Май 2013 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 183, № 5*

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Новая жизнь полной интегрируемости

Л.Д. Фаддеев

Приводится краткий обзор нового развития понятия полной интегрируемости динамической системы и его квантовой версии в последние 40 лет. Описана новая техника работы с интегрируемыми моделями и её главные приложения.

PACS numbers: 02.30.Ik, 45.20.Jj, 75.10.Pq DOI: 10.3367/UFNr.0183.201305b.0487

Настоящий обзор основан на докладах автора на симпозиуме для иностранных членов Шведской академии наук в ноябре 2011 г., зимней школе "Нелинейные волны" в Нижнем Новгороде в марте 2012 г. и конференции, посвящённой памяти В.Л. Гинзбурга, в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН (ФИАН) в мае 2012 г. Моей целью было познакомить широкую аудиторию физиков-теоретиков с быстро развивающейся областью математической физики вокруг понятия полной интегрируемости. Естественно, что изложение основано главным образом на собственном опыте и не покрывает всех аспектов этого развития.

Понятие полной интегрируемости в гамильтоновой механике было создано и развито в XIX в. знаменитыми математиками и механиками Якоби, Пуассоном, Лиувиллем, Гамильтоном и др. В современном изложении (см., например, монографию В.И. Арнольда [1]) это понятие формулируется следующим образом: на фазовом пространстве Γ с координатами $(\xi) = (\xi^1, \ldots, \xi^N)$ задана антисимметричная матрица $\Omega^{mn}(\xi)$, определяющая скобки Пуассона координат

$$\{\xi^m, \xi^n\} = \Omega^{mn}(\xi)$$

и функций на фазовом пространстве

$$\{f, g\} = \Omega^{mn} \partial_m f \, \partial_n g \, .$$

Скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$\big\{\{f, g\}, h\big\} + \big\{\{h, f\}, g\big\} + \big\{\{g, h\}, f\big\} = 0 \, ,$$

что обеспечивается соотношением

$$\partial_k \Omega^{mn} \Omega^{kl} + \partial_k \Omega^{lm} \Omega^{kn} + \partial_k \Omega^{nl} \Omega^{km} = 0 \, .$$

Л.Д. Фаддеев. Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, наб. Фонтанки 27, 191023 Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Статья поступила 21 февраля 2013 г.

Эволюция задана уравнением Гамильтона

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \xi^n = [H, \xi^n] \, ,$$

где $H(\xi)$ — выделенная функция на фазовом пространстве, называемая энергией.

Совокупность $\{\Gamma, \Omega, H\}$ называется гамильтоновой структурой. В учебниках по механике фазовое пространство чётномерно, $N = 2L$, и в качестве ξ^n используются канонические координаты q_i и импульсы p^i, $i = 1, \ldots, L$ со скобкой

$$\{p^i, q_k\} = \delta^i_k \, .$$

Замечательная теорема Дарбу говорит, что если матрица Ω^{mn} не вырождена, то заменой координат матрица Ω^{mn} может быть приведена (по крайней мере, локально) к виду

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} ,$$

так что соответствующие координаты ξ будут каноническими. В общем случае координаты ξ могут быть выбраны в виде $\{\xi\} = \{\eta, \lambda\}$, где λ имеют нулевую скобку со всеми координатами, а для координат η скобка не вырождена. Функции от λ задают тривиальные интегралы движения, и вся динамика происходит в переменных η.

Невырожденная гамильтонова структура $\{\Gamma_{2L}, \Omega, H\}$ называется вполне интегрируемой[1], если существуют $L - 1$ функционально независимых от H и между собой функций $Q_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, L - 1$, таких, что

$$\{H, Q_i\} = 0 \, , \qquad \{Q_i, Q_k\} = 0 \, .$$

Функции Q_i называются коммутирующими интегралами движения. Для интегрируемых систем существует замена переменных

$$(\xi^m) \to (I^i, \alpha_k) \, ,$$

[1] В дальнейшем термин "вполне" будет опущен.

такая, что координаты I, α — канонические,

$$\{I^i, I^k\} = 0\,, \quad \{\alpha_i, \alpha_k\} = 0\,, \quad \{I^i, \alpha_k\} = \delta^i_k\,,$$

и энергия зависит только от переменных I,

$$H = H(I)\,.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, I = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \alpha_k = \frac{\partial H}{\partial I^k}\,,$$

так что $I^i(t) = I^i$, $\alpha_k(t) = \alpha_k(0) + \omega_k t$, $\omega_k = \partial H/\partial I^k$. В типичных примерах переменные α_k имеют значения на торе и поэтому называются углами. В целом набор переменных (I, α) называют переменными типа действие-угол.

В конце XIX – начале XX вв. поиски переменных типа действие-угол для конкретных динамических систем, обычно экзотических маятников, были увлекательным занятием для многих специалистов по классической механике. Достаточно упомянуть волчок Ковалевской или маятник Чаплыгина. Однако интерес к этой проблематике постепенно затих.

Новое развитие пришло с неожиданной стороны. В 1967 г. группа американских специалистов — Гарднер – Грин – Крускал – Миура (Gardner – Greene – Kruskal – Miura — GGKM) — изобрела замечательную конструкцию решения уравнения Кортевега – де Фриза (Kortweg – de Vries — KdV) [2]

$$v_t + 6 v v_x + v_{xxx} = 0\,.$$

В оригинальной работе [3] это уравнение возникло в гидродинамической задаче о течении на мелкой воде, но GGKM нашли его приложение в теории плазмы. Уравнение KdV имеет замечательное решение:

$$v(x,t) = \frac{A}{\cosh^2\big(a(x - vt)\big)}\,,$$

описывающее уединённую волну, которую можно наблюдать на пологом пляже (см. фото 1).

Крускал и Забуский окрестили это решение "солитоном", следуя моде в теории элементарных частиц. Их интуитивное представление вскоре оправдалось, когда теория солитонов заняла своё место в квантовой теории поля.

Фото 1. Солитоны на поверхности Финского залива в Комарове.

