  $\lambda < 0$ . Это связано с тем, что функция Грина  $G$  при  $\lambda < 0$  является осциллирующей. Периодические первая и вторая моды знакоопределены в сухой области  $x_0 \leq x \leq L_*$  только на огибающих первых гребней ( $j = 1$ ) и вторых ложбин ( $j = 2$ ) этих мод. Для указанных мод на кривых  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ , соответствующих фиксированному значению  $Z$ , решение становится незнакоопределённым (в сухой области) сразу после соприкосновения кривой с огибающей вторых ложбин. Для мод  $n > 0$   $w(x)$  не удовлетворяет условию знакоопределённости не только на огибающих, но и всюду на кривых  $\lambda = f(\lambda_0, Z)$ .

Таким образом, область существования решений задачи совпадает с соответствующей областью для первой моды. На плоскости  $\lambda_0, \lambda$  границей области существования решений задачи является кривая AD на рис. 4. Она состоит из двух гладко сопряжённых в точке  $\lambda = 0$  кривых — кривой  $\lambda = f(\lambda_0)$  (29) для первой локализованной моды  $n = 0, m = 1$  в области  $\lambda \geq 0$  и огибающей (31) первых гребней  $j = 1$  этой моды в области  $\lambda < 0$ . Кривую AD далее обозначим через  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ . В каждой точке кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  пространственная структура как локализованных, так и периодических решений во влажной области определяется выражением (19), которое удобно переписать в виде

$$w(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2x_0}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda}} \frac{x}{x_0}\right), \quad 0 \leq x \leq x_0. \quad (34)$$

В сухой области для локализованных решений после интегрирования в (18) имеем

$$w(x) = -\sqrt{\frac{(1-\lambda)(1-\lambda_0)}{\lambda}} \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{x-x_0}{x_0}\right) \times \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{1-\lambda}} \frac{x-x_0}{x_0}\right), \quad x > x_0. \quad (35)$$

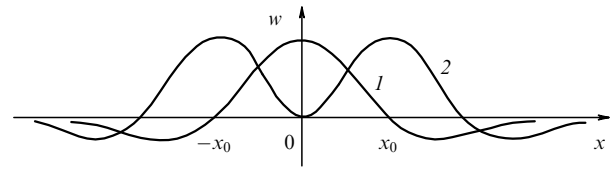


Рис. 5. Пространственные распределения вертикальной скорости  $w(x)$  для первой (1) и второй (2) локализованных мод.

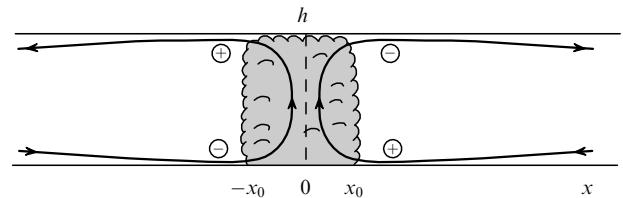


Рис. 6. Схематическая картина линий тока первой локализованной моды в плоскости  $x, z$ . Знак "+" соответствует компоненте скорости  $v$ , направленной от читателя, знак "-" — к читателю.

Для периодических решений, соответствующих огибающей, аналогично получаем

$$w(x) = -A \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{|\lambda|}} \left(1 - \frac{x-x_0}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-x_0}{L}\right), \quad x_0 < x \leq L_*, \quad (36)$$

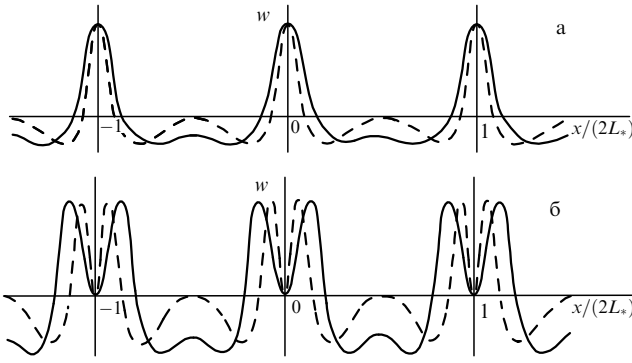
$$A = \sqrt{\frac{(1-\lambda)(1-\lambda_0)}{|\lambda|\lambda_0}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda}}\right) \sinh^{-1}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{|\lambda|}}\right).$$

В соотношениях (34)–(36) величины  $x_0$  и  $L$  определены выражениями (28) и (33), а  $\lambda$  и  $\lambda_0$  связаны уравнением  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ . При переходе через точку  $\lambda = 0$  пространственная структура решения, соответствующего границе  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ , меняется непрерывным образом. Граница существования второй моды  $n = 0, m = 2$  устроена аналогично и расположена на плоскости  $\lambda_0, \lambda$  левее кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ . Ещё левее лежат области существования периодических знакоопределённых мод  $n = 0, m > 2$  (для них знакоопределённых локализованных решений и знакоопределённых решений, соответствующих огибающим, не существует).

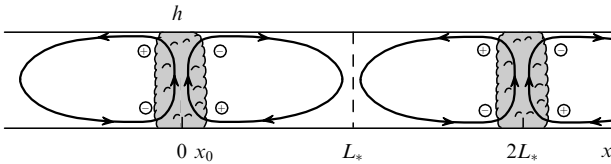
По известным распределениям  $w(x)$  однозначно находятся компоненты скорости  $u, v$ , причём вихревая компонента  $v$  в данной задаче возникает из-за действия силы Кориолиса. Графики распределений  $w(x)$  для первой и второй локализованных мод показаны на рис. 5. Схематическая картина линий тока в плоскости  $x, z$ , отвечающая первой моде, представлена на рис. 6. Полученные моды описывают экспоненциально растущие со временем локализованные конвективные валы. Структура циркуляции в конвективных валах соответствует притоку воздуха к оси симметрии в нижней половине слоя и оттоку в верхней. Вблизи оси происходит подъём, сопровождающийся конденсацией и выпадением осадков. В нижней половине слоя имеет место циклоническая циркуляция, в верхней — антициклоническая.

На рисунке 7 представлены профили  $w(x)$ , соответствующие огибающим первых гребней и вторых ложбин для мод  $n = 0, m = 1$  (а) и  $n = 0, m = 2$  (б). Решение, соответствующее участку границы BD на рис. 4, описы-





**Рис. 7.** Пространственные распределения вертикальной скорости  $w(x)$ , соответствующие огибающим первых гребней (сплошные кривые) и вторых ложбин (штриховые кривые) для первой (а) и второй (б) мод. Участку BD кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  на рис. 4 отвечает распределение  $w(x)$ , представленное сплошной линией на рис. а.



