

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Квазиadiaбатическое описание динамики заряженных частиц в космической плазме

Л.М. Зелёный, А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Д.Л. Вайнштейн, Х.В. Малова

*В последние два десятилетия активно развиваются квазиadiaбатические модели, описывающие динамику заряженных частиц в системах с пространственными масштабами неоднородности магнитного поля, существенно меньшими по сравнению с ларморовским радиусом. Такое соотношение пространственных масштабов характерно для многих космических процессов, развивающихся в относительно слабых магнитных полях. Применение квазиadiaбатической теории для описания различных явлений позволило получить ряд новых результатов и объяснить многие эффекты, наблюдаемые искусственными спутниками в околоземном пространстве. Приводится последовательное изложение данной теории.*

PACS numbers: 52.20.Dq, 52.40.Kh, **94.05**. – a

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201304b.0365

## Содержание

1. Введение (366).
2. Общие уравнения (367).
3. Динамика заряженных частиц в простых конфигурациях (368).
  - 3.1. Заряженные частицы в одномерных токовых слоях.
  - 3.2. Динамика частиц и диффузия квазиadiaбатического инварианта.
  - 3.3. Эффект резонанса и корреляция скачков квазиadiaбатического инварианта.
4. Динамика заряженных частиц в системах со сложной геометрией (374).

- 4.1. Динамика частиц в двумерных токовых слоях.
- 4.2. Динамика частицы в окрестности X- и O-линий.
- 4.3. Динамика частиц в бифурцированном слое.
- 4.4. Динамика частиц в слое с продольной компонентой магнитного поля.
5. Ускорение заряженных частиц (383).
  - 5.1. Квазиadiaбатическое ускорение с сохранением инвариантов.
  - 5.2. Эффект резонанса с учётом электрического поля.
  - 5.3. Ускорение в окрестности X- и O-линий.
6. Статистические следствия сохранения квазиadiaбатического инварианта: описание ансамбля траекторий (390).
  - 6.1. Функция распределения захваченных частиц в центре токового слоя.
  - 6.2. Функция распределения пролётных частиц в центре токового слоя.
  - 6.3. Функция распределения на границе токового слоя.
  - 6.4. Построение самосогласованных моделей одномерного токового слоя.
  - 6.5. Модели двумерных токовых слоёв.
7. Заключение (403).
8. Приложения (403).
- А. Переходы через сепаратрису и скачки квазиadiaбатического инварианта в гамильтоновых системах с быстрыми и медленными движениями (403).
  - А.1. Исходные уравнения.
  - А.2. Квазиadiaбатическое приближение.
  - А.3. Улучшенный квазиadiaбатический инвариант.
  - А.4. Асимптотические разложения для невозмущённого движения вблизи сепаратрисы.
  - А.5. Вычисление изменения квазиadiaбатического инварианта.
  - А.6. Скачок квазиadiaбатического инварианта в задаче о движении заряженной частицы в параболической модели хвоста магнитосферы Земли.
  - А.7. Скачок квазиadiaбатического инварианта как функция быстрой фазы.
- Б. Скачки квазиadiaбатического инварианта при его малых начальных значениях (408).
  - Б.1. Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе из внешней области в одну из петель сепаратрисы.
  - Б.2. Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе из одной из петель сепаратрисы во внешнюю область.
- В. Скачки квазиadiaбатического инварианта в системе с вырожденной седловой точкой (410).
- Список литературы (412).

**Л.М. Зелёный.** Институт космических исследований РАН,  
ул. Профсоюзная 83/32, 117997 Москва, Российская Федерация  
E-mail: lzelenyi@iki.rssi.ru

Московский физико-технический институт  
(государственный университет),  
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл.,  
Российская Федерация

**А.И. Нейштадт.** Институт космических исследований РАН,  
ул. Профсоюзная 83/32, 117997 Москва, Российская Федерация  
E-mail: aneishta@iki.rssi.ru

Department of Mathematical Sciences, Loughborough University,  
Loughborough, Leicestershire, LE11 3TU, UK

**А.В. Артемьев.** Институт космических исследований РАН,  
ул. Профсоюзная 83/32, 117997 Москва, Российская Федерация  
E-mail: ante0226@gmail.com

**Д.Л. Вайнштейн.** Институт космических исследований РАН,  
ул. Профсоюзная 83/32, 117997 Москва, Российская Федерация;  
Department of Mechanical Engineering, Temple University,  
1947 N. 12th St, Philadelphia, PA 19122, USA  
E-mail: dmitri@temple.edu

**Х.В. Малова.** Институт космических исследований РАН,  
ул. Профсоюзная 83/32, 117997 Москва, Российская Федерация;  
Научно-исследовательский институт ядерной физики  
им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова,  
Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 5 мая 2012 г.

*Не в совокупности ищут единства,  
но более — в единообразии разделения.*

Козьма Прутков

## 1. Введение

Теория адиабатических инвариантов имеет длинную историю (оригинальные работы, опубликованные Паулем Эренфестом в 1910–1920-х годах, собраны в книге [1] (см. также статью "Об одной механической теореме Больцмана и её отношении к теории квантов" в книге [2, с. 51])).

Если обратиться к классическому учебнику Ландау и Лифшица *Механика* [3], то адиабатические инварианты введены там для систем с быстрым и медленным временами. В задаче при этом появляется малый параметр, что сразу даёт возможность получить упрощённое решение с помощью введения приблизительно сохраняющейся величины — адиабатического инварианта, представляющего собой интеграл действия по быстрым переменным при "замороженных" медленных переменных.

Адиабатические теории применяются во многих задачах физики и механики, но в настоящем обзоре мы сосредоточимся на проблемах движения заряженных частиц (для простоты ограничимся нерелятивистской теорией) в магнитных полях сложной геометрии. Задача движения энергичных заряженных частиц в магнитном поле земного диполя подробно исследовалась Карлом Штёрмером [4] с целью объяснить проникновение в земную ионосферу космических лучей, ускоренных на Солнце или других звёздах нашей Галактики. Общего решения этой задачи найти не удалось, но удалось построить много важных частных решений.

В 1930-е годы за решение задачи о движении электронов и ионов в неоднородных магнитных полях применительно к проблемам космической физики взялся будущий лауреат Нобелевской премии Ханес Альвен, который построил приближённую теорию движения заряженных частиц в дипольном магнитном поле, опираясь на три введённых им адиабатических инварианта, соответствующие трём разномасштабным периодам движения заряженных частиц (см. работу [5] и ссылки на оригинальные работы в книге [6] и обзоре [7]).

Первый инвариант в точности совпадает с магнитным моментом частицы. Этот инвариант соответствует быстрому периодическому вращению частицы вокруг вектора магнитного поля. Можно отметить, что доказательство того, что эта величина сохраняется и действительно является инвариантом движения, получено Николаем Николаевичем Боголюбовым и Дмитрием Николаевичем Зубаревым независимо от Альвена (см. [8] и ссылки на оригинальные работы, приведённые в книге [9]).

Второй инвариант,  $\oint v_{\parallel} dr_{\parallel}$ , соответствует усреднению по периодическим продольным осцилляциям частицы между магнитными пробками (здесь  $v_{\parallel}$  и  $r_{\parallel}$  — компоненты скорости и координаты, параллельные направлению магнитного поля). Третий инвариант,  $\oint v_{\phi} d\phi$ , соответствует усреднению по азимутальному дрейфу частиц вокруг Земли.

Для сохранения каждого из этих инвариантов необходимо выполнение условий ограниченности изменения магнитного поля во времени и пространстве. Характерный период квазипериодических движений должен быть

много меньше характерного времени изменения магнитного поля, а масштаб пространственной вариации магнитного поля должен существенно превышать пространственный масштаб, связанный с периодическим движением.

1950-е годы стали "золотым временем" для развития теории движения заряженных частиц в магнитных полях. Это связано с двумя событиями: открытием Джеймсом Ван-Аленом [10] и Сергеем Николаевичем Верновым [11] радиационных поясов Земли и началом работ по управляемому термоядерному синтезу, т.е. по магнитному удержанию горячей бесстолкновительной плазмы. Теория одновременно развивалась несколькими коллективами в СССР и США. Оказалось, что "термоядерные" работы имеют много общего с работами по космической физике. К середине 1960-х годов построение теории движения заряженных частиц в лабораторных и космических условиях в целом было завершено (обзоры того времени по проблемам динамики частиц можно найти в книгах [12, 13]). Большую роль в разработках этой теории в СССР сыграли теоретические группы Курчатова института, Института ядерной физики Сибирского отделения Академии наук и Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (НИИЯФ МГУ).

Помимо построения теорий движения заряженных частиц, основанных на сохранении адиабатических инвариантов, очень важно было установить физические следствия нарушения такого сохранения, т.е. нарушения адиабатичности. Здесь опять принципиальную роль сыграла советская плазменная школа (см. обзоры [14, 15]). Оказалось, что адиабатические инварианты сохраняются с экспоненциальной точностью по малому параметру, что обеспечивает надёжность использования адиабатических инвариантов для интегрирования уравнений движения заряженных частиц в медленно меняющихся магнитных полях с большими пространственными масштабами неоднородности. Нарушение сохранения адиабатических инвариантов приводит к диффузии частиц в пространстве скоростей. Как правило, этот процесс оказывается слабее диффузии, вызванной рассеянием частиц на флуктуациях электромагнитного поля, возбуждаемых в плазме вследствие того, что система находится в термодинамически неравновесном состоянии. Коллективные эффекты в таких случаях преобладают над одночастичными.

Теории, о которых говорилось выше, стали классическими, они изложены в ряде монографий [12, 13, 16]. Данные теории относятся к случаю движения заряженных частиц в достаточно сильном магнитном поле, когда пространственные масштабы его вариаций существенно превосходят пространственные масштабы квазипериодических движений частиц. Но, как оказалось, возможен и другой, прямо противоположный, случай. В 1965 г. был открыт "хвост" магнитосферы Земли, в центре которого существует нейтральный слой [17]. В этой области магнитное поле чрезвычайно мало (несколько нТл), вследствие того что основная компонента магнитного поля, "вытягиваемая" солнечным ветром из дипольного поля Земли, меняет знак в нейтральном слое.

В лабораторной плазме в установках для удержания плазмы в конфигурациях Z- и  $\Theta$ -пинчей возникает схожая ситуация — существует достаточно тонкая об-

ласть, в которой происходит обращение магнитного поля [18–21]. И космические, и лабораторные задачи в этом пределе активно исследовались в литературе, однако проблема оказалась значительно сложнее предыдущей: магнитное поле в этом случае не управляет полностью движением частиц и теория сохранения адиабатических инвариантов оказывается неприменимой. После ряда полезных, но эмпирических работ, основанных на численном интегрировании уравнений движения частиц, стало ясно, что для описания движения в слабых магнитных полях необходима теория, альтернативная теории ведущего центра.

Оказалось, что, для того чтобы построить подобную теорию, необходимо изменить малый параметр задачи: вместо отношения ларморовского радиуса к масштабу пространственной вариации магнитного поля надо взять обратное отношение. В этом случае удаётся построить как бы "зеркальную" теорию по отношению к теории ведущего центра. При этом теория основывается на двух адиабатических инвариантах, представляющих собой усреднение импульсов по быстрым осцилляциям в поле, обращающемся в нуль в нейтральном слое, и в поле, перпендикулярном этому слою. Ниже всюду в настоящем обзоре мы будем называть данные инварианты квазиадиабатическими. Это название используется не только для того, чтобы подчеркнуть отличие указанных инвариантов от адиабатических инвариантов, введённых в теории ведущего центра. Дело в том, что движение частиц в теории, основанной на квазиадиабатическом приближении, сильно отличается от их движения в классической теории — вместо ларморовских спиралей мы получаем сложные петлеобразные траектории.

Квазиадиабатическое приближение позволяет представить движение заряженных частиц как кусочно-регулярное: на границах между областями регулярного движения, при котором квазиадиабатический инвариант сохраняется, происходит скачок квазиадиабатического инварианта. Величина таких скачков определяется соотношениями, вывод которых дан в приложениях А–В. Величина скачка зависит от малого параметра и фазы быстрого движения при переходе из одной регулярной области в другую. Значения скачков могут быть вычислены для ряда задач применительно к конкретной траектории. Однако скачки являются крайне чувствительными к значению быстрой фазы, что приводит к стохастизации отдельных траекторий и соответствующих систем, состоящих из ансамбля частиц, т.е. траектории с близкими начальными условиями расходятся в фазовом пространстве. Поэтому на больших временах в системе возникает детерминированный хаос. Теория скачков квазиадиабатического инварианта позволяет, таким образом, рассмотреть и диффузионный предел описания движения частиц.

Учёт даже приближённого сохранения квазиадиабатического инварианта даёт дополнительный интеграл движения и позволяет проинтегрировать уравнения движения для двумерных задач, основываясь на сохранении энергии, обобщённого импульса и квазиадиабатического инварианта. Это обстоятельство оказывается критическим для построения модели равновесия для слабодвумерных плазменных конфигураций с токовыми слоями.

Задавая функцию распределения заряженных частиц в источниках плазмы на границе рассматриваемой сис-

темы, можно, воспользовавшись теоремой Лиувилля, спроецировать эту функцию вдоль регулярных фазовых траекторий в любую точку пространства и вычислить моменты функции распределения в этой точке. Предположение о сохранении квазиадиабатических инвариантов также является очень полезным при решении задач, описывающих ускорение частиц в плазме.

Интересно сравнить возможные следствия сохранения адиабатических и квазиадиабатических инвариантов. Движение частиц в этих двух случаях имеет принципиально разную симметрию. Если в адиабатическом случае имеется цилиндрическая симметрия анизотропной (но гиротропной) системы, то в квазиадиабатическом случае эта симметрия исчезает и система оказывается негиротропной (направления, перпендикулярные магнитному полю, неравнозначны).

В настоящем обзоре представлены полученные в последние десятилетия результаты теории, основанной на квазиадиабатическом приближении. Мы считаем, что методы нелинейной динамики и найденные на их основе решения плазменных задач могут представлять интерес как для физического, так и для астрофизического сообществ.

## 2. Общие уравнения

В настоящем обзоре рассматриваются вопросы динамики заряженных частиц в конфигурациях с плоскостью инверсии магнитного поля. Одной из простейших таких конфигураций является токовый слой (см. обзоры, посвящённые токовым слоям в космической [22, 23] и лабораторной [18, 19, 24] плазме). Мы рассматриваем в качестве основного приложения токовый слой хвоста земной магнитосферы [23, 25], хорошо изученный благодаря многочисленным спутниковым измерениям. В этом разделе мы определим геометрию данной структуры: основная компонента магнитного поля  $B_x$  меняет знак в плоскости  $z = 0$ , компонента  $B_z$  перпендикулярна данной плоскости, также возможно наличие ненулевой компоненты  $B_y$  (рис. 1).

Компоненты магнитного поля токового слоя  $B_x(x, z)$ ,  $B_z(x, z)$  и  $B_y(x, z)$  не зависят от координаты  $y$ , и они связаны условием бездивергентности  $\partial B_x / \partial x + \partial B_z / \partial z = 0$ . Тогда рассматриваемая конфигурация соответствует двум компонентам векторного потенциала:  $A_y(x, z) = \int^x B_z(x', z) dx' - \int^z B_x(x, z') dz'$  и  $A_x = \int^z B_y(x, z') dz'$ . Гамильтониан частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$  в за-

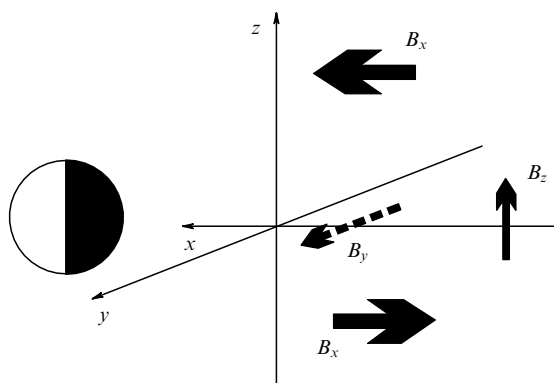


Рис. 1. Геометрия системы, рассматриваемой в обзоре.

данном поле имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_x - \frac{q}{c} A_x(x, z) \right)^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 + \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{q}{c} A_y(x, z) \right)^2, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}$  — обобщённый импульс частицы. В большинстве задач можно рассматривать конфигурацию с  $B_z = B_z(x/L_x)$ ,  $B_y = \text{const}$  и  $B_x(z) = B_0 b_x(z/L_z)$ , где  $b_x(z/L_z)$  — некоторая безразмерная функция от координаты  $z$ ,  $L_z$  — толщина токового слоя,  $L_x$  — характерный масштаб изменения  $B_z$ , параметр  $B_0$  определяется из условия  $b_x(1) = 1$ . Более того, часто можно упростить задачу, приняв  $B_y = 0$  и  $B_z = \text{const}$ .

Введём следующие безразмерные переменные:  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}/mv_0$ ,  $H \rightarrow H/mv_0^2$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/l_0$ ,  $t \rightarrow tv_0/l_0$ , где  $v_0$  — характерная скорость частицы,  $l_0$  — пространственный масштаб, который мы определим ниже. Введём также функции

$$a_y(x, z) = \int_{x_0/L_z}^{x/L_z} \frac{B_z(x')}{B_0} dx' - \int_0^{z/L_z} b_x(z') dz',$$

$$a_x(z) = \int_0^{z/L_z} \frac{B_y}{B_0} dz' = \frac{B_y}{B_0} \frac{z}{L_z},$$

соответствующие компонентам безразмерного векторного потенциала. Параметр  $x_0$  определяется из условия обнуления  $a_y(x, z)$  в точке  $x = x_0$  в нейтральной плоскости  $z = 0$ . Тогда гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \left( p_x - \frac{L_z}{\rho_0} a_x(z) \right)^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( p_y - \frac{L_z}{\rho_0} a_y(x, z) \right)^2. \quad (2)$$

Здесь  $\rho_0 = (mcv_0)/(qB_0)$  — гирорадиус частицы в поле  $B_0$ .

В характерных условиях хвоста земной магнитосферы энергия ионов изменяется от 1 до 10 кэВ, в то время как амплитуда магнитного поля  $B_0 \sim 10\text{--}40$  нТл. Отношение  $B_z/B_0$  существенно зависит от условий формирования токового слоя и для тонких токовых слоёв, наблюдаемых на расстояниях от 10 до 30 радиусов Земли на ночной стороне, лежит в диапазоне  $10^{-2} < B_z/B_0 < 1$  [26–28], при этом  $|B_y|$  изменяется от 0 до  $10B_0$  [29]. В результате толщина токового слоя  $L_z$  оказывается порядка ларморовского радиуса ионов  $\rho_0$  [30, 31]. Радиус кривизны силовой линии в центре токового слоя при  $B_y = 0$  можно оценить как  $\sim B_z L_z/B_0$ , следовательно,  $B_z L_z/(\rho_0 B_0) \ll 1$  (система с ненулевой компонентой  $B_y$  обладает радиусом кривизны  $\sim (B_z L_z/B_0)(1 + B_y^2/B_z^2)^{3/2}$  [32]). Таким образом, теория ведущего центра неприменима для описания системы с гамильтонианом (2) (масштаб неоднородности магнитного поля существенно меньше масштаба ларморовского радиуса частиц), и для исследования динамики заряженных частиц необходимо найти альтернативный подход.

Гамильтоновы уравнения  $\dot{\mathbf{r}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{r}$  описывают динамику заряженных частиц в токовом слое. Далее мы последовательно рассмотрим решения данных уравнений для различных функций  $a_x(z)$  и  $a_y(x, z)$ ,

исследуем систему при наличии электрических полей и обсудим вопросы поведения ансамблей траекторий частиц, описываемых гамильтонианом (2).

### 3. Динамика заряженных частиц в простых конфигурациях

Этот раздел посвящён вопросам динамики частиц в системах с нулевой  $B_y$ -компонентой магнитного поля при самом простом предположении об однородности вдоль  $x$ , когда  $B_z = \text{const}$ . Мы введём квазиadiaбатический инвариант для системы с гамильтонианом (2) и рассмотрим её описание в рамках квазиadiaбатического приближения, соответствующего точному сохранению этого инварианта. Также определим отклонение поведения системы от поведения, предписываемого квазиadiaбатическим приближением, и разберём следствия нарушения сохранения инварианта.

#### 3.1. Заряженные частицы в одномерных токовых слоях

Динамика заряженных частиц в одномерном токовом слое определяется величиной параметра  $\kappa = (B_z L_z/B_0 l_0)$  и видом функции  $b_x(z)$ . Поскольку  $b_x(0) = 0$ , можно воспользоваться приближением  $b_x(z) = z$ , тогда  $a_y(x, z) = \kappa x - 1/2 (z/L_z)^2$ . Случай, в котором данное приближение неприменимо, т.е.  $\partial b_x / \partial z = 0$  при  $z = 0$ , рассмотрен в разделе 4.3. Учитывая, что гамильтониан (2) не зависит от  $y$  ( $p_y = \text{const}$ ), сделаем переобозначение  $\kappa x \rightarrow \kappa x + p_y$ . Тогда (2) примет вид

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa x - \frac{1}{2} \frac{l_0^2}{L_z \rho_0} z^2 \right)^2. \quad (3)$$

Определим  $l_0 = \sqrt{L_z \rho_0}$  и представим гамильтониан (3) в виде

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa x - \frac{1}{2} z^2 \right)^2, \quad (4)$$

где  $\kappa = (B_z/B_0)\sqrt{L_z/\rho_0}$ . Введённый таким образом параметр  $\kappa$  — это не что иное, как квадратный корень из отношения минимального радиуса кривизны силовой линии магнитного поля и максимального ларморовского радиуса частицы  $\rho_0 B_0/B_z$  в исследуемой системе. То есть масштаб неоднородности магнитного поля — радиус кривизны силовой линии  $\sim L_z B_z/B_0 \sim \rho_0 B_z/B_0$  — существенно меньше масштаба ларморовского радиуса частиц  $\rho_0 B_0/B_z$ , определённого в плоскости обнуления поля  $B_x$ .

Впервые численное решение гамильтоновых уравнений для рассматриваемой здесь системы было получено в работе [33]. Автор показал, что, до тех пор пока частицы находятся далеко от плоскости  $z = 0$ , они осциллируют поперёк силовых линий магнитного поля и движутся вдоль них. Решением уравнения для силовых линий ( $dx/B_x = dz/B_z$ ) в рассматриваемой конфигурации являются параболы  $z^2 = 2\kappa x + \text{const}$ . После пересечения плоскости  $z = 0$  частица делает пол-оборота в поле  $B_z$ , при этом её движение является композицией двух движений: гироваращения в постоянном поле  $B_z$  и нелинейных осцилляций в поле  $B_x \sim z$  (рис. 2) [33, 34].

Частица, сделав полуоборот в поле  $B_z$ , покидает плоскость  $z = 0$  и снова начинает двигаться вдоль силовой

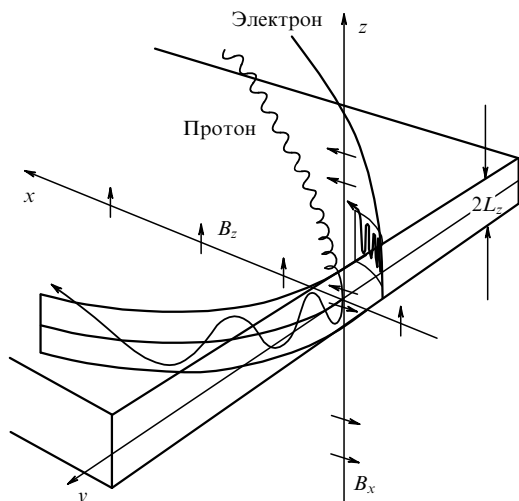


Рис. 2. Траектории иона и электрона, полученные численным интегрированием системы с гамильтонианом (4). (Из работы [33].)

линии, осциллируя поперёк неё. Таким образом, подобная частица может находиться вблизи плоскости  $z = 0$  лишь в течение ограниченного времени [35]. Однако распределения энергии частицы по двум степеням свободы ( $p_x, p_z$ ) при подходе к плоскости  $z = 0$  и после того, как частица покинет эту плоскость, могут существенно различаться. Попытки классифицировать траектории частиц по значениям магнитного момента  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  для системы с гамильтонианом (4) не увенчались успехом, так как  $\mu$  претерпевает скачок порядка своей величины при взаимодействии частицы с токовым слоем [36]. Исключением здесь являются токовые слои с нулевой толщиной, в которых магнитное поле  $B_x = \pm B_0$  [37].

Геометрия реального токового слоя подразумевает наличие не только центральной области, в которой  $B_x \sim z$ , но и границ токового слоя, на которых поле пространственно однородно ( $B_x \sim B_0 \text{ sign } z$ ). Частицы, попавшие в данные области из токового слоя, уже никогда не вернутся в него обратно. Эти частицы, принадлежащие классу пролётных частиц с разомкнутыми траекториями, уходят на бесконечность ( $z \rightarrow \pm\infty$ ). В системе с гамильтонианом (4) магнитное поле  $b_x = z$  возрастает на бесконечности и все частицы в конце концов возвращаются к плоскости  $z = 0$  (за исключением частиц с нулевыми компонентами импульса поперёк силовой линии). Тем не менее система с гамильтонианом (4) эффективно описывает условия взаимодействия частиц с токовым слоем, и она активно используется в аналитической теории. При рассмотрении системы с гамильтонианом (2) часто используют функцию  $b_x = \tanh(z)$  из известной модели токового слоя Харриса [38]. В этом случае основным отличием общей системы с гамильтонианом (2) от упрощённой системы с гамильтонианом (4) является наличие в первой пролётных траекторий.

Отсутствие возможности построить точное аналитическое решение гамильтоновых уравнений для (2) и провести классификацию траекторий долго являлось препятствием для исследования динамики заряженных частиц в токовых слоях. Однако оказалось, что такую классификацию можно провести на основе методики построения сечений Пуанкаре [39]. Решениями гамильтоновых уравнений для (2) и (4) являются кривые в четырёхмерном пространстве  $(z, p_z, kx, p_x)$ . Благодаря сохранению энергии траектории заполняют некоторое трёхмерное многообразие. Тогда при фиксированном значении одной из координат (например, при  $z = 0$ ) всё множество траекторий представляется множеством на плоскости  $(kx, p_x)$ . Для построения данного множества используется следующий подход: гамильтоновы уравнения движения интегрируются численно и при пересечении частицей плоскости  $z = 0$  отмечается её положение на плоскости  $(kx, p_x)$ . При этом начальной координатой частицы является точка на плоскости  $z = 0$ . То есть если частица при своём дальнейшем движении больше не пересекает плоскость  $z = 0$ , то она не учитывается на сечении Пуанкаре. Пример такого сечения из работы [39] приведён на рис. 3. Очевидно, что в системе с гамильтонианом (2) координата  $y$  изменяется как  $dy/dt = p_y - (L_z/\rho_0) a_y(x, z)$ . Как следствие,  $dp_x/dt \sim dy/dt$ , и рис. 3 можно рассматривать как набор пересечений частицей плоскости  $(x, y)$  при  $z = 0$ . На рисунке видны различные области, по которым можно проводить классификацию траекторий в системе. Так, области, не занятые точками, соответствуют пролётным частицам. Области, содержащие замкнутые кривые, соответствуют "запертым" внутри токового слоя частицам, которые никогда не покидают окрестности плоскости  $z = 0$ . Во время своего движения эти частицы постоянно пересекают плоскость  $z = 0$ . Такие траектории называют регулярными (как показано ниже, эти траектории не участвуют в хаосе и движение по ним квазипериодично). Области, заполненные точками, соответствуют хаотическим траекториям. Частицы на данных траекториях после взаимодействия с токовым слоем не уходят на бесконечность, а возвращаются в токовый слой, развернувшись на некотором расстоянии от плоскости  $z = 0$ . В результате многократного взаимодействия с токовым слоем их движение хаотизуется.

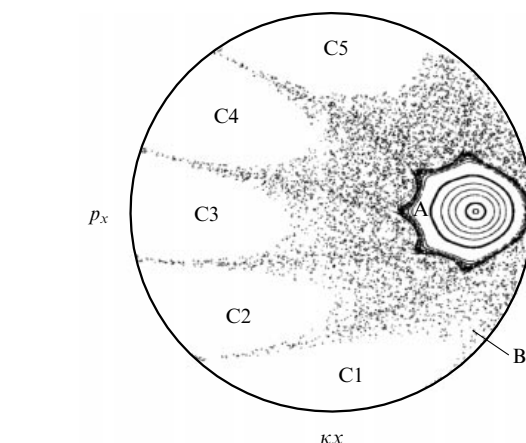
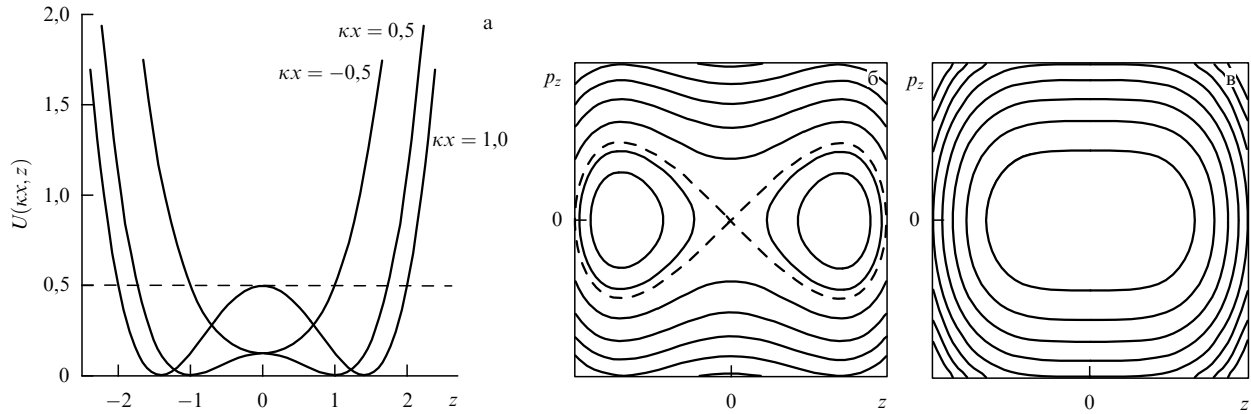


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для системы с гамильтонианом (2). C1–C5 — области пролётных частиц, B — область квазизахваченных частиц, A — область регулярных траекторий. (Из работы [39].)

рёхмерном пространстве  $(z, p_z, kx, p_x)$ . Благодаря сохранению энергии траектории заполняют некоторое трёхмерное многообразие. Тогда при фиксированном значении одной из координат (например, при  $z = 0$ ) всё множество траекторий представляется множеством на плоскости  $(kx, p_x)$ . Для построения данного множества используется следующий подход: гамильтоновы уравнения движения интегрируются численно и при пересечении частицей плоскости  $z = 0$  отмечается её положение на плоскости  $(kx, p_x)$ . При этом начальной координатой частицы является точка на плоскости  $z = 0$ . То есть если частица при своём дальнейшем движении больше не пересекает плоскость  $z = 0$ , то она не учитывается на сечении Пуанкаре. Пример такого сечения из работы [39] приведён на рис. 3. Очевидно, что в системе с гамильтонианом (2) координата  $y$  изменяется как  $dy/dt = p_y - (L_z/\rho_0) a_y(x, z)$ . Как следствие,  $dp_x/dt \sim dy/dt$ , и рис. 3 можно рассматривать как набор пересечений частицей плоскости  $(x, y)$  при  $z = 0$ . На рисунке видны различные области, по которым можно проводить классификацию траекторий в системе. Так, области, не занятые точками, соответствуют пролётным частицам. Области, содержащие замкнутые кривые, соответствуют "запертым" внутри токового слоя частицам, которые никогда не покидают окрестности плоскости  $z = 0$ . Во время своего движения эти частицы постоянно пересекают плоскость  $z = 0$ . Такие траектории называют регулярными (как показано ниже, эти траектории не участвуют в хаосе и движение по ним квазипериодично). Области, заполненные точками, соответствуют хаотическим траекториям. Частицы на данных траекториях после взаимодействия с токовым слоем не уходят на бесконечность, а возвращаются в токовый слой, развернувшись на некотором расстоянии от плоскости  $z = 0$ . В результате многократного взаимодействия с токовым слоем их движение хаотизуется.

Для более полного описания динамики системы с гамильтонианом (4) в общем случае применяется аналитический подход, основанный на использовании разных временных масштабов изменения переменных  $(z, p_z)$  и  $(kx, p_x)$ . Наличие разномасштабности позволяет ввести в рассмотрение квазиadiaбатический инвариант. Поскольку  $\kappa \ll 1$ , в системе с гамильтонианом (4) переменные



**Рис. 4.** (а) Потенциальная энергия  $U(kx, z) = 1/2(kx - (1/2)z^2)^2$  для различных значений  $kx$ . Линии равного уровня гамильтониана  $p_z^2/2 + (kx - (1/2)z^2)^2/2$  для  $kx > 0$  (б) и  $kx < 0$  (в). Штриховой кривой показана сепаратриса.

$kx$ ,  $p_x$  можно считать медленными, а переменные  $z$ ,  $p_z$  — быстрыми. Это приближение позволяет рассмотреть динамику на плоскости  $(z, p_z)$  при "замороженных" значениях  $kx$ ,  $p_x$ . Введём гамильтониан быстрого движения

$$h_z = H - \frac{1}{2}p_x^2 = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}\left(kx - \frac{1}{2}z^2\right)^2,$$

зависящий от параметра  $kx$ . Потенциальная энергия для этого гамильтониана

$$U = \frac{1}{2}\left(kx - \frac{1}{2}z^2\right)^2$$

при различных значениях  $kx$  представлена на рис. 4а. Как видно из рисунка, частицы могут совершать колебания или в какой-либо из "малых" ям (при  $s > 1$ ,  $s = kx/\sqrt{2h_z}$ ), или в одной "большой" яме (при  $1 > s > 0$ ). При  $kx < 0$  в системе существует только одна потенциальная яма. Движения с пересечением и без пересечения плоскости  $z = 0$  соответствуют траекториям двух типов на фазовой плоскости  $(z, p_z)$  (рис. 4б, в). Траектории этих двух типов разделяются сепаратрисой. При  $kx > 0$  (рис. 4б) частица может находиться или в одной из петель сепаратрисы (во внутренней области), или во внешней области. При  $kx < 0$  частица захвачена в центре токового слоя.