Метод GGKM состоит в замене переменных, в которой играют роль спектральные характеристики уравнения Шрёдингера

$$L\psi = k^2\psi\,, \quad L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + v(x)\,, \tag{1}$$

где в качестве потенциала $v(x)$ взяты начальные условия уравнения KdV. В наиболее простом случае, когда пространственная переменная x меняется на всей оси $-\infty < x < \infty$ и потенциал $v(x)$ считается исчезающим на бесконечности,

$$v(x) \to 0\,, \quad |x| \to \infty\,,$$

уравнение (1) имеет при положительном k решение $\psi(x,k)$ с асимптотиками

$$\psi(x,k) \to \exp(\mathrm{i}kx) + r(k)\,\exp(-\mathrm{i}kx)\,, \quad x \to -\infty\,,$$

$$\psi(x,k) \to t(k)\,\exp(\mathrm{i}kx)\,, \quad x \to \infty\,,$$

где коэффициенты прохождения $t(k)$ и отражения $r(k)$ удовлетворяют условию унитарности

$$\big|t(k)\big|^2 + \big|r(k)\big|^2 = 1\,.$$

Если $v(x)$ принимает в некотором интервале отрицательные значения, то существует дискретный спектр $k^2 = -\kappa_l^2$, $l = 1, \ldots, n$ с экспоненциально убывающими волновыми функциями

$$\psi_l(x) \to \exp(\kappa_l x)\,, \quad x \to -\infty\,;$$

$$\psi_l(x) \to c_l\,\exp(-\kappa_l x)\,, \quad x \to \infty\,.$$

Коэффициент $t(k)$ однозначно определяется по $r(k)$ и κ_l на основании условия аналитичности. Независимые данные рассеяния $\{r(k), \kappa_l, c_l\}$ однозначно определяют потенциал $v(x)$. Тематика восстановления потенциала по спектральным данным активно развивалась в 1950-х годах в работах Гельфанда, Левитана, Крейна, Марченко, Йоста, Кона, Мозеса и др. (см. ссылки на литературу в обзоре [4]). Её вариант для оператора Шрёдингера на всей вещественной оси, нужный для метода GGKM, был рассмотрен в моей кандидатской диссертации [5] в 1959 г.

GGKM показали, что преобразование от потенциала $v(x)$ к данным рассеяния линеаризует уравнение KdV:

$$\begin{array}{ccc} v(x) & \longrightarrow & v(x,t) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \big(r(k), \kappa_l, c_l\big) & \longrightarrow & \big(r(k,t), \kappa_l, c_l(t)\big)\,, \end{array}$$

где

$$r(k,t) = \exp(-\mathrm{i}k^3 t)\, r(k,0)\,, \quad c_l(t) = \exp(\kappa_l^3 t)\, c_l\,.$$

П. Лакс [6] дал важную интерпретацию роли линейной задачи (1) для описания динамики, управляемой уравнением KdV: оператор $L(t)$ с потенциалом $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, L(t) = \big[L(t), A(t)\big]\,,$$

где линейный дифференциальный оператор $A(t)$ третьего порядка также строится через $v(x,t)$. Тем самым динамика KdV является изоспектральной деформацией оператора L.

Некоторое время трюк GGKM рассматривался как замечательная, но одиночная удача, не допускающая обобщения. Однако в 1969 г. Захаров и Шабат [7] показали, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ)

$$\mathrm{i}\psi_t = -\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi$$

также решается аналогичным приёмом. Роль спектральной задачи в этом случае играет уравнение Дирака

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \begin{pmatrix} 0 & g\psi \\ g\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}\right) \phi(x,\lambda) = \lambda\phi(x,\lambda) .$$

Стало ясно, что метод обратной задачи рассеяния имеет более широкую область применимости.

В начале 1971 г. я встретился с В. Захаровым на конференции по обратным задачам в Новосибирске и только тогда узнал о методе GGKM. Обсуждая явные формулы, мы заметили, что в системе спектральных переменных одна половина линейно развивается со временем:

$$\arg r(k) \to \arg r(k) + k^3 t\,, \quad \ln c_l \to \ln c_l + \kappa_l^3 t\,,$$

а другая половина $|r(k)|$ и κ_l от времени не зависит. Аналогия с переменными действие-угол была очевидной. Отправляясь от этой идеи и известных результатов о спектральных характеристиках оператора Шрёдингера, мы показали, что переход к спектральным данным действительно является каноническим преобразованием к переменным типа действие-угол. Наша статья [8] с названием "Уравнение Кортевега – де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система" положила начало теории интегрируемых моделей.

Кратко, наши результаты состоят в следующем: уравнение KdV является гамильтоновой системой на бесконечномерном фазовом пространстве, координатами которого являются функции $v(x)$. Можно сказать, что x играет роль "номера координаты" $v(x)$. Скобка Пуассона координат имеет вид

$$\{v(x), v(y)\} = \delta'(x-y)\,.$$

Правая часть здесь антисимметрична и не зависит от координат, так что тождество Якоби выполняется тривиально. Функционал

$$N = \int v(x)\,\mathrm{d}x$$

коммутирует со всеми $v(x)$ и, таким образом, является центральным элементом. В подпространстве $N = \mathrm{const}$ скобка обратима и в качестве канонических координат можно взять чётную и нечётную компоненты преобразования Фурье:

$$v_{\mathrm{e}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\cos 2\pi x k\,\mathrm{d}x\,,$$

$$v_{\mathrm{o}} = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,\frac{\sin 2\pi x k}{2\pi k}\,\mathrm{d}x\,,$$

для $k > 0$

$$\{v_{\mathrm{e}}(k), v_{\mathrm{e}}(k')\} = 0\,, \quad \{v_{\mathrm{o}}(k), v_{\mathrm{o}}(k')\} = 0,$$

$$\{v_{\mathrm{e}}(k), v_{\mathrm{o}}(k')\} = \delta(k-k')\,.$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\,v_x^2 + v^3(x)\right)\mathrm{d}x\,,$$

очевидно, что она даёт уравнение KdV. Величина

$$P = \int \frac{1}{2}\,v^2(x)\;\mathrm{d}x$$

порождает уравнение

$$v_t + v_x = 0$$

и играет роль импульса.

Мы вычислили скобки Пуассона данных рассеяния и показали, что роль переменных типа "действие" играют функция

$$\rho(k) = \frac{k}{2}\ln\left(1 - |r(k)|^2\right)$$

и собственные значения κ_l. Аргумент $r(k)$ и константы c_l являются переменными типа "угол". Гамильтониан H и импульс P явно выражаются через действия:

$$P = \sum_l \kappa_l + \int_0^{\infty} k\rho(k)\,\mathrm{d}k\,, \qquad (2)$$

$$H = -\sum_l \kappa_l^3 + \int_0^{\infty} k^3\rho(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad (3)$$

Старшие нечётные моменты плотности $\rho(k)$ также являются локальными функционалами:

$$Q_n = \int_0^{\infty} k^{2n+1}\rho(k)\,\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(v, v_x, \ldots)\,\mathrm{d}x$$

с плотностями Φ_n, зависящими от v и её первых n производных.