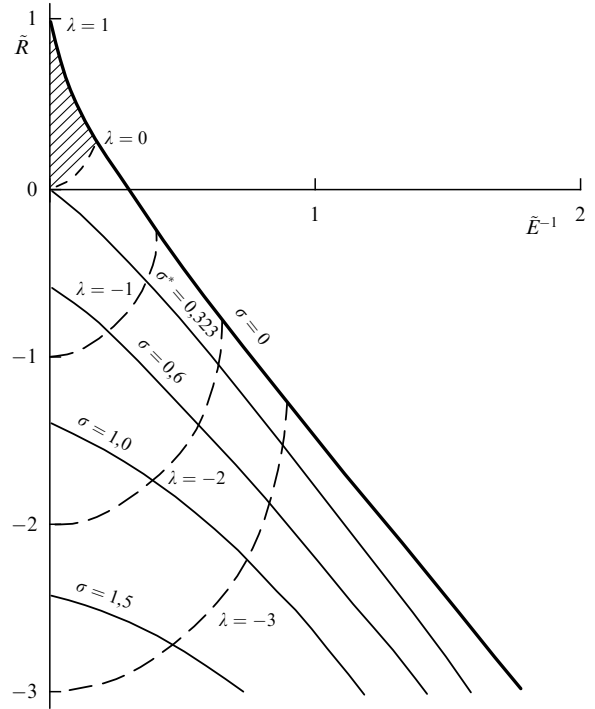
**Рис. 8.** Схематическая картина линий тока первой периодической моды, соответствующей участку BD кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  на рис. 4, в плоскости  $x, z$ . Знак "+" означает, что компонента скорости  $v$  направлена от читателя, знак "-" — к читателю.

вает пространственно-периодический ансамбль облачных валов (гряд) с расстоянием между ними  $2L = 2\pi/\sqrt{R_m|\lambda|}$  (рис. 8). Каждый отдельный облачный вал состоит из двух циркуляционных ячеек (правой и левой), причём в пределах каждой ячейки  $x_0/L = (1 + |\lambda|^{-1})^{-1/2}$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  отношение  $x_0/L \rightarrow 0$ , т.е. имеет место ярко выраженная горизонтальная асимметрия в распределении размеров областей восходящих и нисходящих движений. Поскольку полный вертикальный перенос массы в пределах ячейки отсутствует, интенсивность восходящих движений значительно превосходит интенсивность нисходящих. Подобные распределения в литературе часто называют "пиковыми" структурами.

**6.5. Построение области влажноконвективной неустойчивости на плоскости определяющих параметров**  
 Осуществим переход с плоскости параметров  $\lambda_0, \lambda$ , на которой уже построены решения задачи, на плоскость нормированных исходных параметров  $\tilde{E}^{-1} = E^{-1}/R_m$ ,  $\tilde{R} = R/R_m$ . Выражая из соотношений (12)  $E^{-1} \equiv \sqrt{T}$  и  $R$  через  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  и нормируя на  $R_m$ , получим

$$\tilde{R} = 0,5(\lambda_0 + \lambda) - \sigma, \quad \tilde{E}^{-1} = 0,25\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)^2 - 4\sigma^2}, \quad (37)$$

где далее  $\sigma = 2(1 + \kappa)/R_m$ . При заданных значениях  $\tilde{R}, \tilde{E}^{-1}$  наибольшей скоростью роста обладают решения, соответствующие кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  на плоскости  $\lambda_0, \lambda$ . Действительно, при заданных значениях  $\tilde{R}, \tilde{E}^{-1}$  и фиксированном значении  $\lambda < 1$  величина  $\kappa$  растёт с ростом  $\lambda_0$ . Поскольку для решений, обладающих максимальной скоростью роста, параметры  $\lambda_0, \lambda$  связаны зависимостью  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ , соотношения (37) дают параметрическое (с параметром  $\lambda$ ) представление кривой  $\sigma = \text{const}$  на

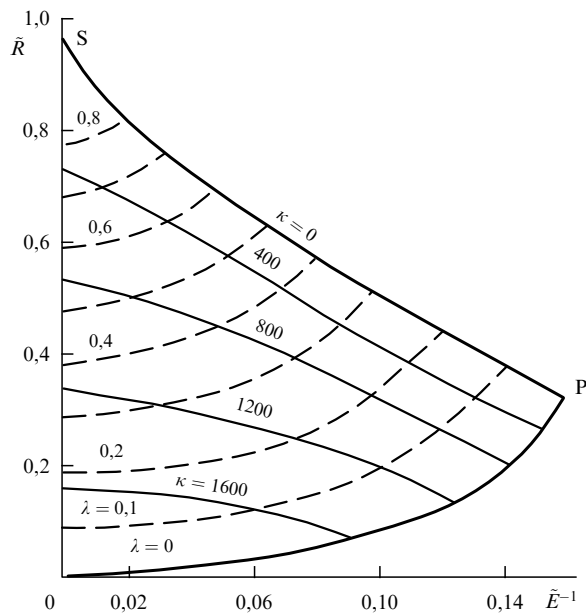


**Рис. 9.** Область  $\Omega$  на плоскости параметров  $\tilde{E}^{-1}, \tilde{R}$ . Область неустойчивости ограничена сверху кривой  $\sigma = 2/R_m$ .

плоскости  $\tilde{E}^{-1}, \tilde{R}$ . При фиксированном значении  $\sigma$  для построения такой кривой нужно использовать лишь часть зависимости  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ , удовлетворяющую условию  $-\infty < \lambda \leq \lambda_{\text{max}}(\sigma)$ , где  $\lambda_{\text{max}}(\sigma)$  — корень уравнения  $\lambda_0 - \lambda = 2\sigma$ . (38)

При различных значениях  $\sigma \geq 0$  соответствующие кривые на плоскости  $\tilde{E}^{-1}, \tilde{R}$  заполняют область  $\Omega$ , приведённую на рис. 9. Началу координат  $\tilde{E}^{-1} = 0, \tilde{R} = 0$  соответствует  $\lambda = 0, \sigma = \sigma^* = 0,5\lambda_0^*$ , где  $\lambda_0^* = 0,646$  — корень уравнения  $f(\lambda_0) = 0$ . Таким образом, через начало координат проходит кривая  $\sigma^* = 0,323$ . Очевидно, областью неустойчивости, т.е. областью существования растущих решений, является часть области  $\Omega$ , ограниченная сверху кривой  $\sigma = 2/R_m$  ( $\kappa = 0$ ). Область неустойчивости совпадает с областью  $\Omega$  в пределе  $R_m \rightarrow \infty$ . При фиксированном значении  $R_m$  кривые  $\sigma = \text{const}$  являются кривыми равных значений инкремента нарастания наиболее неустойчивых возмущений  $\kappa = \sigma R_m/2 - 1$ .