Периодичность быстрого движения частицы на плоскости  $(z, p_z)$  при постоянном значении  $kx$  позволяет ввести переменную действия как ограниченную замкнутой траекторией площадь, нормированную на  $2\pi$ :  $\hat{I}_z = (2\pi)^{-1} \oint p_z dz$  [3]. Для системы с  $H$  (4)  $\hat{I}_z$  имеет вид

$$\hat{I}_z = \frac{1}{\pi} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{2h_z - \left(kx - \frac{1}{2}z^2\right)^2} dz. \quad (5)$$

Пределы интегрирования  $z_{\pm}$  определяются из уравнения  $2h_z = (kx - (1/2)z^2)^2$ . Мы можем ввести квазиadiaбатический инвариант  $I_z = (\alpha/2)\hat{I}_z = (2\pi)^{-1}(2h_z)^{3/4}f(s)$ , где  $s = kx/\sqrt{2h_z}$  и

$$f(s) = \alpha \int_{z'_-}^{z'_+} \sqrt{1 - \left(s - \frac{1}{2}z'^2\right)^2} dz'.$$

Коэффициент  $\alpha = 1$ , если частица колеблется в одной-единственной потенциальной яме, и  $\alpha = 2$ , если частица находится в какой-либо из малых ям.

Величина  $I_z$  зависит от медленных переменных  $kx$ ,  $p_x$  как от параметров, и её сохранение обеспечено разделением временных масштабов для  $z$ ,  $p_z$  и  $kx$ ,  $p_x$ .

Здесь и далее мы используем, как упоминалось во введении, термин "квазиadiaбатический" инвариант, чтобы подчеркнуть отличие рассматриваемого инварианта (и приближения, в рамках которого предполагается его сохранение) от классического адиабатического инварианта этой задачи — магнитного момента.

Введённый таким образом квазиadiaбатический инвариант во внешней области будет равняться половине площади под траекторией, делённой на  $2\pi$ , а во внутренней области (внутри петли сепаратрисы) — полной площади под траекторией, делённой на  $2\pi$ . Следовательно,  $I_z$  имеет одинаковое значение в рамках квазиadiaбатического приближения во внешней и внутренней областях, т.е. функция  $f(s)$  является непрерывной.

Функция  $f(s)$  записывается через полные эллиптические интегралы первого ( $K$ ) и второго ( $E$ ) родов [40]:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{8}{3} [2(1-k^2)K(k) + 2(2k^2-1)E(k)], \quad k < 1, \\ f(s) &= \frac{8}{3} \left[ 2(1-k^2)kK\left(\frac{1}{k}\right) + (2k^2-1)kE\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad k > 1, \\ k &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+s)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно из рис. 5а,  $f(s)$  возрастает от нуля при  $s$  от  $s = -1$  до  $s = 1$ , достигая максимального значения  $f_{\max} \approx 1.6$ , и затем убывает с увеличением  $s$  как  $\sim s^{-1/2}$ .

Величина инварианта  $I_z$  зависит от  $kx$  и  $h_z = H - (1/2)p_x^2$ . При этом для фиксированной энергии  $H$  значение  $I_z$  определяет траекторию на плоскости медленных переменных  $(kx, p_x)$ , т.е. каждому значению  $I_z$  соответствует своя траектория на плоскости  $(kx, p_x)$ . Для системы с гамильтонианом (4) построение траекторий на плоскости  $(kx, p_x)$  как линий равного уровня  $I_z = I_z(kx, p_x)$  впервые было выполнено в работе [40] на основе более ранних исследований [33, 41]. Траектории из работы [40] приведены на рис. 5б (кривые симметричны относительно оси  $p_x = 0$ ).

Каждая точка на плоскости  $(kx, p_x)$  соответствует некоторой траектории на плоскости  $(z, p_z)$ . На рисунке 5б сплошными кривыми обозначены траектории на плоско-

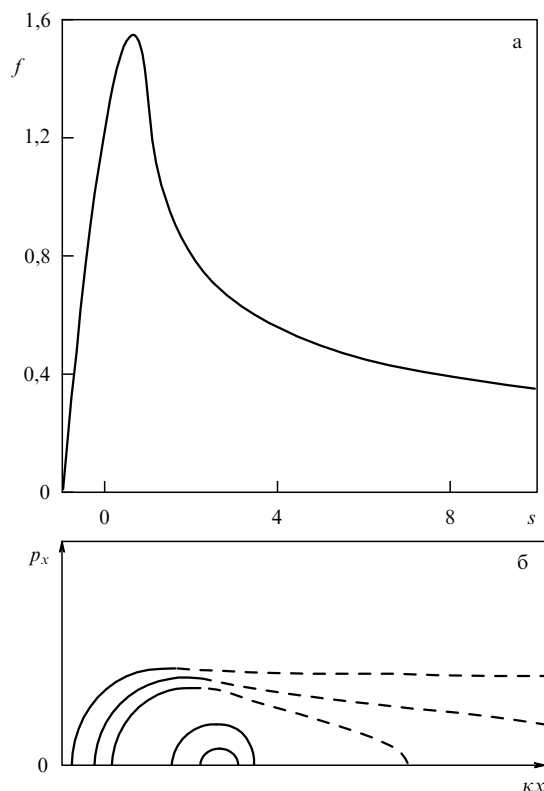


Рис. 5. (а) Функция  $f(s)$ . (б) Траектории на фазовой плоскости  $(\kappa x, p_x)$  для системы с гамильтонианом (4). (Из работы [40].)

сти  $(\kappa x, p_x)$ , соответствующие траекториям во внешней области на плоскости  $(z, p_z)$ . Штриховыми кривыми показаны участки траекторий на плоскости  $(\kappa x, p_x)$ , соответствующие траекториям в одной из внутренних областей на плоскости  $(z, p_z)$ . Видно, что некоторые траектории не имеют участков, обозначенных штриховыми линиями. Частицы на этих траекториях никогда не переходят во внутренние области на плоскости  $(z, p_z)$ .

Отметим, что при движении частицы на плоскости медленных переменных  $(\kappa x, p_x)$  меняется потенциал  $U$ , в котором частица колеблется на плоскости быстрых переменных. Тогда при переходе из какой-либо петли во внешнюю область площадь под траекторией удваивается, следовательно, удваивается  $\hat{I}_z$ . Этот эффект называется геометрическим скачком инварианта. Если петли сепаратрисы симметричны, как в рассматриваемом здесь случае, и их площади имеют одну и ту же величину при переходе траектории во внешнюю область и её возвращении в одну из петель, то геометрический скачок можно исключить из рассмотрения, определяя  $I_z$  как половину  $\hat{I}_z$  во внешней области. Система с несимметричными петлями сепаратрисы рассмотрена в разделе 4.4 и приложении А.

Квазиadiaбатический инвариант  $I_z$  в системе сохраняется вдали от сепаратрисы с линейной точностью по малому параметру  $\kappa$  на временах  $\sim 1/\kappa$  [3]. Однако всегда можно ввести в рассмотрение так называемый улучшенный квазиadiaбатический инвариант, который будет сохраняться вдали от сепаратрисы с точностью  $\sim \kappa^2$  [42]. Далее всюду, если это специально не оговаривается, мы используем  $I_z$ . Улучшенный квазиadiaбатический инвариант нам понадобится только при рассмотрении процесса перехода частицы через сепаратрису (см.

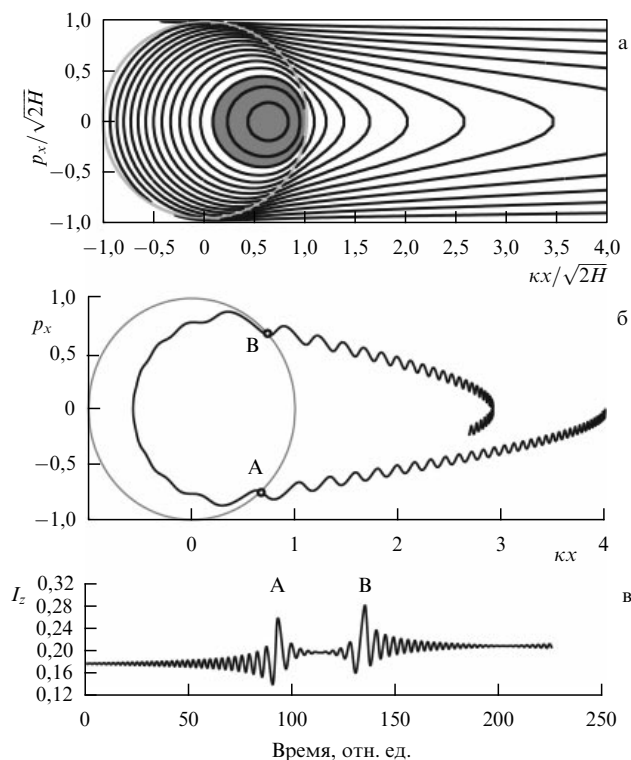


Рис. 6. (а) Линии равного уровня квазиadiaбатического инварианта  $I_z(\kappa x, p_x)$ , (б) проекция рассчитанной численно траектории на плоскость медленных переменных и (в) зависимость инварианта  $I_z$  от времени для гамильтоновой системы (4).

приложение А). Использование  $I_z$  соответствует рассмотрению системы в главном приближении по  $\kappa$ .

### 3.2. Динамика частиц и диффузия квазиadiaбатического инварианта

В этом разделе рассмотрим эффекты, связанные со скачками квазиadiaбатического инварианта  $I_z$ . Эти скачки возникают при переходе частицы через сепаратрису на плоскости быстрых переменных  $(z, p_z)$ . Линии равного уровня  $I_z$  на плоскости  $(\kappa x/\sqrt{2H}, p_x/\sqrt{2H})$  определяют всё множество траекторий в квазиadiaбатическом приближении (т.е. при  $I_z = \text{const}$ ). Для гамильтониана (4) траектории представлены на рис. 5б и в более полном виде на рис. 6а, на котором половина большой окружности (изображённой жирной светлой линией) при  $\kappa x > 0$  обозначает кривую неопределённости ( $\kappa x > 0$  и  $p_x^2 + (\kappa x)^2 = 2H$ ). Каждая точка на данной кривой соответствует движению частицы вдоль сепаратрисы на плоскости  $(z, p_z)$ . По этой причине траектории, которые на рис. 6а не пересекают кривую неопределённости, на плоскости  $(z, p_z)$  никогда не пересекают сепаратрису. Как следствие, для данных траекторий отсутствуют скачки квазиadiaбатического инварианта, и они формируют замкнутые кривые на сечении Пуанкаре (см. рис. 3).

Траектории, пересекающие кривую неопределённости на плоскости медленных переменных, переходят через сепаратрису на плоскости  $(z, p_z)$ . При выходе из внешней области частица оказывается в одной из петель. Пример численного расчёта траектории частицы представлен на рис. 6б, в — показаны траектория частицы на плоскости медленных переменных и величина адиабатического инварианта как функция времени. На рисунке 6в видны два скачка инварианта, отвечающие пересечению

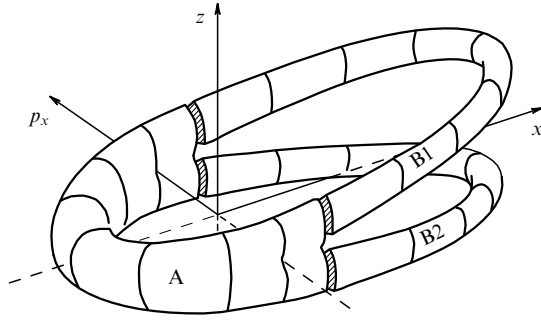


Рис. 7. Инвариантный тор в квазиadiaбатическом приближении в пространстве  $(\kappa x, p_x, z)$ . Область А соответствует внешней области  $(\kappa x/\sqrt{2H} < 1)$ , B1 и B2 — области, ограниченные двумя петлями сепаратрисы  $(\kappa x/\sqrt{2H} > 1)$ . Штриховкой отмечены области перехода через сепаратрису. (Из работы [43].)

кривой неопределённости (и соответствующему пересечению сепаратрисы на плоскости быстрых переменных). Из-за наличия этих скачков траектория оказывается разомкнутой, хотя её общая форма схожа с формой траекторий, построенных в адиабатическом приближении с  $I_z(\kappa x, p_x) = \text{const}$ .

В трёхмерном пространстве  $(\kappa x, p_x, z)$  поверхность, заполняемая траекторией, в квазиadiaбатическом приближении (при  $I_z = \text{const}$ ) выглядит как расщеплённый деформированный тор (рис. 7).

Вблизи сепаратрисы нарушается адиабатичность движения (период осцилляций частицы на плоскости быстрых переменных сингулярно зависит от энергии частицы [44]). Таким образом, при приближении к сепаратрисе, переходе через неё и удалении от сепаратрисы накапливается изменение квазиadiaбатического инварианта (малые изменения  $I_z$  происходят на каждом периоде осцилляций на плоскости быстрых переменных). Сумма этих изменений, называемая скачком инварианта, определяется (см. приложение А) как

$$\Delta I_z = -\frac{2}{\pi} \kappa p_x^* \ln(2 \sin \pi \xi), \quad (7)$$

где  $p_x^*$  — значение импульса  $p_x$  при пересечении сепаратрисы,  $\xi \in (0, 1)$  — переменная, характеризующая точку, в которой происходит переход через сепаратрису. Отметим, что  $\xi$  очень чувствительна к начальным значениям быстрых переменных (изменение начального положения точки на плоскости  $(z, p_z)$  на величину  $\sim \kappa$  приводит к изменению  $\xi$  на величину порядка единицы). Таким образом,  $\xi$  можно считать случайной величиной и рассматривать скачки  $\Delta I_z$  как случайные изменения инварианта  $I_z$  при переходе через сепаратрису.

В результате таких скачков траектории на плоскости  $(\kappa x, p_x)$  становятся разомкнутыми (рис. 6б). Многократное пересечение сепаратрисы (многократное взаимодействие частицы с токовым слоем) приводит к стохастизации системы на временах, существенно превышающих период медленного движения ( $\gg 1/\kappa$ ) [45].

Последовательные скачки квазиadiaбатического инварианта для большинства частиц можно считать случайными независимыми величинами (см. приложение А). В результате квазиadiaбатический инвариант изменяется со временем в соответствии с законом случайных блужданий с шагом  $\Delta I_z$  и временным интервалом между скачками  $\sim 1/\kappa$ . Данный процесс можно описать в тер-

минах случайных блужданий в пространстве инвариантов для одной траектории или в терминах диффузии, если мы рассматриваем некоторое распределение по  $I_z$ . Если в начальный момент в системе имелось некоторое распределение частиц по квазиadiaбатическим инвариантам, то со временем накопление скачков  $\Delta I_z$  приводит к диффузии в пространстве инвариантов и эволюции данного распределения [46, 47].

Можно показать, что среднее по  $\xi$  значение скачка  $\langle \Delta I_z \rangle_\xi$ , определённого формулой (7), в точности равно нулю:

$$\int_0^1 \ln(2 \sin \pi \xi) d\xi = 0.$$

Однако среднее от квадрата скачка  $\langle (\Delta I_z)^2 \rangle_\xi$  уже не равняется нулю:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I_z)^2 \rangle &= \int_0^1 (\Delta I_z)^2 d\xi = \\ &= \frac{4(\kappa p_x^*)^2}{\pi^3} \int_0^\pi \ln^2(2 \sin x') dx' = \frac{1}{3} (\kappa p_x^*)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы воспользовались следующим табличным интегралом [48, с. 544]:

$$\int_0^{\pi/2} \ln^2(2 \sin x) dx = \frac{\pi^3}{24}.$$

Таким образом, дисперсия  $\Delta I_z$  квадратичным образом зависит от малого параметра  $\kappa^2$ . Тогда для обеспечения изменения  $I_z$  на величину порядка единицы необходимо  $1/\kappa^2$  пересечений сепаратрисы. Характерное время изменения  $I_z$  определяется отношением периода медленного движения  $\sim 1/\kappa$  к величине  $\sim \kappa^2$ , т.е. для существенного изменения квазиadiaбатического инварианта требуется время порядка  $1/\kappa^3$ .

Можно записать  $p_x^*$  как функцию самого квазиadiaбатического инварианта. Для этого рассмотрим равенство (5) в точке с  $p_x = p_x^*$ :

$$2H = p_x^2 + (\kappa x)^2,$$

$$s = \frac{\kappa x}{\sqrt{2H - p_x^2}} = 1,$$

$$I_z = \frac{1}{2\pi} (2H - p_x^2)^{3/4} f(1) = \frac{8}{3\pi} (2H - p_x^2)^{3/4}.$$

В результате  $p_x^*/\sqrt{2H} = 1 - I^{4/3}$ , где  $I = 3\pi I_z / 8(2H)^{3/4}$ . Коэффициент диффузии в пространстве квазиadiaбатических инвариантов принимает вид

$$D_{II} = \frac{\langle (\Delta I_z)^2 \rangle}{\tau_c} = \frac{2}{3} \frac{H \kappa^2 (1 - I^{4/3})}{\tau_c},$$

где  $\tau_c$  — период движения частицы на плоскости медленных переменных [46].

Если мы определим ансамбль частиц с различными значениями инварианта  $I$  через функцию распределения  $F(I, t)$ , то эволюция  $F(I, t)$  будет описываться уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} \left( D_{II} \frac{\partial F}{\partial I} \right). \quad (9)$$

Решение уравнения (9) позволяет определить функцию распределения в пространстве квазиadiaбатических инвариантов в замкнутой системе, т.е. в системе, на которую не действуют внешние силы, способные изме-

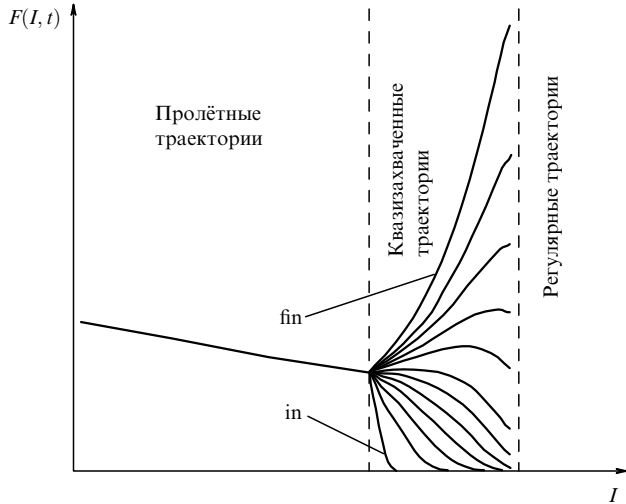


Рис. 8. Функция распределения  $F(I, t)$  в различные моменты времени. Начальный момент указан как in, конечный момент — как fin. (Из работы [46].)

нить распределение  $F(I, t)$ . Численные значения  $F(I, t)$  получены в работах [46, 47]. На рисунке 8 представлена фазовая плотность  $F(I, t)$  для нескольких моментов времени, полученная в результате численного решения диффузионного уравнения. При решении предполагалось, что в токовом слое с магнитным полем, достигающим предельных значений  $b_x = \pm 1$  на границе системы  $|z| = 1$  ( $b_x = \tanh z$ ), имеются источники частиц. Благодаря этим источникам в слое поддерживается постоянная популяция частиц, движущихся по пролётным траекториям. Данные частицы проходят через весь слой за счёт либо малого значения скачка  $I_z$ , либо особого резонансного эффекта (см. раздел 3.3). Однако пролётные частицы составляют лишь часть от всех частиц, попадающих в токовый слой в единицу времени. Остальная популяция частиц вследствие скачков квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  переходит с изначально пролётных орбит на квазизахваченные и остаётся в токовом слое. Со временем фазовая плотность, приходящаяся на данную популяцию, возрастает. Это, в первую очередь, связано с тем, что начальное распределение частиц по  $I_z$  соответствует достаточно узкому максимуму функции  $F(I, t)$  вблизи малых значений  $I_z$  (т.е. в начальный момент все частицы находятся на пролётных траекториях). Затем, несмотря на то что скачок  $\Delta I_z$  является случайной величиной и частица может как увеличить, так и уменьшить значение  $I_z$ , в среднем число частиц с большими значениями  $I_z$  (частиц на квазизахваченных траекториях) возрастает вследствие диффузии квазиadiaбатического инварианта. Как видно из рис. 8, результаты численного моделирования согласуются с данными представлениями: со временем увеличивается фазовая плотность частиц на квазизахваченных (хаотических) траекториях. Возрастание числа частиц на этих траекториях ответственно за так называемый процесс старения токовых слоёв (см. [46, 49, 50] и раздел 6.4).

### 3.3. Эффект резонанса и корреляция скачков квазиadiaбатического инварианта

В разделе 3.2 мы рассмотрели вопросы, связанные с диффузией в пространстве инвариантов вследствие скачков  $\Delta I_z$ . Однако среди всего множества траекторий

системы есть две отдельные группы, для которых процессы рассеяния не играют существенной роли. Первую группу составляют траектории, не пересекающие сепаратрису, — регулярные траектории. Вторая группа состоит из траекторий так называемых резонансных частиц.

При однократном взаимодействии с токовым слоем частица пересекает сепаратрису дважды (когда из какой-либо петли попадает во внешнюю область и когда обратно проваливается в одну из петель). Таким образом, происходят два скачка квазиadiaбатического инварианта:

$$\Delta I_{z,1} = -\frac{2}{\pi} \kappa p_x^* \ln(2 \sin \pi \xi),$$

$$\Delta I_{z,2} = \frac{2}{\pi} \kappa p_x^* \ln[2 \sin(\pi \xi + \pi \delta \xi)],$$

где  $\delta \xi$  — изменение  $\xi$  между пересечениями сепаратрисы. При этом  $\xi + \delta \xi \in (0, 1)$ , т.е. из величины  $\xi + \delta \xi$  вычтена целая часть. Сумма двух скачков (результатирующий скачок инварианта) определяется выражением

$$\Delta I_z^{\text{sum}} = \frac{2}{\pi} \kappa p_x^* \ln \left[ \cos(\pi \delta \xi) + \frac{\cos(\pi \xi)}{\sin(\pi \xi)} \sin(\pi \delta \xi) \right],$$

из которого видно, что уравнение  $\Delta I_z^{\text{sum}}(\delta \xi) = 0$  имеет два решения:  $\delta \xi = 0$  и  $\delta \xi = 1 - 2\xi$ . Второй корень зависит от  $\xi$ , и соответствующее условие обнуления суммарного скачка справедливо не для всех частиц. По этой причине мы будем рассматривать только первый корень,  $\delta \xi = 0$ , не зависящий от  $\xi$ .

Величина  $2\pi \delta \xi$  определяется как интеграл от частоты быстрого движения  $\Omega_z(\kappa x, h_z) = \partial H / \partial I_z$  по времени, взятый со знаком минус и по модулю единица [45]. Тогда условие обнуления  $\Delta I_z^{\text{sum}}$  принимает вид

$$2\pi N = \int \Omega_z dt = \frac{1}{\kappa} \int \frac{\Omega_z}{p_x} d\kappa x,$$

где  $N$  — целое число. Гамильтониан (4) можно выразить через переменные  $I_z, \kappa x$ :

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + h_z(I_z, \kappa x).$$

Следовательно,  $\Omega_z = \partial h_z / \partial I_z$ . При этом  $\kappa x = \sqrt{2h_z} s$  и  $2\pi I_z = (2h_z)^{3/4} f(s)$ , т.е.

$$2h_z = \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{4/3},$$

$$p_x = \sqrt{2H - 2h_z} = \sqrt{2H - \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{4/3}},$$

$$d\kappa x = ds \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{2sf'(s)}{3f(s)} \right).$$

В результате получаем следующее условие обнуления суммарного скачка инварианта:

$$\pi N = \frac{2I_z}{3\kappa} \int_0^{\hat{s}} \frac{1 - 2sf'(s)/3f(s)}{f^2(s) \sqrt{2H - (2\pi I_z/f(s))^{4/3}}} ds.$$

Предел интегрирования  $\hat{s}$  определяется из уравнения  $f(\hat{s}) = 2\pi I_z / (2H)^{3/4}$ . Отметим, что малым значениям  $I_z$  соответствуют траектории пролётных частиц. Для того чтобы получить аналитическое выражение в этой обла-

сти, разложим интеграл в ряд Тейлора около  $I_z = 0$ :

$$N = (2H)^{1/4} \kappa^{-1} C_0, \quad (10)$$

где  $C_0 = \Gamma(3/4)/\sqrt{\pi} \Gamma(1/4) \approx 0,76$  [45]. Таким образом, для частиц с энергиями  $2H = (N\kappa/C_0)^4$  набег фазы равен целому числу и  $I_z^{\text{sum}} = 0$ . В результате эффект рассеяния для таких частиц оказывается несущественным [51].

Если мы рассматриваем динамику частиц с тепловыми скоростями  $v_0$ , то  $2H = 1$  и из уравнения  $N = C_0/\kappa$  получаем соотношение, определяющее резонансные значения  $\kappa$  [52], т.е. для системы с определённым  $\kappa$  частицы с энергиями  $H$  не рассеиваются.

В хвосте земной магнитосферы  $\kappa \sim B_z$  убывает при удалении от Земли степенным образом:  $\kappa \sim (-x)^{-h}$ ,  $0 < h < 1$  [53]. Значит, существует серия областей с координатами  $x_N$ , которым соответствуют резонансные значения  $\kappa_N = C_0/N$ . Наличие таких выделенных в пространстве областей, в которых не происходит рассеяния частиц, проявляется в эффектах резонансного ускорения, которые рассмотрены в разделе 5.2.

Полученное соотношение ( $N\kappa = (2H)^{1/4} C_0$ ) определяет для ансамбля частиц с тепловым разбросом по скоростям энергии частиц, не испытывающих стохастического рассеяния:  $(2H)^{1/4} \sim N$ . Данный эффект численно обнаружен в работе [51].

Постановку задачи, исследуемой в [51], можно пояснить следующим образом. Рассматривается токовый слой с популяцией пролётных частиц ( $b_x = \tanh z$ ), на одной границе токового слоя задан источник частиц. Изучается функция распределения частиц, прошедших через токовый слой. Изначально все траектории на границе системы можно считать пролётными. Однако часть частиц за счёт скачков квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  увеличит значение  $I_z$  и перейдёт на квазизахваченные орбиты. Этот эффект не коснётся лишь частиц, изначально имеющих резонансные значения энергии  $H \sim N^4$ . Для того чтобы подтвердить данное предположение, авторы [51] проанализировали функцию распределения частиц после прохождения ими токового слоя в зависимости от тепловой скорости частиц  $V = \sqrt{2H}$ . Как видно из рис. 9, фазовая плотность частиц с определёнными значениями  $H^{1/4}$  имеет характерные максимумы. Каждый такой максимум объясняется тем, что частицы с резонансными энергиями остаются на пролётных траекториях, т.е. при данных энергиях рас-

сеяние отсутствует (все частицы с этими энергиями проходят через токовый слой).

Другие проявления эффекта резонанса численно обнаружены в работах [32, 54]. Для частиц можно ввести понятие времени жизни в токовом слое, т.е. интервала времени, затраченного на пересечение токового слоя. Это время для частиц на пролётных траекториях мало по сравнению с таковым для частиц на квазизахваченных траекториях. Для нерезонансных энергий скачки квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  приводят к тому, что частицы на квазизахваченных траекториях могут уменьшить значение квазиadiaбатического инварианта  $I_z$  и покинуть токовый слой за конечное время (частицы на пролётных орбитах могут или пройти через токовый слой, или перейти на квазизахваченную траекторию и задержаться в слое). В случае резонансных энергий компенсация скачков  $\Delta I_z$  приводит к тому, что частицы сохраняют значения квазиadiaбатического инварианта в токовом слое и остаются на изначальных траекториях. В результате, если частица являлась пролётной, то она очень быстро покинет слой, а если частица находилась на квазизахваченной траектории, то она останется в слое надолго (с формальной точки зрения эта частица вообще не должна покидать слой, но в следующем порядке по  $\kappa$  скачки  $\Delta I_z$  уже не компенсируют друг друга и частицы всё же уходят из слоя; исключением является лишь особый класс устойчивых квазизахваченных траекторий, для которых суммарный скачок  $\Delta I_z = 0$  (см. [55, 56])).

Для того чтобы продемонстрировать данный эффект, используется следующая схема моделирования: в нейтральной плоскости ( $z = 0$ ) запускаются частицы из области, ограниченной окружностью  $(\kappa x)^2 + p_x^2 = 2H$ . Затем траектории частиц рассчитываются для достаточно длительного времени и строится карта распределения времени жизни: на плоскости  $(\kappa x, p_x)$  время жизни частиц на траектории, исходящей из данной точки, отмечается соответствующим цветом. При любых значениях  $H$  на плоскости  $(\kappa x, p_x)$  можно выделить три основные области (рис. 10): область пролётных частиц, из которой частицы не возвращаются в токовый слой (показана на рисунке белым цветом); область регулярных траекторий, частицы из которой не покидают токового слоя (отмечена чёрным цветом); область квазизахваченных частиц, время жизни которых в слое конечно (показана серым цветом (рис. 10а). В случае резонансных энергий частицы на квазизахваченных траекториях становятся почти регулярными — их время жизни существенно возрастает (рис. 10б).

Для расчётов, результаты которых приведены на рис. 10а, б, было выбрано относительно большое ( $\approx 0,4$ ) значение  $\kappa$ . Карта времени жизни для системы с  $\kappa = 0,2$  представлена на рис. 10в, из которого видно, что время жизни частиц в токовом слое на квазизахваченных траекториях для резонансных энергий существенно возрастает.

#### 4. Динамика заряженных частиц в системах со сложной геометрией

В разделе 3 мы показали, как, используя квазиadiaбатические инварианты, можно описать динамику заряженных частиц в простейшей магнитной конфигурации  $\mathbf{B} = B_0(z/L_z)\mathbf{e}_x + B_z\mathbf{e}_z$ . Однако геометрия токовых слоёв, наблюдаемых в хвосте земной магнитосферы, в

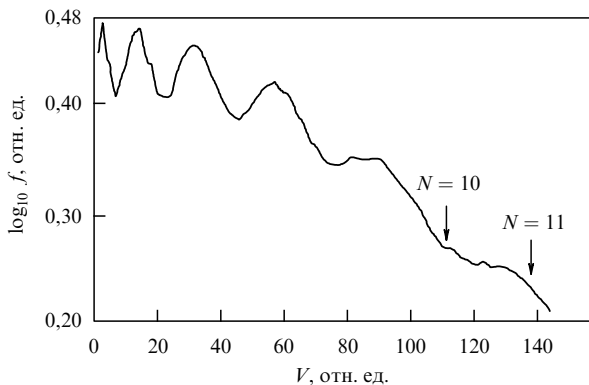


Рис. 9. Функция распределения частиц после прохождения ими токового слоя. (Из работы [51].)

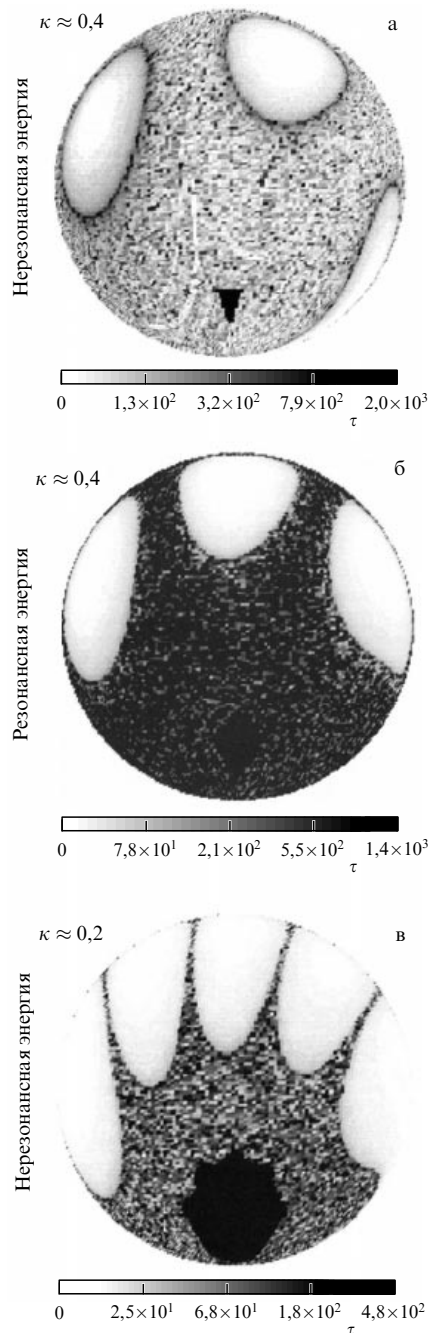


Рис. 10. Время жизни  $\tau$ , нормированное на гирочастоту в поле  $B_0$ , для нерезонансной (а) и резонансной (б) энергий при  $\kappa \approx 0.4$ , а также для нерезонансной энергии (в) при  $\kappa \approx 0.2$ . (Из работы [54].)

магнитосферах других планет Солнечной системы и в солнечном ветре, конечно, намного богаче (см. обзоры [22, 23]). Так, характерной особенностью магнитосферных токовых слоёв является наличие ненулевого градиента  $\partial B_z/\partial x$  [53, 57], который, хотя и является существенно меньшим, чем градиент  $\partial B_x/\partial z$ , также может играть важную роль в динамике заряженных частиц.

Развитие разрывной неустойчивости в токовых слоях приводит к формированию конфигураций с X- и O-линиями, в которых  $B_z(x)$  представляет собой уже не просто переменную, а знакопеременную величину,  $B_z \sim x$  [58–62]. Динамика частиц в указанных конфигурациях также может быть описана с помощью теории,

основывающейся на сохранении квазиadiaбатических инвариантов.