Формулы (2), (3) напоминают формулы квантовой теории многих частиц в смешанном представлении полей и частиц. Первые слагаемые дают вклад частиц (солитонов) с дисперсией

$$\epsilon(p) = -p^3\,,$$

а вторые — для вторично квантованного поля с дисперсией

$$\omega(k) = k^3\,.$$

Тем самым интуиция Крускала и Забуского получает удовлетворительное подтверждение.

Для меня как специалиста по квантовой теории поля этот результат был особенно привлекательным. Он открывал новую возможность для механизма интерпретации частиц, выходящего за рамки парадигмы теории возмущений — "одно поле — одна частица". Однако нерелятивистский характер теории KdV и странный закон дисперсии $\omega(k) = k^3$ не были привлекательными для квантования.

Замечательный релятивистский пример дало другое уравнение, решаемое методом обратной задачи теории рассеяния, а именно уравнение с жаргонным названием сайн-Гордон [2] (sin-Gordon, SG)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{m^2}{\gamma}\sin\gamma\phi = 0\,.$$

Переменные действие-угол для этой, очевидно гамильтоновой, системы были получены Л. Тахтаджяном и мной [12]. Помимо солитонов двух типов, различающихся знаком топологического заряда, это уравнение имеет ещё и периодические решения — бризеры. Фазовое пространство солитона двумерно, как и в случае KdV, а пространство бризера имеет размерность 4, одна степень свободы для поступательного движения, а другая степень свободы для внутренних колебаний. Соответствующая второй степени свободы часть фазового пространства компактна и при квазиклассическом квантовании даёт конечное число состояний, которые можно интерпретировать как связанные состояния солитонов с антисолитонами. В результате квазиклассический спектр состоит из солитонов и антисолитонов с массой $8m/\gamma$ и их связанных состояний с массами

$$M_n = \frac{16m}{\gamma}\sin\frac{n\gamma}{16}\,,$$

помимо вклада скалярной частицы массой m. Независимо от нас этот спектр был получен в работе Дашена – Хасслакера – Невю [13], а наша работа была послана в *Physics Letters*, но пропала на почте и была опубликована позднее.

Модель SG обнаружила ряд замечательных черт.

1. Солитоны имеют топологический заряд

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J_0\,\mathrm{d}x\,, \quad J_0 = \partial\phi\,,$$

принимающий целые значения.

2. Масса солитонов и их фазы рассеяния обратно пропорциональны константе связи γ. Таким образом, в исходной теории со слабовзаимодействующими частицами появляются новые частицы, которые взаимодействуют сильно. Эту точку зрения я с успехом пропагандировал в лекциях в Гарварде и Принстоне в 1975 г. Она же отражена в моей неправильной работе [14] с амбициозным названием "Адроны из лептонов?", от этой работы, впрочем, осталась модель трёхмерного солитона, в которой роль топологического заряда играет инвариант Хопфа.

В первой половине 1970-х годов список интегрируемых моделей быстро пополнялся, в него попали такие системы, как магнетик Гейзенберга (Heisenberg Magnet — HM) и нелинейное киральное поле, в котором динамические переменные принимают значения в нелинейном многообразии $\mathbb{S}^2$ и компактной группе G соответственно. В этот список вошли также задачи с дискретным пространством, например цепочка Тоды. Число исследователей теории росло, появились целые группы — в США, Японии и Франции. В Ленинграде (Петербурге) к нам с Тахтаджяном присоединились Кулиш, Корепин, Склянин, Семенов-Тян-Шанский, Рейман, Матвеев, Итс. В институте Ландау вместе с Захаровым и Шабатом образовалась группа С.П. Новикова с молодыми сотрудниками С.В. Манаковым, И.М. Кричевером и другими. В нашей с Тахтаджяном монографии *Гамильтоновы методы в теории солитонов* [15] дано подробное изложение этого развития и приведён исчерпывающий список литературы.

Однако основной целью нашей группы было построение квантовой теории солитонов. К концу 1970-х годов стало ясно, что квантование возможно, если начинать со вспомогательной линейной задачи с некоммутирующими динамическими переменными и развивать для неё аналог спектральной теории. В результате был разработан квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), в котором, естественно, появилась техника анзаца Бете, разработанная Бете в [16] на примере спиновой цепочки спинов 1/2. Это развитие привело к созданию алгебраического анзаца Бете (Algebraic Bethe Ansatz — ABA), сформулированного в работах [17, 18]. Постепенно к уже упомянутой выше компании присоединились новые участники, среди них — Изергин, Смирнов, Тарасов, Боголюбов.

Я опишу основные понятия ABA на простейшем примере спиновой цепочки Гейзенберга спина 1/2, следуя работе [19].

Динамическими переменными являются спиновые операторы s_n^a, $n = 1, \ldots, N$, $a = 1, 2, 3$, где N — длина цепочки, с условием периодичности $N + 1 = 1$. Операторы s_n^a удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[s_m^a, s_n^b] = \mathrm{i}\delta_{mn}\,\epsilon^{abc} s_n^c\,,$$

где ϵ^{abc} — единичный антисимметричный тензор. Полное гильбертово пространство системы $\mathcal{H}$ задаётся как тензорное произведение пространств $\mathbb{C}^2$ для каждого спина:

$$\mathcal{H} = \prod_{n=1}^{N} \otimes\,\mathbb{C}^2,$$

а спиновые операторы с индексом n действуют нетривиально лишь в пространстве, занимающем n-е место в этом произведении, и задаются матрицами Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

как

$$s^i = \frac{1}{2}\,\sigma^i\,.$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = J\sum_{n=1}^{N} s_n^a s_{n+1}^a\,,$$

причём $s_{N+1}^a = s_1^a$. ABA основан на использовании вспомогательной линейной задачи

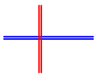
$$\Phi_{n+1} = L_n(\lambda)\,\Phi_n\,, \qquad (4)$$

[2] Рифма "сайн – Кляйн" (от "sine-Klein") довольно безвкусна, но прилипчива. Однако то, что мы называем уравнением Клейна – Гордона, следует называть уравнением Клейна – Фока (см. [9 – 11]).