Штриховыми линиями на рис. 9 изображены кривые  $\lambda = \text{const}$ , уравнения этих кривых легко получить в явном виде, исключая  $\sigma$  из соотношений (37). Кривая  $\lambda = 0$  проходит через начало координат и делит область  $\Omega$  на две подобласти. Для точки пересечения кривых  $\lambda = 0$  и  $\sigma = 0$  из (37) получаем  $\tilde{E}^{-1} = 0,25\lambda_0^* \approx 0,16, \tilde{R} = 0,5\lambda_0^* \approx 0,32$ . Подобласть, соответствующая значениям  $0 \leq \lambda \leq 1$ , заштрихована. Область неустойчивости содержит часть заштрихованной подобласти, если выполнено условие  $\sigma \leq \sigma^*$  или  $R_m \geq R_m^* = 2/\sigma^* \approx 6,19$ . В заштрихованной подобласти области неустойчивости наибольшей скоростью роста обладает первая локализованная мода. В качестве примера область неустойчивости первой локализованной моды при  $R_m = 1,2 \times 10^4$  отдельно изображена на рис. 10. Вместо кривых  $\sigma = \text{const}$  приведены кривые  $\kappa = \text{const}$ . При фиксиро-

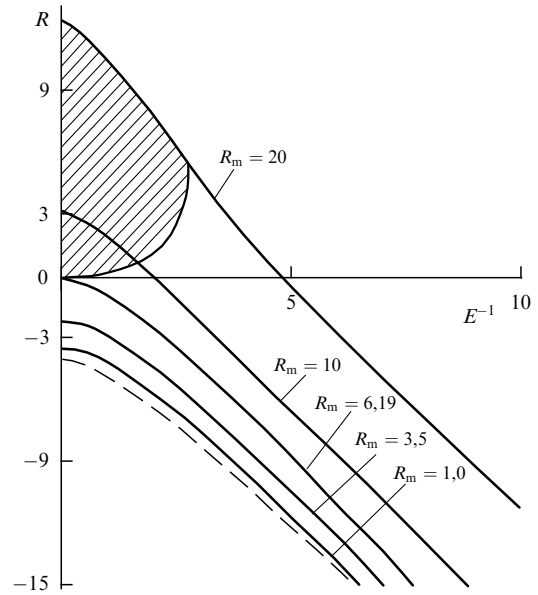


**Рис. 10.** Подобласть области неустойчивости, в которой наибольшей скоростью роста обладает первая локализованная мода, при  $R_m = = 1,2 \times 10^4$ .

ванном значении  $R_m > R_m^*$  кривые  $\lambda = \text{const}$  являются кривыми, вдоль которых пространственная структура локализованной моды не изменяется и определяется соотношениями (28), (34), (35). В частности, не изменяется радиус области восходящих движений  $x_0 = = \pi/\sqrt{R_m(1-\lambda)}$  локализованной моды. В рассматриваемой подобласти области неустойчивости максимальное значение  $\lambda_{\text{max}}(\sigma)$  параметр  $\lambda$  принимает в верхней точке S области неустойчивости, которой соответствует  $\sigma = = 2/R_m$ . Из (38) при  $R_m \gg 1$  получим асимптотику  $\lambda_{\text{max}} \approx 1 - (\pi/R_m)^{2/3}$ . Таким образом, в пределах рассматриваемой подобласти области неустойчивости  $x_0$  изменяется от минимального значения  $x_{0\text{min}} = \pi/\sqrt{R_m}$  на кривой  $\lambda = 0$  до максимального значения  $x_{0\text{max}} \approx \approx \pi^{2/3}/R_m^{1/6}$  в верхней точке области неустойчивости. Соответствующие размерные значения получаются умножением на масштаб  $\sqrt{\mu/\nu}h/\pi$ . Инкремент нарастания достигает максимального значения  $\kappa_{\text{max}} = R_m/R_m^* - 1$  в точке подобласти неустойчивости, соответствующей началу координат. Соответствующее размерное время  $\tau_{\text{min}}$ , за которое возмущение возрастает в  $e$  раз, получается умножением величины  $1/\kappa_{\text{max}}$  на масштаб времени  $h^2/(\pi^2\nu)$ .

В нижней подобласти области неустойчивости, которая при значениях  $R_m < R_m^* = 6,19$  совпадает со всей областью неустойчивости, наибольшей скоростью роста обладает периодическая первая мода, соответствующая огибающей первых гребней. При фиксированном значении  $R_m$  кривые  $\lambda = \text{const}$  являются кривыми, вдоль которых пространственная структура периодической моды не меняется и определяется соотношениями (33), (34), (36). В частности, остаются постоянными величины  $x_0 = \pi/\sqrt{R_m(1+|\lambda|)}$ ,  $L = \pi/\sqrt{R_m|\lambda|}$ ,  $x_0/L$ . Переход от периодических решений к локализованным при пересечении кривой  $\lambda = 0$ , являющейся границей между подобластями, происходит непрерывным образом.

Условие  $R_m > R_m^* = 6,19$  является необходимым и достаточным условием существования верхней подобласти области неустойчивости, в которой наибольшей



**Рис. 11.** Границы областей влажноконвективной неустойчивости на плоскости  $E^{-1} \equiv \sqrt{T}, R$  для различных значений  $R_m$ . Штриховая линия — соответствующая кривая для сухой конвекции Рэлея ( $R_m = 0$ ). Заштрихована подобласть области неустойчивости при  $R_m = 20$ , в которой наибольшей скоростью роста обладают локализованные решения.

скоростью роста обладают локализованные возмущения. При  $R_m < R_m^*$  неустойчивыми могут быть только пространственно-периодические структуры.