Некоторым токовым слоям присуща сложная внутренняя структура — бифуркация поперечного тока. Токовые слои с такой структурой наблюдаются в магнитосфере Земли [63, 64], магнитосферах других планет Солнечной системы [65] и солнечном ветре [66]. В этом случае производная от компоненты магнитного поля  $\partial B_x/\partial z$  имеет локальный минимум в центре токового слоя. Мы рассмотрим особенности динамики частиц в такой конфигурации и получим выражение для скачков квазиadiaбатического инварианта в разделе 4.3.

Кроме того, в токовых слоях хвоста земной магнитосферы [67, 68] и магнитопаузы [69–71] часто присутствует ненулевая компонента магнитного поля  $B_y$ , направленная вдоль тока. В хвосте земной магнитосферы наличие  $B_y \neq 0$  может быть обусловлено как внутренними токовыми системами, так и процессами проникновения межпланетного магнитного поля в магнитосферу [29]. В разделе 4.4 мы рассмотрим токовый слой при ненулевой компоненте вдоль тока ( $B_y \neq 0$ ) [72]. Данная конфигурация отличается от рассмотренных в разделе 3 асимметрией петель сепаратрисы на фазовой плоскости быстрых переменных, что приводит к существенному изменению динамики частиц уже в квазиadiaбатическом приближении (т.е. даже без учёта динамического скачка квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$ ).

#### 4.1. Динамика частиц в двумерных токовых слоях

В этом разделе мы рассмотрим динамику заряженных частиц в токовом слое с неоднородным магнитным полем  $B_z(x/L_x)$ , где  $L_x$  — масштаб неоднородности  $B_z$ . При этом мы предполагаем, что в рассматриваемой области  $x \in [x_1, x_0]$  поле  $B_z(x/L_x)$  нигде не обращается в нуль. Параметры  $x_1$  и  $x_0$  в рассматриваемой области удовлетворяют неравенствам  $x_1 < x_0 < 0$ , что соответствует токовому слою, находящемуся на ночной стороне магнитосферы Земли, а также выбору системы координат с центром в точке, соответствующей координате Земли, и осью  $x$ , направленной от Земли к Солнцу (см. рис. 1). Силовые линии магнитного поля для данного случая показаны на рис. 11 (для сравнения на рисунке также приведены силовые линии системы с  $B_z = \text{const}$ ). Как видно из рисунка, в системах с  $\partial B_z/\partial x \neq 0$  силовые линии, в отличие от таковых в слое с  $B_z = \text{const}$ , становятся неэквидистантными вдоль оси  $x$ .

Для различных зависимостей  $B_z$  от  $x$  в работах [75, 76] траектории частиц для данной задачи получены численным интегрированием гамильтоновых уравнений движения. Рассматриваемое в этом разделе аналитическое описание движения частиц основывается на работах [77, 78].

Гамильтониан системы в безразмерных переменных, введённых в разделе 3.1, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( p_y + \frac{1}{2} z^2 - \kappa \int_{x_0}^x \frac{B_z(vx')}{\bar{B}_z} dx' \right)^2.$$

Здесь  $\kappa = \bar{B}_z/B_0 \sqrt{L_z/\rho_0}$ ,  $v = \sqrt{L_z \rho_0}/L_x \ll 1$ ,  $\bar{B}_z$  — некоторое характерное значение  $B_z$  на интервале  $x \in [x_1, x_0]$ . Перейдём к новой координате:

$$\chi = -\frac{p_y}{\kappa} + \int_{x_0}^x \frac{B_z(vx')}{\bar{B}_z} dx'.$$

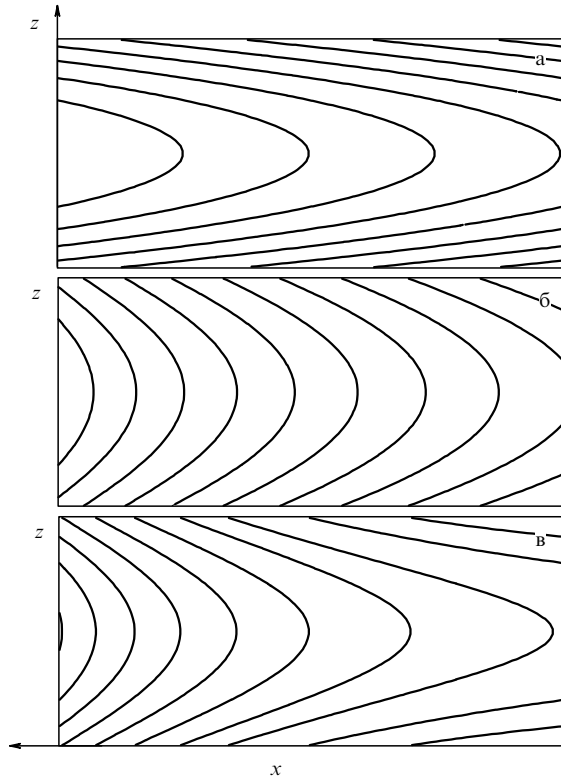


Рис. 11. Силовые линии для системы с  $B_x \sim z$  и с различными профилями  $B_z(x/L_x)$ : (а)  $B_z = \text{const}$ ; (б)  $B_z \sim (-x/L_x)^{-1/2}$  [73]; (в)  $B_z \sim \exp(x/L_x)$  [74].

Тогда  $p_x = p_\chi \beta(v\chi)$ , где  $\beta = B_z(vx)/\bar{B}_z$ . В новых переменных гамильтониан приобретает вид

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2(v\chi) + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 \right)^2. \quad (11)$$

Как и в разделе 3.1, переменные  $z, p_z$  являются быстрыми, а переменные  $\kappa\chi, p_\chi$  — медленными. Отметим, что из гамильтониана (11) можно выделить гамильтониан быстрого движения  $h_z$  и найти для него соответствующий квазиadiaбатический инвариант  $I_z = (1/2\pi)(2h_z)^{3/4} f(s)$ , где  $s = \kappa\chi/\sqrt{2h_z}$ . Тогда можно записать

$$h_z = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 \right)^2, \\ I_z = I_z(v\chi, h_z(H, p_\chi \beta)) = I_z \left( \kappa\chi, H - \frac{1}{2} p_x^2 \right).$$

Таким образом, движение в плоскости  $(z, p_z)$  ничем не отличается от рассмотренного в разделе 3.1 (см. рис. 4). Для медленного движения получаем соответствующий гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2(v\chi) + h_z(I_z, \kappa\chi), \quad (12)$$

где  $h_z$  выражается через инвариант  $I_z$  согласно формуле, приведённой в разделе 3.1.

В переменных  $\kappa\chi, p_\chi \beta$  фазовый портрет гамильтоновой системы (12) выглядит аналогично показанному на рис. 6а. Таким образом, проведённая замена переменных свела задачу к рассмотренной в разделе 3.1. Однако

исходными переменными системы, в которых необходимо изображать фазовые портреты, являются  $\kappa\chi, p_\chi$ . Для того чтобы фазовый портрет в переменных  $\kappa\chi, p_\chi \beta$ , изображённый на рис. 6а, представить в переменных  $\kappa\chi, p_\chi$ , необходимо задать вид функции  $\beta(vx)$ . Мы рассмотрим два возможных выбора функции  $\beta$ , соответствующих двум характерным магнитосферным конфигурациям, изображённым на рис. 11б, в.

Магнитное поле  $B_z(x/L_x)$  в хвосте земной магнитосферы формируется в результате экранирования магнитного поля земного диполя токами токового слоя. Хорошим приближением зависимости  $B_z$  от  $x$  в данных условиях является степенная зависимость  $\beta = (-vx)^{-1/2}$  (рис. 11б), рассматриваемая в работах [57, 73, 79]. При этом

$$\chi = -\frac{p_y}{\kappa} - 2 \left( \sqrt{\frac{-x}{v}} - \sqrt{\frac{-x_0}{v}} \right).$$

Введём обозначение

$$p'_y = \frac{p_y - 2\kappa\sqrt{-x_0/v}}{\sqrt{2H}} = \text{const},$$

тогда

$$\frac{-x}{\sqrt{2H}} = \frac{1}{4} v\sqrt{2H} \left( \frac{\chi}{\sqrt{2H}} + \frac{p'_y}{\kappa} \right)^2,$$

или

$$-vx = \left( \frac{v}{\kappa} \right)^2 \frac{H}{2} \left( \frac{\kappa\chi}{\sqrt{2H}} + p'_y \right)^2.$$

Фазовые портреты на плоскости медленных переменных для нескольких значений  $p'_y$  приведены на рис. 12. Параметр  $p'_y$  содержит информацию о значении импульса частицы вдоль оси  $y$  и положении частицы в начальном моменте на оси  $x$ . Чем больше  $p'_y$ , тем дальше в хвост магнитосферы может проникнуть частица при движении вдоль траектории на плоскости медленных переменных, что соответствует большим значениям координаты  $-x_0$ . При этом области с большими значениями  $-x_0$  соответствуют меньшим значениям градиента поля  $B_z(x/L_x)$ , так как  $dB_z/dx \sim \bar{B}_z/x$ . В результате фазовый портрет при больших значениях  $p'_y$  больше остальных похож на приведённый на рис. 6а фазовый портрет, полученный при нулевом градиенте  $B_z(x/L_x)$ .

В моделях токовых слоёв часто используют также экспоненциальную зависимость магнитного поля от координаты:  $\beta = \exp(vx)$  (см. [80, 81]). Такое приближение соответствует спокойному состоянию магнитосферы. В этом случае

$$\chi = -\frac{p_y}{\kappa} + \frac{\exp(vx) - \exp(vx_0)}{v}, \\ -vx = -\ln \left[ \frac{v}{\kappa} \sqrt{2H} \left( \frac{\kappa\chi}{\sqrt{2H}} + p'_y \right) \right],$$

$$p'_y = \frac{p_y}{\sqrt{2H}} + \frac{(\kappa/v) \exp(vx_0)}{\sqrt{2H}}.$$

Фазовые портреты для данной системы представлены на рис. 13. В этом случае с возрастанием  $-x_0$  градиент поля

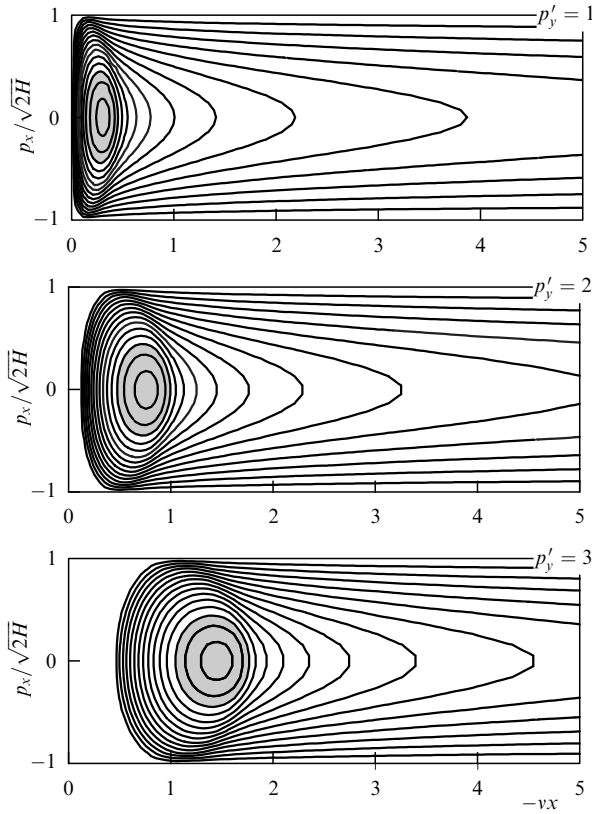


Рис. 12. Фазовые портреты на плоскости  $(-vx, p_x)$  для системы с  $\beta = (-vx)^{-1/2}$  при трёх значениях  $p'_y$ . Параметры системы:  $H = 1$ ,  $v/\kappa = 0,5$ .

$B_z(x/L_x)$  убывает экспоненциально. В результате уже для  $p'_y = 2, 3$  фазовый портрет схож по структуре с портретом системы с нулевым градиентом (рис. 6а).

Затемнённая область на рис. 12, 13 соответствует области, заполненной траекториями, не пересекающими сепаратрисы на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi\beta)$  (рис. 6а). Как видно из рис. 12, 13, площадь, занимаемая данными траекториями, зависит от значения параметра  $p'_y$ . Так как большие значения  $p'_y$  соответствуют меньшим значениям  $dB_z/dx$ , можно сделать вывод, что в системах с сильным градиентом магнитного поля меньше частиц движется по регулярным траекториям.

Как и в случае системы с постоянным полем  $B_z$ , пересечение траекторией сепаратрисы в рассматриваемом случае приводит к скачку квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$ . Так как система с гамильтонианом (11) заменой медленных переменных переменными  $\kappa\chi$ ,  $p_\chi\beta$  сводится к системе с гамильтонианом (4), скачок инварианта можно записать в следующем виде:

$$\Delta I_z = -\frac{2}{\pi} \kappa p_\chi^* \beta^2 (v\chi^*) \ln(2 \sin \pi \xi).$$

Данные скачки, как отмечалось в разделе 3.2, приводят к диффузии квазиadiaбатического инварианта, и на временах порядка  $\kappa^{-3}$  инвариант изменяется на величину порядка единицы.

#### 4.2. Динамика частицы в окрестности Х- и О-линий

Геометрия Х- и О-линий определяется компонентами магнитного поля  $B_x = B_0(z/L_z)$  и  $B_z = \pm B_0(x/L_x)$ , где Х-линии соответствует знак +, а О-линии — знак −.

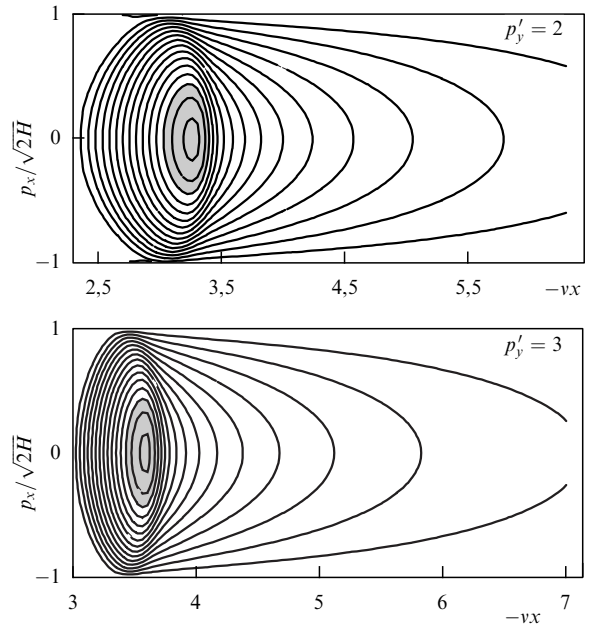


Рис. 13. Фазовые портреты на плоскости  $(-vx, p_x)$  для системы с  $\beta = \exp(vx)$  при двух значениях  $p'_y$ . Параметры системы:  $H = 1$ ,  $\kappa = 0,1$ .

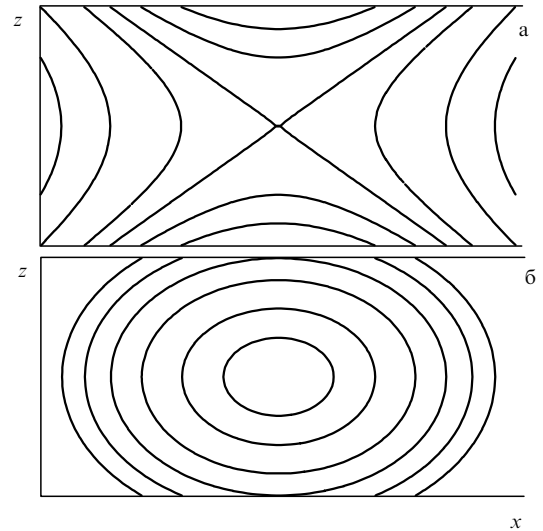


Рис. 14. Силовые линии магнитного поля в геометрии Х-линии (а) и О-линии (б).

Соответствующие конфигурации силовых линий магнитного поля показаны на рис. 14.

Теоретическое рассмотрение динамики частиц в окрестности Х-линии, которое проводится ниже, основывается на теории квазиadiaбатических инвариантов [40, 78, 82].

Гамильтониан системы с Х-линией в безразмерных переменных можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( p_y + \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \frac{1}{2} z^2 \right)^2, \quad (13)$$

где  $\lambda^2 = L_z/L_x$ . В системе с  $\lambda^2 \ll 1$  быстрыми переменными по-прежнему являются  $z$  и  $p_z$ , для которых гамиль-

тониан

$$h_z = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( p_y + \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \frac{1}{2} z^2 \right)^2.$$

Аналогично тому, как это сделано в разделе 3.1, можно ввести инвариант  $I_z = (1/2\pi) (2h_z)^{3/4} f(s)$ , где  $s = \chi/\sqrt{2H}$ ,  $\chi = p_y + (1/2) \lambda^2 x^2$ . При этом фазовый портрет быстрого движения соответствует показанному на рис. 46, в.

Медленными переменными системы являются  $\lambda x, p_x$ , в которых гамильтониан имеет вид  $H = p_x^2/2 + h_z(\chi, I_z)$ . Соответственно, фазовый портрет на плоскости медленных переменных можно построить как семейство линий равного уровня инварианта  $I_z(\chi, H - (1/2) p_x^2)$ . При этом в координатах  $\chi, p_x$  фазовый портрет медленного движения полностью совпадает с фазовым портретом, приведённым на рис. 6а, но не все значения  $\chi$  соответствуют действительным значениям  $x$  при заданном  $p_y$ .

Введём константу  $p'_y = p_y/\sqrt{2H}$ . Тогда, выражая  $x$  через  $\chi$  ( $\lambda x = \pm(8H)^{1/4}(\chi/\sqrt{2H} - p'_y)^{1/2}$ ), при разных значениях  $p'_y$  можно получить различные фазовые портреты на плоскости  $(\lambda x, p_x)$ .

Если  $p'_y < -1$ , то  $\chi/\sqrt{2H} - p'_y > 0$  при всех  $\chi/\sqrt{2H} > -1$ . Таким образом, всё пространство  $(\chi, p_x)$ , представленное на рис. 6а, переходит в пространство  $(\lambda x, p_x)$ , но при этом траектории на плоскости  $(\lambda x, p_x)$  не пересекают вертикальной прямой  $x = 0$ , поскольку  $x \sim \chi/\sqrt{2H} - p'_y$  нигде не обращается в нуль. Данным траекториям соответствует фазовый портрет, показанный на рис. 15а. Частицы на этих траекториях попадают в нейтральную плоскость ( $z \sim 0$ ), ещё не достигнув X-линии ( $x \sim 0$ ), поэтому их движение похоже на движения частиц в двумерном

токовом слое с неоднородным магнитным полем  $B_z(x/L_x)$  (см. рис. 12, 13).

Если  $p'_y = -1$ , то  $\chi/\sqrt{2H}$  изменяется в пределах  $1 > \chi/\sqrt{2H} \geq p'_y$ . Таким образом, точка  $x = 0$  соответствует  $\chi/\sqrt{2H} = p'_y$  и попадает в диапазон изменения  $\chi/\sqrt{2H}$ . В данном случае существует одна траектория на рис. 6а с  $\chi/\sqrt{2H} = -1$ , которой будет соответствовать траектория на фазовом портрете  $(\lambda x, p_x)$ , переходящая из области отрицательных  $\lambda x$  в область положительных  $\lambda x$  (или наоборот) через X-линию ( $x \sim 0$ ). Но все остальные траектории системы всё ещё не пересекают X-линию. Соответствующий фазовый портрет на плоскости медленного движения показан на рис. 15б.

При  $-1 < p'_y < 1$  получаем, что условие  $\chi/\sqrt{2H} - p'_y > 0$  выполняется при  $\chi/\sqrt{2H} > -1$ . Следовательно, на плоскость  $(\lambda x, p_x)$  проецируется только часть фазового пространства, представленного на рис. 6а. Фазовый портрет на плоскости  $(\lambda x, p_x)$  в этом случае показан на рис. 15в. В системе уже есть траектории, переходящие из полупространства положительных  $\lambda x$  в полупространство отрицательных  $\lambda x$ .

При  $p'_y > 1$  получаем, что условие  $\chi/\sqrt{2H} - p'_y > 0$  выполняется при  $\chi/\sqrt{2H} > 1$ . В результате на фазовую плоскость  $(\lambda x, p_x)$  проецируются только те части траекторий, которые соответствуют  $\chi/\sqrt{2H} > 1$ . Эти траектории уже не пересекают кривую неопределённости, и на плоскости  $(\lambda x, p_x)$  сепаратриса отсутствует (рис. 15г).

Кривая неопределённости, соответствующая движению частицы вдоль сепаратрисы на плоскости  $(z, p_z)$ , также может быть спроецирована на плоскость  $(\lambda x, p_x)$  с плоскости  $(\chi, p_x)$ , на которой кривая неопределённости представляет собой полуокружность  $(\kappa x)^2 + p_x^2 = 2H$ ,  $\kappa x > 0$ . В этом случае на плоскости  $(\lambda x, p_x)$  кривая неопределённости будет представлять собой две дуги, касающиеся двух областей с регулярными траекториями (отмеченные тёмным цветом). В результате те траектории, которые находятся в области вокруг  $x = 0$ , ограниченной этими дугами, не будут пересекать сепаратрису на плоскости  $(z, p_z)$ .

Для рассматриваемой системы в работе [83] построены сечения Пуанкаре для трёх значений  $p'_y$ : рассчитывался ансамбль траекторий и при пересечении траекторией плоскости  $z = 0$  отмечалось положение частицы на плоскости  $(\lambda x, p_x)$ . Рисунок 16а соответствует случаю, в котором на плоскости медленных переменных отсутствуют траектории, пересекающие прямую  $x = 0$  и не пересекающие кривую неопределённости. В результате область с  $x \sim 0$  оказывается заполненной хаотично разбросанными точками. Рисунок 16в соответствует системе, в которой есть траектории, не пересекающие кривую неопределённости, но проходящие через  $x = 0$  (видны неразрушенные траектории на плоскости медленных переменных, переходящие из полупространства  $x > 0$  в полупространство  $x < 0$ ). На всех сечениях Пуанкаре отчётливо видна область регулярного движения (замкнутые кривые), отмеченная на рис. 15 тёмным цветом. Также на сечениях Пуанкаре видна область стохастического движения, заполненная отдельно расположенными в пространстве точками. Формирование этой области связано с наличием скачков квазиadiaбатического инварианта  $I_z$ . Частицы на незамкнутых орбитах заполняют пространство вокруг регулярной области хаотическим образом из-за случайности скачка  $\Delta I_z$  (см. раздел 3.2 и приложение А).

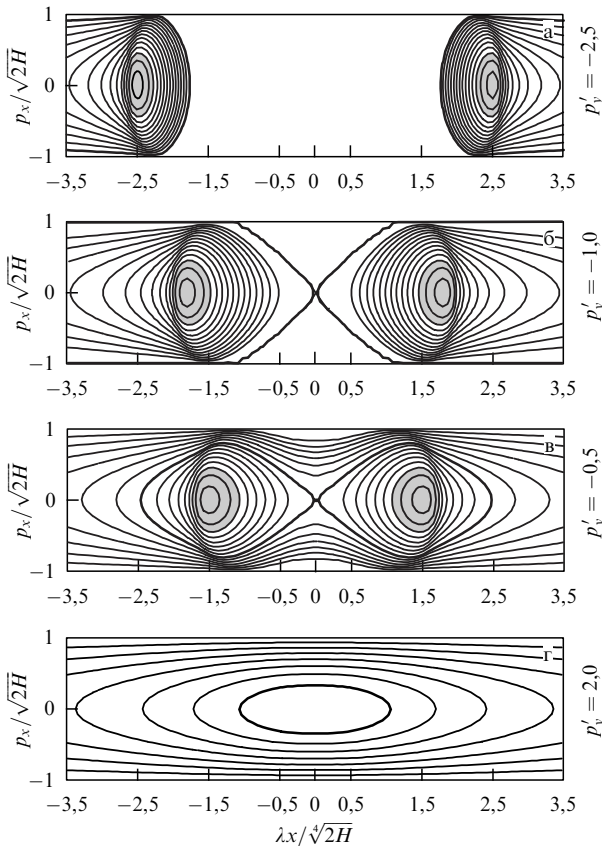


Рис. 15. Фазовый портрет на плоскости медленных переменных для четырёх значений импульса  $p'_y$  для системы с гамильтонианом (13).

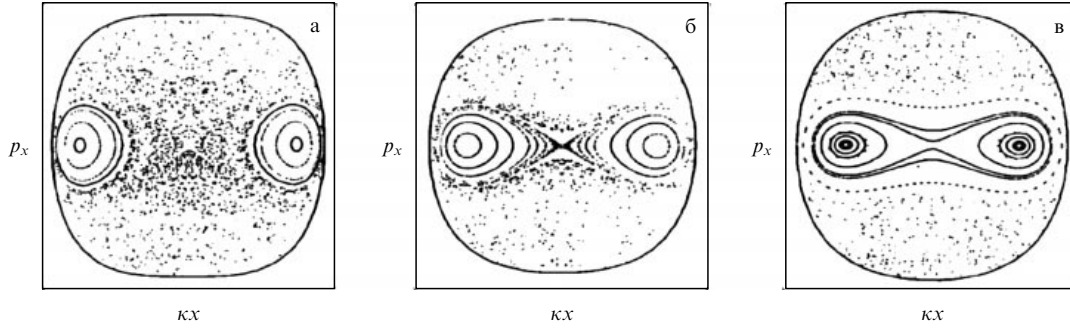


Рис. 16. Сечения Пуанкаре для трёх значений импульса  $p'_y$  для системы с гамильтонианом (13). (Из работы [83].)

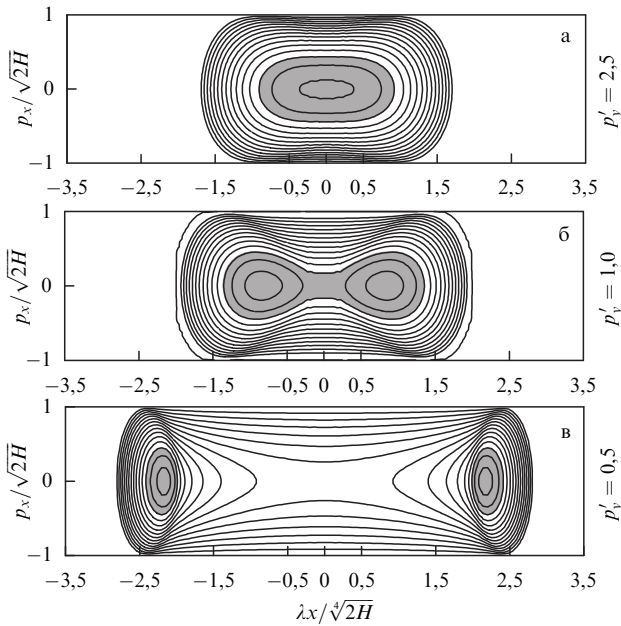


Рис. 17. Фазовый портрет на плоскости медленных переменных для трёх значений импульса  $p'_y$  для системы с гамильтонианом (14).

Динамика частицы в окрестности О-линии описывается гамильтонианом, который получается из (13) заменой знака плюс при слагаемом  $(1/2)\lambda^2 x^2$  знаком минус:

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( p_y - \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \frac{1}{2} z^2 \right)^2. \quad (14)$$

Движение на плоскости быстрых переменных в данном случае ничем не отличается от движения в системе, рассмотренной выше. Однако теперь  $\lambda x = \pm (8H)^{1/4} \times (p'_y - \chi/\sqrt{2H})^{1/2}$  и фазовый портрет на плоскости медленного движения в данном случае выглядит иначе (рис. 17) — все траектории пересекают вертикальную прямую  $x = 0$  при достаточно больших значениях  $p'_y$ .

Таким образом, обе задачи, и с Х-линиями, и с О-линиями, при сохранении вытянутости конфигурации ( $\lambda \ll 1$ ) могут быть рассмотрены аналитически на основе квазиadiaбатического описания.

#### 4.3. Динамика частиц в бифурцированном слое

Этот раздел посвящён динамике заряженных частиц в бифурцированном токовом слое. Мы рассмотрим случай полной бифуркации, когда в плоскости  $z = 0$  обращается в нуль не только компонента магнитного поля  $B_x$ , но и

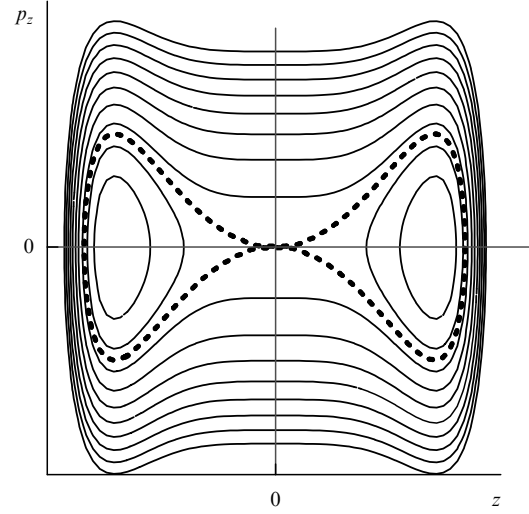


Рис. 18. Фазовый портрет быстрого движения для системы с гамильтонианом  $h_z = (1/2)p_z^2 + (1/2)(\kappa_{\text{bif}} x - (1/4)z^4)^2$ .

плотность тока  $j_y \sim \partial B_x / \partial z$ . В этом случае  $b_x = (z/L_z)^3$  и  $a_y = \kappa x - (1/4)z^4/L_z^3$ . Введя пространственный масштаб  $l_0 = (L_z^3 \rho_0)^{1/4}$ , представим гамильтониан (2) в виде

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa_{\text{bif}} x - \frac{1}{4} z^4 \right)^2. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае параметр  $\kappa_{\text{bif}} = (B_z/B_0) \times (L/\rho_0)^{3/4}$  и по-прежнему эту величину можно считать малым параметром нашей задачи,  $\kappa_{\text{bif}} \ll 1$ .

На плоскости быстрого движения линии равного уровня гамильтониана  $h_z = H - (1/2)p_x^2$  при  $\kappa_{\text{bif}} x > 0$  представлены на рис. 18. Как видно из рисунка, особая точка  $(0,0)$ , в отличие от точки  $(0,0)$  в задаче, рассмотренной в разделе 3.1 (рис. 4б, в), является вырожденной, т.е. сепаратрисы подходят к этой точке под нулевым углом. Для такой системы уже не справедливы формулы для инварианта  $I_z$  и скачка  $\Delta I_z$ , полученные в разделах 4.1, 4.2.

Рассмотрим квазиadiaбатическое приближение для системы с вырожденной особой точкой. Мы можем определить  $I_z$  как  $(1/2\pi)(2h_z)^{5/8} f_{\text{bif}}(s)$ , где  $s = \kappa_{\text{bif}} x / \sqrt{2h_z} > 1$  и

$$f_{\text{bif}}(s) = \alpha \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{1 - \left( s - \frac{1}{4} z'^4 \right)^2} dz'.$$

Здесь  $z_{\pm}$  — корни уравнения  $(s - z_{\pm}^4/4)^2 = 1$ . Коэффициент  $\alpha = 2$ , если частица находится в одной из замкну-

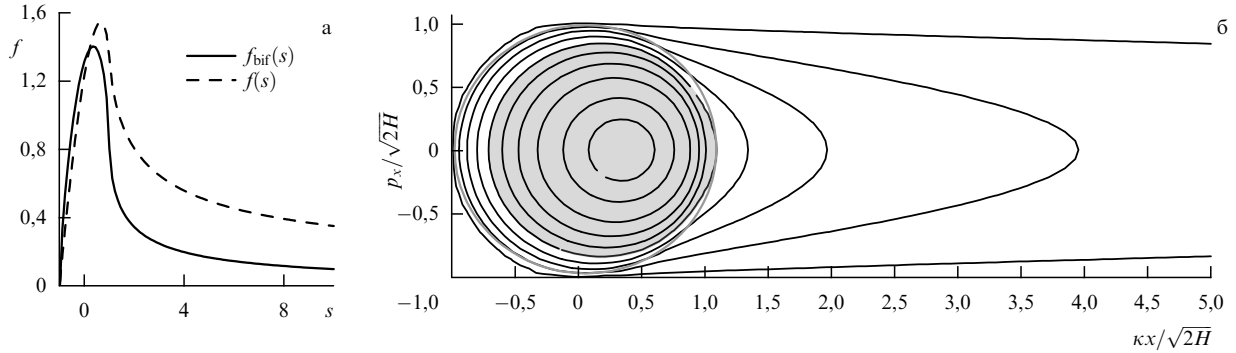


Рис. 19. (а) Функции  $f_{\text{bif}}(s)$  и  $f(s)$ . (б) Траектории частиц на плоскости медленных переменных  $(\kappa_{\text{bif}}x, p_x)$  для системы с гамильтонианом (15).

тых петель сепаратрисы, и  $\alpha = 1$ , если частица находится во внешней по отношению к сепаратрисе области. Как видно из графиков функций  $f_{\text{bif}}(s)$  и  $f(s)$  из раздела 3.1, представленных на рис. 19а,  $f_{\text{bif}}(s)$  с возрастанием  $s$  убывает быстрее, чем  $f(s)$ , и максимальное значение  $f_{\text{bif}}(s)$  меньше максимального значения  $f(s)$ .

Траектории частиц на плоскости медленных переменных  $(\kappa_{\text{bif}}x, p_x)$ , определяемые как линии равного уровня  $I_z = I_z(\kappa_{\text{bif}}x, p_x)$  (рис. 19б), имеют схожую структуру с траекториями системы с гамильтонианом (4), изображёнными на рис. 6а.