где матрица $L_n(\lambda)$ имеет вид

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + s_n^3 & \mathrm{i}s_n^- \\ \mathrm{i}s_n^+ & \lambda - s_n^3 \end{pmatrix}, \quad s_n^{\pm} = s_n^1 \pm \mathrm{i}s_n^2 .$$

Можно сказать, что $L_n(\lambda)$ является блок-матрицей в пространстве, которое представляет собой тензорное произведение пространств: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, где в первом $\mathbb{C}^2$ реализуются спиновые операторы s_n, а второе явно задаётся матрицей $L_n(\lambda)$. Первое пространство естественно называть квантовым, а второе — вспомогательным. Удобно поставить в соответствие матрице $L_n(\lambda)$ граф

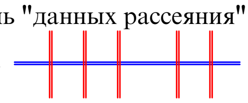
$L_n(\lambda) \sim$  ,

где вертикальная линия задаёт действие в квантовом пространстве, а горизонтальная — во вспомогательном.

Матрица монодромии системы (4), которая выражается как

$$M(\lambda) = \overrightarrow{\prod} L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix},$$

играет роль "данных рассеяния". Её граф имеет вид

$M(\lambda) \sim$ 

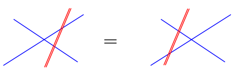
и представляет собой оператор в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$. Перестановочные соотношения для матричных элементов выводятся из локальных соотношений для спинов s_n^a следующим образом. Для матриц $L_n^1(\lambda)$ и $L_n^2(\mu)$, ассоциированных с одним и тем же квантовым пространством n и двумя вспомогательными 1 и 2, проверяется соотношение

$$R^{12}(\lambda - \mu)\, L_n^1(\lambda)\, L_n^2(\mu) = L_n^2(\mu)\, L_n^1(\lambda)\, R^{12}(\lambda - \mu)\,,$$

где $R^{12}(\lambda)$ — матрица в тензорном произведении вспомогательных пространств. Её граф аналогичен графу для L_n:

$R(\lambda) \sim$  ,

где обе линии соответствуют вспомогательным пространствам. Коммутационные соотношения для L_n изображаются картинкой



Из локального соотношения немедленно следует аналогичное соотношение для монодромии:

$$R^{12}(\lambda-\mu)\, M^1(\lambda)\, M^2(\mu) = M^2(\mu)\, M^1(\lambda)\, R^{12}(\lambda-\mu)\,. \quad (5)$$

Трудоёмкие вычисления скобок Пуассона в работах 1970-х годов замечательным образом заменяются элементарной алгеброй.

Из (5) следует, что семейство операторов

$$T(\lambda) = \mathrm{tr}\; M(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$$

коммутативно,

$$\big[T(\lambda), T(\mu)\big] = 0\,.$$

Можно показать, что гамильтониан содержится в этом семействе:

$$H = \frac{\mathrm{d}T(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\; T^{-1}(\lambda)\big|_{\lambda=i/2}\,.$$

Очевидно, что $T(\lambda)$ является полиномом по λ степени N с $N-1$ нетривиальными коэффициентами — функциями от динамических переменных s_n^a:

$$T(\lambda) = 2\lambda^N + \sum_{n=1}^{N-1} Q_n(s)\, \lambda^n\,.$$

Операторы Q_n, $n = 1, \ldots, N-1$ вместе с третьей компонентой полного спина:

$$S^3 = \sum_n \sigma_n^3\,,$$

образуют семейство N коммутирующих интегралов движения. Естественно считать, что спиновая цепочка задаёт систему с N степенями свободы (в квазиклассическом случае фазовое пространство одного спина является двумерной сферой $\mathbb{S}^2$, при квантовании ей соответствует конечномерное гильбертово пространство $\mathbb{C}^2$). Таким образом, рассматриваемая система вполне интегрируема, и роль переменных действия играют операторы семейства $T(\lambda)$. Роль переменных типа углов играют недиагональные элементы матрицы монодромии.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ вектор Ω старшего спина:

$$S_n^+ \Omega = 0\,.$$

Оператор $C(\lambda)$ его аннулирует:

$$C(\lambda)\, \Omega = 0\,.$$

Состояние

$$\Omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) = \prod_{i=1}^{l} B(\lambda_i)\, \Omega$$

является собственным вектором H:

$$H\Omega\big(\{\lambda\}\big) = J \sum_{i=1}^{l} \epsilon(\lambda_i)\, \Omega\big(\{\lambda\}\big)\,,$$

если λ_i удовлетворяет системе алгебраических уравнений, впервые возникших в работе Бете. Я не буду её приводить, отсылая читателя к статье [19]. Отмечу лишь, что дисперсия $\epsilon(\lambda)$ отрицательна при всех λ.

Обнаружение связи естественного квантования метода обратной задачи и формул анзаца Бете, полученных совершенно из других соображений, является замечательным примером развития современной математической физики. Оно стало отправной точкой для обобщений, идущих далеко от первоначального трюка Бете.

Уравнения Бете позволяют перейти к пределу $N \to \infty$. Ясно, что при этом надо строго следить за отбором допустимых состояний, так как наивный предел приводит к бесконечному тензорному произведению, имеющему несчётный базис. Такой отбор зависит от знака константы J.

При $J < 0$ возбуждения над состоянием Ω имеют положительную энергию и следует рассматривать состояния, для которых оператор $Q = S^3 - N/2$ имеет конечные положительные значения. Операторы $S^{\pm}$ теряют смысл в пределе $N \to \infty$. Таким образом, симметрия $\mathrm{SU}(2)$ нарушается и состояниями являются магноны с зарядом $Q = 1$ и их связанные состояния с $Q = 2, 3, \ldots$ Мы имеем дело с ферромагнетиком.

При $J > 0$ картина намного интереснее. Для построения вакуума следует заполнить море Дирака состояниями с отрицательной энергией. Это возможно, поскольку спектр, получаемый из анзаца Бете, имеет фермиевский характер, корни λ_i не могут совпадать. Построение вакуума было осуществлено Хюльтеном [20] в 1937 г., но корректное построение возбуждений долгое время было ошибочным. В [21] Тахтаджян и я показали, что одночастичные возбуждения имеют спин $1/2$ (а не 1, как долгое время считалось). Таким образом, при $J > 0$ симметрия $\mathrm{SU}(2)$ не нарушается, все три компоненты полного спина имеют смысл и возбуждением является одна частица со спином $1/2$. Мы имеем дело с антиферромагнетиком.