При фиксированном значении  $R_m$  верхняя граница области неустойчивости (кривая  $\sigma = 2/R_m$ ) определяет зависимость критического значения числа Рэлея от числа Тейлора (Экмана)  $R = R_{\text{cr}}(T)$ . Найдём предел этой зависимости при  $R_m \rightarrow 0$ . Для построения кривой  $\sigma = 2/R_m$  берётся участок зависимости  $\lambda = \psi(\lambda_0)$ , удовлетворяющий условию  $\lambda \leq \lambda_{\text{max}}$ . Поскольку кривая  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  при  $\lambda \rightarrow -\infty$  имеет асимптоту  $\lambda_0 = 1/2$  (32), из уравнения (38) получаем  $\lambda_{\text{max}} = 1/2 - 4/R_m$ . Таким образом, для всего рассматриваемого участка кривой  $\lambda = \psi(\lambda_0)$  имеем  $|\lambda| \gg 1$ ,  $\lambda_0 \approx 1/2$ . Исключая  $\lambda$  из соотношений (37), после умножения на  $R_m$  получим зависимость  $R = R_{\text{cr}}(T)$  (9) для сухой конвекции Рэлея. Одновременно из (37) найдём  $R_m|\lambda| = 4\sqrt{T+1}$ , откуда  $L = \pi/(2(T+1)^{1/4})$ . Переход к пределу в периодическом решении (33), (34), (36) с точностью до постоянного множителя даёт  $w = \cos(\alpha x)$ ,  $\alpha = \pi/(2L) = (1+T)^{1/4}$ , что совпадает с наиболее опасным возмущением модели Рэлея (9). Таким образом, при  $R_m \rightarrow 0$  имеет место непрерывный переход от влажной конвекции к сухой конвекции Рэлея. Зависимости  $R = = R_{\text{cr}}(T)$  для различных значений  $R_m$  показаны на рис. 11.

Приведём основные результаты в случае отсутствия вращения,  $\tilde{E}^{-1} = 0$ , представляющем самостоятельный интерес. Этому случаю соответствует верхняя точка области неустойчивости, для которой из (37) имеем  $\tilde{R}_{\text{max}} = \lambda_{\text{max}}$ . С учётом найденных выше асимптотик  $\lambda_{\text{max}}$  получаем асимптотики критического числа Рэлея  $R_{\text{cr}}$  в отсутствие фонового вращения:

$$R_{\text{cr}} = -4 + \frac{R_m}{2}, \quad R_m \ll 1; \tag{39}$$

$$R_{\text{cr}} \approx R_m \left( 1 - \left( \frac{\pi}{R_m} \right)^{2/3} \right), \quad R_m \gg 1.$$

При  $R_m = R_m^*$ , очевидно,  $R_{cr} = 0$ . Это соотношение, а также второе соотношение (39) можно переписать в альтернативном виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{cr} &= \gamma_a, \quad R_m = R_m^*; \\ \gamma_{cr} &= \gamma_m + (\gamma_a - \gamma_m) \left( \frac{\pi}{R_m} \right)^{2/3}, \quad R_m \gg 1. \end{aligned} \tag{40}$$

Подчеркнём, что для верхней подобласти области неустойчивости значение  $\gamma_{cr}$  всегда лежит в интервале  $\gamma_m < \gamma_{cr} \leq \gamma_a$ , который соответствует условно неустойчивой стратификации. Нейтральные решения, соответствующие  $R_{cr}$ , являются локализованными при  $R_{cr} \geq 0$  ( $R_m \geq R_m^*$ ) и периодическими при  $R_{cr} < 0$ . Для нейтральных решений из (28), (33) следует  $x_0 = \pi/\sqrt{R_m - R_{cr}}$ ,  $L = \pi/\sqrt{|R_{cr}|}$ , где второе соотношение относится только к периодическим решениям. Для локализованных нейтральных решений имеем асимптотику  $x_0 \approx \pi^{2/3}/R_m^{1/6}$ ,  $R_m \gg 1$ . При  $R_m = R_m^*$  имеем  $x_0 = \pi/\sqrt{R_m^*}$ . Для периодических нейтральных решений получаем асимптотики  $x_0 \approx (1 - R_m/16)\pi/2$ ,  $L \approx (1 + R_m/16)\pi/2$ ,  $R_m \ll 1$ . Как видно, уже при  $R_m \ll 1$  учёт фазовых переходов в модели Рэлея деформирует симметричную сухую конвективную ячейку, так что область нисходящих движений становится шире области восходящих, а размер ячейки  $L_* = x_0 + L$  в первом приближении не меняется.

Аналогичным образом устроена область неустойчивости второй моды. Она лежит внутри области неустойчивости первой моды и качественно ей подобна. Для второй моды соответствующее значение  $R_m^* = 8,75$ , она всегда растёт медленнее первой моды.

Отметим, что радиус  $L$  области нисходящих движений наиболее неустойчивой первой периодической моды совпадает с радиусом областей нисходящих движений осциллирующей функции Грина  $G$ :  $L = L_G = \pi/\sqrt{R_m|\lambda|}$ . В этом заключается механизм влияния пространственной структуры осциллирующей функции Грина на структуру наиболее неустойчивого пространственно-периодического решения.

Кратко подведём итоги раздела. Учёт фазовых переходов влаги приводит к принципиальным отличиям влажной конвекции от сухой конвекции Рэлея. На плоскости параметров область влажноконвективной неустойчивости в общем случае состоит из двух подобластей, в одной из которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные конвективные валы, во второй — пространственно-периодические системы конвективных валов с узкими (сконцентрированными) областями восходящих движений.

### 7. Локализованные осесимметричные структуры (конвективные вихри)

В данном разделе построены локализованные осесимметричные решения интегрального уравнения (15) — аналоги локализованных конвективных валов, рассмотренных в разделе 6. Соответствующие решения описывают конвективные вихри различных пространственных масштабов, от масштаба отдельного облака до масштаба тропических циклонов.

Для осесимметричных возмущений  $w = w(r)$ , удовлетворяющих условию знакоопределённости  $w(r) \geq 0$ ,  $r \in (0, r_0)$ ;  $w(r) \leq 0$ ,  $r > r_0$ , (15) сводится к уравнению

$$w(r) = R_m \int_0^{r_0} G(\rho, r) w(\rho) \rho d\rho, \tag{41}$$

$$G(\rho, r) = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \times \begin{cases} \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) I_0(\lambda_1 \rho) - \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) I_0(\lambda_2 \rho), & \rho < r, \\ \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 \rho) I_0(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 \rho) I_0(\lambda_2 r), & \rho > r, \end{cases}$$

с очевидным краевым условием  $w(r_0) = 0$ . Здесь  $I_n(r)$ ,  $K_n(r)$  — модифицированные функции Бесселя. Определённые формулой (12) собственные значения  $\lambda_{1,2}^2$  далее считаются действительными и положительными.