Сопоставляя рис. 6а и 19б, можно отметить, что область, занятая регулярными траекториями (показаны тёмным цветом), больше для системы с вырожденной особой точкой. Чтобы проверить это предположение, найдём площади  $S^{\text{reg}}$  и  $S_{\text{bif}}^{\text{reg}}$  областей, занятых данными траекториями на плоскостях  $(\kappa_{\text{bif}}x, p_x)$  и  $(\kappa x, p_x)$  соответственно. Граница области с регулярными траекториями представляет собой кривую  $I_z^{\text{reg}} = \text{const}$ , соприкасающуюся с кривой неопределённости  $2H = p_x^2 + (\kappa_{\text{bif}}x)^2$  в точке  $\kappa_{\text{bif}}x = \sqrt{2H}$  (аналогично тому, как это имеет место для классического токового слоя с  $\kappa$ ). Значения квази-адиабатического инварианта  $I_z^{\text{reg}} = S_{\text{bif}}^*/2\pi$  и  $I_z^{\text{reg}} = S^*/2\pi$ , где  $S_{\text{bif}}^* = (2H)^{5/8}f_{\text{bif}}(1)$  и  $S^* = (2H)^{3/4}f(1)$  соответственно. Вычисления дают  $S_{\text{bif}}^* = 2^{-1/4}(2H)^{5/8}B(3/4, 3/2)$  и  $S^* = (2^{5/2}/3)(2H)^{3/4}$ , где  $B$  — бета-функция. Таким образом, площадь  $S_{\text{bif}}^{\text{reg}}$  можно определить как интеграл  $\oint p_x d\kappa_{\text{bif}}x$ , где  $p_x(\kappa_{\text{bif}}x)$  задаётся соотношениями (аналогично для  $S^{\text{reg}}$ ):

$$(2H - p_x^2)^{5/8} f_{\text{bif}}\left(\frac{\kappa_{\text{bif}}x}{\sqrt{2H - p_x^2}}\right) = S_{\text{bif}}^*,$$

$$(2H - p_x^2)^{3/4} f\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2H - p_x^2}}\right) = S^*. \quad (16)$$

Находя  $p_x(\kappa_{\text{bif}}x)$  и вычисляя соответствующие интегралы, получаем  $S_{\text{bif}}^{\text{reg}} \approx 0,64\pi$  и  $S^{\text{reg}} \approx 0,19\pi$ . Таким образом, площадь в фазовом пространстве, занятая регулярными траекториями, в системе с вырожденной особой точкой более чем в три раза превосходит аналогичную площадь для системы с гамильтонианом (4).

Асимптотическая формула для скачка квазиадиабатического инварианта в системе с вырожденной особой точкой получена в работе [84] (см. также работу [85] и приложение В):

$$\Delta I_z = -(\kappa_{\text{bif}}x^*)^{3/4}(\kappa_{\text{bif}}x^*)^{-1/16}C(\xi).$$

Здесь  $p_x^*$  и  $\kappa_{\text{bif}}x^*$  — значения импульса и координаты при пересечении сепаратрисы,  $\xi$  — переменная, имеющая тот

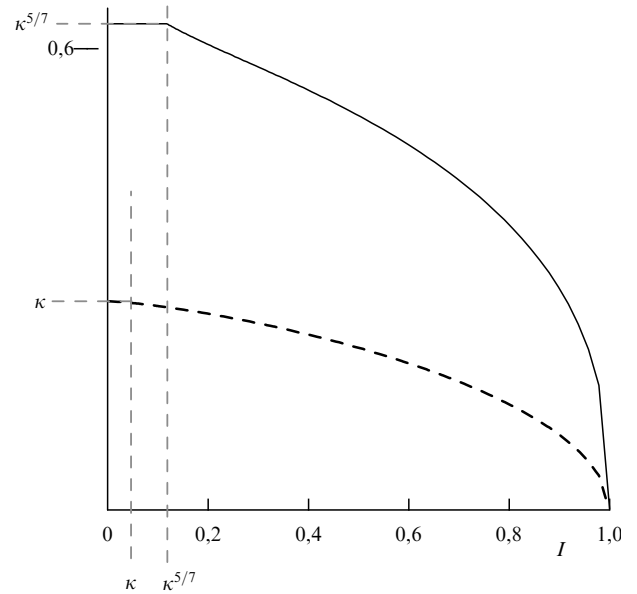


Рис. 20. Вид зависимостей скачка инварианта  $\Delta I$  от величины инварианта  $I$  для системы с гамильтонианом (15) (сплошная кривая) и системы с гамильтонианом (4) (штриховая кривая).

же смысл, что и для токового слоя без бифуркации (см. приложение А), функция  $C(\xi) = C_1(\xi) + (1/\sqrt{2})C_1(1 - \xi)$ , где  $C_1(\xi)$  задаётся формулой (см. приложение В):

$$C_1(\xi) = \frac{2^{-11/16}}{\pi^{5/8}\sqrt{\Gamma(1/4)}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{t} - \frac{\exp(-\xi t)}{1 - \exp(-t)} \right] \frac{dt}{t^{3/4}}.$$

Можно отметить, что, как и для системы с гамильтонианом (4), среднее значение  $\langle \Delta I \rangle_\xi = 0$ .

Если ввести безразмерный квазиадиабатический инвариант  $I = \tilde{C}I_z/H^{5/8}$ , где  $\tilde{C} = 2^{3/8}\pi B^{-1}(3/4, 3/2)$ , то выражение для скачка инварианта можно переписать как

$$\Delta I = -\kappa^{3/4}(1 - I^{8/5})^{3/8}I^{-1/20}C'(\xi).$$

Здесь  $C'(\xi)$  отличается от  $C(\xi)$  наличием постоянного множителя (см. приложение В). При этом если инвариант  $I < \kappa^{5/7}$ , то последняя формула для  $\Delta I$  уже не применима и можно получить только скейлинг  $\Delta I \sim \kappa_{\text{bif}}^{5/7}$  (см. [84]). Зависимости  $\Delta I$  для системы с гамильтонианом (4) и системы с вырожденной особой точкой с гамильтонианом (15) представлены на рис. 20.

Как видно из рис. 20, в токовом слое с вырожденной особой точкой скачки квазиадиабатического инварианта

больше,  $\Delta I_z \sim \kappa_{\text{bif}}^{3/4}$ , чем в обычном токовом слое,  $\Delta I_z \sim \kappa$ . Таким образом, рассеяние частиц в бифурцированных слоях должно быть более интенсивным. Данный результат подтверждается результатами численных расчётов [86, 87].

#### 4.4 Динамика частиц в слое с продольной компонентой магнитного поля

В этом разделе мы рассмотрим динамику частиц в токовом слое с  $B_y = \text{const} \neq 0$ , т.е. с магнитным полем  $\mathbf{B} = B_0(z/L)\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z$ . Векторный потенциал, соответствующий магнитному полю такого токового слоя, содержит две компоненты:  $\mathbf{A}/B_0l_0 = (\kappa x - z^2/2)\mathbf{e}_y + b_s z\mathbf{e}_x$ , где  $b_s = (B_y/B_0)\sqrt{L/\rho_0}$ . Для токовых слоёв хвоста земной магнитосферы  $b_s \leq 1$ , для токовых слоёв магнитопаузы возможны случаи с  $b_s > 1$ . Гамильтониан заряженной частицы в такой системе выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} p_z^2 + U(p_x, \kappa x, z),$$

$$U = \frac{1}{2} (p_x - b_s z)^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa x - \frac{1}{2} z^2 \right)^2. \quad (17)$$

Как видно из (17), рассматриваемая система, в отличие от системы с гамильтонианом (4), не обладает

симметрией  $z \rightarrow -z$ . Однако гамильтониан (17) сохраняет вид при преобразовании  $z \rightarrow -z, p_x \rightarrow -p_x$ .

Потенциальная энергия  $U$  (17) теперь зависит от трёх параметров:  $\kappa x$ ,  $b_s$  и  $p_x$ . Как видно из рис. 21, для рассматриваемой системы две возникающие потенциальные ямы, в отличие от таковых для системы с гамильтонианом (4), могут иметь различную форму. То есть петли сепаратрисы такой системы асимметричны. Таким образом, при переходе из внешней области в одну из петель квазиadiaбатический инвариант  $\hat{I}_z = \hat{I}_z(\kappa x, b_s, h_z)$  теперь будет претерпевать так называемые геометрические скачки, связанные с изменением площади под траекторией. Если для системы с гамильтонианом (4) мы могли переопределить  $\hat{I}_z$  так, чтобы избежать геометрических скачков (поскольку петли являлись симметричными и общая площадь под сепаратрисой всегда равнялась удвоенной площади под одной из петель), то теперь это сделать уже невозможно ввиду различия площадей под правой и левой петлями.

Далее в этом разделе мы будем рассматривать систему в квазиadiaбатическом приближении: пренебрежём динамическими скачками инварианта, связанными с переходом через сепаратрису (см. приложение А), и обсудим роль геометрических скачков.

Итак, при переходе между ямами частица может изменить значение квазиadiaбатического инварианта на

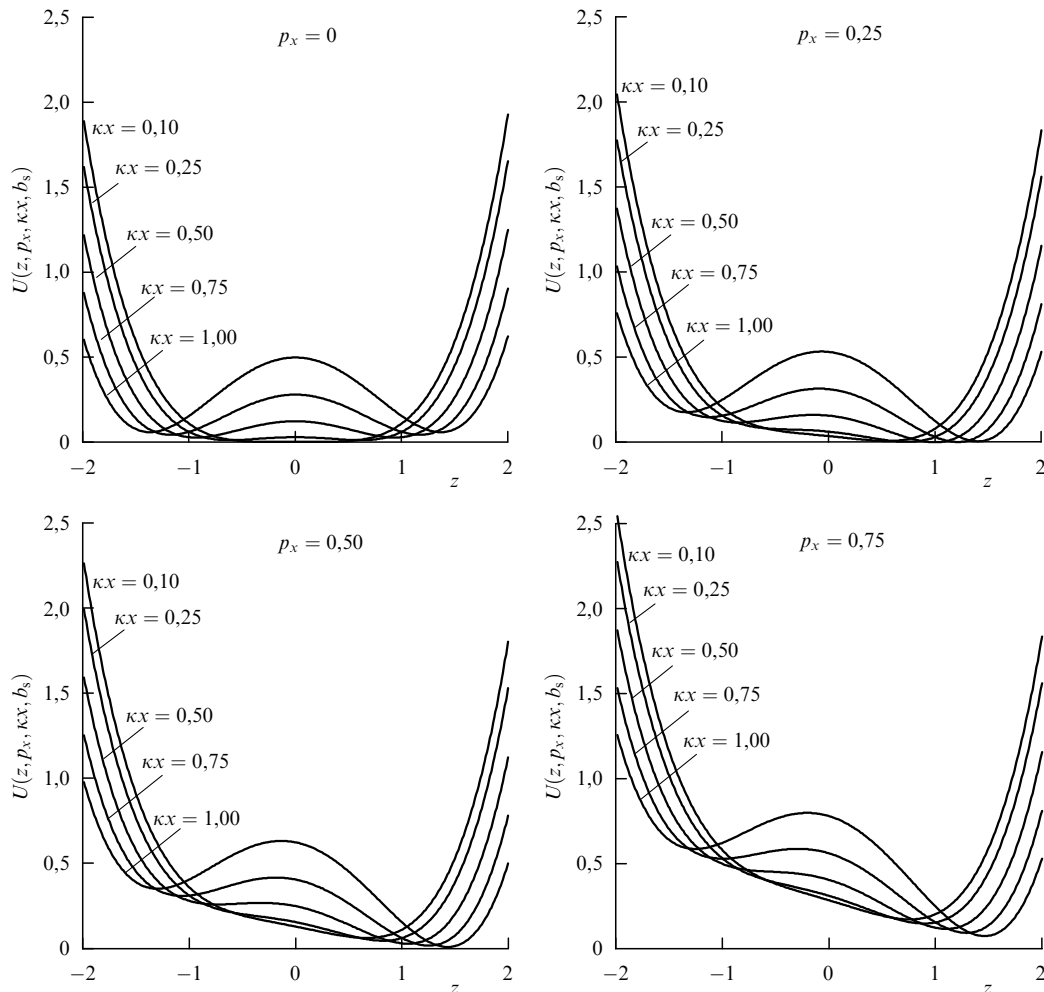


Рис. 21. Потенциальная энергия  $U$  при  $b_s = 0, 25$  и различных значениях  $\kappa x$  и  $p_x$ .

величину порядка единицы (величину, не зависящую от  $\kappa$ ). Геометрические скачки  $\hat{I}_z$ , так же как и динамические, происходят при попадании частицы на кривую неопределённости. Именно в этот момент частица может поменять потенциальную яму, в которой она совершает колебания (перейти из петли сепаратрисы во внешнюю область либо в другую петлю или из внешней области в одну из петель сепаратрисы). Если в задаче с  $b_s = 0$  возможны лишь переходы из внешней области в одну из петель сепаратрисы и из петли сепаратрисы во внешнюю область, то теперь из-за асимметрии петель и асинхронности их эволюции с изменением медленных переменных возможны переходы из одной петли сепаратрисы в другую. Данные переходы выглядят следующим образом: на одном периоде быстрого движения частица пересекает сепаратрису дважды: первый раз — когда выходит из петли во внешнюю область, и второй раз — когда из внешней области переходит в другую петлю.

При этом происходит геометрический скачок, который подразумевает изменение инварианта  $\hat{I}_z$ . В результате на кривой неопределённости траектория будет "расщепляться" на две, и таких точек раздвоения может быть несколько. То есть на плоскости медленных переменных  $(\kappa x, p_x)$  одной и той же траектории будет соответствовать несколько значений квазиadiaбатического инварианта. Однако вследствие инвариантности гамильтониана относительно преобразования  $z \rightarrow -z$ ,  $p_x \rightarrow -p_x$  число точек раздвоения для каждого значения  $b_s$  конечно.

Говоря о раздвоении траектории, мы не имеем в виду, что траектория реальной частицы действительно разделяется на две. Речь идёт о том, что в каждой точке раздвоения частица может пойти по одной из двух возможных траекторий. Отметим, что вопрос выбора конкретного вида траектории из возможного множества вариантов является вопросом вероятности. То есть можно определить вероятность перехода в одну из двух возможных петель (или в одну петлю и внешнюю область) на кривой неопределённости через скорости изменения площадей под данными петлями (для внешней области эта скорость равна суммарной скорости изменения площади под обеими петлями, взятой с обратным знаком) (см. [42]). Вероятность перехода в ту или иную петлю определяется как отношение скорости изменения площади под этой петлей к суммарной скорости изменения площади под обеими петлями. Если данная скорость отрицательна, то частица не может перейти в рассматриваемую петлю. Если частица находится в петле с отрицательной скоростью (отрицательной вероятностью), то она обязана покинуть петлю на кривой неопределённости.

Примеры адиабатических траекторий на плоскости  $(\kappa x, p_x)$  для различных значений  $b_s$  показаны на рис. 22. Траектории определялись следующим образом. Производился численный расчёт траектории частицы, стартовавшей из некоторой точки на плоскости медленных переменных, в соответствии с уравнением  $I_z(\kappa x, p_x) = \text{const}$ . Затем, когда частица выходила на кривую неопределённости, расчёт траектории приостанавливался. Для данной точки на кривой неопределённости вычислялись скорости изменения площадей, ограниченных петлями сепаратрисы, и тем самым устанавливалось, по каким траекториям (в каких петлях) частица может продолжить движение. Затем в каждой петле с возраст-

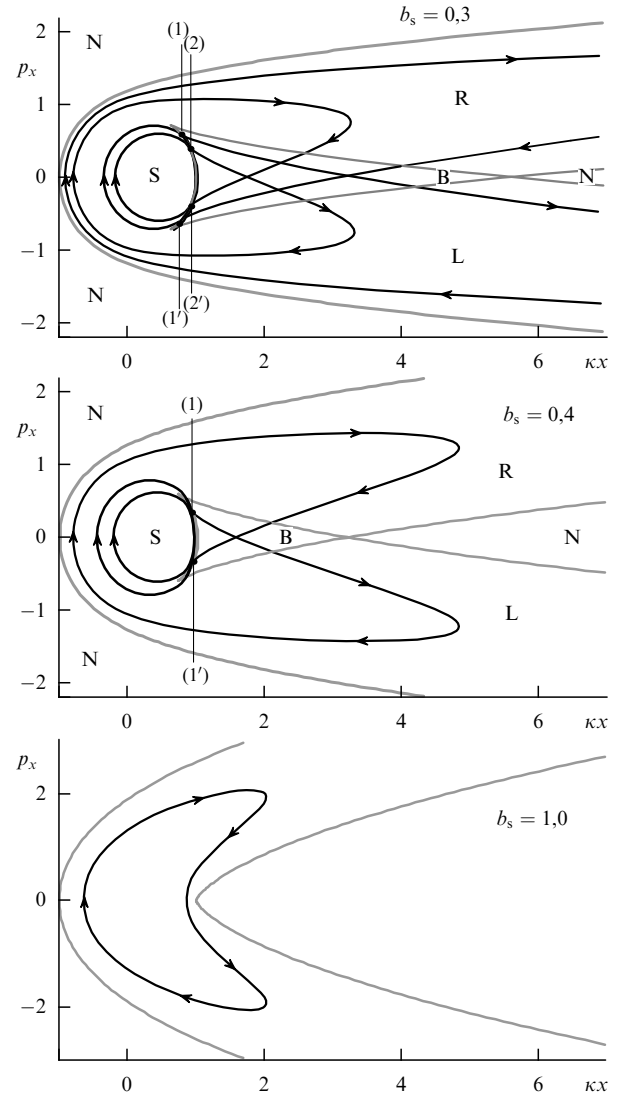


Рис. 22. Траектория частицы на плоскости  $(\kappa x, p_x)$  для трёх значений  $b_s$ . Светлые тонкие кривые — границы областей с различной геометрией. Светлая жирная дуга — кривая неопределённости. Тёмные кривые — траектории частицы.

тающей площадью запускалась новая траектория  $I_z(\kappa x, p_x) = \text{const}$ .

На рисунке 22 отмечены как S, R, L, B и N области, в которых потенциальная энергия  $U$  имеет различный вид и частица с заданной энергией  $H$  может совершать колебания определённого типа:

- S — существуют только одна потенциальная яма, захватывающая область  $z = 0$ , или две потенциальные ямы, находящиеся ниже уровня энергии частицы. В результате частица колеблется во внешней области относительно сепаратрисы на плоскости быстрых переменных, дважды пересекая  $z = 0$  на каждом обороте;

- R и L — частица может колебаться только в одной потенциальной яме, дно которой находится справа или слева от  $z = 0$ . Области R и L отсутствуют в системе с  $b_s = 0$ ;

- B — существуют обе потенциальные ямы, в каждой из которых может колебаться частица;

- N — решение отсутствует.

Из рисунка 22 видно, что на кривой неопределённости траектория раздваивается. Рисунок демонстрирует все

возможные траектории для частицы, которая в какой-либо момент времени занимает положение на представленной траектории. Как видно из рисунка, в рассматриваемой системе кривая неопределённости не доходит до границ области движения на плоскости  $(kx, p_x)$ , в отличие от кривой неопределённости на рис. 6а и 19б, представляющей собой полуокружность. В результате часть траекторий проходит область  $kx < 0$  без пересечения кривой неопределённости (т.е. без пересечения сепаратрисы). Этот новый эффект связан с введением в систему поля  $B_y$ . При достаточно большом  $B_y$  (если  $b_s > 1$ ) кривая неопределённости полностью исчезает и система переходит к динамике без скачка  $\hat{I}_z$ . В такой системе нет сепаратрисы на плоскости быстрых переменных. То есть система соответствует случаю, в котором радиус кривизны силовой линии магнитного поля (иными словами, масштаб неоднородности магнитного поля) превышает гирорадиус частицы. Пределом при возрастании  $b_s$  такой системы является система, которая может быть описана в рамках стандартного приближения ведущего центра, где роль квазиadiaбатического инварианта будет играть магнитный момент.

Так как реальная частица будет выбирать на кривой неопределённости один из двух вариантов дальнейшего движения, каждая траектория на рис. 22 для различных  $b_s$  на самом деле будет представлять собой набор траекторий. В результате при численном расчёте гамильтоновых уравнений мы должны получить траекторию, соответствующую лишь фрагменту траектории, показанной на рис. 22. На рисунке 23 представлена траектория частицы в трёхмерном пространстве, полученная непосредственным численным интегрированием гамильтоновых уравнений для (17). В данном расчёте значение  $k$  было выбрано достаточно малым, чтобы траектория казалась замкнутой (эффект динамического скачка незначителен). Как видно из рис. 23, частица действительно движется по фрагменту квазиadiaбатической траектории, показанной на рис. 22.

Заметим, что сами геометрические скачки квазиadiaбатического инварианта, связанные с асимметрией петель сепаратрисы (вследствие наличия  $B_y \neq 0$ ), не зависят от малого параметра  $k$  и, как следствие, вызывают очень быстрое изменение инварианта [88].

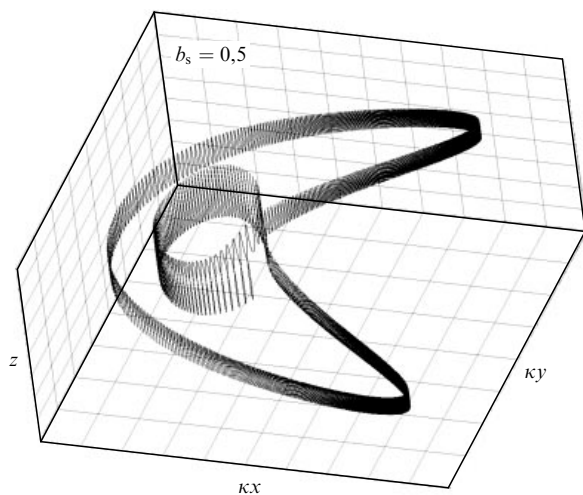


Рис. 23. Результаты численного расчёта траектории частицы с гамильтонианом (17).

Наличие поля  $B_y$  приводит к исчезновению в токовом слое резонансных траекторий с сокращающимися скачками квазиadiaбатического инварианта при первом и втором пересечениях сепаратрисы. Численно данный эффект получен в работе [89]. Кроме того, можно показать, что для системы с асимметричными петлями сепаратрисы отсутствуют устойчивые резонансные квазизахваченные траектории [90].

## 5. Ускорение заряженных частиц

Квазистационарное ускорение заряженных частиц в токовых слоях хвоста земной магнитосферы связано, в первую очередь, с наличием крупномасштабного электрического поля  $E_y$ . Зададим это поле посредством введения векторного потенциала, т.е. как вихревое электрическое поле  $A_y \sim E_y t$ . Формально  $E_y$  в хвосте земной магнитосферы можно рассматривать как электростатическое поле, связанное со взаимодействием магнитного поля земного диполя с набегающим потоком солнечного ветра [23]. Однако при подстановке  $E_y = \text{const}$  в гамильтониан можно использовать любой из двух возможных способов его задания — как через векторный потенциал  $A_y$ , так и через скалярный потенциал  $\phi$  — благодаря калибровочной инвариантности  $A_y$  и  $\phi$  [91]. Отметим, что если вводить поле посредством скалярного потенциала  $\phi \sim E_y y$ , то в системе нарушится сохранение момента  $p_y$ , но система останется стационарной ( $H = \text{const}$ ). Если воспользоваться соотношением  $A_y \sim E_y t$ , то  $p_y = \text{const}$ , однако стационарность будет нарушена.

### 5.1. Квазиadiaбатическое ускорение с сохранением инвариантов

В этом разделе рассматривается ускорение частиц в системе с магнитным полем  $B_z$ , зависящим от координаты  $x$ , при наличии постоянного электрического поля  $E_y = \text{const}$ . При этом мы полагаем, что  $B_z$  всюду больше нуля. Данная задача рассматривалась в работах [77, 78, 92]. Следует отметить, что именно благодаря наличию градиента  $\partial B_z / \partial x$  заряженные частицы медленно дрейфуют по  $y$ , что приводит к возрастанию энергии в постоянном поле  $E_y$ . Таким образом, рассматриваемый механизм ускорения является аналогом адиабатического ускорения (бетатронный механизм и ферми-механизм), для которого принципиальным является наличие неоднородности  $\partial B_z / \partial x$ .

Движение квазиadiaбатических ионов в двумерной геометрии схематично показано на рис. 24. Из-за наличия поперечного электрического поля  $E_y$  частицы медленно дрейфуют к Земле (этот дрейф, связанный с разомкнутостью траекторий на плоскости медленного

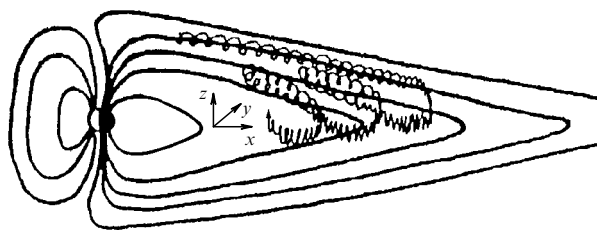


Рис. 24. Схематичное изображение траектории иона в двумерной конфигурации токового слоя. (Из работы [93].)

движения, проявляется при усреднении по медленному движению), попадая при этом в область с бóльшим значением  $B_z(x)$ . Частицы дрейфуют в направлении  $y$  вследствие неоднородности магнитного поля, и их орбиты становятся незамкнутыми.

Гамильтониан исследуемой системы может быть получен добавлением к величине  $\kappa\chi$  в гамильтониане (11) слагаемого  $-\varepsilon\kappa t$ , где  $\varepsilon = cE_y/v_0\bar{B}_z$ :

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2 (v\chi) + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 - \varepsilon\kappa t \right)^2.$$

Сделаем следующую замену переменных: величину  $\chi - \varepsilon t$  будем считать новой переменной, сохранив за ней обозначение  $\chi$ :

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2 (v(\chi + \varepsilon t)) + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 \right)^2 - \varepsilon p_\chi.$$

Введём также переменную  $p_\chi - \varepsilon/\beta^2$ , сохранив за ней обозначение  $p_\chi$ . Данная замена позволяет выделить полный квадрат в гамильтониане  $H$  и получить выражение для нового гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2 (v(\chi + \varepsilon t)) + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}. \quad (18)$$

Следует отметить, что обе сделанные замены сохраняют гамильтонов вид уравнений (см. [77, 78]).

Теперь определим соотношения между параметрами, входящими в гамильтониан (18). Малость параметров  $\kappa$  и  $v$  позволяет разделить переменные на быстрые ( $z, p_z$ ) и медленные ( $\kappa\chi, p_\chi$ ) (как и в разделе 4.1). Электрическое поле  $E_y$  определяет время эволюции системы (или время конвекции заряженных частиц к Земле в хвосте магнитосферы). При реалистичных величинах  $E_y$  ( $E_y < 0,1$  мВ м<sup>-1</sup> (см. [94])) данное время существенно превышает период оборота частицы на фазовой плоскости медленных переменных и можно считать, что  $\varepsilon \ll \kappa$ . В этом случае мы получаем временную иерархию процессов: частица движется со скоростью  $\sim 1$  на плоскости  $(z, p_z)$ , со скоростью  $\sim \kappa$  на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi)$  и траектория частицы со скоростью  $\sim v\varepsilon$  эволюционирует на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi)$ . Таким образом, в первом приближении по  $\varepsilon$  в гамильтониане (18) можно отбросить слагаемое  $\sim \varepsilon^2$ .

Аналогично тому, как это сделано в разделе 4.1, для рассматриваемой системы можно ввести квазиadiaбатический инвариант  $I_z$  при "замороженном"  $\kappa\chi$  (и при "замороженном" времени  $\varepsilon t$ ) по формулам, приведённым в разделе 3.1. Гамильтониан быстрого движения  $h_z$  в данной системе имеет вид

$$h_z = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \kappa\chi - \frac{1}{2} z^2 \right)^2.$$

Соответственно,  $I_z = I_z(h_z, \kappa\chi) = (1/2\pi)(2h_z)^{3/4}f(s)$ , где  $s = \kappa\chi/\sqrt{2h_z}$ . Таким образом, квазиadiaбатический инвариант и фазовый портрет на плоскости  $(z, p_z)$  для рассматриваемой системы аналогичны рассмотренным в разделе 4.1. Гамильтониан медленного движения в этом случае принимает вид

$$H = \frac{1}{2} p_\chi^2 \beta^2 (v(\chi + \varepsilon t)) + h_z(I_z, \kappa\chi).$$

Данный гамильтониан описывает систему с 1,5 степенями свободы. То есть при замороженном времени  $\varepsilon t$  задача интегрируема. Соответствующие результаты для случая  $\varepsilon t = \text{const}$  приведены в разделе 4.1.

Исследуем медленную эволюцию системы, связанную с изменением времени  $\varepsilon t$ . Так как на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi\beta)$  (и на соответствующей ей плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi)$  (см. рис. 11, 12)) на масштабах времени  $1/\kappa$  траектории системы можно считать замкнутыми, а их эволюцию — медленной, мы можем ввести ещё один квазиadiaбатический инвариант:

$$I_\chi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\chi d\chi.$$

Отметим, что  $I_\chi$  является аналогом второго (продольного) адиабатического инварианта в классической теории движения ведущего центра. Учитывая сохранение  $I_z$  и  $I_\chi$ , опишем эволюцию системы. Для этого разделим траектории на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi)$  на две группы: траектории, не пересекающие кривую неопределённости (область, заполненная этими траекториями, показана тёмным цветом на рис. 6а, 11, 12), и траектории, пересекающие кривую неопределённости и, следовательно, сепаратрису на плоскости  $(z, p_z)$ .

#### 5.1.1. Ускорение частиц, не пересекающих сепаратрису.

Для группы частиц, траектории которых не пересекают сепаратрису,  $I_z = I_z(h_z, \kappa\chi)$  и  $I_\chi = I_\chi(H, \varepsilon t, I_z)$  сохраняются с высокой точностью. Таким образом, движение на плоскости  $(H, \varepsilon t)$  определяется уравнением  $I_\chi = \text{const}$ , и частица движется на плоскости  $(\kappa\chi, p_\chi)$  по деформирующимся со временем фазовым кривым  $I_z = \text{const}$ . Для того чтобы проиллюстрировать данное утверждение, воспользуемся фазовым портретом системы, построенным при фиксированном значении инварианта  $I_z$  (рис. 25). Для фиксированного значения  $I_z$  кривая неопределённости, которая при фиксированной энергии  $H$  на плоскости медленных переменных определялась как полуокружность, теперь будет определяться уравнением прямой  $\kappa\chi = \kappa\chi^* = (3\pi I_z/8)^{2/3}$  [77]. С возрастанием энергии  $H$  траектория всё ближе будет подходить к кривой неопределённости (типичная такая траектория показана на рис. 25 для  $H = H_2$ ).

Данному движению на плоскости физических переменных  $(\kappa\chi, p_\chi)$  соответствует ситуация, при которой частица будет переходить с одной траектории на другую — будет происходить дрейф по фазовому портрету,

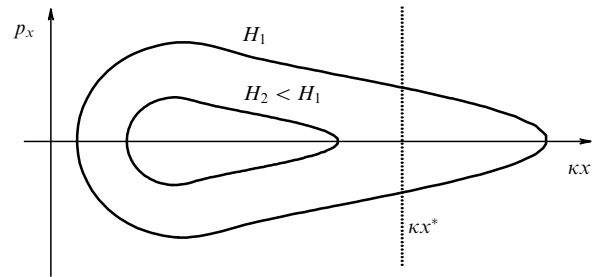


Рис. 25. Фазовый портрет системы с постоянным значением инварианта  $I_z$  для разных значений энергии  $H$ . Вертикальной прямой линией показана кривая неопределённости.

соответствующий дрейфу по энергии:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left\langle p_z^2 \beta(v(\chi + \epsilon t)) \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\rangle = \epsilon v \left\langle p_z^2 \beta \frac{\partial \beta}{\partial v \chi} \right\rangle.$$

Здесь оператор  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по времени за период медленного движения частицы на плоскости  $(\kappa\chi, p_z\beta)$ . Так как  $\partial\beta/\partial v\chi > 0$  (что следует из положительности градиента  $\partial B_z/\partial x$ ), энергия частиц возрастает со временем. Таким образом, через некоторое время частица приобретёт энергию, достаточно большую для того, чтобы её траектория могла пересечь кривую неопределённости.

Получим выражение, описывающее возрастание энергии частицы со временем до момента её выхода на кривую неопределённости. Для этого запишем выражение для  $I_\chi$ :

$$\begin{aligned} I_\chi &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{2H - 2h_z}}{\beta(v(\chi + \epsilon t))} d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{2H - (2\pi I_z/f(s))^{4/3}}}{\beta(v(\chi + \epsilon t))} d\chi. \end{aligned}$$

Перейдём к переменной интегрирования  $s = \kappa\chi/\sqrt{2h_z} = \kappa\chi(2\pi I_z/f(s))^{-2/3}$ :

$$\begin{aligned} I_\chi &= \frac{1}{2\pi\kappa} \oint \beta^{-1} \left( \frac{v}{\kappa} s \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{2/3} + v\epsilon t \right) \times \\ &\times \sqrt{2H - \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{4/3}} \left( \frac{2\pi I_z}{f(s)} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{2sf'(s)}{3f(s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Из уравнения  $I_\chi(H, \epsilon t) = \text{const}$  определяется зависимость энергии  $H$  от времени  $\epsilon t$ . Если частица находится глубоко в области регулярных траекторий (далеко от кривой неопределённости), то её квазиadiaбатический инвариант  $I_z$  близок к своему максимальному значению  $I_{z,\text{max}} = 2\pi(2H)^{3/4}f_{\text{max}}$ . Используя безразмерный квазиadiaбатический инвариант  $I' = I_z/I_{z,\text{max}}$ , получим

$$\begin{aligned} I_\chi &\approx \frac{H}{\pi\kappa\langle\beta\rangle} \oint \sqrt{1 - \left( \frac{I'f_{\text{max}}}{f(s)} \right)^{4/3}} \times \\ &\times \left( \frac{I'f_{\text{max}}}{f(s)} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{2sf'(s)}{3f(s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle\beta\rangle$  — среднее значение  $\beta$ , вынесенное за знак интеграла. Данную операцию можно провести, поскольку интервал изменения  $s$  достаточно мал (значение  $I'$  близко к единице) и, следовательно,  $\beta$  под интегралом изменяется слабо. Таким образом, инвариант  $I_\chi$  представляет собой функцию двух переменных:  $I'$  и  $H/\langle\beta\rangle$ . В результате из соотношений  $I_\chi = \text{const}$ ,  $I_z = \text{const}$  получаем выражение, описывающее возрастание энергии с увеличением  $\beta$ :  $H \sim \kappa\beta$ . Уместно провести аналогию с бетатронным ускорением замагниченных частиц, для которого перпендикулярная магнитному полю составляющая энергии частиц возрастает линейно с увеличением магнитного поля за счёт сохранения магнитного момента (см. [12, 92]). Однако следует отметить, что для каждой конкретной частицы полученное нами соотношение действует в течение ограниченного промежутка времени. Частица с возрастанием энергии приближается

к кривой неопределённости, и используемые приближения становятся неприменимыми.