Можно сказать, что теория спиновой цепочки является замечательным примером для теории многочастичных систем: в ней реализуются нарушение симметрии, возникновение новых зарядов, построение нетривиального вакуума и т.д. Думаю, что мои сотрудники, упомянутые выше, согласятся, что получили на этой тематике стимулирующую тренировку.

В течение 1980-х годов тематика ABA быстро развивалась и привела к значительным обобщениям.

1. Модели со старшими спинами. Было показано, что наивные обобщения гамильтониана Гейзенберга на спин 1 и выше не интегрируемы. Однако Кулиш, Решетихин и Склянин показали, что существует локальная плотность энергии, для которой интегрируемость выполняется [22]. Для спина 1 эта плотность, найденная ранее Замолодчиковым и Фатеевым [23], имеет вид $\sigma_n^a \sigma_{n+1}^a - (\sigma_n^a \sigma_{n+1}^b)^2$.

2. Анизотропия. Магнетик со спином $1/2$ и локальной плотностью

$$J_1\, \sigma_n^1\, \sigma_{n+1}^1 + J_2\, \sigma_n^2\, \sigma_{n+1}^2 + J_3\, \sigma_n^3\, \sigma_{n+1}^3$$

называется XYZ-моделью. Частично нарушенная симметрия XXZ-модели с $J_1 = J_2$ подпадает под формализм ABA. Однако, как показали Кулиш и Решетихин [24], в случае старшего спина вспомогательная линейная задача имеет смысл, только если динамические переменные удовлетворяют соотношению

$$[s_n^+, s_n^-] = \frac{\sin \gamma s_n^3}{\sin \gamma}\,,$$

где γ — параметр анизотропии. Эта формула привела к значительному прогрессу в математике — построению теории квантовых групп (Склянин [25], Дринфельд [26], Джимбо [27], Решетихин – Тахтаджян – Фаддеев [28]), которая позднее вернулась в физику как симметрия конформной теории поля (Фаддеев – Тахтаджян [29], Жерве – Невю [30]). Историю этого развития можно найти в моём обзоре [31].

3. Другие группы. Формализм BA обобщается на группы старшего ранга, уравнения BA формулируются в терминах диаграмм Дынкина (Решетихин [32]).

4. Непрерывные пределы — переход к пределу $\Delta \to 0$. Например, модель НШ может быть получена из спиновой цепочки.

5. Неоднородные задачи. Важные примеры можно получить, выбирая разные значения параметра λ для разных точек решётки. В частности, альтернирование $\lambda_{2n} = \lambda + \kappa$, $\lambda_{2n+1} = \lambda - \kappa$ позволяет построить естественный дискретный аналог квантовой модели SG.

В результате стало ясно, что спиновые цепочки являются универсальным классом квантовых интегрируемых систем. Мой обзор [33] содержит более подробное изложение этой ситуации.

Следует сказать, что многие положения ABA имеют интерпретацию в теории классических моделей статистической физики на двумерной решётке. Эта тематика, идущая от работ Онзагера [34], которая была развита Либом [35], Бакстером [36], имеет свою историю. В нашей стране по этому направлению работала группа в Протвино, организованная Строгановым и Бажановым [37, 38]. Роль локального оператора $L_n(\lambda)$ играет статистический вес. Однако в этом случае квантовое и вспомогательное пространства идентичны, так что, например, спиновая цепочка старшего спина не имеет интерпретации в статистической физике.

Наконец, ещё один источник соотношений типа (5) даёт теория рассеяния, в которой основную роль сыграли работы Янга [39] и Брезена – Зин-Жюстена [40]. Работы Янга [39] и Бакстера [41] сыграли важную эвристическую роль в нашей конструкции ABA. Поэтому Леон Тахтаджян и я назвали в [18] соотношения типа (5) уравнениями Янга – Бакстера.

В рамках теории факторизованного рассеяния А.Б. Замолодчиков и Ал.Б. Замолодчиков получили точное решение нелинейной σ-модели [42].

Как читатель уже заметил, я рассказываю здесь о методах и результатах, полученных главным образом в Ленинграде. Однако тематика квантовых интегрируемых моделей в 1980 – 1990-е годы стала очень популярной. В частности, были установлены замечательные связи с конформной теорией поля, основы которой были заложены в работе [43]. В работах А.Б. Замолодчикова и его коллег интегрируемые модели рассматривались как деформации конформных моделей специальными локальными операторами. Интересно, что квантование уравнения KdV [44] оказалось важным для квантования конформной теории поля.

Ещё одно направление, идущее от работ К.-Н. Янга и К.П. Янга [45] и развитое Ал.Б. Замолодчиковым [46], Дестри и де Вега [47], связано с построением термодинамического анзаца Бете.

При всей привлекательности изложенных методов нельзя забывать, что до недавнего времени их приложения в физике ограничивались задачами в одномерном пространстве. Ситуация изменилась в середине 1990-х годов, после того как Липатов [48] обнаружил, что высокоэнергетическое рассеяние в рамках реджеизации описывается формализмом спиновых цепочек. Роль узла решётки играет номер оператора, входящего в корреляционную функцию. Корчемский и я интерпретировали наблюдение Липатова в терминах ABA для цепочки группы $\mathrm{SL}(2)$ со спином -1 [49].

Надо сказать, что интерес к спиновым цепочкам в связи с физикой высоких энергий проявил Фейнман в конце своей научной деятельности. Я как-то получил от издательства World Scientific несколько строк из аннотации его доклада, где была такая фраза: "Если кто-нибудь даст мне бете-анзац для числа поляризаций больше 2, то я смогу описать высокоэнергетическое рассеяние". Две поляризации, очевидно, соответствуют спину $1/2$, так что ему нужны были интегрируемые цепочки старшего спина — т.е. то, что было сделано в нашей группе. К сожалению, я узнал об этих словах Фейнмана уже после его смерти, так что не мог сообщить ему о наших результатах. Однако при посещении Пасадены я успел войти в кабинет Фейнмана, когда тот ещё не был занят Джоном Шварцем. На большой доске были написаны мелом отрывки вычислений, и среди них помещена памятка (так, как я её запомнил):

"Выучить:
1. Анзац Бете.
2. Квантовый эффект Холла.
3. Турбулентность."