Решения уравнения (41) ищутся в форме, аналогичной (19):

$$w(r) = \frac{J_0(p_1 r)}{J_0(p_1 r_0)} - \frac{J_0(p_2 r)}{J_0(p_2 r_0)}, \quad 0 < r < r_0, \tag{42}$$

где  $J_n(r)$  — функции Бесселя. Подстановка (42) в (41) и приравнивание коэффициентов при  $J_0(p_j r)$  в левой и правой частях, как и ранее, приводит к выражениям (20) для параметров  $p_2 > p_1$ . Приравнивание нулю коэффициентов при  $I_0(\lambda_j r)$  в правой части даёт два уравнения, которые после простых преобразований можно представить в виде

$$\frac{J_1(p_j r_0)}{J_0(p_j r_0)} = A_j \frac{K_1(\lambda_1 r_0)}{K_0(\lambda_1 r_0)} - B_j \frac{K_1(\lambda_2 r_0)}{K_0(\lambda_2 r_0)}, \quad j = 1, 2, \tag{43}$$

где  $A_j = \lambda_2(p_j^2 + \lambda_1^2)/p_j(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$ ,  $B_j = \lambda_1(p_j^2 + \lambda_2^2)/p_j(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$ . Поскольку  $p_j$ ,  $\lambda_j$  могут быть выражены через  $\lambda_0$ ,  $\lambda$  с использованием соотношений (20), уравнения (43) образуют систему, связывающую три параметра  $\lambda_0$ ,  $\lambda$ ,  $Z_0 = 0,5R_m r_0$ . Исключение из (43) параметра  $Z_0$  формально математически приводит к функциональной зависимости  $\lambda = f(\lambda_0)$ . Как и для плоских локализованных мод, данная зависимость обеспечивает существование нетривиального решения и используется при построении области неустойчивости.

Асимптотическую форму зависимости  $\lambda = f(\lambda_0)$  можно найти, полагая  $p_j r_0, \lambda_j r_0 \gg 1$ . Пользуясь асимптотическими представлениями для функций Бесселя, из (43) получим уравнения  $\tan(p_{1,2} r_0 - \pi/4) = \pm(\lambda_0^{-1} - 1)^{1/2}$ , откуда

$$p_1 r_0 - \frac{\pi}{4} = \arctan \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi n, \tag{44}$$

$$p_2 r_0 - \frac{\pi}{4} = -\arctan \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi m,$$

где  $n \geq 0$ ,  $m > n$ . Сложение уравнений (44) даёт

$$r_0 = \frac{\pi(n + m + 1/2)}{\sqrt{R_m(1 - \lambda)}}. \tag{45}$$

Исключение из уравнений (44) параметра  $r_0$  приводит к функциональной зависимости

$$\begin{aligned} \lambda = f(\lambda_0) &= 1 - (1 - \lambda_0) \times \\ &\times \left( \frac{m - n}{n + m + 1/2} - \frac{2}{\pi(n + m + 1/2)} \arcsin \sqrt{1 - \lambda_0} \right)^{-2}, \end{aligned} \tag{46}$$

которая распадается на ряд ветвей и аналогична зависимости (29) для плоских локализованных мод.

Для точного определения ветвей зависимости  $\lambda = f(\lambda_0)$  в работе [22] разработан соответствующий численный алгоритм. Обозначив  $x_1 = p_1 r_0$ ,  $x_2 = p_2 r_0$  и воспользовавшись соотношениями (20), представим систему (43) в виде

$$J_1(x_j) = F_j(x_j, \lambda_0, \lambda) J_0(x_j), \quad j = 1, 2; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1(\lambda_0, \lambda)}{p_2(\lambda_0, \lambda)}, \quad (47)$$

где выражения для  $F_j$  сразу следуют из (43). При заданных  $\lambda_0, \lambda$  каждое из первых двух уравнений имеет счётное число корней  $x_1^n, x_2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , пронумерованных в порядке возрастания. Можно показать, что  $x_1^n \in (\mu_{n-1}^{(1)}, \mu_n^{(0)})$ ,  $x_2^n \in (\mu_{n-1}^{(0)}, \mu_n^{(0)})$ , где  $\mu_i^{(0)}, \mu_i^{(1)}$  — нули функций Бесселя нулевого и первого порядка для  $i \neq 0$ ,  $\mu_0^{(0)} = \mu_0^{(1)} = 0$ . При фиксированном значении  $\lambda \in (0, 1)$  для каждого  $1 > \lambda_0 > \lambda$  находились корни  $x_1 = x_1^n$  из интервала с номером  $n$  и  $x_2 = x_2^m$  из интервала с номером  $m > n$ , что отвечало выбору определённой ветви зависимости  $\lambda = f(\lambda_0)$ . Значение  $\lambda_0$ , при котором  $x_1/p_1 = x_2/p_2$ , в совокупности со значением  $\lambda$  определяло искомую ветвь зависимости. Одновременно автоматически определялось значение  $r_0 = x_1/p_1$ . Выражения (45), (46) дают асимптотику  $r_0$  и асимптотику ветвей при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Исследование знакоопределённости решений проводится с использованием явного выражения для решения

$$w(r) = \begin{cases} \frac{J_0(p_1 r)}{J_0(p_1 r_0)} - \frac{J_0(p_2 r)}{J_0(p_2 r_0)}, & 0 < r < r_0, \\ \frac{p_2^2 - p_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left( \frac{K_0(p_1 r)}{K_0(p_1 r_0)} - \frac{K_0(p_2 r)}{K_0(p_2 r_0)} \right), & r > r_0, \end{cases}$$

и полученной информации о локализации корней  $x_{1,2} = p_{1,2} r_0$ . Как показывает анализ, условие  $w(r) \geq 0$ ,  $r \in (0, r_0)$  выполняется только при  $p_1 r_0 \in (0, \mu_1^{(0)})$ ,  $p_2 r_0 \in (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)})$ . Таким образом, в отличие от двумерной задачи с плоской геометрией, существует единственная локализованная осесимметричная мода, удовлетворяющая сформулированным условиям. В асимптотических соотношениях (44)–(46) ей соответствует для  $n = 0$ ,  $m = 1$ . По известному распределению  $w(r)$  для этой моды однозначно находятся распределения радиальной  $u(r)$  и тангенциальной  $v(r)$  компонент скорости, причём, как и ранее, тангенциальная компонента возникает из-за закручивающего действия силы Кориолиса. Полученная мода описывает конвективный вихрь со структурой, характерной для тропических циклонов на ранней стадии развития [6]: в нижней половине слоя имеется циклоническая циркуляция и приток массы к оси вихря, в верхней половине — антициклоническая циркуляция и отток массы от оси.