Получим соотношение для времени  $t^*$ , за которое частица достигнет кривой неопределённости. Время  $t^*$  определяется равенством значений квазиadiaбатического инварианта в начальный момент времени  $I_\chi(H_0, \epsilon t_0)$  ( $H_0$  — энергия частицы в начальный момент) и инварианта  $I_\chi(H^*, \epsilon t^*)$  ( $H^*$  — энергия, соответствующая кривой неопределённости). Величину  $H^*$  можно получить из соотношения

$$I_z = \frac{1}{2\pi} (2H^*)^{3/4} f(1) = \frac{8}{3\pi} (2H^*)^{3/4}.$$

Таким образом,  $H^* = (1/2)(3\pi I_z/8)^{4/3} = (1/2)(\kappa\chi^*)^2$ .

Рассмотрим случай, в котором параметр  $v$  достаточно мал и на одном обороте на плоскости  $(\kappa\chi, \beta p_z)$  изменениями величины  $\beta(v(\chi + \epsilon t))$  можно пренебречь:

$$2\pi I_\chi = \oint \frac{p_z \beta}{\beta} d\chi = \frac{1}{\langle\beta\rangle\kappa} \oint p_z \beta d\kappa\chi = \frac{S}{\langle\beta\rangle\kappa},$$

где  $S$  — площадь под соответствующей траекторией на плоскости  $(\kappa\chi, \beta p_z)$ . Отсюда можно найти выражение для  $t^*$ :

$$\beta(v\epsilon t^*) = \beta(v\epsilon t_0) \frac{S^*}{S_0}, \quad (19)$$

где  $S_0$  — площадь под траекторией в начальный момент времени,  $S^*$  — площадь под траекторией в момент времени, когда она касается кривой неопределённости (для любой конкретной траектории  $S_0$  является некоторой постоянной величиной, определяемой значениями энергии и инварианта  $I_z$  в начальный момент). Таким образом, мы определили время выхода частицы из режима ускорения, соответствующего движению, происходящему до пересечения сепаратрисы.

Заметим, что, поскольку движение до пересечения сепаратрисы происходит с возрастанием энергии  $H \sim \kappa\beta$ , выход на сепаратрису означает, что частица достигла энергии  $H/H_0 \approx S^*/S_0$ , где  $H_0$  — начальная энергия.

**5.1.2. Ускорение частиц, пересекающих сепаратрису.** При движении в области с пересечением кривой неопределённости частица будет регулярно пересекать сепаратрису. В результате периодически будут происходить скачки квазиadiaбатического инварианта  $I_z$  (см. раздел 4.1 и приложение А). Величина  $I_\chi$  также будет совершать скачки, синхронизированные со скачками  $I_z$ :  $\Delta I_\chi = (\partial I_\chi / \partial I_z) \Delta I_z$ . Как следствие, поведение частицы на больших временах определяется отношением величины скачков к величине дрейфа на фазовой плоскости медленных переменных.

Как отмечалось в разделе 3.2, время изменения квазиadiaбатического инварианта  $I_z$  на величину порядка единицы вследствие диффузии  $\sim 1/\kappa^3$ . Время медленного дрейфа на фазовой плоскости, обусловленного электрическим полем, определяется величиной  $1/v\epsilon$ . Таким образом, динамика частиц зависит от отношения  $\delta = \kappa^3/v\epsilon$ . Если  $\delta \ll 1$ , то время дрейфа окажется много меньше времени диффузии и динамика частицы будет определяться дрейфом (скачки инварианта при этом представляют собой фоновые явления). Если  $\delta \gg 1$ , то основным процессом станет диффузия частиц в пространстве инвариантов.

В данном разделе мы рассмотрим предел, в котором скачками инварианта можно пренебречь. В этом случае задачу можно проинтегрировать, как это сделано выше: усреднение по  $z$ -осцилляциям даёт гамильтониан с 1,5 степенями свободы, и при учёте малости  $\varepsilon$  задача становится полностью интегрируемой. Аналитические выражения для возрастания энергии со временем, однако, можно получить лишь при  $I_z \ll 1$ . Малые значения инварианта  $I_z$  соответствуют траекториям, далеко уходящим от плоскости  $z = 0$ . Таким образом, большую часть времени частицы на таких траекториях проводят вдали от плоскости  $z = 0$  (т.е. движение частиц соответствует движению в одной из петель сепаратрисы (рис. 4б, в)). Координаты дна потенциальных ям двух внутренних областей на плоскости  $(z, p_z)$  определяются выражением  $\pm\sqrt{2\kappa\chi}$  (минимум потенциальной энергии  $U = (1/2)[\kappa\chi - (1/2)z^2]^2$ ).

Разложим гамильтониан (18) около координаты дна одной из потенциальных ям. Для этого введём переменную, равную отклонению координаты  $z$  от величины  $-\sqrt{2\kappa\chi}$ , и обозначим эту новую переменную как  $\tilde{z} = z + \sqrt{2\kappa\chi}$ . Разложение гамильтониана по  $\tilde{z}$  даёт следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2} p_z^2 \beta^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \kappa \tilde{z}^2.$$

Полученный гамильтониан описывает систему с гармоническим осциллятором, имеющим переменную частоту  $\omega(\chi) = \sqrt{2\kappa\chi}$ . Тогда гамильтониан быстрого движения представляет собой энергию гармонического осциллятора:

$$h_z = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \tilde{z}^2 \omega^2(\chi).$$

Квазиadiaбатический инвариант можно записать в виде

$$I_\chi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\chi_{\max}} \frac{1}{\beta} \sqrt{2H - I_z \sqrt{8\kappa\chi}} d\chi.$$

Здесь нижний предел интегрирования полагается равным нулю, хотя, строго говоря, необходимо интегрировать не от нуля, а от некоторого значения  $\chi_{\min}$ , определяемого условием  $p_z(\chi_{\min}) = 0$ . Но из рис. 6а видно, что площадь под кривой  $I_z = \text{const}$  для  $I_z \ll 1$  в основном определяется областью больших  $\chi$ .

Введём переменную  $\chi' = \sqrt{2\kappa\chi} I_z / H$ . Тогда

$$I_\chi = \frac{\sqrt{2} H^{5/2}}{\pi \kappa I_z^2} \int_0^{\chi'_{\max}} \frac{\chi'}{\beta} \sqrt{1 - \chi'} d\chi'.$$

Вводя среднее значение  $\beta$  на одном обороте на плоскости медленных переменных  $\langle \beta \rangle$ , получим

$$\frac{\sqrt{2} H^{5/2}}{\pi \kappa I_z^2 \langle \beta \rangle} = \text{const}.$$

Отсюда следует закон ускорения для частиц с малыми  $I_z$ : энергия таких частиц возрастает как  $H \sim (\kappa \beta)^{2/5}$ . Данный закон аналогичен соотношению, полученному в теории ведущего центра для ускорения адиабатических частиц с дальними точками отражения [92, 95].

Отметим, что можно получить полуаналитическое выражение для зависимости энергии частицы  $H/H_0$  от магнитного поля  $\beta$  для произвольного значения инва-

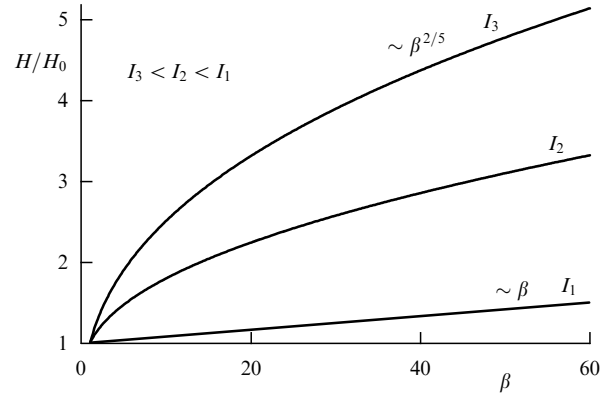


Рис. 26. Зависимость энергии частиц от  $\beta$  для различных значений  $I_z$ . (Из работы [92].)

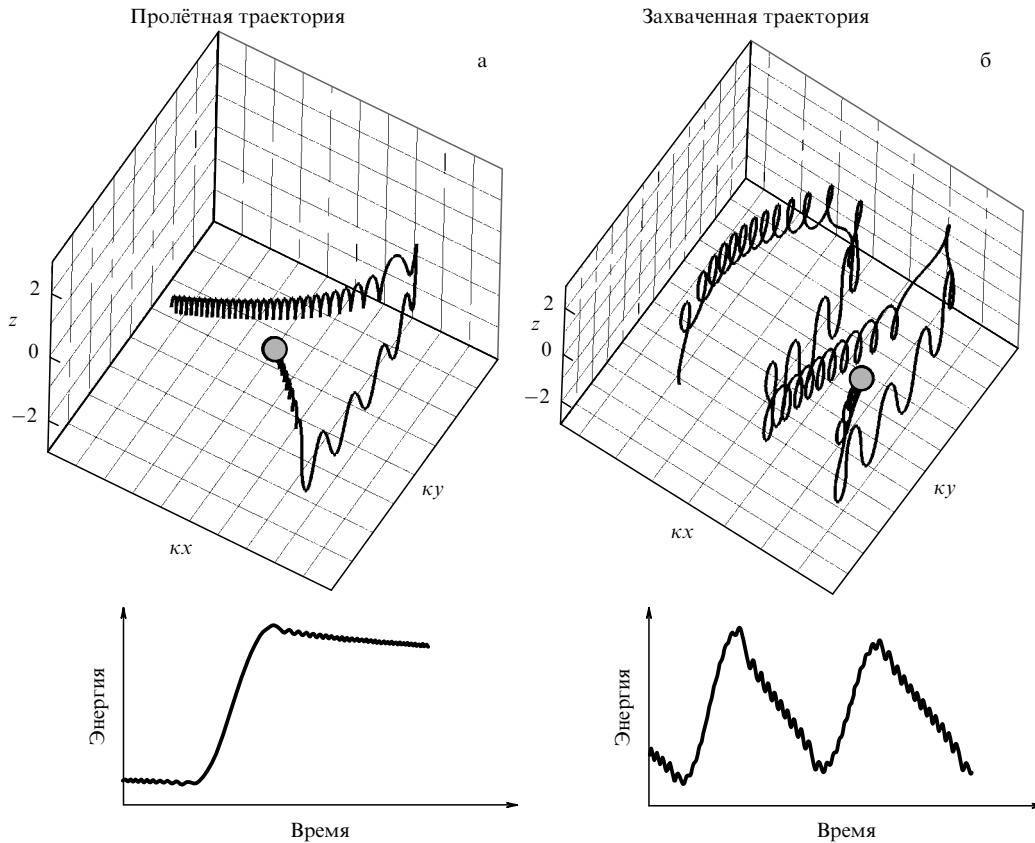
рианта  $I_z$ . Это выражение представляет собой интегральное соотношение между  $I_z$ ,  $H/H_0$  и  $\beta$ . Таким образом, при каждом  $I_z$  мы получаем некоторую функцию  $H/H_0$  от  $\beta$ . Пример таких зависимостей [92] приведён на рис. 26.

## 5.2. Эффект резонанса с учётом электрического поля

Как отмечалось в разделе 3.3, при определённых значениях параметра  $\kappa$  в токовом слое существует популяция резонансных частиц, для которых суммарное значение скачка квазиadiaбатического инварианта равно нулю. Такие частицы входят в токовый слой вдоль силовых линий магнитного поля, совершают пол-оборота в поле  $B_z$  и покидают токовый слой с тем же значением фазы гировращения, с которым они пришли к нему.

Рассмотрим механизм резонансного ускорения частиц в токовом слое, связанный с указанным эффектом. Примем модель токового слоя с  $B_z = B_z(x/L_x)$ , но будем полагать, что градиентом  $\partial B_z / \partial x$  можно пренебречь на масштабе траектории иона на плоскости медленных переменных. Таким образом, формально мы рассмотрим набор систем, в каждой из которых  $B_z \approx \text{const}$ . Тогда использование аргумента  $x$  будет соответствовать принадлежности рассматриваемой траектории той или иной конфигурации со своим значением  $B_z$ . Как и в разделе 4.1, будем считать, что  $B_z$  убывает с возрастанием  $x$  степенным образом. Кроме того, учтём, что поле  $B_x \sim z$  может возрастать линейно лишь до границ токового слоя (до тех пор пока  $|z| < L_z$ ). При  $|z| > L_z$  возрастание  $B_x(z)$  выходит на насыщение,  $B_x = B_0 \text{sign}(z)$ . Таким образом, принципиально важно, что в рассматриваемой задаче существуют частицы, находящиеся на пролётных траекториях. Ускорение именно таких частиц и рассматривается в этом разделе.

Одним из основных квазистационарных механизмов ускорения заряженных частиц в токовом слое хвоста земной магнитосферы является ускорение полем "утро-вечер"  $E_y \simeq \text{const}$  [34, 96, 97]. Квазиadiaбатические ионы, совершая пол-оборота в поле  $B_z$ , проходят расстояние, равное двум гирорадиусам, вдоль поля  $E_y$ . Если частица не покидает токового слоя из-за скачка квазиadiaбатического инварианта, а остаётся на квази-захваченной траектории, то впоследствии она теряет почти всю приобретённую энергию, совершая другую половину оборота в поле  $B_z$  на некотором расстоянии от плоскости  $z = 0$ . Напротив, резонансная частица



**Рис. 27.** Траектории двух частиц, исходящие от границы токового слоя. (а) Траектория пролётной частицы, покидающей токовый слой. (б) Траектория частицы, перешедшей с пролётной орбиты на захваченную вследствие скачка квазиadiaбатического инварианта.

покидает токовый слой с набранной энергией и движется вдоль силовых линий (рис. 27).

Если начальная энергия частиц, подходящих к токовому слою, мала по сравнению с приобретаемой энергией, то ею можно пренебречь. Тогда скорость, с которой частица движется в плоскости  $z=0$ , приблизительно равна  $E_y/B_z$ . Гирорадиус такой частицы равен  $c^2 E_y m / q B_z^2$ , а набранная энергия  $W \approx 2c^2 E_y^2 m / B_z^2$ . Здесь можно провести аналогию с упругим взаимодействием частицы и движущейся стенки (токового слоя) [98]: в системе покоя стенки (токового слоя) частица налетает на токовый слой со скоростью  $V_x = -cE_y/B_z$  и покидает его со скоростью  $V_x = cE_y/B_z$ . Тогда в лабораторной системе отсчёта, в которой стенка (токовый слой) движется со скоростью  $V_x$ , приращение скорости частицы  $\Delta V = 2cE_y/B_z$  как раз будет соответствовать скорости частицы в конечный момент времени; соответствующее приращение энергии  $W = m(\Delta V)^2/2 = 2c^2 E_y^2 m / B_z^2$ . Таким образом, набираемая энергия обратно пропорциональна квадрату величины  $B_z(x/L_x)$ .

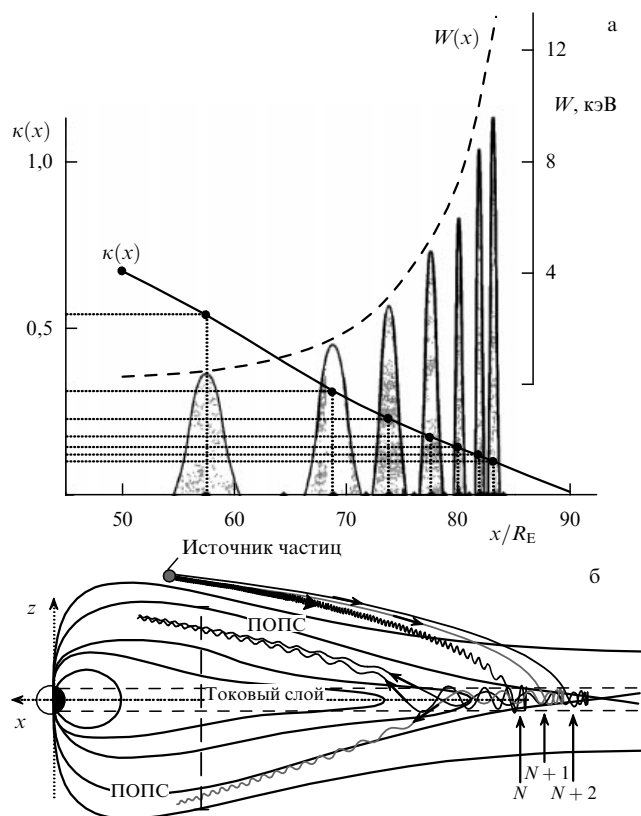
Поскольку такое когерентное ускорение может наблюдаться лишь в областях с  $x = x_N$ , где  $x_N$  определяется соотношением  $\kappa^{-1}(x_N) = N/C_0$  (см. формулу (10)), можно определить резонансные значения магнитного поля  $B_z(x_N/L_x)$ . Для этого воспользуемся определением  $\kappa$ , учитывая, что энергия частиц  $W \sim B_z^{-2}$ :

$$\kappa = \frac{B_z}{B_0} \sqrt{\frac{L}{\rho_0}} \sim B_z \sqrt{W^{-1}} \sim B_z^{3/2}.$$

Из последнего уравнения, принимая во внимание соотношение  $\kappa \sim 1/N$ , можно получить выражение для резонансных значений магнитного поля:  $B_z(x_N/L_x) \sim N^{-2/3}$ . Соответствующие резонансные энергии  $W_N \sim B_z^{-2}(x_N/L_x) \sim N^{4/3}$  [52, 99]. Таким образом, вдоль хвоста земной магнитосферы возникает система резонансных областей, и с удалением от Земли (с уменьшением  $B_z$ ) энергия, которую частицы приобретают в этих областях, возрастает как  $B_z^{-2}(x_N)$  (рис. 28а).

Наличие цепочки резонансных областей приводит к специфическим явлениям, наблюдаемым в хвосте земной магнитосферы. Протоны солнечного ветра попадают в дальний хвост магнитосферы из источника в плазменной мантии (рис. 28б). Поток протонов из мантии достигает сразу нескольких различных резонансных областей в токовом слое, в которых протоны набирают различные энергии, соответствующие порядковому номеру каждой из этих областей. Пучки ускоренных частиц уходят затем из нейтральной плоскости токового слоя и движутся вдоль силовых линий магнитного поля в пограничной области плазменного слоя (ПОПС). В ПОПС ускоренные частицы наблюдаются космическими аппаратами как один или несколько почти моноэнергетичных пучков [102, 103]. Вопросу наблюдения данных пучков и их свойствам посвящён обзор [104].

Потоки частиц, ускоренных в различных резонансах и, как следствие, обладающих разной энергией, приближаются затем к области дипольного поля. В этой области силовые линии сгущаются (возрастает напряжённость магнитного поля). Пересекая силовые линии в этой области сверху вниз (или наоборот, снизу вверх),

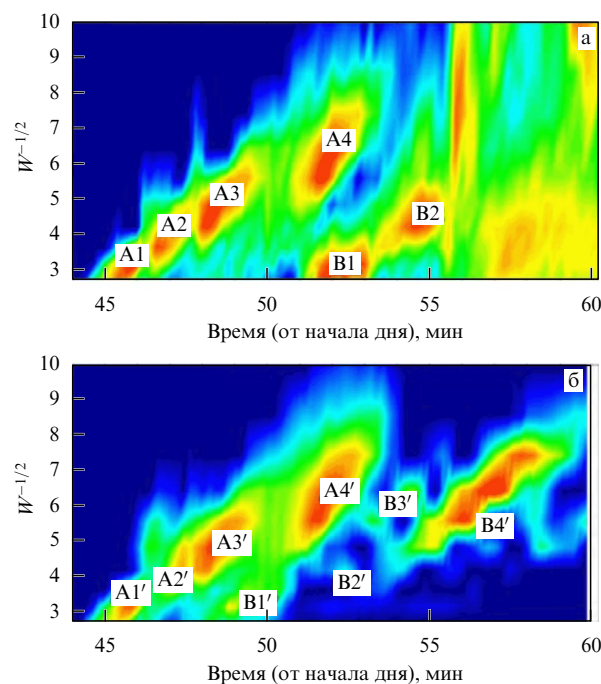


**Рис. 28.** (а) Схема расположения резонансных областей в хвосте земной магнитосферы и соответствующие им энергии  $W$  ( $R_E$  — радиус Земли) (Из работы [100].) (б) Схема ускорения и динамики ионов в токовом слое в хвосте земной магнитосферы. Штриховой линией показана область наблюдения дисперсионных структур. Вертикальными стрелками схематично указаны  $N$ -я,  $(N+1)$ -я и  $(N+2)$ -я резонансные области, в которых  $\kappa \sim 1/N$ . (Из работы [101].)

космический аппарат может успеть почти одновременно зарегистрировать всю "гребёнку" ионных пучков, ускоренных в различных резонансах вдоль хвоста. Космический аппарат при своём движении пересекает очередную силовую линию, на которой наблюдает поток ускоренных частиц из соответствующего этой линии резонанса. В результате на диаграмме энергия — время может отчётливо проявиться цепочка резонансов (рис. 29а).

Выбрав некоторую модель магнитного поля в хвосте земной магнитосферы, можно воспроизвести рассматриваемый эффект резонансного ускорения. Так, в работах [52, 107] использовалась двумерная модель [73], в которой при заданном электростатическом поле  $E_y$  проводилось трассирование частиц. В результате в области предполагаемого обнаружения энергетических дисперсионных структур авторы работ [52, 107] численно нашли цепочку резонансов, очень хорошо согласующуюся с предсказаниями аналитической теории.

Более сложным, но и более близким к реальным условиям является моделирование динамики частиц в магнитных полях, полученных при глобальном моделировании структуры и динамики магнитосферы методами магнитной гидродинамики. Данный подход реализован авторами работы [106] с целью имитации измерения наблюдаемых в эксперименте цепочек резонансов. В результате удалось воспроизвести с хорошей точностью структуру ускоренных пучков, полученную по данным спутниковых наблюдений (рис. 29б).



**Рис. 29.** (В цвете онлайн.) (а) Поток энергии частиц с питч-углами  $0-60^\circ$ , наблюдаемый спутником Cluster-1. Цепочки резонансов A1 — A4 и B1, B2, наблюдаемые спутниковой миссией Cluster-1. (Из работы [105].) (б) Модельный поток энергии частиц. Цепочки резонансов A1' — A4' и B1' — B4', полученные при численном моделировании. (Из работы [106].)

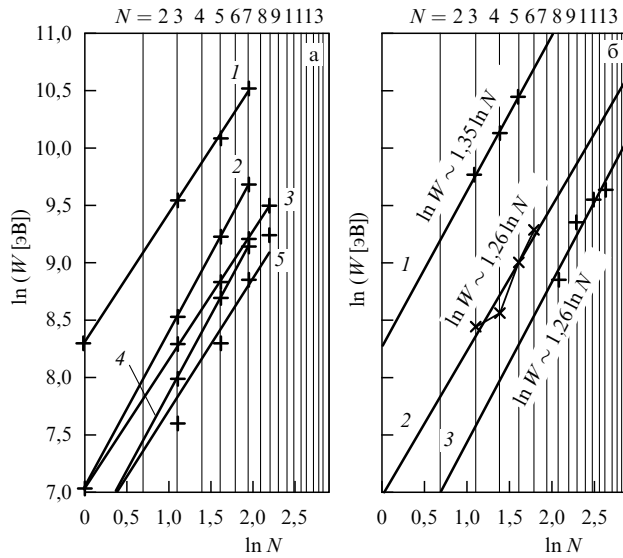
В рамках аналитической теории получено выражение для энергии ускоренных частиц в зависимости от номера резонанса  $W_N \sim N^{4/3}$ . Данное соотношение не зависит от конкретной модели магнитного поля и может быть проверено посредством как численных расчётов, так и экспериментальных наблюдений. Для этого строится зависимость наблюдаемых (или моделируемых) энергий  $\ln W_N$  от номера резонанса  $\ln N$ . Полученный коэффициент пропорциональности как для результатов численного расчёта в рамках различных моделей магнитного поля хвоста земной магнитосферы, так и для экспериментальных данных оказывается близким к  $4/3$  (рис. 30).

Естественным обобщением рассмотренной теории резонансного ускорения является нелинейная самосогласованная модель, в которой ток ускоренных частиц модулирует магнитное поле магнитосферы [108]. В рамках этой модели удалось показать, что механизм резонансного ускорения является достаточно устойчивым к возмущению магнитного поля  $B_z(x/L_x)$ , а нелинейные эффекты дают дополнительную характерную локальную дисперсию резонансных пучков по энергии (отличную от средней дисперсии всей структуры). Этот локально нелинейный эффект также может наблюдаться в экспериментальных данных (см. обзор [104]).

Кроме того, в работе [109] показано, что на величину коэффициента линейной зависимости  $\ln W$  от  $\ln N$  может влиять амбиполярное электрическое поле  $E_z$ , связанное с различным характером движения ионов и электронов в токовом слое.

### 5.3. Ускорение в окрестности X- и O-линий

Рассмотрим ускорение заряженных частиц в конфигурациях с X- и O-линиями на основе квазиadiaбатической

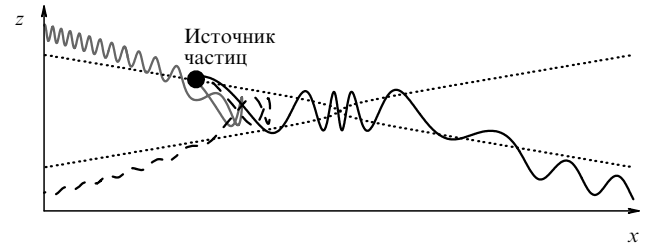


**Рис. 30.** (а) Зависимость энергии от номера резонанса  $N$  по результатам численного моделирования при различных конфигурациях магнитного поля токового слоя и значениях интенсивности электрического поля (см. детали в работе [52]). (б) Результаты различных наблюдений на космических аппаратах Cluster-1 и Interball (данные, показанные косыми крестиками, и соответствующая зависимость 2 взяты из работы [105]). (Из работы [52].)

теории движения таких частиц, следуя работам [40, 78, 82]. Динамика частиц в рассматриваемых конфигурациях в отсутствие электрического поля описана в разделе 4.2.

Необходимо отметить, что процесс ускорения частиц непосредственно в Х-линии (в области нуля магнитного поля) не может быть описан в рамках рассматриваемой квазиadiaбатической теории. Для исследования набора энергии в Х-линии используется подход, основанный на разложении уравнений движения в ряд в окрестности нулевой линии при пренебрежении членами высших порядков малости. Благодаря такому подходу удаётся получить энергию ускоренных частиц как функцию параметров системы [110–114]. Обобщение данного подхода для случая ненулевого поля  $B_y$  предложено в работах [115, 116]. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами численного моделирования [117–119]. Однако в рамках данного рассмотрения показано, что при  $E_y = \text{const}$  частица может пребывать в непосредственной близости от области нуля магнитного поля лишь в течение ограниченного времени (движение в окрестности Х-линии неустойчиво относительно отклонений вдоль  $x$ -оси (см. [110, 118, 120, 121])). Частица после её выхода из непосредственной окрестности Х-линии продолжает движение вдоль оси  $x$ . Характерный пример траекторий частиц в окрестности Х-линии приведён на рис. 31, из которого видно, что частица может пересечь плоскость  $z = 0$  прежде, чем она приблизится к области нуля магнитного поля  $x = 0$ . После пересечения  $z = 0$  частица уходит вдоль магнитных силовых линий; при этом частица может уйти как в ту же полуплоскость, из которой она пришла (светлая траектория), так и в противоположную (траектория, изображённая штриховой кривой). Динамика таких частиц напоминает динамику частиц в токовом слое с  $B_z(x/L_x)$ .

Соответственно, процесс ускорения частиц в рассматриваемой геометрии связан с электрическим полем  $E_y$ ,



**Рис. 31.** Три траектории (тёмная, светлая и штриховая кривые) частицы на плоскости  $(z, x)$  в системе с Х-линией. Пунктирной линией показана магнитная сепаратриса  $\pm x/L_x = z/L_z$ .

приложенным к системе Х-линий (О-линий). Под действием поля  $E_y$  частицы ускоряются и одновременно покидают Х-линию (О-линию), двигаясь вдоль  $x$  в сторону увеличения амплитуды магнитного поля  $B_z$ . В результате фактически реализуется механизм ускорения, описанный в разделе 5.1, но со специфическими свойствами конфигурации с Х-линиями (О-линиями) магнитного поля. Набор энергии в ходе движения и является здесь предметом нашего исследования.

Аналогично тому, как это сделано в разделе 5.1, введём поле  $E_y$  в систему посредством векторного потенциала. При этом будем использовать безразмерный параметр  $\varepsilon = cE_y/v_0B_0$ , определяющий амплитуду поля  $E_y$ . Введём медленное время  $\tau = \varepsilon t + p_y$  и представим гамильтониан (13) в виде

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \frac{1}{2} z^2 - \tau \right)^2. \quad (20)$$

Знак перед  $\lambda^2 x^2$  в правой части (20) определяется геометрией системы: плюс для Х-линии и минус для О-линии. Определим иерархию временных масштабов в системе с гамильтонианом (20). Если параметр  $\lambda \ll 1$ , то движение на плоскости  $(z, p_z)$  происходит существенно быстрее, чем движение на плоскости  $(\lambda x, p_x)$ . При этом мы допустим, что параметр  $\varepsilon \ll \lambda$  и эволюция системы со временем осуществляется медленнее, чем движение частиц на плоскости  $(\lambda x, p_x)$ .

Гамильтониан быстрого движения из раздела 4.2 с учётом  $E_y$  принимает вид

$$h_z = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \frac{1}{2} z^2 - \tau \right)^2,$$

и, как отмечалось в разделе 5.1, движение на плоскости  $(z, p_z)$  ничем не отличается от движения, характерного для токового слоя (см. раздел 3.1). В результате мы можем ввести квазиadiaбатический инвариант  $I_z$  (см. раздел 3.1) и использовать его безразмерный эквивалент  $I = 3\pi I_z / 8(2H)^{3/4}$ :

$$I = \left( \frac{h_z}{H} \right)^{3/4} \bar{f}(k) = \left( \frac{h_z}{H} \right)^{3/4} \times \begin{cases} 2(1 - k^2) K(k) + 2(2k^2 - 1) E(k), & k < 1, \\ 2(1 - k^2) k K\left(\frac{1}{k}\right) + (2k^2 - 1) k E\left(\frac{1}{k}\right), & k > 1. \end{cases}$$

Здесь

$$k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\pm(1/2) \lambda^2 x^2 - \tau}{\sqrt{2h_z}} \right).$$

Выражая  $h_z$  через  $I_z$  и подставляя в (20), получаем гамильтониан медленного движения

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + h_z \left( I_z, \pm \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \tau \right).$$

При замороженном времени  $\tau$  задача становится интегрируемой. Соответствующие фазовые портреты приведены в разделе 4.2. Как отмечено в разделе 4.2, траектории частиц можно разделить на две группы: пересекающие кривую неопределённости (и, как следствие, пересекающие сепаратису) и не пересекающие кривую неопределённости. Уравнение, задающее кривую неопределённости на плоскости  $(\lambda x, p_x)$  для системы с X-линией (О-линией), имеет вид

$$p_x = \pm \sqrt{2H - \left( \pm \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 - \tau \right)^2}.$$

Как и в случае токового слоя с  $B_z(x/L_x)$  (см. раздел 5.1), для описания динамики системы на временах  $1/\varepsilon$  нам понадобится кроме  $I_z$  ещё один инвариант,  $I_x$ , соответствующий площади под траекторией на плоскости медленных переменных. Во введённых обозначениях  $I_x$  приобретает следующий вид (это тот же инвариант, что и  $I_\chi$ , введённый в разделе 5.1, но записанный для  $\beta = \lambda^2 x^2$  и с переменной интегрирования  $k$ ):

$$I_x = \alpha \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I \int_{k_a}^{k_b} \frac{Q(k)}{\bar{f}^2(k)} \frac{\pm (2H(I/\bar{f}(k))^{4/3} - 1)}{2k^2 - 1 + \tau(\bar{f}(k)/I)^{2/3}} dk.$$

Здесь  $\alpha$  — постоянный параметр, определённый ниже,

$$Q(k) = \begin{cases} kK(k), & k < 1, \\ K(k^{-1}), & k > 1. \end{cases}$$

Верхний предел интегрирования находится из условия:

$$\frac{\bar{f}^{4/3}(k_b)}{2H} = I^{4/3}.$$

Нижний предел интегрирования зависит от того, пересекает ли траектория ось  $x = 0$ . Если траектория не пересекает ось  $x = 0$ , то  $\bar{f}^{4/3}(k_a)/2H = I^{4/3}$  и  $\alpha = 1$ , а если она пересекает ось  $x = 0$ , то  $\alpha = 2$  и

$$-\tau = \left( \frac{I}{\bar{f}(k_a)} \right)^{2/3} (2k_a^2 - 1).$$

Как и в разделе 5.1, будем рассматривать режим  $\lambda^3/\varepsilon \ll 1$ . В этом режиме скачками квазиadiaбатических инвариантов можно пренебречь и рассматривать систему уравнений  $I_z = \text{const}$ ,  $I_x = \text{const}$ . При этом инвариант  $I_z$  выступает в качестве параметра, а из сохранения  $I_x = I_x(I_z, H, \tau)$  мы получаем траектории на плоскости  $(H, \tau)$ .