Очень заинтересованный, я спросил, есть ли какие-нибудь материалы по этому поводу, и любезная секретарша принесла мне большую пачку листов с записями Фейнмана. Почерк был очень аккуратный, и каждый лист имел номер и дату. Уже на первых страницах я нашёл конспект некоторых наших работ, упоминались, в частности, также фамилии Решетихина и Склянина. Однако за недостатком времени я не успел подробно изучить эти листы, и мне пришлось уехать. А попытки найти этот материал в архивах Калтеха оказались безуспешными до сих пор [3].

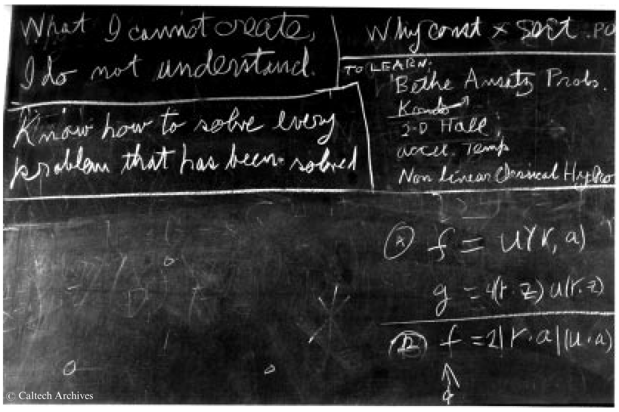


Фото 2. Фрагмент доски в кабинете Ричарда Фейнмана в Калифорнийском технологическом институте (Калтехе). Последние записи Р. Фейнмана, сохранившиеся после его смерти. Воспроизводится с любезного разрешения Архива Калифорнийского технологического института (Courtesy of the Archives, California Institute of Technology).

[3] В период подготовки статьи к печати заведующей редакцией *УФН* М.С. Аксентьевой предоставилась возможность ознакомиться с некоторыми хранящимися в Калтехе материалами архива Р. Фейнмана. Вот что она написала, пересылая мне копии этих материалов: "Ваши воспоминания подтвердились. Как видно на фотографии (см. фото 2), Р. Фейнман в то время действительно отмечал как наиболее интересные, требующие изучения вопросы: проблему анзаца Бете, двумерный эффект Холла и нелинейную классическую гидродинамику (которая, разумеется, включает в себя проблему турбулентности). Кроме того, мне было приятно увидеть в рабочих записях Р. Фейнмана к его докладу, состоявшемуся 22 января 1987 г. (Lunch Talk on Bethe Ansatz [50]), ссылки на работы Фаддеева, Тахтаджяна, Склянина, Замолодчикова". Теперь, когда я узнал, какой у Фейнмана был почерк, я думаю, что листочки, которые мне показывали в Калтехе, были сделаны другой рукой, поэтому, возможно, их и нет в архиве Фейнмана.

Фото 3. Ричард Фейнман [4] на фоне своей красной машины (1972 г.).

Мне удалось увидеть Фейнмана всего один раз. Это было в январе 1972 г. во время моего первого визита в США, организованного сотрудниками Курантовского института математических наук Питером Лаксом и Луисом Ниренбергом. Кип Торн устроил мне краткий визит в Пасадену для встречи с Фейнманом (после замечательного катания на лыжах с Питером Лаксом в Аспене, на полпути от Нью-Йорка до Калифорнии). Мы провели вместе несколько часов. Он уже знал о моей работе с Витей Поповым по приложению фейнмановского интеграла к построению диаграммной техники в теории полей Янга–Миллса. Мне хотелось узнать больше о его подходе к построению S-матрицы в терминах асимптотических полей без обращения к функциям Грина, которые в случае теории Янга–Миллса не имеют калибровочно-инвариантного толкования. Но постепенно дискуссия (через асимптотические поля и проблему массы в теории Янга–Миллса) перешла к обсуждению подхода к инфракрасным расходимостям в квантовой электродинамике, только что оформленного в моей статье с Петей Кулишом. К моему удивлению, Фейнман потребовал подробного объяснения и, как мне казалось, одобрил наш метод. Но, к сожалению, это обсуждение заняло всё время, и мы поехали выпить пива в мужской бар. По дороге мне была предоставлена возможность сделать фотографию Фейнмана на фоне его красного автомобиля. В баре мы продолжили разговор, а над нами на столе прогуливалась обнажённая девушка. По-видимому, Фейнман решил соблазнить относительно молодого советского коллегу прелестями западной жизни. Но девушке было холодно, она слегка посинела, и мне было её жалко. А наш контакт на этом был закончен.

Недавно было приятно узнать, что оставленный мной оттиск работы с Витей Поповым [51] с посвящением "To prove that younger generation knows and respects Feynman Integral" не был выброшен и остался в архиве Фейнмана в Калтехе [52].

Продолжая воспоминания о первом визите в США, упомяну ещё две вещи. Во время моего пребывания в Массачусетсском технологическом институте в феврале 1972 г. Виктор Вайскопф взял меня с собой на знаменитый семинар Оппенгеймера в Принстоне, и я видел, как американское научное сообщество солидарно решило продвигать Стивена Вайнберга на Нобелевскую премию. Ничего подобного в нашей стране не существует до сих пор. А ещё, во время второго визита в Принстон по приглашению Артура Вайтмана, я сделал четыре доклада за два дня, в том числе рассказал работу с Володей Захаровым, о которой говорится в основном тексте, на семинаре Мартина Крускала.

Я считаю Ричарда Фейнмана своим духовным учителем наряду с Германом Вейлем и Полем Дираком.