Кривая  $\lambda = f(\lambda_0)$  для осесимметричной локализованной моды на плоскости  $\lambda_0, \lambda$  всюду, за исключением точки  $\lambda_0 = \lambda = 1$ , лежит правее кривой  $\lambda = f(\lambda_0)$  для первой плоской локализованной моды. Таким образом, при фиксированных значениях параметров задачи наибольшей скоростью роста обладает локализованная осесимметричная мода. Область неустойчивости этой моды также строится с использованием зависимости  $\lambda = f(\lambda_0)$  и соотношений (37), определяющих отображение на плоскость нормированных параметров  $\tilde{E}^{-1}, \tilde{R}$ . Соответствующая область существует только при  $R_m > 5,04$  и качественно подобна области неустойчивости первой локализованной плоской моды (см. рис. 10), которая всюду лежит внутри области неустойчивости локализо-

ванной осесимметричной моды. Для осесимметричной моды кривые  $\lambda = \text{const}$  являются кривыми, вдоль которых пространственная структура моды не меняется, в частности, не изменяется радиус области восходящих движений  $r_0$ . Максимальное значение  $r_0$  достигается в верхней точке области неустойчивости, при  $R_m \gg 1$  радиус  $r_{0\text{max}} \approx (2\mu_1^{(1)})^{1/2} (\ln R_m)^{-1/4}$ . Минимальное значение  $r_0$  соответствует кривой  $\lambda = 0$ ; из (49), полагая  $n = 0$ ,  $m = 1$ , имеем  $r_{0\text{min}} \approx 3\pi / (2\sqrt{R_m})$ .

В общем случае область неустойчивости на плоскости параметров  $\tilde{E}^{-1}, \tilde{R}$  должна быть продолжена ниже кривой  $\lambda = 0$  для осесимметричной локализованной моды. По-видимому, в нижней подобласти области неустойчивости (при  $R_m > 5,04$ ) максимальной скоростью роста будут обладать ячейковые структуры, пространственный период которых стремится к бесконечности при приближении к границе между подобластями  $\lambda = 0$ , а радиус области восходящих движений внутри ячейки стремится к  $r_{0\text{min}}$ .

## 8. Численные оценки для локализованных мод

При  $R_m \gg R_m^*$  безразмерные радиусы области восходящих движений локализованных мод  $x_{0\text{max}}, r_{0\text{max}}$  очень слабо зависят от значения  $R_m$ , и соответствующее размерное значение в основном определяется величиной  $h\sqrt{\mu/v}$ . Для оценок возьмём набор параметров тропосферы [3, 4]:  $f \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha \approx 3 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $\gamma_a \approx 10^{-2} \text{ К м}^{-1}$ ,  $\gamma_m \approx 6,4 \times 10^{-3} \text{ К м}^{-1}$ . В численных моделях крупномасштабных движений (масштаба порядка тропического циклона) обычно полагают [6]  $h \approx 10^4 \text{ м}$ ,  $\mu \approx 10^5 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $v \approx 10 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . При этом  $R_m \approx 1,2 \times 10^4$ ,  $\tilde{E}^{-1} \approx 10^{-2}$ , что практически соответствует отсутствию фонового вращения,  $R_{\text{cr}} \approx R_m$ ,  $\gamma_{\text{cr}} \approx \gamma_m$ . В размерном виде имеем  $x_{0\text{min}} \approx 10 \text{ км}$ ,  $x_{0\text{max}} \approx 140 \text{ км}$ ,  $r_{0\text{min}} \approx 15 \text{ км}$ ,  $r_{0\text{max}} \approx 300 \text{ км}$ . Выбранное значение коэффициента горизонтальной вязкости  $\mu$  соответствует движениям с масштабом  $x_{0\text{max}}, r_{0\text{max}}$ . Таким образом, при указанных значениях параметров экспоненциально растущий со временем локализованный осесимметричный вихрь имеет структуру и масштаб тропического циклона на ранней стадии развития, а локализованный конвективный вал можно считать его плоским аналогом. Для движений с масштабом  $x_{0\text{min}}, r_{0\text{min}}$  выбранное значение  $\mu$  является завышенным. Рассмотрим движения масштаба отдельного облака:  $h \approx 10^3 \text{ м}$ ,  $\mu \approx 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , остальные параметры те же. Имеем  $R_m \approx 1,2 \times 10^3$ ,  $\tilde{E}^{-1} \approx 10^{-3}$  и в размерном виде:  $x_{0\text{min}} \approx 100 \text{ м}$ ,  $x_{0\text{max}} \approx 700 \text{ м}$ ,  $r_{0\text{min}} \approx 150 \text{ м}$ ,  $r_{0\text{max}} \approx 1,5 \text{ км}$ , что по порядку величины соответствует горизонтальным масштабам конвективных облаков.

## 9. Некоторые экспериментальные данные и результаты численных расчётов

Полученные выше решения описывают лишь начальную стадию развития неустойчивости — в системе динамических уравнений не учитывались нелинейные адвективные слагаемые. Численное моделирование влажной конвекции в рамках полных нелинейных уравнений проводилось в целом ряде работ [7–15], причём вычисления носили характер отдельных численных экспериментов. Сравнение с численными результатами показывает, что основные структурные особенности аналитических решений сохраняются и в полных нелинейных моделях.