Введём нормированный квазиadiaбатический инвариант  $\bar{I}_x = I_x/I$  и новые переменные:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} I^{1/3}, & p_x &= \bar{p}_x I^{-1/3}, \\ H &= h I^{4/3}, & h_z &= \bar{h}_z I^{4/3}, \\ \tau &= \bar{\tau} I^{2/3}, \\ \bar{k}^2 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(1/2) \lambda^2 \bar{x}^2 - \bar{\tau}}{\sqrt{2\bar{h}_z}} \right), \end{aligned}$$

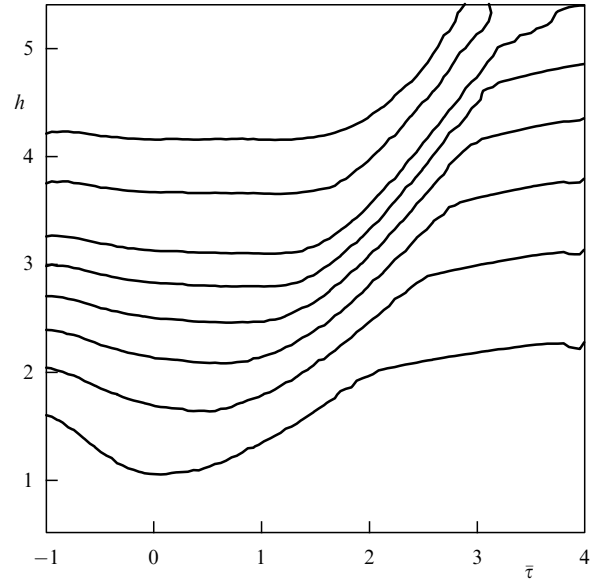


Рис. 32. Фазовые траектории на плоскости  $(h, \bar{\tau})$  для системы с X-линией. Каждой кривой соответствует траектория частицы со своим квазиadiaбатическим инвариантом  $\bar{I}_x$ .

в которых соотношение для  $h$  и  $\bar{\tau}$  принимает вид

$$\bar{I}_x = \frac{\alpha\sqrt{8}}{\pi} \int_{\bar{k}_a}^{\bar{k}_b} \frac{Q(\bar{k})}{\bar{f}^2(\bar{k})} \left[ \frac{\pm (2h\bar{f}^{4/3}(\bar{k}) - 1)}{2\bar{k}^2 - 1 + \bar{\tau}\bar{f}^{2/3}(\bar{k})} \right]^{1/2} d\bar{k}.$$

Здесь знак плюс соответствует X-линиям, а минус — О-линиям. Решая уравнение  $\bar{I}_x(h, \bar{\tau}) = \text{const}$ , можно получить траектории на фазовой плоскости  $(h, \bar{\tau})$ . Для X-линии данные траектории представлены на рис. 32, из которого видно, как с возрастанием времени  $\bar{\tau}$  увеличивается энергия частиц.

## 6. Статистические следствия сохранения квазиadiaбатического инварианта: описание ансамбля траекторий

В разделах 3–5 мы рассмотрели вопросы динамики частиц и получили наборы траекторий, соответствующих квазиadiaбатическому приближению  $I_z = \text{const}$  для различных систем. Кроме того, мы показали, что учёт скачков  $\Delta I_z$  приводит к диффузии квазиadiaбатического инварианта.

Однако интерес представляют не только отдельные траектории частиц, но и те свойства самосогласованной системы, которые находятся в прямой зависимости от распределения частиц по траекториям. В этом разделе мы покажем, как рассмотренная в разделах 3–5 теория квазиadiaбатической динамики позволяет описать формирование функций распределения в центральной области токового слоя и на его границах. Мы также обсудим вопросы самосогласованного формирования токового слоя за счёт токов, переносимых пролётными частицами. Мы продемонстрируем, что рассеяние частиц и переходы с пролётных траекторий на квазизахваченные лежат в основе процесса эволюции токового слоя.

### 6.1. Функция распределения захваченных частиц в центре токового слоя

В рамках приближения  $I_z = \text{const}$  рассмотрим вопрос о распределении частиц по траекториям в центре токового

слоя. Как показано в разделе 3.1, значение квазиadiaбатического инварианта  $I_z$  определяет траекторию частицы на плоскости медленных переменных. Малым значениям  $I_z$  соответствуют траектории, наиболее вытянутые вдоль оси  $kx$ . Однако рис. 6а с набором траекторий на плоскости  $(kx, p_x)$  построен для системы с магнитным полем  $B_x \sim z$  без учёта конуса потерь. В реальном токовом слое магнитное поле  $B_x$  не возрастает до бесконечности при удалении от плоскости  $z = 0$ , а выходит на постоянные значения, что можно описать простой аналитической моделью:

$$\frac{B_x}{B_0} = \begin{cases} \frac{z}{L_z}, & |z| \leq L_z, \\ \text{sign } z, & |z| > L_z. \end{cases}$$

Таким образом, траектории, отошедшие от плоскости  $z = 0$  на достаточно большое расстояние, попадают в область с постоянным магнитным полем и уже не возвращаются в систему. Это и есть пролётные траектории. Для токового слоя с конкретными параметрами можно найти такое значение  $I_z^*$ , при котором все частицы с  $I_z < I_z^*$  окажутся пролётными.

Положение частицы на полуплоскости медленных переменных (для  $p_x > 0$ ) характеризуют три параметра: энергия частицы  $H$ , нормированное значение квазиadiaбатического инварианта  $I$  и величина  $k = k(kx, p_x)$  ( $k^2 = (1/2)(1 + kx/\sqrt{2h_z})$ ), определяющая положение частицы на траектории. Используя эти параметры, можно определить усреднённые по быстрым осцилляциям координаты частицы в проекции на плоскость  $z = 0$  в безразмерном виде [40, 122]:

$$\begin{aligned} \kappa\langle x \rangle &= \left( \frac{I}{\bar{f}(k)} \right)^{2/3} (2k^2 - 1), \\ \kappa\langle y \rangle &= \sqrt{1 - \left( \frac{I}{\bar{f}(k)} \right)^{4/3}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Функция  $\bar{f}(k) = 3f(s)/8$ , функция  $f(s)$  приведена в разделе 3.1. Определим  $I^*$  таким образом, чтобы при  $I > I^*$  частица не покидала токового слоя. Частицы, покидающие токовый слой, в среднем движутся по силовым линиям магнитного поля:

$$\langle z \rangle^2 = 2\kappa\langle x \rangle.$$

Границу токового слоя определим как место, в котором магнитное поле выходит на константу. Определённая таким образом граница описывается соотношением в безразмерных переменных  $z_{\text{boundary}}^2 = 1/\sigma = \sqrt{L_z/\rho_0}$ . Таким образом, частица достигает границ токового слоя  $\langle z \rangle = \pm\sqrt{\sigma}$  при  $\kappa\langle x \rangle_{\text{esc}} = \sigma/2$ . Такие, покидающие токовый слой, частицы могут считаться пролётными. Наибольшая возможная величина  $\langle x \rangle_{\text{turn}}$  для каждой траектории определяется точкой поворота  $p_x = 0$ . Если  $\langle x \rangle_{\text{turn}} > \langle x \rangle_{\text{esc}}$ , то частица является пролётной. Из определения  $\langle y \rangle$  видно, что при  $p_x = 0$  среднее значение  $\langle y \rangle = 0$ . Тогда значение  $k$ , отвечающее точке разворота ( $p_x = 0$ ), находится из соотношения

$$\bar{f}(k_{\text{turn}}) = I.$$

Таким образом, получаем выражение для  $\langle x \rangle_{\text{turn}}$ :

$$\kappa\langle x \rangle_{\text{turn}} = 2k_{\text{turn}}^2 - 1.$$

Из условия  $\langle x \rangle_{\text{turn}} > \langle x \rangle_{\text{esc}}$  следует

$$2k_{\text{turn}}^2 - 1 > \frac{1}{2}\sigma.$$

Если токовый слой является достаточно толстым ( $\sigma \gg 1$ ), то можно воспользоваться разложением функции  $\bar{f}(k)$  для  $k \gg 1$ :  $\bar{f}(k) \approx 3\pi/16k$ . Тогда получаем условие того, что траектория является пролётной:

$$I < I^* \sim \frac{3\pi\sqrt{\sigma}}{8}.$$

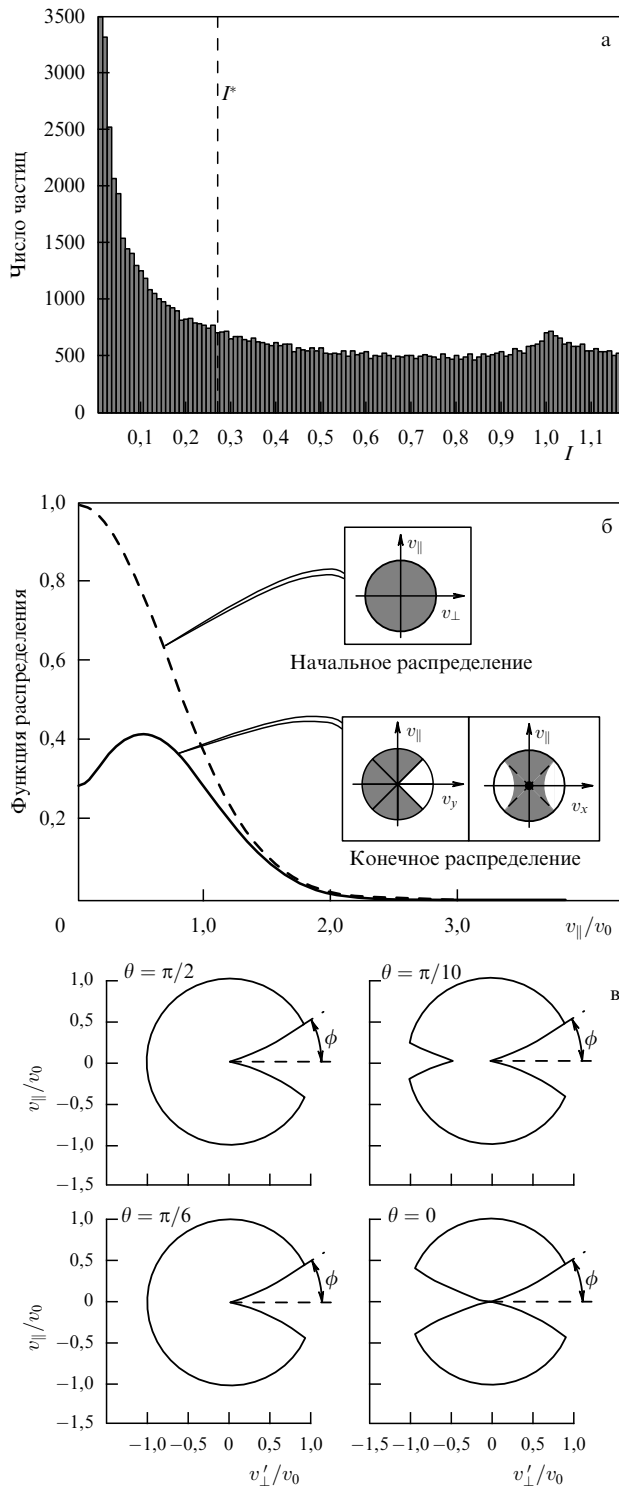
Если величина  $I^*$  известна, то из общей функции распределения частиц можно выделить ту её часть, которая соответствует частицам, захваченным токовым слоем. Для этого зададим, например, изотропную максвелловскую функцию распределения с тепловой скоростью  $v_0$  в центре токового слоя. Затем представим эту функцию как распределение не по скоростям, а по значениям квазиadiaбатического инварианта  $I$  (рис. 33а).

Теперь разделим фазовое пространство на две области: область, заполненную частицами на пролётных траекториях ( $I < I^*$ ), и область, заполненную захваченными траекториями ( $I > I^*$ ). Область с  $I < I^*$  играет в нашей задаче роль конуса потерь в обычной теории ведущего центра: частицы из этой области обладают малымиpitch-углами и "высыпаются" из магнитоплазменной конфигурации. Получившуюся функцию распределения модифицируем следующим образом: положим равным нулю её значение в области фазового пространства, где  $I < I^*$ , а оставшуюся часть вернём обратно в пространство скоростей. Полученная в результате этой операции функция распределения, выраженная как функция продольной и поперечной скоростей (в центре токового слоя  $v_{\parallel} = v_z$ ), представлена на рис. 33б. Как видно из рисунка, у функции распределения исчезает часть, соответствующая малым поперечным скоростям в центре токового слоя. Таким образом, в отличие от привычного конуса потерь замагниченных частиц, формирующегося вокруг силовой линии магнитного поля, конус потерь для квазиadiaбатических распределений является асимметричным в направлении, перпендикулярном магнитному полю.

Можно также попытаться изобразить структуру фазового пространства для различных сечений полученной функции распределения (рис. 33в). Каждое сечение образовано плоскостью  $v_{\parallel} - v_{\perp}'$  для различных значений угла  $\theta$  между плоскостью сечения, повернутой вокруг  $v_{\parallel}$  (т.е. вокруг  $z$ -оси), и плоскостью  $v_{\parallel} - v_x$ , где  $v_{\perp}'$  — компонента скорости, которая в повернутой системе координат направлена перпендикулярно оси  $z$ . Таким образом, угол  $\theta$  — это угол между компонентами  $v_{\perp}'$  и  $v_x$ . Из рисунка 33в видно, что проекции функции распределения по форме напоминают сферы с вырезанным сектором, соответствующим положительным  $v_y$ . Таким образом, частицы с положительными  $v_y$  должны покидать токовый слой и формировать распределение пролётных частиц (см. раздел 6.2).

## 6.2. Функция распределения пролётных частиц в центре токового слоя

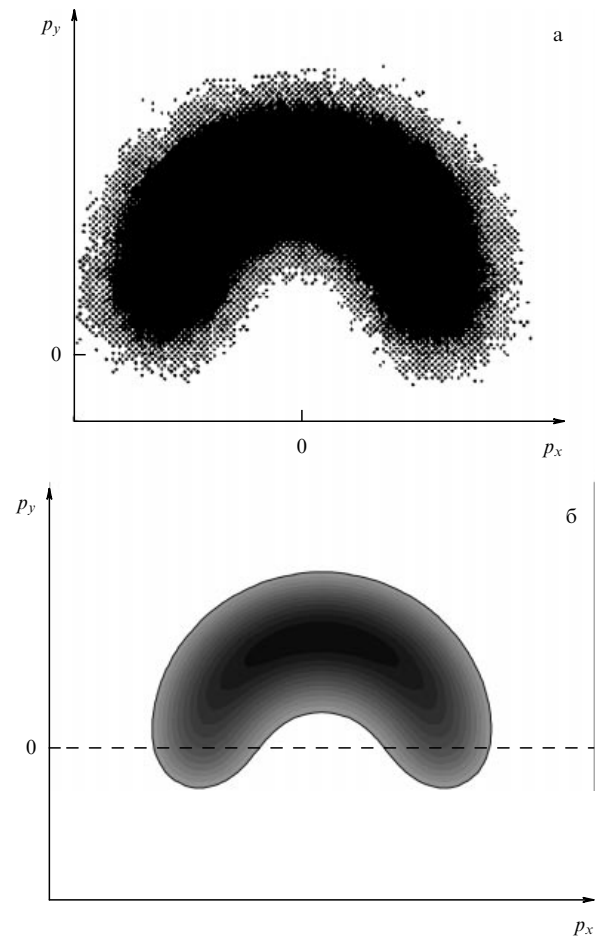
Если частицы на квазизахваченных орбитах формируют в токовом слое функцию распределения с характерным антиконусом потерь, то распределение пролёт-



**Рис. 33.** (а) Изотропная максвелловская функция распределения частиц как функция квазиadiaбатического инварианта. (б) Функция распределения после вырезания фазовой плотности с  $I < I^*$ . (в) Сечения функции распределения для значений  $0, \pi/10, \pi/6, \pi/2$  угла  $\theta$  между плоскостью сечения, повернутой вокруг  $v_{||}$  оси, и плоскостью  $v_{||} - v_x$ . Скорость  $v_{\perp}'$  соответствует компоненте, которая в повернутой системе координат направлена перпендикулярно оси  $z$ . (Из работы [122].)

ных частиц должно соответственно характеризоваться существенной асимметрией вдоль направления  $y$ .

Пролётные частицы проникают в токовый слой, двигаясь от границ слоя, совершают пол-оборота в нейтральной



**Рис. 34.** (а) Функция распределения пролётных частиц, полученная в результате численного моделирования. (Из работы [123].) (б) Функция распределения пролётных частиц, полученная в рамках аналитического подхода. (Из работы [30].)

ральной плоскости вокруг  $B_z$  и покидают токовый слой. В результате на плоскости  $(p_y, p_x)$  эти частицы очерчивают полукруг в окрестности плоскости  $z = 0$ . Так как  $B_z > 0$  и частицы влетают в токовый слой с  $p_x < 0$ , этот полукруг занимает область с  $p_y > 0$ . Соответствующее распределение частиц численно получено в работах [123, 124]. Как видно из рис. 34а, распределение пролётных частиц в центре токового слоя имеет форму полукруга. Толщина данного полукруга равна тепловой скорости  $v_0$  начального распределения.

Для того чтобы получить аналогичную функцию распределения в рамках аналитического подхода, можно воспользоваться следующей процедурой (см. подробнее [125, 126]). На границе токового слоя задаётся распределение в виде смещённого максвелловского распределения:

$$F \sim \exp \left[ -\frac{(v_{||} - v_D)^2 + v_{\perp}^2}{v_0^2} \right].$$

Здесь  $v_{||}$  и  $v_{\perp}$  — параллельная и перпендикулярная компоненты скорости частицы.

Введём параметр  $\varepsilon = v_0/v_D$ , определяющий потоковую анизотропию функции распределения. Благодаря тому что магнитное поле на границе токового слоя постоянно,  $B_x = \pm B_0$  и  $B_z = \text{const}$ , можно получить аналитическое выражение для квазиadiaбатического инварианта

анта  $I_z$ . Частица осциллирует в постоянном магнитном поле с гирочастотой  $\omega_0$ , и её скорость  $v_z = v_\perp \cos(\omega_0 t)$ . Сделав замену  $dz = v_z dt$ , вычислим интеграл  $I_z$ :

$$2\pi I_z = \oint v_z dz = v_\perp^2 \oint \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{\pi v_\perp^2}{\omega_0}. \quad (22)$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:  $v_\parallel^2 + v_\perp^2 = v^2$ . В результате функцию распределения  $F$  удаётся выразить через интегралы движения:

$$F \sim \exp \left[ -\frac{2\omega_0 I_z + (\sqrt{v^2 - 2\omega_0 I_z} - v_D)^2}{v_0^2} \right]. \quad (23)$$

Используя теорему Лиувилля, можно найти функцию распределения в каждой точке  $z$  внутри слоя [125–127]. Для этого необходимо получить выражение для квази-адиабатического инварианта в произвольной точке внутри слоя. Возьмём точку в фазовом пространстве с координатами  $(z_0, \kappa x_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$ . Для этой точки

$$2h_{z0} = p_{z0}^2 + (\kappa x_0 + p_{y0} - a_y(z_0))^2 = v_{z0}^2 + v_{y0}^2.$$

Здесь  $a_y(z)$  — безразмерный векторный потенциал (см. раздел 3.1), константы  $v_{y0} = \kappa x_0 + p_{y0} - a_y(z_0)$ ,  $v_{z0} = p_{z0}$  — компоненты скорости частицы в точке  $(z_0, \kappa x_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$ . Тогда для квазиадиабатического инварианта получаем

$$\begin{aligned} 2\pi I_z &= \oint \sqrt{2h_{z0} - (\kappa x + p_{y0} - a_y(z))^2} dz = \\ &= \oint \sqrt{v_{z0}^2 + v_{y0}^2 - (\kappa x + p_y - a_y(z))^2} dz = \\ &= \oint \sqrt{v_{z0}^2 + v_{y0}^2 - (v_{y0} + a_y(z_0) - a_y(z))^2} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее разобьём фазовое пространство на элементы объёмом  $dz d\kappa x dv_y dv_z dv_x$  и будем считать, что выражение (24) определяет квазиадиабатический инвариант  $I_z$  для элемента фазового объёма с центром в точке  $(z_0, \kappa x_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ . Задавая некоторый профиль  $a_y(z)$  и пересчитывая  $I_z$  в каждой точке  $z_0$  для всего заранее введённого объёма пространства  $(v_x, v_y, v_z)$ , получаем значение инварианта  $I_z$  и, как следствие, величину фазовой плотности  $F(I_z, v)$  в данной точке  $z_0$  для данных  $(v_x, v_y, v_z)$ . Таким образом можно найти распределение  $F(p_x, p_y, p_z)$  в центре токового слоя, где  $z = 0$ , "трассируя" распределение с границы токового слоя вдоль пролётных траекторий (см. [125, 126]). Это распределение можно проинтегрировать по  $p_z$  и получить функцию распределения на плоскости  $(p_x, p_y)$ , показанную на рис. 34б. Как видно, функция распределения, найденная аналитически, полностью совпадает с результатом прямого численного расчёта, приведённым на рис. 34а.

Серповидные распределения пролётных частиц, подобные полученным при расчёте, наблюдаются искусственными спутниками в токовых слоях хвоста земной магнитосферы. Однако, так как доля пролётных частиц невелика по сравнению с общей плотностью фоновой плазмы, выделить данные распределения из фона можно только в двух случаях. При сужении токового слоя часть фоновой плазмы теряется (уменьшается параметр  $\sigma$  (см. раздел 6.1)). В этом случае можно отчётливо увидеть горячий асимметричный фланг функции распределения,

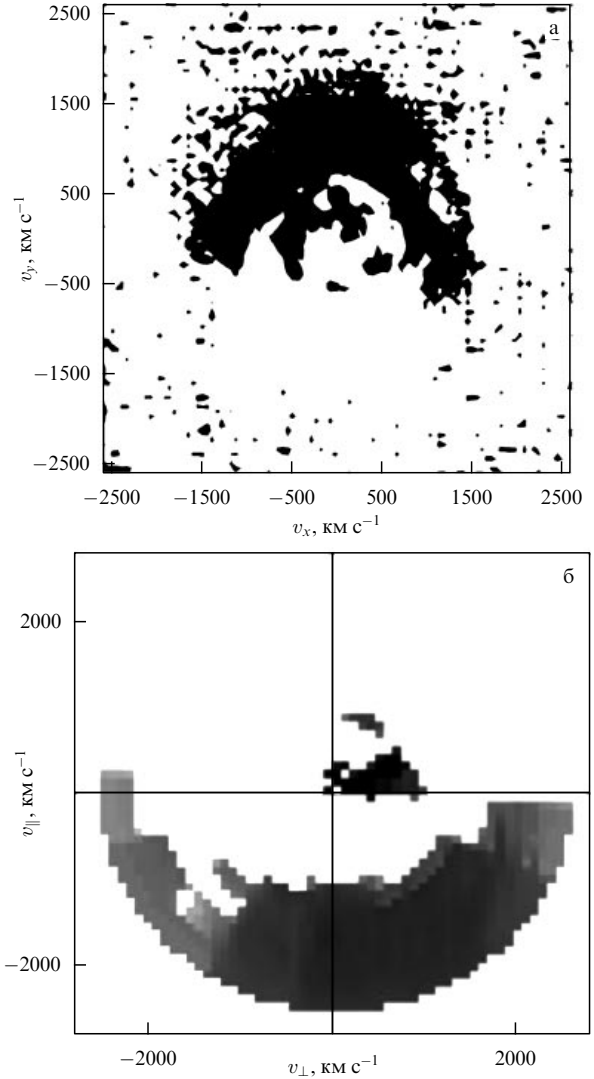


Рис. 35. (а) Функция распределения пролётных частиц, измеренная спутниками в токовом слое хвоста земной магнитосферы. (Из работы [30].) (б) Функция распределения частиц в пограничной области плазменного слоя. (Из работы [132].)

имеющий серповидную форму (см. [128, 129]). С другой стороны, можно воспользоваться тем фактом, что при пересечении токового слоя характеристики фоновой плазмы изменяются слабо. В результате, если из функции распределения в центре токового слоя вычесть функцию распределения на его границе, то в получившейся остаточной функции будут отчётливо видны серповидные распределения пролётных частиц, по форме очень близкие к распределениям, найденным теоретически (рис. 35а).

Таким образом, можно констатировать, что теория квазиадиабатического движения частиц в токовых слоях позволяет с хорошей точностью восстановить функции распределения ионов плазменного слоя хвоста магнитосферы Земли.

### 6.3. Функция распределения на границе токового слоя

На формирование функции распределения заряженных частиц на границе токового слоя (или в пограничной области плазменного слоя) существенное влияние оказывают процессы ускорения частиц электростатическим

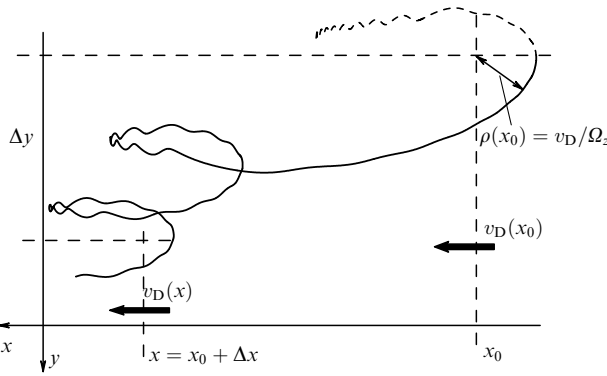


Рис. 36. Траектория частицы в системе с гамильтонианом (18) при  $\beta(x) \sim 1/\sqrt{-x}$ .

полем  $E_y$ . Прямые численные расчёты [97] и простые оценки [96] указывают на то, что частицы, покидающие токовый слой, должны сформировать в пространстве скоростей функцию распределения с характерной формой "фасолины" в пространстве  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ . Аналогичные функции распределения неоднократно наблюдали космические аппараты в пограничной области плазменного слоя [103, 108, 130, 131]. Характерный пример такого наблюдения представлен на рис. 35б. В этом разделе мы покажем, опираясь в основном на результаты работы [133], как можно получить данное распределение частиц по скоростям в рамках теории квазиadiaбатической динамики.

Рассмотрим модель токового слоя с  $B_z(x/L_x)$  и  $E_y = \text{const}$ , обсуждавшуюся в разделе 5.1. Нас будут интересовать частицы на квазизахваченных траекториях. Проекция характерной траектории таких частиц на плоскость  $z = 0$  представляет собой серию соединённых между собой разомкнутых орбит. Орбиты разомкнуты из-за того, что в поле с градиентом  $\partial B_z/\partial x \neq 0$  частицы испытывают магнитный дрейф в  $y$ -направлении и набирают при этом энергию в поле  $E_y$ . Результаты численного расчёта подобной траектории для системы с  $B_z \sim 1/\sqrt{-x}$  представлены на рис. 36.

Рассмотрим частицы, начальная скорость которых существенно меньше дрейфовой скорости в центре токового слоя,  $v_D(x_0) = cE_y/B_z(x_0/L_x)$ . В этом случае частица, пересекающая токовый слой с координатой  $x_0$ , движется в центральной области слоя со скоростью  $v_D(x_0)$ . Мы полагаем, что данная частица наблюдается на расстоянии  $\Delta x = x - x_0$  от точки первого пересечения токового слоя. Рассмотрим отдельно все этапы ускорения частицы.

Сначала частица, если рассматривать её медленное усреднённое по  $z$ -колебаниям движение, делает четверть оборота в плоскости  $z = 0$  и смещается вдоль оси  $y$  (оборот начинается на оси  $y$ ) на расстояние

$$\rho(x_0) = \frac{v_D(x_0)}{\Omega_z(x_0)}, \quad \Omega_z = \frac{qB_z(x_0)}{mc}.$$

Так как частица движется в поле  $E_y \neq 0$ , она набирает энергию

$$\Delta W_1(x) = qE_y \rho(x_0) = mv_D^2(x_0).$$

Данная энергия равна половине энергии, которую набирает частица на резонансной траектории (см. раздел 5.2).

Далее частица движется по квазизахваченной орбите и набирает энергию за счёт дрейфа в возрастающем поле,  $\partial B_z/\partial x > 0$  (см. раздел 5.1). Таким образом, разница между энергиями в точке  $x_0$  и точке  $x = x_0 + \Delta x$

$$\begin{aligned} \Delta W_2 = W(x) - W(x_0) &= \frac{1}{2} mv_D^2(x) + \\ &+ W^*(x) - \frac{1}{2} mv_D^2(x_0) - W^*(x_0). \end{aligned}$$

Энергия  $W^*(x_0)$  определяется ускорением в токовом слое при движении частицы вдоль  $E_y$ :  $W^*(x_0) = \Delta W_1(x_0)$ . В свою очередь  $W^*(x)$  определяется набором энергии при дрейфе частицы к Земле,  $W^*(x) \sim B_z^\delta(x)$ , где  $\delta \in [2/5, 1]$ . В работах [92, 134] (см. также раздел 5.1) показано, что, в зависимости от типа траектории частицы, энергия частицы возрастает при конвекции к Земле степенным образом с показателем степени  $\delta = 2/5$  (для пролётных частиц) или  $\delta = 1$  (для захваченных частиц). В нашем случае будем считать, что  $\delta$  принимает некоторое промежуточное значение в зависимости от относительного количества траекторий различных типов в исследуемом ансамбле:

$$\begin{aligned} W^*(x) &= W^*(x_0) \left( \frac{B_z(x)}{B_z(x_0)} \right)^\delta = \frac{1}{2} mv_D^2(x_0) b^\delta, \\ b &= \frac{B_z(x)}{B_z(x_0)} = \frac{v_D(x_0)}{v_D(x)}. \end{aligned}$$

В точке наблюдения координата частицы вдоль оси  $y$  определяется соотношением (21) (см. также [40, 135]):

$$y(x) = \rho(x) \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I^*} \right)^{4/3}},$$

где  $I = I^* \sin^2 \theta'$ ,

$$I^* = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{\rho(x)}{L_z}}.$$

Угол  $\theta'$  является питч-углом частицы в системе координат, дрейфующей со скоростью  $v_D(x_0)$ . Наличие множителя  $\sin^2 \theta'$  в выражении для квазиadiaбатического инварианта  $I$  объясняется тем, что на границе токового слоя (где  $z = L$ ) квазиadiaбатический инвариант равен  $(1/2) v_{\perp}^2/\omega_0 = H \sin^2 \theta'/\omega_0$  (см. формулу (22)). Связь  $\theta'$  с питч-углом  $\theta$  в неподвижной системе координат выражается следующим соотношением:

$$\sin^2 \theta' = \frac{v^2(x)}{v_D^2(x_0) b^{2+\delta}} \sin^2 \theta.$$

Здесь  $mv^2 = 2W$  и мы воспользовались уравнением для  $W^*$ . Данное выражение получено из условия постоянства скоростей вдоль  $z$  и  $y$  при переходе в систему координат без электрического поля  $E_y$ . Таким образом, набор энергии в результате смещения вдоль поля  $E_y$  даётся выражением:

$$\Delta W_3 = qE_y (y(x) - y(x_0)).$$

Суммарное приращение энергии определяется как

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3.$$

Подставив в последнее соотношение выражения для  $\Delta W_1(x)$ ,  $\Delta W_2$  и  $\Delta W_3$ , получим

$$v^2 = v_D^2(x)(1 + b^{2+\delta}) + v_D^2(x) \times \\ \times 2b^{1+(1/2)\delta} \sqrt{1 - \left( \frac{v^2 \sin^2 \theta}{v_D^2(x) b^{2+\delta}} \right)^{4/3}}.$$

Последнее выражение определяет "ребро жёсткости" искомого питч-углового распределения частиц в зависимости от координаты наблюдения  $x$  в приближении малой начальной энергии частиц. Под ребром жёсткости мы понимаем геометрическое место точек на плоскости  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , соответствующее наибольшему значению фазовой плотности. Обобщение для случая, в котором необходим учёт начальной скорости  $u_0$ , даётся формулой

$$v^2 = u_0^2 + v_D^2(x) [1 + b^2(a-1)^2 + b^{2+\delta}a^2] + \\ + v_D^2(x) 2b^{1+\delta/2} \sqrt{1 - \left( \frac{v^2 \sin \theta}{v_D^2(x) b^{2+\delta}} \right)^{4/3}}, \quad (25)$$

где

$$a^2 = \left( \frac{u_0 \cos \theta_0}{bv_D(x)} + 1 \right)^2 + \frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{b^2 v_D^2(x)},$$

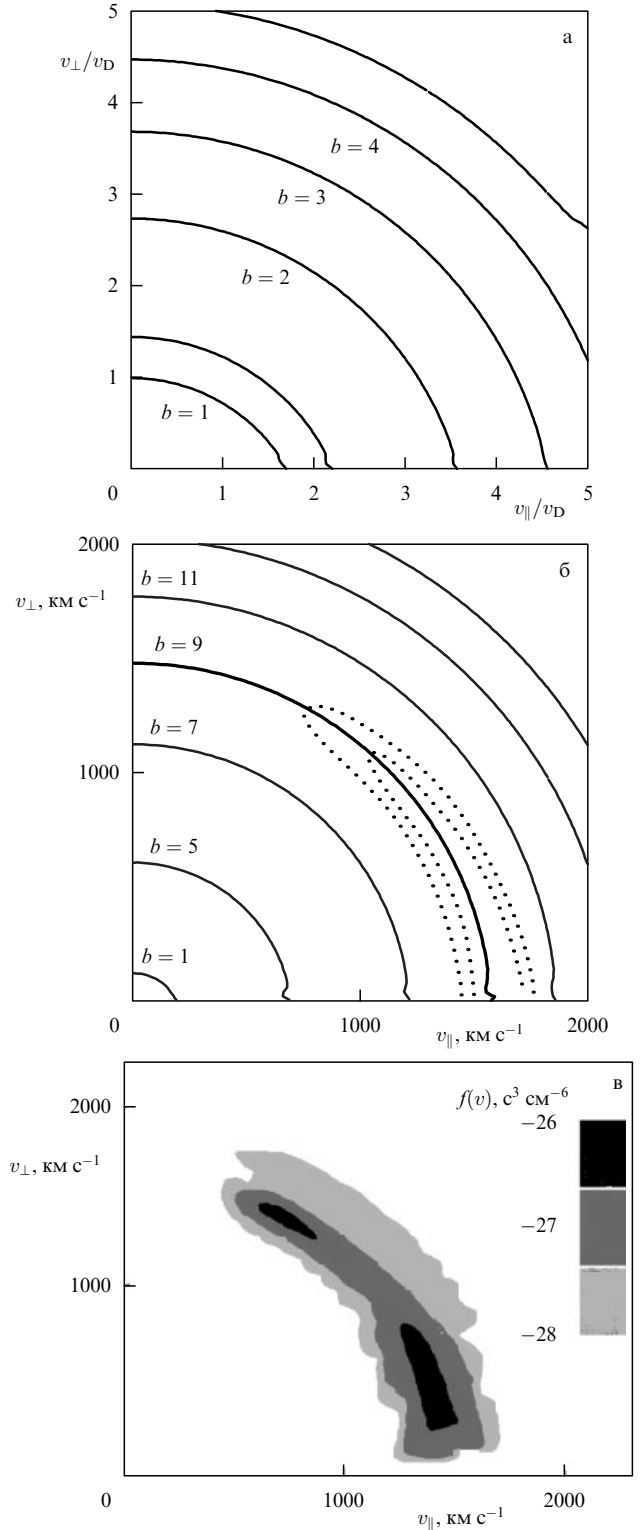
$\theta_0$  — значение питч-угла в начальный момент времени (в точке  $x_0$ ).