[4] На 2013 год приходится две памятные даты, связанные с Р. Фейнманом: 11 мая 2013 г. исполняется 95 лет со дня его рождения, а 15 февраля 2013 г. исполнилось 25 лет со дня его смерти. (*Примеч. ред.*)

Вскоре после прорыва Липатова аспекты интегрируемости появились в теории суперсимметричных моделей калибровочных полей. В работе Горского, Кричевера, Маршакова, Миронова и Морозова (ГКМ^3) [53] было показано, что алгебро-геометрическая техника, развитая Дубровиным, Кричевером и Новиковым [54], даёт адекватную интерпретацию формулы Зайберга – Виттена [55] для суперпотенциала в ($N = 2$)-калибровочной теории. После публикации этой работы очень быстро начали появляться многочисленные статьи, в названиях которых стоял термин "интегрируемость". В противоположность первоначальной истории с уравнением KdV, здесь классическая динамическая проблема участвует в решении квантовой задачи. Однако квантование техники интегрируемости, проведённое Н. Некрасовым и С. Шаташвили, оказалось также применимым к суперсимметричной калибровочной теории и использовалось в [56, 57] для классификации вакуумных состояний. Квантовая деформация алгебраической кривой ГКМ^3 оказалась связанной с анзацем Бете для спиновых цепочек XXX, XXZ и XYZ в размерности пространства-времени $D = 2, 3, 4$ соответственно.

Спиновые цепочки появились также в подходе к аномальным размерностям в теории суперсимметричного поля Янга – Миллса. В работе Минахана и Зарембо [58] рассматривались корреляционные функции цепочки из двух локальных операторов $W(x)$ и $Z(x)$, которым была поставлена в соответствие спиновая цепочка с состоянием со спином вверх для $W(x)$ и спином вниз для $Z(x)$. Энергия этой цепочки интерпретировалась как аномальная размерность произведения операторов. Было показано, что эта цепочка совпадает с XXX-моделью спина $1/2$. Работа [58] породила обширную деятельность, главным образом в Европе — Швеции, Франции и Германии. Здесь особенно актуальной стала техника термодинамического бете-анзаца. В рамках этой статьи я не могу описать весь этот прогресс, ограничусь ссылками на обзоры [59, 60].

Новые приложения к релятивистской квантовой теории поля показали силу и универсальность понятия интегрируемости и формализма АВА. Можно сказать, что техника интегрируемости прорвалась на самые передовые позиции в современной теоретической физике высоких энергий (см., например, введение к статье [61]), и мы можем ожидать появления новых замечательных результатов. На этой оптимистической ноте я заканчиваю своё изложение.

Я благодарен Леону Тахтаджяну за важные замечания, а также М.С. Аксентьевой за плодотворную работу в Архиве Калтеха и сотрудницам Архива Шелли Эрвин (Shelley Erwin) и Ломе Карклинс (Loma Karklins) за помощь в подборе архивных материалов и предоставление их копий для изучения.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00570-а, 11-01-12037-офи-м, программой РАН "Математические проблемы нелинейной динамики".

Список литературы

1. Арнольд В И *Математические методы классической механики* 3-е изд. (М.: Наука, 1989) [Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer, 1997)]
2. Gardner G S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M "Method for solving the Korteweg-deVries equation" *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
3. Korteweg D J, de Vries G "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves" *Phil. Mag. 5* **39** 422 (1895)
4. Фаддеев Л Д "Обратная задача квантовой теории рассеяния" *УМН* **14** (4) 57 (1959)
5. Фаддеев Л Д "О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера" *ДАН СССР* **121** 63 (1958) [Faddeev L D "On the relation between the S-matrix and potential for the one-dimensional Schrödinger operator" *Sov. Phys. Dokl.* **3** 747 (1959)]
6. Lax P D "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves" *Commun. Pure Appl. Math.* **21** 467 (1968)
7. Захаров В Е, Шабат А Б "Точная теория самофокусировки и одномерной самомодуляции волны в нелинейной среде" *ЖЭТФ* **61** 118 (1971) [Zakharov V E, Shabat A B "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear media" *Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)]
8. Захаров В Е, Фаддеев Л Д "Уравнение Кортевега – Де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система" *Функц. анализ и его прил.* **5** (4) 18 (1971) [Zakharov V E, Faddeev L D "Korteweg – de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system" *Funct. Anal. Appl.* **5** 280 (1971)]
9. Окунь Л Б " В.А. Фок и калибровочная симметрия" *УФН* **180** 871 (2010) [Okun L B "V A Fock and gauge symmetry" *Phys. Usp.* **53** 835 (2010)]
10. Fock V *Z. Phys.* **39** 226 (1926)
11. Фок В А "Об инвариантной форме волновых уравнений и уравнений движения заряженной точечной массы" *УФН* **180** 874 (2010) [Fock V A "On the invariant form of the wave and motion equations for a charged point mass" *Phys. Usp.* **53** 839 (2010)]
12. Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д "Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля" *ТМФ* **21** 160 (1974) [Takhtadzhyan L A, Faddeev L D "Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory" *Theor. Math. Phys.* **21** 1046 (1974)]
13. Dashen R F, Hasslacher B, Neveu A "Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. I. Semiclassical functional methods" *Phys. Rev. D* **10** 4114 (1974)
14. Фаддеев Л Д "Адроны из лептонов?" *Письма в ЖЭТФ* **21** 141 (1975) [Faddeev L D "Hadrons from leptons?" *JETP Lett.* **21** 64 (1975)]
15. Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д *Гамильтонов подход в теории солитонов* (М.: Наука, 1986) [Faddeev L D, Takhtajan L A *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1987)]
16. Bethe H "Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette" *Z. Phys.* **71** 205 (1931)
17. Склянин Е К, Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д "Квантовый метод обратной задачи. I" *ТМФ* **40** 194 (1979) [Sklyanin E K, Takhtadzhyan L A, Faddeev L D "Quantum inverse problem method. I" *Theor. Math. Phys.* **40** 688 (1979)]
18. Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д "Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга" *УМН* **34** (5) 13 (1979) [Takhtadzhan L A, Faddeev L D "The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model" *Russ. Math. Surv.* **34** (5) 11 (1979)]
19. Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д "Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга" *Зап. научн. сем. ЛОМИ* **109** 134 (1981) [Translated into English: Faddeev L D, Takhtadzhyan L A "Spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model" *J. Sov. Math.* **24** 241 (1984)]
20. Hulthén L "Über das Austauschproblem eines Kristalls" *Ark. Mat. Astron. Fysik A* **26** (11) 1 (1938)
21. Faddeev L D, Takhtajan L A "What is the spin of a spin wave?" *Phys. Lett. A* **85** 375 (1981)
22. Kulish P P, Reshetikhin N Yu, Sklyanin E K "Yang – Baxter equation and representation theory. I" *Lett. Math. Phys.* **5** 393 (1981)
23. Замолодчиков А Б, Фатеев В А "Факторизованная S-матрица и интегрируемая цепочка Гейзенберга спина 1" *ЯФ* **32** 581 (1980) [Zamolodchikov A B, Fateev V A "A model factorized S-matrix and