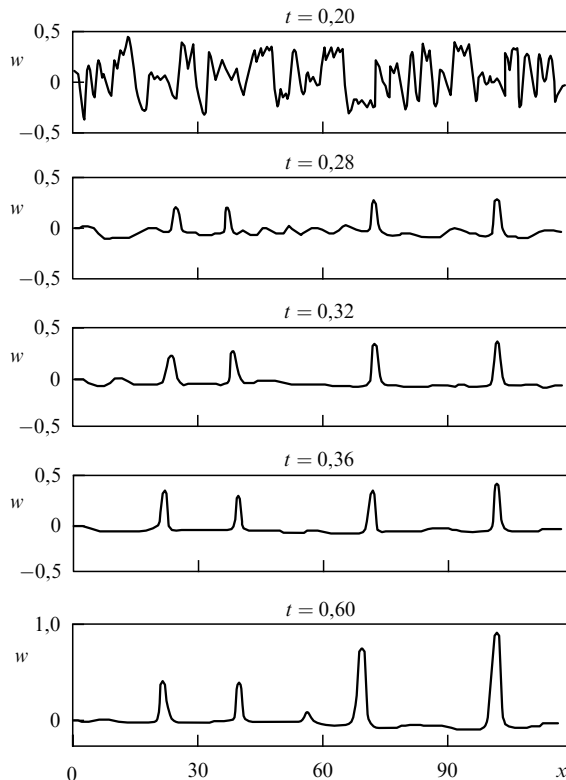


Рис. 12. Полученные в [12] горизонтальные профили вертикальной скорости в последовательные моменты времени.

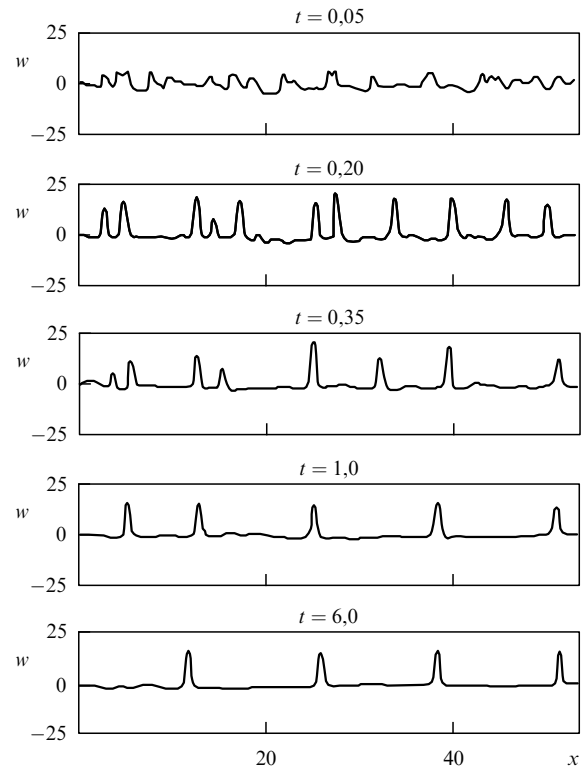


Рис. 13. Полученные в [14] горизонтальные профили вертикальной скорости в последовательные моменты времени.

В качестве одного из показательных примеров отметим работу [12], в которой рассматривалась полная двумерная система уравнений тепловой конвекции с включением конденсационного источника тепла в форме (5). Для численного решения системы использовался многомодовый спектральный метод, на горизонтальных границах расчётной области ставились условия периодичности. Варьируя параметр стратификации  $\gamma$ , автор [12] рассматривал процесс развития и установления влажной конвекции в слое атмосферы толщиной  $h = 1$  км, инициируемый заданием в начальный момент времени малого случайного возмущения температуры. На рисунке 12 представлены полученные в [12] горизонтальные распределения вертикальной скорости в последовательные моменты времени для  $\gamma - \gamma_a = 3 \times 10^{-3} \text{ К м}^{-1}$ . Отчётливо видно, как в процессе развития конвекции формируются узкие области интенсивных восходящих движений, разделённые широкими областями нисходящих движений с практически нулевой скоростью. При учёте адвективных членов конвективные "пиковые" структуры переходят в стационарный режим, время установления которого составляет от двух до десяти часов. Небольшие отличия высоты пиков на рис. 12, видимо, имеют численную природу.

Физически более полная модель влажной конвекции рассматривалась в работе [14]. В этой модели была учтена достаточно сложная структура конвективного пограничного слоя, состоящего из тонкого приземного слоя постоянных потоков, слоя свободной конвекции и собственно облачного слоя с неустойчивой стратификацией. Источник скрытой теплоты в модели [14] "включался" только при достижении поднимающимся воздухом уровня конденсации (для опускающегося воздуха он по-прежнему был равен нулю). Результаты одного из вариантов расчётов [14] представлены на рис. 13. Видно,

что и в этих численных расчётах формируются облачные периодические структуры (облачные гряды) с узкими сконцентрированными областями восходящих движений.

Остановимся также кратко на некоторых результатах метеорологических наблюдений. Процессы влажной конвекции наиболее ярко выражены в пограничном слое над поверхностью океанов и морей, в частности, при так называемых холодных вторжениях, связанных с натеканием холодного полярного воздуха на тёплую поверхность северных морей. На спутниковых фотографиях в этой области обнаруживаются разнообразные упорядоченные конвективные структуры в форме периодических облачных гряд, открытых или закрытых пространственных конвективных ячеек (соответственно с восходящими или нисходящими движениями в центре ячейки). Уже достаточно давно были установлены принципиальные несоответствия параметров облачных структур с предсказаниями модели Рэлея. Первое несоответствие связано с отношением аспекта конвективной ячейки, т.е. отношением горизонтального размера конвективной ячейки к вертикальному. В то время как в модели Рэлея это отношение составляет приблизительно 2–3 (в зависимости от формы граничных условий), для наблюдаемых облачных структур оно может быть на порядок больше [11, 12, 27]. Другое яркое несоответствие связано с наблюдаемой горизонтальной асимметрией в распределении восходящих и нисходящих движений — площадь облачного покрова или площадь восходящих движений может составлять менее 10 % всей площади, охваченной упорядоченной конвекцией [12, 27]. Как показано выше, по крайней мере, на качественном уровне указанные несоответствия объясняются влиянием фазовых переходов влаги на процессы конвекции.