На рисунке 37 показаны линии равного уровня функции распределения протонов в пограничной области плазменного слоя. Каждое ребро жёсткости соответствует своему значению  $b$ , т.е. некоторому удалению начального положения  $x_0$  частицы в токовом слое от точки наблюдения. Можно отметить, что в широких пределах положение рёбер жёсткости не зависит от начальной скорости  $u_0$  и питч-угла  $\theta_0$  частиц [133]. При этом рёбра жёсткости изменяются по форме с возрастанием  $b$  (с увеличением расстояния  $\Delta x$ ): чем больше  $b$ , тем больше рёбра жёсткости напоминают фрагменты окружностей. В случае  $\Delta x = 0$  ( $b = 1$ ) структура является вытянутой вдоль продольного направления скорости. Для больших  $b$  зависимость от питч-угла уменьшается и рёбра жёсткости становятся просто полуокружностями радиусом  $R$ , сдвинутыми вдоль направления  $v_{\parallel}$  на расстояние  $v_D(x)$ . Радиус  $R$  определяется следующим выражением:

$$R = v_D(x) b^{\delta+1} = v_D(x_0) b^{\delta}.$$

На рисунке 37б показаны рёбра жёсткости, рассчитанные по формуле (25) при  $v_D(x) = 100 \text{ км с}^{-1}$  и  $u_0 = \theta_0 = 0$ . Кривая с  $b = 9$  хорошо соответствует ребру жёсткости для функции распределения ионов, измеренной космическим аппаратом в ПОПС (рис. 37в).

Малые значения (или равенство нулю) функции распределения частиц в ПОПС для больших значений питч-угла  $\theta$  объясняются тем, что частицы с такими питч-углами не покидают токового слоя и не могут принять участие в формировании функции распределения в пограничной области плазменного слоя (см. раздел 6.1). Этот эффект может быть получен на основе выражения для  $v$ : условие положительности выражения под корнем в формуле (25) определяет существование некоторого  $\theta_{\max}$  для каждого  $v$ .



**Рис. 37.** (а, б) Рёбра жёсткости функции распределения частиц в пограничной области плазменного слоя, рассчитанные для различных значений параметра  $b$ . Рисунок б аналогичен рис. а с учётом  $v_D = 100 \text{ км с}^{-1}$ . (в) Функция распределения протонов, измеренная в пограничной области плазменного слоя. (Из работы [133].)

Завершая этот раздел, можно резюмировать, что результаты применения аналитических методов, основанных на квазиadiaбатической теории, хорошо согласуются как с результатами численных расчётов, так и с

данными прямыми спутниковыми наблюдениями ионных функций распределения в центре плазменного слоя магнитосферного хвоста и на его границах.

#### 6.4. Построение самосогласованных моделей одномерного токового слоя

В разделе 6.3 было показано, как функция распределения пролётных частиц может быть определена в любой точке токового слоя посредством трассирования частиц от границы системы. Возможность такого трассирования (т.е. аналитическая интегрируемость уравнений движения) связана именно с предположением о сохранении квазиadiaбатических инвариантов. Наличие функции распределения, известной во всей области (для всех  $z$ ), позволяет вычислить её моменты (в частности, плотность тока частиц вдоль направления  $y$ ). Таким образом, можно построить самосогласованную модель токового слоя — модель такой равновесной системы, в магнитных полях которой частицы движутся по траекториям, описываемым в рамках квазиadiaбатической теории.

Стационарное равновесное решение для токового слоя, описывающее распределение векторного и скалярного потенциалов (и, как следствие, электрического и магнитного полей), а также функции распределения частиц плазмы, должно удовлетворять системе уравнений Власова – Максвелла:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r})$  — функция распределения частиц,  $m_\alpha$  и  $q_\alpha$  — соответственно масса и заряд частицы типа  $\alpha$  (электрона или иона). Решением первого из уравнений (26) является любая функция от интегралов движения. При этом рассматриваемая система при  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  имеет два точных интеграла: полную энергию  $H$  и обобщённый импульс  $P_y = m_\alpha v_y + (q_\alpha/c) A_y(x, z)$ .

Существует ряд моделей токовых слоёв, в которых  $F_\alpha = F_\alpha(H, P_y)$  (см. работы [38, 136–140] и обзоры [141–145]). Однако эти модели не учитывают наличие в реальном токовом слое хвоста земной магнитосферы пролётных частиц. Дело в том, что в задачах с наличием сколь угодно малой, но конечной компоненты магнитного поля поперёк слоя  $B_z \neq 0$  возникает возможность существования популяции пролётных частиц, движущихся от одной границы слоя до другой. Даже в простейших задачах с  $B_z \neq 0$  уравнения движения частиц становятся неинтегрируемыми и для построения кинетической модели слоя (т.е. нахождения интегралов движения частиц) необходимо введение ещё одного инварианта движения, роль которого как раз и играет квазиadiaбатический инвариант  $I_z$  [125, 126, 146].

Класс токовых слоёв, построенных с учётом сохранения  $I_z$ , обладает рядом свойств, следующих непосредственно из свойств траекторий пролётных частиц. Так, в работах [125, 126, 147, 148] показано, что основными свойствами токовых слоёв, поддерживаемых пролётными ионами, являются: 1) вложенность (профили плотности плазмы и профили плотности тока не совпа-

дают); 2) тонкая структура профилей плотности тока (например, наличие не одного, а нескольких локальных максимумов плотности тока). Данные особенности приводят к тому, что токовые слои с пролётными частицами оказываются метастабильными, т.е. при определённых параметрах системы такие токовые слои быстро (иногда даже взрывным образом [149]) переходят в неустойчивое состояние и разрушаются в результате развития разрывной неустойчивости [62], что позволяет описать наиболее важный крупномасштабный процесс, развивающийся в земной магнитосфере, — магнитосферную суббурю [25, 58, 150, 151]. Ниже мы обсудим основные этапы построения модели токового слоя с учётом сохранения  $I_z$  (далее будем рассматривать тонкий токовый слой (ТТС), так как полученные состояния равновесия обладают относительно малыми пространственными масштабами вдоль оси  $z$ ), опираясь на работы [125, 126]. Мы также рассмотрим на основе работ [46, 47, 50] результаты исследования самосогласованной эволюции токового слоя, связанной со скачками инварианта  $I_z$ , и проведём сопоставление полученных моделей с экспериментальными данными (см. [22, 26, 152]). В заключение мы представим результаты развития двумерных моделей токовых слоёв на основе "двойного" квазиadiaбатического описания, предполагающего сохранение как первого ( $I_z$ ), так и второго ( $I_x$ ) квазиadiaбатических инвариантов.

##### 6.4.1. Модель одномерного токового слоя. Сформулируем главные положения одномерной модели ТТС.

1. Основными носителями тока в рассматриваемом токовом слое являются ионы на пролётных траекториях, и в первом приближении электроны можно считать фоном, обеспечивающим квазинейтральность плазмы (т.е.  $\sum_\alpha q_\alpha \int F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v} = 0$ ).

2.  $B_z$ -компонента магнитного поля считается постоянной (не зависит от координаты  $x$ ). Компонента  $B_y = 0$  (правомерность такого приближения оправдана малым значением  $B_y$  для многих токовых слоёв, наблюдаемых в хвосте магнитосферы [26, 153]).

3. Единственной пространственно неоднородной компонентой магнитного поля является самосогласованная компонента  $B_x(z)$ , определяемая токами пролётных ионов.

4. Так как  $B_z = \text{const}$ , крупномасштабное электростатическое поле  $E_y$ , присутствующее в хвосте магнитосферы Земли, можно учесть переходом в систему отсчёта де Хоффмана – Теллера [154], движущуюся равномерно вдоль оси  $x$  со скоростью  $cE_y/B_z$ .

5. В модели учитывается роль как пролётных ионов, так и ионов на квазизахваченных траекториях. В действительности электронные токи играют довольно важную роль в формировании структуры токового слоя, но поскольку нас здесь интересует главным образом роль квазиadiaбатической динамики ионов, мы рассматриваем электроны в простейшем приближении фона, где учитывается только их заряд (но не ток).

Рассмотрим подробнее особенности движения частиц на пролётных и квазизахваченных траекториях в центральной области токового слоя. Рисунок 38 демонстрирует характерные формы фрагментов орбит пролётных (штриховая кривая) и квазизахваченных (сплошная кривая) частиц. Как правило, орбиты квазизахваченных частиц имеют сложный петлеобразный характер, поэтому в самом центре слоя компонента скорости иона

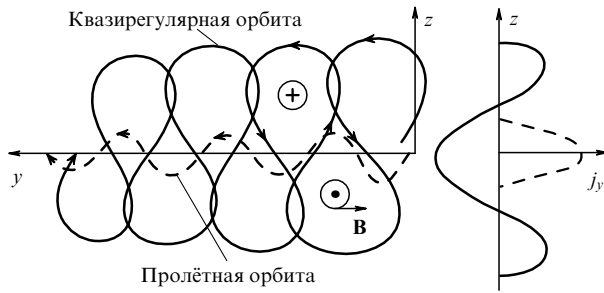


Рис. 38. Фрагменты орбит двух ионов, пересекающих плоскость  $z = 0$ . Показаны направление движения частицы, направления компоненты магнитного поля  $B_x$  и профили токов, создаваемых каждой частицей. (Из работы [46].)

вдоль оси  $y$  отрицательна, а в момент максимального удаления частицы по координате  $z$  — положительна. Вектор скорости пролётного иона, напротив, всегда направлен вдоль оси  $y$ . В правой части рис. 38 схематично показаны соответствующие токи: ток пролётного иона (штриховая кривая) имеет ярко выраженный положительный максимум, в то время как ток квазизахваченного иона (сплошная кривая) отрицателен в центре токового слоя и положителен на его краях. Таким образом, пролётные ионы можно считать основными носителями тока. Что касается квазизахваченных частиц, орбиты которых замкнуты, то поддерживаемое ими полное магнитное поле в точности равно нулю, хотя локальный ток отличен от нуля, и если в системе захвачено много частиц, то такой ток может существенным образом изменить структуру слоя. Траектории обоих типов — пролётные и квазизахваченные — важны для формирования тонкой структуры ТТС.

Модель ТТС предполагает, что взаимно проникающие потоки ионов поступают в токовый слой из отдалённых источников, расположенных на границах системы ( $|z| > L_z$ ). Пролётные ионы на разомкнутых орбитах описывают полуокружность в нейтральной плоскости (полуоборот в поле  $B_z$ ) (см. раздел 3.1). Задавая функцию распределения ионов на границе токового слоя в виде максвелловского распределения со сдвиговой скоростью  $v_D$  вдоль направления магнитного поля и представляя данное распределение через интегралы движения (энергию  $H$  и инвариант  $I_z$ ) аналогично тому, как это сделано в разделе 6.2, мы можем найти функцию распределения  $F(\mathbf{v})$  в каждой точке токового слоя (для всех  $z$ ).

Как говорилось выше, в токовом слое кроме пролётных частиц имеются частицы на квазизахваченных траекториях. (Несмотря на то что в этом разделе мы не будем рассматривать влияние скачков адиабатического инварианта на динамику и свойства системы, мы продолжим называть квазиадиабатическими замкнутые траектории, пересекающие сепаратрису.) Данные частицы не покидают токового слоя, и их функция распределения не может быть найдена трассированием распределения с границ системы. Однако в фазовом пространстве популяции частиц на квазизахваченных и пролётных траекториях разделяются по значению квазиадиабатического инварианта  $I_z^*$  (см. раздел 6.1). Если  $I_z < I_z^*$ , то частица находится на пролётной траектории, а если  $I_z > I_z^*$ , то — на квазизахваченной. Таким образом, при

интегрировании функции  $F$  по пространству скоростей в тех областях пространства, в которых  $I_z > I_z^*$ , необходимо задавать функцию распределения, отличную от  $F$ . Ради простоты для областей фазового пространства с  $I_z > I_z^*$  в рассматриваемой модели задаётся тепловое максвелловское распределение  $F_{tr} = n_{ts} \exp(-H/T)$ , где  $T = v_0^2 m/2$  — температура ионов в токовом слое,  $n_{ts} = Kn_0$  ( $n_0$  — плотность пролётных частиц на границе токового слоя,  $K$  — свободный параметр, характеризующий относительный вклад частиц обоих типов). Выбор коэффициента  $K$  определяется, как правило, необходимостью учёта тех или иных плазменных процессов. Так, в ряде работ, где не ставилась непосредственно задача исследования роли плазмы, захваченной токовым слоем [125, 126], рассмотрены наиболее простые решения с  $K = 1$ , при получении которых функции распределения захваченных и пролётных частиц сшиваются с равными плотностями при  $I_z = I_z^*$ . При изучении влияния захваченной плазмы на структуру токового слоя [49, 155] параметр  $K$  варьировался в широкой области, от  $K = 0$  до  $K \approx 20$ .

Интегрируя найденную таким образом функцию распределения по скоростям (или импульсам  $p_x, p_y, p_z$ ) с весовым коэффициентом  $v_y$ , мы можем найти плотность тока частиц,  $j_y(z)$ . При этом  $j_y(z)$  включает в себя как диамагнитный ток, так и ток намагничивания, обусловленный градиентом давления частиц, а также парамагнитный ток, возникающий вследствие разомкнутости траекторий пролётных частиц (аналог краевого тока в ограниченных системах с упругим отражением частиц от стенок) (см. [22, 126]). Далее уравнение для магнитного поля из системы (26) записывается через компоненту векторного потенциала  $\tilde{A}_y(z) = A_y - B_z x$  (см. [22, 148]):

$$\frac{d^2 \tilde{A}_y}{dz^2} + \frac{4\pi}{c} j_y(\tilde{A}_y) = 0.$$

Здесь используется то обстоятельство, что система одномерна и плотность тока можно представить как функцию компоненты векторного потенциала  $\tilde{A}_y$ .

Одним из основных управляющих параметров системы является параметр  $\varepsilon = v_0/v_D$ , который определяет относительную скорость потока частиц на границе токового слоя. В дальнейшем мы покажем, что  $\varepsilon$  определяет также толщину возникающей самосогласованной токовой конфигурации.

Решение уравнения  $d^2 \tilde{A}_y/dz^2 + (4\pi/c) j_y(\tilde{A}_y) = 0$  ищется с помощью итерационной схемы. На нулевом шаге выбирается некоторое пространственное распределение потенциала  $\tilde{A}_y(z)$  и для данного распределения восстанавливается функция распределения  $F$  в каждой точке  $z$  и, следовательно, плотность тока  $j_y$ . Затем по найденной плотности тока ищется новое приближение  $\tilde{A}_y(z)$ . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока он не сойдётся к какой-либо функции  $\tilde{A}_y(z)$ . Далее для данной функции определяются магнитное поле  $B_x$  и плотность тока [125, 126].

Результаты расчётов представлены на рис. 39, где приведены самосогласованная плотность тока в ТТС как функция безразмерной координаты  $\zeta = z\varepsilon^{-4/3}\omega_0/v_D$  ( $\omega_0$  — гирочастота иона на границе токового слоя) при разных значениях параметра  $\varepsilon = v_0/v_D$ , а также профили плотности плазмы для тех же значений параметра  $\varepsilon$ . Из сравнения рис. 39а и б видно, что при сильной потоковой

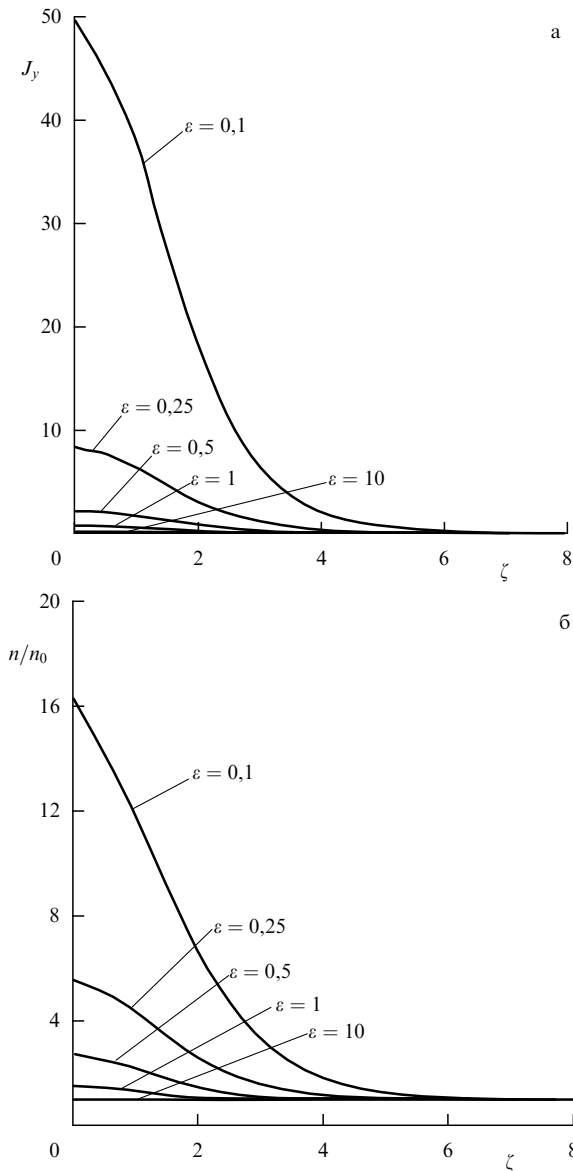


Рис. 39. Нормированная плотность тока  $J_y = j_y / (qn_0 v_D \varepsilon^{2/3})$  (а) и нормированная плотность плазмы  $n/n_0$  (б) как функции безразмерной координаты  $\zeta$ . (Из работы [126].)

анизотропии в системе, т.е. при малых значениях параметра  $\varepsilon$ , профили плотностей тока и плазмы имеют ярко выраженный максимум, который сглаживается с возрастанием параметра  $\varepsilon$  и для слабоанизотропных слоёв с  $\varepsilon \rightarrow 10$  практически исчезает. Однако сравниваемые профили имеют и существенное различие: плотности тока (рис. 39а) стремятся к нулю на границах токового слоя, в то время как плотность плазмы (рис. 39б) выходит на константу, что определяется наличием потоков частиц на границе системы. Таким образом, токовый слой оказывается вложенным внутрь более широкого плазменного слоя. Как следует из результатов вычислений, представленных на рис. 39, толщина слоя оказывается порядка единицы. Тогда его размерная толщина  $L_z \sim \rho_0 \varepsilon^{1/3}$ . Толщина слоя, таким образом, возрастает при увеличении  $\varepsilon$  вплоть до  $\varepsilon \sim 1$  ( $L_z \sim \rho_0$ ), но для слабоанизотропных слоёв ( $\varepsilon > 1$ ), как показано в работе [126], она выходит на постоянное значение  $L_z \sim \rho_0$ . Таким образом,

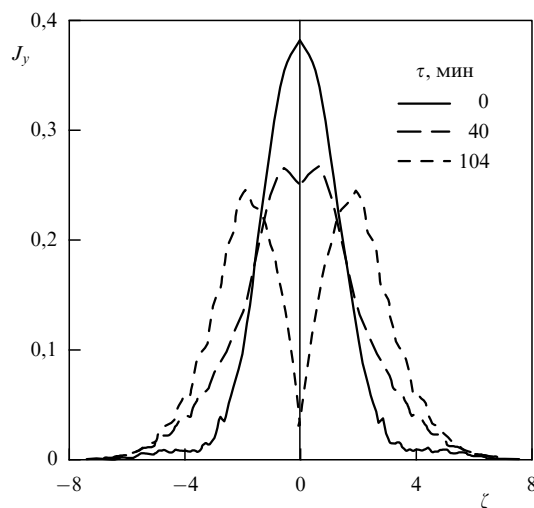
все самосогласованные (даже слабоанизотропные) токовые слои являются тонкими,  $L_z \lesssim \rho_0$ .

В работе [126], кроме того, показано, что тонкая структура профилей плотности тока в ТТС является результатом конкуренции противоположно направленных пара- и диамагнитных токов. Парамагнитные токи создаются, в основном, пролётными частицами (см. рис. 38) при движении носителей тока в центре токового слоя (полуоборот вокруг  $B_z$ ), а диамагнитные токи вызваны дрейфовым движением ионов ещё до того, как они пересекут нейтральную плоскость  $z = 0$ . Основными дрейфовыми токами являются: ток намагничивания, градиентный ток и ток дрейфа, обусловленный кривизной магнитных силовых линий [156]. Слабый вклад в отрицательную плотность тока могут внести и квазизахваченные ионы (см. рис. 38), но если  $K = 1$ , то их концентрация в системе мала и, соответственно, их роль невелика. Диамагнитные токи всегда много меньше парамагнитных, но на краях токового слоя диамагнитные токи могут проявляться в виде слабых отрицательных минимумов плотности тока и слабых максимумов магнитного поля на периферии токового слоя. Роль диамагнитных токов возрастает в слабоанизотропных слоях с большими значениями параметра  $\varepsilon$  (см. детали в работах [125, 126]).

#### 6.4.2. Скачки квазиadiaбатического инварианта и эволюция токового слоя на конечных интервалах времени.

Следует отметить, что самосогласованное равновесное решение, построенное в разделе 6.4.1, является приближённым. Точность самосогласованности квазиadiaбатической модели слоя определяется точностью сохранения квазиadiaбатических инвариантов движения (см. приложение А). На промежутках времени, много больших периода движения иона на плоскости медленных переменных  $(kx, p_x)$ , в системе может происходить накопление ионов на квазизахваченных траекториях за счёт скачков квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  (см. раздел 3.2).

В токовых слоях с  $\varepsilon \ll 1$  толщина слоя близка к ларморовскому радиусу и, следовательно, параметр  $k$  мал, что приводит к малым значениям относительных скачков инварианта  $\Delta I_z / I_z \ll 1$ . При этом область фазового пространства, занятая квазизахваченными траекториями, оказывается малой, так что эффекты накопления плазмы в этой области становятся малосущественными [126, 155]. Скачки квазиadiaбатических инвариантов, напротив, существенны в ТТС с  $\varepsilon \sim 1$ , где область фазового пространства, занятая квазизахваченными траекториями, оказывается уже относительно большой и скачки инвариантов движения также увеличиваются по сравнению с таковыми в случае  $\varepsilon \ll 1$ . Функция распределения частиц может вследствие этого очень медленно (по сравнению с медленным движением частиц на фазовой плоскости  $(kx, p_x)$ ) изменяться во времени [47, 50]. Увеличение концентрации квазизахваченных частиц вызывает перераспределение плотности тока в слое, при котором максимум плотности тока вначале расщепляется на два максимума, вытесняемые на периферию токового слоя [46]. Такую эволюцию слоя можно рассматривать как последовательность квазистатических равновесных состояний или относительно медленный диффузионный процесс в пространстве инвариантов движения  $I_z$ . Как показано в разделе 3.2, функция распределения частиц в



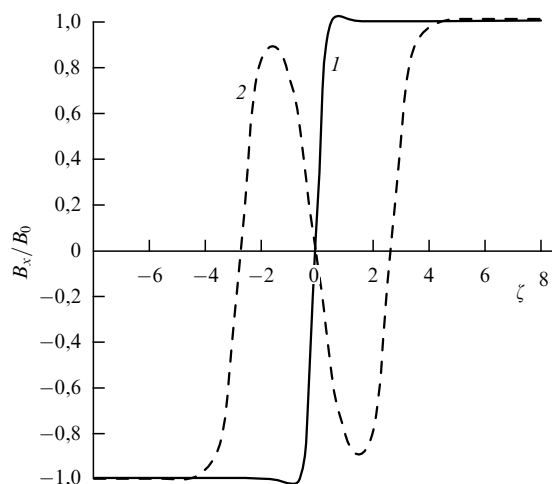
**Рис. 40.** Три характерных профиля плотности тока в эволюционирующем токовом слое в моменты времени, когда в слое нет захваченных частиц ( $\tau = 0$ ), имеется их небольшая концентрация ( $\tau = 40$  мин), имеется много частиц ( $\tau = 104$  мин). (Из работы [46].)

этом приближении может быть найдена из решения диффузионного уравнения с коэффициентом диффузии  $D_{II} \sim \kappa^2(1 - I^{4/3})/\tau_c$ , где  $I$  — безразмерный квазиadiaбатический инвариант,  $\tau_c = 2\pi/(qB_z/mc)$  — период движения частицы на плоскости  $(k_x, p_x)$  (период оборота в поле  $B_z$ ).

Предположение о быстрой релаксации системы к равновесному состоянию позволяет использовать профили функции распределения, полученные в разные моменты времени, как распределения, соответствующие квазиравновесным конфигурациям, которые система проходит во время своей эволюции. Таким образом, можно считать, что в каждый момент времени в правых частях уравнений (26) содержатся "мгновенные слепки" эволюционирующей функции распределения, получаемой при решении диффузионного уравнения.

Последовательные изменения профиля плотности тока в результате накопления частиц на квазизахваченных траекториях внутри ТТС в моменты времени  $\tau = t/\tau_c$  для характерной конфигурации токового слоя в хвосте магнитосферы Земли изображены на рис. 40. Видно, как накопление частиц на квазизахваченных траекториях приводит к провалу профиля плотности тока в центре слоя. Характерное время накопления квазизахваченных частиц в токовом слое хвоста земной магнитосферы оценено как 10–60 мин [50], что согласуется со временем жизни тонкого токового слоя по данным спутниковых наблюдений.

Вопрос о пределах накопления плазмы вблизи ТТС рассмотрен в работе [155], где показано, что по достижении отрицательного минимума плотности тока токовый слой может разрушаться, а равновесие перестаёт существовать. По этой причине процесс накопления частиц на квазизахваченных траекториях был назван "старением" токового слоя. Однако следует заметить, что в другом исследовании [49] показана возможность существования "экзотических" трижды расщеплённых токовых равновесий, в которых наблюдается высокая концентрация захваченной плазмы и характерная трёхслойная конфигурация, при которой в центре слоя течёт отрицательный



**Рис. 41.** Два самосогласованных стационарных профиля нормированного магнитного поля  $B_x$  в простом ТТС с одним максимумом плотности тока (кривая 1) и в трижды расщеплённом ТТС (кривая 2). (Из работы [49].)

ток, а на его краях — положительный (рис. 41). Такая конфигурация, в отличие от дважды расщеплённой, является устойчивой к малым внешним возмущениям магнитного поля, хотя и существует пороговое значение плотности частиц на квазизахваченных траекториях, превышение которого приводит к разрушению тройного токового слоя.

Связь между дважды и трижды расщеплёнными равновесными состояниями до сих пор неясна, так как не удалось получить плавного перехода от первого ко второму или наоборот. Можно лишь утверждать, что найдено три типа равновесных состояний, являющихся решениями системы уравнений Власова–Максвелла: нерасщеплённое, дважды расщеплённое и трижды расщеплённое. В токовом слое, где плазма имеет слабую потоковую анизотропию ( $\varepsilon \sim 1$ ), нерасщеплённый равновесный токовый слой может перейти благодаря диффузии в пространстве квазиadiaбатических инвариантов в расщеплённое состояние, медленно эволюционирующее в направлении к трижды расщеплённому равновесному состоянию. Скорость этой эволюции оказывается переменной — она возрастает со временем, так как увеличение концентрации ионов на квазизахваченных траекториях приводит к формированию "выположенного" профиля магнитного поля с большим значением параметра  $\kappa$ , что в свою очередь обуславливает дальнейшее усиление рассеяния частиц (в соответствии с выражением для коэффициента диффузии  $D \sim \kappa^2$ ) и их захват вблизи токового слоя. Таким образом, механизм процесса "старения" подразумевает положительную обратную связь между "глубиной" провала профиля тока в центре токового слоя и коэффициентом диффузии  $D \sim \kappa^2$ , что может привести к очень быстрой взрывообразной эволюции системы на конечных стадиях её существования [46, 50].

**6.4.3. Асимметрия токового слоя и многокомпонентные системы.** Несимметричные ТТС достаточно часто регистрируются в хвосте магнитосферы Земли [153]; они были также обнаружены при пролёте спутника Magi-

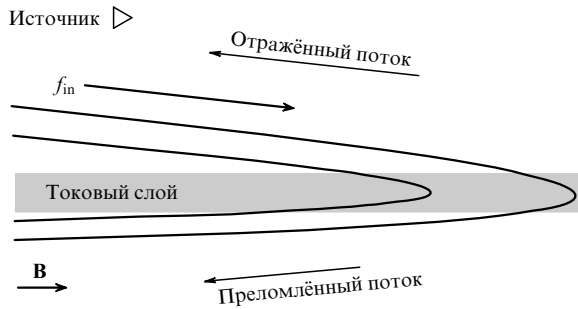


Рис. 42. Схема распределения падающего, отраженного и преломленного потоков плазмы вблизи ТТС. (Из работы [159].)

per-10 через магнитосферу Меркурия [157]. Наиболее естественным источником асимметрии токового слоя может быть асимметрия потоков плазмы, проходящих через токовый слой [158, 159], или наличие ненулевой компоненты магнитного поля  $B_y$  в токовом слое [160, 161]. Ниже мы рассмотрим действие первого механизма в токовом слое с  $B_y = 0$ , для упрощения предположив, что единственный источник плазмы на границе системы располагается в северном полушарии, а в южном источник отсутствует [157]. Ионы, проникающие в токовый слой с границ системы, описав в нейтральной плоскости  $z = 0$  полуокружность вокруг поля  $B_z$ , могут начать движение в обратном направлении к источнику ("отражение"), а могут перейти на противоположную от источника сторону токового слоя ("преломление"). Процессы "отражения" и "преломления" частиц существенно зависят от набега фазы между пересечениями сепаратрис на входе в слой и выходе из него (см. разделы 3.1, 3.3). Этот набег определяется параметром  $\kappa$  (фактически отношением частот медленного и быстрого движений), т.е. в конечном счёте зависит от параметров слоя ( $L_z$ ,  $B_z/B_0$ ) и энергии частицы. В среднем по распределению вероятности "отражения" и "преломления" для ионов одинаковы, исключение составляют группы частиц с резонансными значениями энергий, для которых набег фазы  $\delta\zeta$  равен нулю, т.е. скачок квазиadiaбатического инварианта движения на входе компенсируется равным по величине скачком на выходе (см. раздел 3.3). Такие частицы или только отражаются (чётные резонансы), или только преломляются (нечётные резонансы) после взаимодействия с токовым слоем [162].

На рисунке 42 показана схема модели одномерного ТТС, в которой функция распределения ионов в слое содержит частицы с резонансными энергиями, т.е. структура слоя может определяться доминированием процессов "отражения" или "преломления" частиц, приходящих из единственного источника, находящегося в области  $z > 0$ . Свободный параметр  $r \leq 1$  описывает вероятность отражения частиц в сторону источника, коэффициент их прохождения соответственно равен  $1 - r$ . Таким образом,  $r = 0$  соответствует полному прохождению потока плазмы через токовый слой, т.е. симметричному случаю. Значение  $r = 1$  соответствует полному отражению ионов в сторону источника, т.е. максимально возможной асимметрии системы.