an integrable spin-1 Heisenberg chain" *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** 298 (1980)]
24. Кулиш П П, Решетихин Н Ю "Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления" *Зап. науч. сем. ЛОМИ* **101** 101 (1981) [Kulish P P, Reshetikhin N Yu "Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations" *J. Sov. Math.* **23** 2435 (1983)]
25. Склянин Е К "Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями" *УМН* **40** (2) 214 (1985)
26. Дринфельд В Г "Квантовые группы" *Зап. научн. сем. ЛОМИ* **155** 18 (1986)
27. Jimbo M "A q-difference analogue of U(g) and the Yang – Baxter equation" *Lett. Math. Phys.* **10** 63 (1985)
28. Решетихин Н Ю, Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д "Квантование групп Ли и алгебр Ли" *Алгебра и анализ* **1** (1) 178 (1989) [Reshetikhin N Yu, Takhtadzhyan L A, Faddeev L D "Quantization of Lie groups and Lie algebras" *Leningr. Math. J.* **1** (1) 193 (1990)]
29. Faddeev L D, Takhtajan L A "Liouville model on the lattice" *Lect. Notes Phys.* **246** 166 (1986)
30. Gervais J-L, Neveu A "Non-standard 2D critical statistical models from Liouville theory" *Nucl. Phys. B* **257** 59 (1985)
31. Faddeev L D "History and perspectives of quantum groups" *Milan J. Math.* **74** 279 (2006)
32. Reshetikhin N "S-matrices in integrable models of isotropic magnetic chains. I" *J. Phys. A Math. Gen.* **24** 3299 (1991)
33. Faddeev L D "How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model", hep-th/9605187
34. Onsager L "Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition" *Phys. Rev.* **65** 117 (1944)
35. Lieb E H "Residual entropy of square ice" *Phys. Rev.* **162** 162 (1967)
36. Baxter R J *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (London: Academic Press, 1982)
37. Stroganov Yu G "A new calculation method for partition functions in some lattice models" *Phys. Lett. A* **74** 116 (1979)
38. Bazhanov V V, Stroganov Yu G "Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model" *J. Stat. Phys.* **59** 799 (1990)
39. Yang C N "Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction" *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312 (1967)
40. Brezin E, Zinn-Justin J "Un problème à N corps soluble" *C.R. Acad. Sci. B* **263** 670 (1968)
41. Baxter R J "One-dimensional anisotropic Heisenberg chain" *Ann. Physics* **70** 323 (1972)
42. Zamolodchikov A B, Zamolodchikov A B "Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models" *Ann. Physics* **120** 253 (1979)
43. Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory" *Nucl. Phys. B* **241** 333 (1984)
44. Bazhanov V V, Lukyanov S L, Zamolodchikov A B "Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe Ansatz" *Commun. Math. Phys.* **177** 381 (1996); hep-th/9412229
45. Yang C N, Yang C P "Thermodynamics of one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction" *J. Math. Phys.* **10** 1115 (1969)
46. Zamolodchikov Al B "Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: Scaling 3-state potts and Lee – Yang models" *Nucl. Phys. B* **342** 695 (1990)
47. Destri C, de Vega H J "New approach to thermal Bethe Ansatz", hep-th/9203064
48. Lipatov L N "High energy asymptotics of multi-colour QCD and two-dimensional conformal field theories" *Phys. Lett. B* **309** 394 (1993)
49. Faddeev L D, Korchemsky G P "High energy QCD as a completely integrable model" *Phys. Lett. B* **342** 311 (1995); hep-th/9404173
50. "Lunch Talk on Bethe Ansatz, Jan. 22, 1987", Archives and Special Collections, California Institute of Technology, Section V, Box 52, Folder 11
51. Faddeev L D, Popov V N "Feynman diagrams for the Yang – Mills field" *Phys. Lett. B* **25** 29 (1967)
52. Archives and Special Collections, California Institute of Technology, Section VIII, Box 78, Folder 16
53. Gorsky A, Krichever I, Marshakov A, Mironov A, Morozov A "Integrability and Seiberg – Witten exact solution" *Phys. Lett. B* **355** 466 (1995); hep-th/9505035
54. Дубровин Б А, Кричевер И М, Новиков С П "Интегрируемые системы. I", в сб. *Динамические системы – 4* (Итоги науки и техники, Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 4) (М.: ВИНИТИ, 1985) с. 179 [Dubrovin B A, Krichever I M, Novikov S P "Integrable systems. I", in *Encyclopedia of Mathematical Sciences* Vol. 4 (Berlin: Springer, 1990) p. 173]
55. Seiberg N, Witten E "Electric – magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang – Mills theory" *Nucl. Phys. B* **426** 19 (1994); "Erratum" *Nucl. Phys. B* **430** 485 (1994); hep-th/9407087
56. Nekrasov N A, Shatashvili S L "Supersymmetric vacua and Bethe ansatz" *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **192 – 193** 91 (2009); arXiv: 0901.4744
57. Nekrasov N, Shatashvili S "Quantum integrability and supersymmetric vacua" *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **177** 105 (2009); arXiv: 0901.4748
58. Minahan J A, Zarembo K "The Bethe-ansatz for $N = 4$ super Yang – Mills" *JHEP* (03) 013 (2003); hep-th/0212208
59. Beisert N et al. "Review of AdS/CFT integrability: An overview" *Lett. Math. Phys.* **99** 3 (2012); arXiv:1012.3982
60. Dorey P, Minahan J, Tseytlin A "Quantum integrable models and gauge-string duality" *J. Phys. A Math. Theor.* **44** 120301 (2011)
61. Morozov A "Integrability in non-perturbative QFT", arXiv: 1303.2578

New life of complete integrability

L.D. Faddeev
St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, nab. Fontanki 27, 191023 Saint-Petersburg, Russian Federation
E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

We briefly review new trends in how the notion of complete integrability of dynamical systems and their quantum counterpart developed over the last four decades. We describe a new technique for working with integrable models and outline its main applications.

PACS numbers: 02.30.Ik, 45.20.Jj, 75.10.Pq DOI: 10.3367/UFNr.0183.201305b.0487

Bibliography — 61 references *Received 21 February 2013*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (5) 487 – 495 (2013) *Physics – Uspekhi* **56** (5) (2013)