## 10. Выводы

Конвективные движения во влажном насыщенном воздухе сопровождаются выделением скрытой теплоты конденсации. С учётом этого эффекта рассмотрена задача о конвективной неустойчивости слоя влажного насыщенного воздуха, обобщающая постановку классической задачи Рэлея. Представлено аналитическое решение задачи, демонстрирующее принципиальные отличия влажной конвекции от конвекции Рэлея. Так, в общем случае область неустойчивости на плоскости определяющих параметров состоит из двух подобластей, в одной из которых наибольшей скоростью роста обладают либо уединённые конвективные валы (плоская геометрия задачи), либо локализованные осесимметричные конвективные вихри со структурой тропического циклона на ранней стадии развития. В зависимости от значений параметров пространственный масштаб таких возмущений меняется от масштаба отдельного облака до масштаба тропических циклонов. Найдено необходимое и достаточное условие существования указанной подобласти. Во второй подобласти наибольшей скоростью роста обладают периодические по пространству нелинейные структуры, пространственный период которых стремится к бесконечности на границе между подобластями. Для них в пределах каждой конвективной ячейки характерна существенная локализация областей восходящих движений, так что коэффициент покрытия атмосферы облачностью оказывается всегда строго меньше единицы и при приближении к границе между подобластями стремится к нулю. Продемонстрирован предельный переход к конвекции Рэлея в гидростатическом приближении.

## 11. Заключение

Отметим некоторые вопросы, требующие дальнейшего теоретического исследования. В рамках представленной модели к ним относится вопрос о пространственной структуре трёхмерных конвективных ячеек, обладающих максимальной скоростью роста, а также вопрос об устойчивости найденных решений. Для более адекватного описания процесса формирования мелкомасштабных облачных структур необходима модель, в которой не используется гидростатическое приближение. В отсутствие фонового вращения такая модель развита в недавней работе [28]. Как и для конвекции Рэлея, принципиально важным является исследование закритических нелинейных режимов конвекции на основе соответствующих амплитудных уравнений.

Авторы благодарят Е.А. Кузнецова за интерес к работе и возможность представления результатов на ежегодной сессии Совета РАН по нелинейной динамике.

## Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
2. Гершуни Г З, Жуховицкий Е М *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости* (М.: Наука, 1972)
3. Gill A E *Atmosphere-Ocean Dynamics* (New York: Academic Press, 1982) [Гилл А *Динамика атмосферы и океана* (М.: Мир, 1986)]
4. Матвеев Л Т *Курс общей метеорологии. Физика атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1984)
5. Emanuel K A *Atmospheric Convection* (New York: Oxford Univ. Press, 1994)
6. Хаин А П *Математическое моделирование тропических циклонов* (Л.: Гидрометеиздат, 1989)
7. Asai T, Nakasugi I *J. Meteorolog. Soc. Jpn.* **II 60** 425 (1982)
8. Asai T, Nakasugi I *J. Meteorolog. Soc. Jpn.* **II 55** 151 (1977)
9. Bretherton C S *J. Atmos. Sci.* **44** 1809 (1987)
10. Yamasaki M *J. Meteorolog. Soc. Jpn.* **II 52** 365 (1974)
11. Yamasaki M *J. Meteorolog. Soc. Jpn.* **II 50** 465 (1972)
12. van Delden A *Beitr. Phys. Atmos.* **58** 202 (1985)
13. Huanq X-Y *Tellus A* **42** 270 (1990)
14. Chlond A *Beitr. Phys. Atmos.* **61** 312 (1988)
15. Huang X-Y, Källén E *Tellus A* **38** 381 (1986)
16. Haque S M *Quart. J. R. Meteorolog. Soc.* **78** 394 (1958)
17. Kuo H L *Tellus* **13** 441 (1961)
18. Lilly D K *Mon. Weather Rev.* **88** 1 (1960)
19. Gill A, in *Intense Atmospheric Vortices* (Berlin: Springer-Verlag, 1982) [Гилл А Е, в сб. *Интенсивные атмосферные вихри* (Под ред. Л Бенгтссона, Дж Лайтхилла) (М.: Мир, 1985) с. 130]
20. Шмерлин Б Я, Калашник М В *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **25** 421 (1989) [Shmerlin B Ya, Kalashnik M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **25** 307 (1989)]
21. Шмерлин Б Я, Калашник М В *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **25** 810 (1989) [Shmerlin B Ya, Kalashnik M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **25** 599 (1989)]
22. Калашник М В, Шмерлин Б Я *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **26** 787 (1990) [Kalashnik M V, Shmerlin B Ya *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **26** 577 (1990)]
23. Калашник М В, Шмерлин Б Я *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **26** 1034 (1990) [Kalashnik M V, Shmerlin B Ya *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **26** 759 (1990)]
24. Гутман Л Н *Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов* (Л.: Гидрометеиздат, 1969)
25. Белов П Н *Практические методы численного прогноза погоды* (Л.: Гидрометеиздат, 1967)
26. Калашник М В, Ингель Л Х *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **24** 1327 (1988)
27. Agee E A *Dyn. Atmos. Oceans* **10** 317 (1987)
28. Шмерлин Б Я, Калашник М В, Шмерлин М Б *ЖЭТФ* **142** 1265 (2012) [Shmerlin B Ya, Kalashnik M V, Shmerlin M B *JETP* **115** 1111 (2012)]

### Rayleigh convective instability in the presence of phase transitions of water vapor. The formation of large-scale eddies and cloud structures

**B.Ya. Shmerlin.** Research and Production Association "Typhoon", ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation  
Tel. +7 (48439) 7-19-13. Fax +7 (48439) 4-09-10. E-mail: shmerlin@typhoon.obninsk.ru

**M.V. Kalashnik.** Research and Production Association "Typhoon", ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation;  
A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation;  
Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering of the National Research Nuclear University "MEPhI",  
Studgorodok 1, 249040 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation  
Tel. +7 (48439) 5-23-17. Fax +7 (48439) 4-09-10. E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Convective motions in moist saturated air are accompanied by the release of latent heat of condensation. Taking into account this effect, the problem of convective instability of a moist saturated air layer, which generalizes the formulation of the classical Rayleigh problem, is considered. The analytical solution demonstrating the fundamental difference between moist convection and Rayleigh convection is obtained. At the loss of stability in the two-dimensional case solitary convective rolls or spatially periodic chains of rollers with localized areas of upward motion evolve. In the case of axial symmetry the growth of solitary convective vortices with circulation characteristic of tropical cyclones (hurricanes) and the scale of tornado scale to the scale of tropical cyclones is possible.

PACS numbers: **44.25.+f**, 47.20.Bp, 47.27.De, 47.55.P-, 92.60.Ox, 92.60.Qx

Bibliography — 28 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (5) 497–510 (2013)

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201305d.0497

Received 16 February 2012, revised 30 March 2012

*Physics – Uspekhi* **56** (5) (2013)