Запишем функцию распределения пролётных ионов в слое  $F$  при  $z > 0$  и  $z < 0$  через функцию распределения

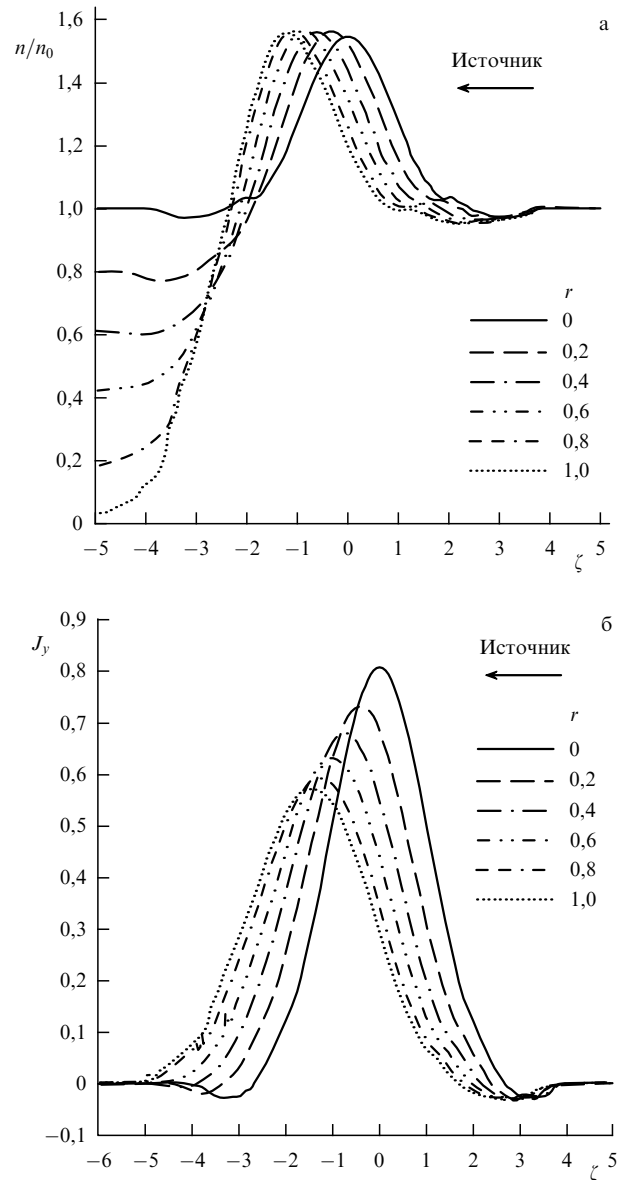


Рис. 43. Плотность плазмы (а) и плотность тока (б) как функции безразмерной координаты для значений коэффициента отражения  $r$  от 0 до 1 с шагом 0,2. Показано положение источника плазмы ( $\zeta > 0$ ). (Из работы [159].)

пролётных частиц на границе слоя  $F_0$ :

$$F_{|z>0} = \begin{cases} F_0, & v_{||} < 0, \\ rF_0, & v_{||} > 0, \end{cases}$$

$$F_{|z<0} = \begin{cases} (1-r)F_0, & v_{||} < 0, \\ 0, & v_{||} > 0. \end{cases}$$

Здесь  $v_{||}$  — компонента скорости вдоль направления магнитного поля. Также предполагается, что после взаимодействия ионов с токовым слоем вид функции распределения не меняется, потери частиц и энергии отсутствуют. Направления потоков плазмы до и после взаимодействия с ТТС показаны на рис. 42.

Самосогласованные уравнения Власова — Максвелла (26) с функцией распределения  $F$  были решены численно и в результате были найдены равновесные решения в диапазоне изменения параметра  $r$  от 0 до 1 при фиксированном  $\varepsilon = 1$  [159]. Профили плотности плазмы для пяти

значений коэффициента отражения  $r$  изображены на рис. 43а. Анализ парциальных токов показывает, что парамагнитные токи, обусловленные полувращением ионов в нейтральной плоскости вокруг поля  $B_z$ , стремятся поддерживать симметрию профилей плотности тока. Асимметрия токового слоя определяется только диамагнитными токами, зависящими от распределения плотности частиц плазмы. Поскольку падающий и отражённый потоки складываются со стороны источника, плотность плазмы там выше, чем на противоположной стороне (исключением является случай  $r = 0$ ). Рисунок 43б демонстрирует, как благодаря диамагнитным отрицательным токам профиль плотности тока становится более пологим со стороны источника, а его амплитуда уменьшается. Смещение несимметричного токового слоя как целого происходит вследствие выполнения условия баланса давления поперёк слоя, когда при увеличении коэффициента  $r$  плазма становится более плотной со стороны источника, а с противоположной стороны — более разреженной.

Одномерная квазиadiaбатическая модель ТТС позволила исследовать и другие эффекты, например влияние многокомпонентности плазмы на структуру токового слоя. Так, в работе [163] (см. также обзор [22]) представлены результаты самосогласованных решений для токового слоя, в плазме которого присутствуют не только протоны, но и тяжёлые ионы кислорода. Показано, что орбиты пролётных тяжёлых ионов в несколько раз увеличивают толщину токового слоя, поскольку тяжёлые ионы имеют большие ларморовские радиусы. Кроме того, ток, создаваемый ионами кислорода, доминирует на периферии токового слоя, в то время как протонный ток — в его центре. Результаты свидетельствуют о формировании многократно вложенной структуры наподобие "матрёшки": сравнительно тонкий протонный слой толщиной порядка протонного гирорадиуса вложен внутрь относительно толстого кислородного токового слоя (толщиной порядка нескольких протонных гирорадиусов), а весь токовый слой в свою очередь вложен внутрь ещё более широкого плазменного слоя (толщина которого ограничена только размерами модели, в реальной магнитосфере она может достигать нескольких сотен гирорадиусов протона).

**6.4.4. Сопоставление с экспериментальными данными.** Благодаря спутниковым миссиям последних двух десятилетий (Interball, Cluster и THEMIS (Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms)) удалось получить беспрецедентно подробную информацию о токовых слоях хвоста земной магнитосферы [27, 129, 152, 153, 164], что дало возможность провести всестороннее сопоставление данных наблюдений с теоретическими моделями.

Сравнение спутниковых данных с результатами моделей токовых слоёв, построенных с учётом инварианта  $I_z$ , показало широкие возможности этих моделей при описании экспериментальных данных [26, 147]. В рамках моделей ТТС удалось описать такое свойство наблюдаемых токовых слоёв, как "вложенность". Удалось показать, что для абсолютного большинства токовых слоёв, наблюдаемых в хвосте земной магнитосферы, плотность тока  $j_y$  убывает с возрастанием магнитного поля  $|B_x|$  при удалении от плоскости  $z = 0$  ( $B_x = 0$ ) существенно быстрее, чем плотность плазмы  $n_p(z)$  [165]. То есть

профиль  $j_y(z)$  как бы вложен в более широкий профиль  $n_p(z)$ . "Вложенность" является естественным свойством ТТС с популяцией пролётных частиц, что позволяет в рамках рассмотренной модели описать экспериментально наблюдаемые профили плотности тока [22, 26, 31, 152, 166].

С помощью спутниковых наблюдений подтверждено и ещё одно универсальное свойство ТТС, построенных с учётом сохранения квазиadiaбатического инварианта  $I_z$ . Теоретические модели ТТС, основанные на квазиadiaбатическом описании движения частиц плазмы, предсказывают, что толщина слоя (пространственный масштаб профиля  $j_y(z)$ ) должна иметь величину порядка гирорадиуса пролётных ионов в поле  $B_0$ . Для большинства наблюдаемых токовых слоёв в хвосте магнитосферы Земли такая оценка подтвердилась [30, 31].

В 1996 г. была опубликована работа [63] с первыми экспериментальными данными по наблюдению бифуркации токового слоя в хвосте земной магнитосферы. Последующие спутниковые миссии подтвердили типичность данной конфигурации магнитного поля с локальным минимумом плотности тока  $j_y$  в центре слоя ( $z = 0$ ) [64, 153]. Теоретическое описание бифурцированных токовых слоёв, основанное на квазиadiaбатических моделях, адекватно объясняет всё многообразие таких структур, наблюдаемых в эксперименте [46, 167]. Следует отметить, что роль динамических процессов в формировании бифурцированных токовых слоёв до сих пор остаётся не до конца исследованной. С одной стороны, существует серия наблюдений бифурцированных токовых слоёв в течение длительного времени [168]. С другой стороны, рядом авторов указывалось на то, что бифуркация токового слоя может быть следствием его вертикальных пространственных колебаний [63, 169, 170]. Данные колебания, как правило, ассоциируются с различными неустойчивостями, развивающимися в токовых конфигурациях, обладающих существенным запасом свободной энергии (см. работы [171–174] и обзор [22]).

## 6.5. Модели двумерных токовых слоёв

Модель одномерного токового слоя может быть использована для описания большинства доступных на настоящий момент данных спутниковых наблюдений. Однако нулевое (или малое) значение градиента  $\partial B_z / \partial x$  в хвосте магнитосферы является скорее временным проявлением специфических условий для некоторого интервала значений  $x$ , чем постоянным свойством системы. За исключением случаев формирования тонких токовых слоёв с  $L_x / L_z \approx 25$  [175], хвост магнитосферы обычно характеризуется отношением  $L_x / L_z \sim 5$  и наличием относительно большого градиента  $\partial B_z / \partial x$  [176, 177]. Стоит также отметить, что иногда наблюдаются локальные области с обратным градиентом,  $\partial B_z / \partial x < 0$  [178–181]. Таким образом, вопрос влияния градиента  $\partial B_z / \partial x$  на структуру токового слоя заслуживает отдельного рассмотрения.

В относительно простом виде концепция модели токового слоя с  $B_z(x/L_x)$  была предложена в работе [93] и численно реализована в [182–184]. Описание динамики ионов в рамках рассматриваемой в этом обзоре квазиadiaбатической теории основывается на результатах, представленных в разделах 4.1, 5.1, где была показана возможность описания движения частиц с учётом сохранения первого,  $I_z$ , и второго,  $I_x$ , квазиadiaбатических инвариантов.

Зададим некоторый профиль магнитного поля  $B_z(x/L_x)$  в области  $x \in [x_0, x_1]$ . На границе  $x = x_0$  зададим функцию распределения ионов, соответствующую функции распределения частиц, попадающих в дальний хвост магнитосферы из источников в мантии (рис. 28б). Данную функцию необходимо представить как функцию инварианта  $I_z$  и полной энергии  $H$ :  $F_0(I_z, H)$  при  $x = x_0$ . При этом функцию  $F$  при  $x = x_0$  можно записать как  $F_0(p_x, I_z)$ . Затем, используя изначально задаваемый профиль  $B_z(x/L_x)$ , можно найти выражение для второго квазиadiaбатического инварианта,  $I_x = I_x(H, I_z)$ , играющего принципиальную роль в рассматриваемой задаче (см. раздел 5.1):

$$I_x = \frac{\sqrt{8}}{2\pi} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{H - h_z(I_z, \kappa x')} dx'.$$

Здесь энергия быстрого движения  $h_z$  может быть выражена через  $I_z$  и  $\kappa x$ , как и в разделе 3.1. Так как  $H = h_z(I_z, \kappa x_0) + (1/2)p_x^2$ , для  $I_x(p_x, I_z)$  получаем следующее выражение:

$$I_x = \frac{1}{\pi} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{p_x^2 + 2h_z(I_z, \kappa x_0) - 2h_z(I_z, \kappa x')} dx'.$$

Пределы интегрирования  $x_{\pm}$  здесь определяются из условия обнуления подынтегрального выражения. Таким образом,  $F_0(p_x, I_z)$  можно выразить через инварианты  $I_x$  и  $I_z$ :  $F_0(I_x, I_z)$  при  $x = x_0$ .

Наличие поля  $E_y$  приводит к конвекции частиц в направлении Земли (в сторону увеличения  $x$ ). Таким образом, функция распределения  $F(I_x, I_z, x)$  может быть получена проекцией функции  $F_0(I_x, I_z)$ , аналогично тому как это сделано для одномерного токового слоя в разделе 6.4. То есть, задав профиль  $B_z(x/L_x)$ , можно определить функцию  $F(I_x, I_z, x)$  в каждой точке  $x \in [x_0, x_1]$ . Интегрируя затем  $v_y F(I_x, I_z, x)$  по скоростям, находим плотность тока:

$$j_y(x) \sim \int v_y F(I_x, I_z, x) J(I_x, I_z) dI_z dI_x.$$

Здесь  $J(I_x, I_z)$  — якобиан перехода от  $dp$  к  $dI_z dI_x$ , и компонента скорости  $v_y$  должна быть выражена через инварианты  $I_z$ ,  $I_x$ . Используя  $j_y(x)$ , можно определить профиль  $B_z(x/L_x)$  и затем вновь повторить процедуру. Данный итерационный процесс останавливается, когда профиль  $B_z(x/L_x)$  перестаёт изменяться от одной итерации к другой.

Рассмотренная методика позволяет получить самосогласованные профили магнитного поля  $B_z(x/L_x)$  и моменты ионной функции распределения вдоль  $x$  в системе, усреднённой по колебаниям частиц в поле  $B_x$  [93].

Существует и более сложный подход, в принципе позволяющий получить уже все характеристики двумерной конфигурации с квазиadiaбатическими ионами. Развивая методы моделирования токового слоя, рассмотренные в разделе 6.4, функцию квазизахваченных ионов можно представить как  $F_{\text{trap}} \sim K \exp(-(H + \omega_0 I_x)/T)$ , где  $K$  — параметр, характеризующий относительную плотность квазизахваченных частиц,  $H$  и  $T$  — полная энергия и температура соответственно. Величина  $K$  является свободным параметром в задаче, что связано с условной независимостью источников плазмы квазиза-

хваченных и пролётных частиц. Квазизахваченные ионы могут населять токовый слой не только благодаря рассеянию и захвату пролётных частиц, но и за счёт конвекции из дальней области хвоста в ближнюю область в двумерной задаче. Пролётные ионы не совершают многократных осцилляций на плоскости медленных переменных и не успевают сильно сместиться вдоль  $x$ -направления вследствие неоднородности магнитного поля. Поэтому движение ионов можно считать локально одномерным и для их описания применять те же функции распределения, которые использовались в разделе 6.4. Таким образом, мы будем описывать пролётные ионы функцией распределения  $F_{\text{trans}}$ , определяемой формулой (23).

Поскольку нас здесь интересует только роль квазиadiaбатической динамики частиц, мы учтём электроны лишь как холодный фон, поддерживающий зарядовую нейтральность системы. Решение двумерного уравнения для компонент магнитного поля  $B_x$ ,  $B_z$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi q}{c} \int v_y (F_{\text{trans}}(|\mathbf{v}|, I_z) + F_{\text{trans}}(|\mathbf{v}|, I_x)) d\mathbf{v}$$

с соответствующими граничными условиями позволяет исследовать двумерное распределение плотности тока в токовом слое. Сечения профилей плотности тока для разных  $x$  показаны на рис. 44. Как видно из рисунка, для больших значений  $x$  (в удалении от Земли) плотность тока имеет колоколообразный профиль (сплошная тонкая кривая), свидетельствующий о том, что ток пролётных ионов является доминирующим, а концентрация квазизахваченных ионов — малой по сравнению с концентрацией пролётных частиц. По мере приближения к Земле концентрация квазизахваченных ионов и их локальный ток становятся всё более значительными; происходит перераспределение плотности тока через слой, при котором её максимум в нейтральной плоскости сменяется минимумом. При малых  $x$  (жирная сплошная кривая) заметными становятся уширение и расщепление профиля плотности тока, которые достигают максимума на ближней к Земле кроме токового

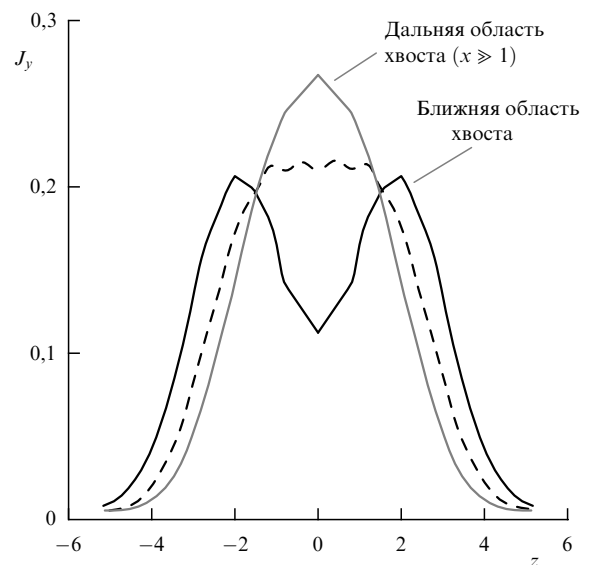


Рис. 44. Профили плотности тока для различных значений координаты  $x$ . Координата  $z$  нормирована на ларморовские радиусы ионов.

слоя (интересно сравнить рис. 44 с рис. 40: различие между ними состоит только в том, что на рис. 40 плотность квазизахваченных частиц возрастает во времени, а на рис. 44 — в пространстве).

Таким образом, влияние продольной неоднородности на структуру токового слоя обуславливает важное различие в динамике квазиadiaбатических пролётных и захваченных ионов. Пролётные ионы являются основными носителями тока, и они могут поддерживать практически одномерное распределение плотности тока в слое. Их функция распределения может зависеть только от квазиadiaбатического инварианта быстрого движения  $I_z$  и полной энергии. Напротив, благодаря сохранению инварианта  $I_x$  квазизахваченные ионы перераспределяются в токовом слое так, что их плотность увеличивается в направлении возрастания  $B_z$ -компоненты. Вследствие этого происходит перераспределение роли частиц, приносящих основной ток. Это выражается в расширении профиля плотности тока и его расщеплении при приближении наблюдателя к Земле.

## 7. Заключение

В настоящем обзоре мы провели подробный анализ квазиadiaбатической динамики заряженных частиц в системах со слабым магнитным полем, в которых пространственный масштаб неоднородности поля существенно меньше гирорадиуса частицы. Мы показали, что благодаря наличию малого параметра в таких системах можно ввести квазиadiaбатический инвариант, представляющий собой аналог магнитного момента. Более того, для двумерных систем можно ввести второй квазиadiaбатический инвариант, аналогичный продольному инварианту баунс-осцилляций замагниченных частиц. Сохранение квазиadiaбатических инвариантов на больших временах невозможно из-за наличия случайных скачков инварианта при переходе через сепаратрису на плоскости быстрого движения. Исключением являются популяция частиц, для которой скачки инвариантов при двух последовательных пересечениях сепаратрисы взаимно компенсируются за счёт резонансного эффекта, и популяция частиц на регулярных траекториях, но не пересекающих кривую неопределённости.

Наличие квазиadiaбатических инвариантов позволяет описать динамику заряженных частиц в одномерных и двумерных токовых слоях. В настоящем обзоре мы рассмотрели ряд важных приложений, соответствующих конфигурациям магнитного поля, наиболее часто встречающимся при описании магнитопазменных структур в космической среде. В частности, мы описали динамику заряженных частиц в токовых слоях с продольной неоднородностью магнитного поля  $B_z = B_z(x)$ , с широм поля  $B_y \neq 0$ , в бифурцированных слоях с двумя максимумами плотности тока, в слоях, содержащих X- и O-линии. На основе построенной картины динамики частиц были рассмотрены различные механизмы эффективного ускорения частиц в токовых слоях, которые можно аналитически описывать, используя предположение о сохранении квазиadiaбатических инвариантов.

Мы показали, как, используя квазиadiaбатический инвариант, можно проинтегрировать траектории ансамбля частиц в токовом слое и восстановить функцию распределения на границе и в центральной области. Полученные аналитические результаты находятся в хоро-

шем качественном и количественном согласии с данными прямых спутниковых измерений. Это делает квазиadiaбатическую теорию мощным и эффективным инструментом построения магнитопазменных равновесных состояний — токовых слоёв, исследования их эволюции и ускорения взаимодействующих с ними частиц.

Авторы признательны рецензенту за ценные замечания по тексту обзора. Работа поддержана грантами РФФИ (11-02-01166-а, 12-02-91158-ГФЕН-а, 13-01-00251), грантом Н.Ш. 623.2012.2. Работа А.И.Н. поддержана грантом НШ-2519.2012.1. Работа Д.Л.В. поддержана грантом NSF (CBET-0900177).

## 8. Приложения

### А. Переходы через сепаратрису и скачки квазиadiaбатического инварианта в гамильтоновых системах с быстрыми и медленными движениями

В этом приложении представлена общая теория скачков квазиadiaбатического инварианта при переходах через сепаратрису в гамильтоновых системах. Рассматриваются гамильтоновы системы с быстрыми и медленными движениями, имеющие две степени свободы. Одна степень свободы соответствует быстрому движению, другая — медленному. Предполагается, что фазовый портрет быстрого движения при фиксированных значениях медленных переменных разделён сепаратрисами на три области. При изменении медленных переменных фазовые точки пересекают сепаратрису.

Значение квазиadiaбатического инварианта "действие" в главном приближении постоянно вдоль траектории до тех пор, пока траектория не достигнет сепаратрисы. На сепаратрисе "действие" испытывает стандартный геометрический скачок, связанный с разницей площади под траекторией в одной из петель сепаратрисы и во внешней области. Это приближение называется квазиadiaбатическим. Ниже, следуя работе [185], получим формулу для следующего члена асимптотики изменения "действия" при переходе через сепаратрису. Вычисленная поправка к квазиadiaбатическому приближению оказывается в общем случае величиной порядка  $k \ln k$ , где  $k$  — малый параметр, характеризующий отношение скоростей медленных и быстрых переменных. Если выполнены некоторые условия симметрии, то эта поправка имеет порядок  $k$ . Указанные условия симметрии выполнены, в частности, в задаче о движении заряженной частицы (иона) в параболической модели хвоста магнитосферы Земли.

Рассматриваемая поправка к квазиadiaбатическому приближению связана с движением частицы в малой окрестности сепаратрисы. Поэтому её называют скачком квазиadiaбатического инварианта при переходе через сепаратрису (иногда — динамическим скачком, чтобы отличить от геометрического скачка). Хотя этот скачок квазиadiaбатического инварианта мал, он принципиально важен для динамики системы. Суммирование скачков при многократных переходах через сепаратрису приводит к диффузии квазиadiaбатического инварианта в соответствующем пространстве.

Частным случаем рассматриваемых здесь систем с быстрыми и медленными переменными являются гамильтоновы системы с одной степенью свободы, га-

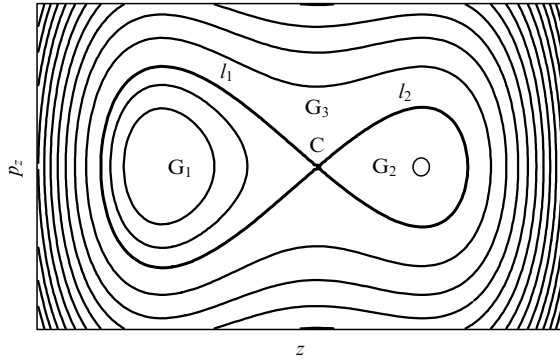


Рис. 45. Схематичный фазовый портрет быстрого движения.

мильтониан которых зависит от медленно изменяющихся параметров. Для этих систем формулы для изменения адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису получены независимо в [44] и в [186, 187], а для частного случая маятника в медленно изменяющемся поле тяжести (или заряженной частицы в электростатической волне медленно изменяющейся амплитуды) впервые получены в [188]. Постановка задачи о поведении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису восходит к работам, собранным в книгах [1, 2].

### А.1. Исходные уравнения

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом  $H = H(p_z, z, p_x, \kappa x)$ , где  $z, x$  — координаты,  $p_z, p_x$  — сопряжённые им импульсы. Уравнения движения имеют соответственно вид

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z}, \quad \dot{p}_x = -\kappa \frac{\partial H}{\partial \kappa x}, \quad \kappa \dot{x} = \kappa \frac{\partial H}{\partial p_x}.$$

Переменные  $p_z, z$  называются быстрыми, а переменные  $p_x, \kappa x$  — медленными. Гамильтонова система для  $p_z, z$  при  $p_x, \kappa x = \text{const}$  называется быстрой или невозмущённой. Будем предполагать, что фазовый портрет невозмущённой системы соответствует показанному на рис. 45.

Сепаратрисы  $l_1$  и  $l_2$ , проходящие через седловую точку  $C$ , делят портрет на области  $G_1, G_2$  и  $G_3$ . Площади областей  $G_1, G_2$  и  $G_1 \cup G_2$  обозначаются  $S_v = S_v(p_x, \kappa x)$ ,  $v = 1, 2, 3$ . Обозначим как  $h_c(p_x, \kappa x)$  значение гамильтониана  $H$  в седловой точке  $C$  и введём  $E = H - h_c$ . Тогда  $E = 0$  в точке  $C$  и на сепаратрисах,  $E > 0$  в  $G_3$  и  $E < 0$  в  $G_{1,2}$ . Будем считать отличными от нуля (для определённости — положительными) величины

$$\Theta_v = \{S_v, h_c\} \equiv - \oint_{l_v} \{E, h_c\} dt.$$

Здесь и ниже  $\{, \}$  — скобка Пуассона функций от  $\kappa x, p_x$ :

$$\{f, g\} = f'_{\kappa x} g'_{p_x} - f'_{p_x} g'_{\kappa x}.$$

### А.2. Квазиadiaбатическое приближение

Движение в каждой из областей  $G_i$  можно описать, используя квазиadiaбатическое приближение. Обозначим как  $I$  переменную "действие" быстрой системы. В квазиadiaбатическом приближении в каждой из областей  $G_i$  выполнено условие  $I = \text{const}$  вдоль траектории (это эквивалентно тому, что действие  $I$  является квази-

адиабатическим инвариантом), а изменение переменных  $p_x, \kappa x$  описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом  $\kappa \Phi(I, p_x, \kappa x)$ , где  $p_x, \kappa x$  — сопряжённые переменные,  $\Phi$  — функция  $H$ , выраженная через  $I, p_x, \kappa x$ :

$$\dot{p}_x = -\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa x}, \quad \kappa \dot{x} = \kappa \frac{\partial \Phi}{\partial p_x}.$$

Такая система называется медленной. Решения медленной системы могут выходить на кривую  $\Phi(I, p_x, \kappa x) = h_c(p_x, \kappa x)$ , соответствующую сепаратрисе быстрой системы. Эту кривую называют кривой неопределённости [189]. Переход через сепаратрису приводит к вероятностным явлениям [190, 191]. Эти явления в квазиadiaбатическом приближении можно описать следующим образом.

Пусть движение начинается при  $t = 0$  из точки  $M_0(p_{z0}, z_0, p_{x0}, \kappa x_0)$ , причём  $(p_{z0}, z_0) \in G_3(p_{x0}, \kappa x_0)$ . В области  $G_3$  "действие" считается постоянным вплоть до выхода на сепаратрису:  $I = I^- = \text{const}$ . Изменение  $p_x, \kappa x$  описывается решением  $Y_3(\tau), X_3(\tau)$ ,  $\tau = \kappa t$ , системы с гамильтонианом  $\kappa \Phi(I^-, p_x, \kappa x)$  при начальных условиях  $(p_{x0}, \kappa x_0)$ . Момент времени  $t_*$  выхода на сепаратрису определяется из соотношения  $S_3(Y_3(\tau_*), X_3(\tau_*)) = 2\pi I^-$ ,  $\tau_* = \kappa t_*$ . Величины  $p_{x*} = Y_3(\tau_*)$ ,  $\kappa x_* = X_3(\tau_*)$  можно определить, решая систему уравнений  $S_3(\kappa x_*, p_{x*}) = 2\pi I^-, h_c(p_{x*}, \kappa x_*) = H(p_{z0}, z_0, p_{x0}, \kappa x_0)$ .

После перехода через сепаратрису точка может продолжить движение либо в области  $G_1$ , либо в области  $G_2$ . При движении в области  $G_i, i = 1, 2$ , "действие" опять считается постоянным:  $I = S_i(p_{x*}, \kappa x_*)/(2\pi)$ . Таким образом, при переходе через сепаратрису "действие" в квазиadiaбатическом приближении испытывает скачок, связанный с разной геометрией фазовых траекторий в областях  $G_i$  (геометрический скачок).

Изменение медленных переменных описывается решением  $Y_i(\tau), X_i(\tau)$  построенной для области  $G_i$  медленной системы с начальным условием  $Y_i(\tau_*) = p_{x*}, X_i(\tau_*) = \kappa x_*$ .

Захват в ту или иную область считается случайным событием. Для точки  $M_0$  вероятность захвата в область  $G_i$  даётся формулой (см. [42, 44])

$$P_i = \frac{\Theta_i(p_{x*}, \kappa x_*)}{\Theta_3(p_{x*}, \kappa x_*)}, \quad i = 1, 2.$$

### А.3. Улучшенный квазиadiaбатический инвариант

Улучшенным квазиadiaбатическим инвариантом называется величина

$$J = J(p_z, z, p_x, \kappa x) = I + \kappa u(p_z, z, p_x, \kappa x),$$

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial p_x} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \kappa x} dt' \right) dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial \kappa x} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_x} dt' \right) dt. \quad (27)$$

Интегралы в (27) берутся по фазовой траектории быстрой системы, проходящей через точку  $(p_z, z)$ ,  $T$  — период движения по этой траектории,  $t$  — время движения, отсчитываемое от момента прохождения через точку  $(p_z, z)$ , величина  $J$  — улучшенное первое приближение в методе усреднения [9]. При движении вдали от сепаратрис на временах порядка  $1/\kappa$  величина  $I$  остаётся

постоянной с точностью  $\sim \kappa$ , а величина  $J$  — с точностью  $\sim \kappa^2$ . Вывод формулы (27) дан в [185].

Основная идея вычисления динамического скачка квазиadiaбатического инварианта состоит в следующем. Улучшенный квазиadiaбатический инвариант при движении вдали от сепаратрисы изменяется на величину  $\sim \kappa^2$ , а динамический скачок — величина  $\sim \kappa \ln \kappa$  или, в симметричном случае (при  $\Theta_1 = \Theta_2$  и  $S_1 = S_2$ ),  $\sim \kappa$ . Поэтому динамический скачок связан с движением в малой окрестности сепаратрис и для его вычисления можно использовать асимптотические разложения вблизи сепаратрис.

#### А.4. Асимптотические разложения

##### для невозмущённого движения вблизи сепаратрис

В следующих ниже асимптотических разложениях  $a, b_i, g_i$  — гладкие функции  $p_x, \kappa x$ .

Для периода  $T = T(h, p_x, \kappa x)$  движения по траектории  $E = h$ , лежащей в области  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , справедливо разложение

$$T = -a_i \ln |h| + b_i + O(h \ln |h|), \quad (28)$$

$$a_1 = a_2 = a, \quad a_3 = 2a, \quad b_3 = b_1 + b_2. \quad (29)$$

Для "действия"  $I$  на рассматриваемой траектории в соответствии с формулой  $T = 2\pi \partial I / \partial h$  справедливо разложение

$$2\pi I = S_i - a_i h \ln |h| + (b_i + a_i) h + O(h^2 \ln |h|). \quad (30)$$

Из тождества

$$\oint_{l_i} \frac{\partial E}{\partial \alpha} dt = -\frac{\partial S_i}{\partial \alpha}, \quad \alpha = p_x, \kappa x,$$

получаем в области  $G_i$ :

$$\oint_{E=h} \frac{\partial E}{\partial \alpha} dt = -\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + O(h \ln |h|), \quad \alpha = p_x, \kappa x, \quad (31)$$

$$\oint_{E=h} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{tot}} dt = -\kappa \Theta_i + \kappa O(h \ln |h|).$$

В последней формуле под знаком интеграла стоит полная производная функции  $E$ .

Пусть  $S\sigma\eta$  — система главных координат для седловой точки  $C$ . Оси этой системы являются биссектрисами углов между входящими в точку  $C$  и выходящими из неё участками сепаратрис. Ось  $S\sigma$  направлена внутрь области  $G_2$ . Ось  $S\eta$  направлена внутрь области  $G_3$  так, что система координат  $S\sigma\eta$  является правой.

Следующие формулы представляют собой асимптотические разложения для функции  $u$  (27):

а) если точка  $(p_z, z)$  лежит в области  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , вблизи  $C$  на оси  $S\sigma$ , то для функции  $u$  справедливо разложение

$$2\pi u = g_i + O(\sqrt{|h|} \ln |h|), \quad h = E(p_z, z, p_x, \kappa x); \quad (32)$$

б) если точка  $(p_z, z)$  лежит в области  $G_3$  вблизи  $C$  на положительной части оси  $S\eta$ , то

$$2\pi u = \frac{1}{2} a(\Theta_2 - \Theta_1) \ln h + \frac{1}{2} (\Theta_1 b_2 - \Theta_2 b_1) + \frac{1}{2} \{S_2, S_1\} + g_3 + O(\sqrt{h} \ln h), \quad (33)$$

где  $g_3 = g_1 + g_2$ .

#### А.5. Вычисление изменения

##### квазиadiaбатического инварианта

Вдали от сепаратрис улучшенный квазиadiaбатический инвариант изменяется лишь на величину  $O(\kappa^2)$ . Поэтому изменение порядка  $\kappa$  набирается в малой окрестности сепаратрис и для его вычисления можно использовать асимптотические разложения, приведённые в А.4. Этот метод, аналогичный методу стационарной фазы для вычисления интегралов, реализуется ниже.

Пусть фазовая точка начинает движение при  $t = 0$  в области  $G_3$ , имея  $I = I^-, J = J^-, u = u^-$ ; пусть при  $\tau = \tau^+ = K$  эта точка лежит в области  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , имея  $I = I^+, J = J^+$ . Введём обозначения:  $\tau_*$ ,  $p_{x*}$ ,  $\kappa x_*$  — рассчитанные в квазиadiaбатическом приближении значения медленного времени и медленных переменных при выходе на сепаратрису (предполагается, что  $\tau_* < \tau^+$ );  $t_*^-$  — момент времени, в который фазовая точка в последний раз попадает на положительный луч оси  $S\eta$  вблизи седла  $C$ ;  $t_*^+$  — момент времени, в который фазовая точка впервые попадает на ось  $S\sigma$  вблизи  $C$ ;  $h_*^\pm, J_*^\pm, p_{x*}^\pm, \kappa x_*^\pm$  — значения  $E, J, p_x, \kappa x$  на траектории при  $t = t_*^\pm$ ,  $\xi = h_*^+ / (\kappa \Theta_3)$ ,  $\xi_i = |h_*^+| / (\kappa \Theta_i)$ .

Здесь  $\Theta_j$  (и в дальнейшем  $a, b_j, g_j, \partial S_j / \partial \kappa x, \partial S_j / \partial p_x$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) вычисляются при  $\kappa x = \kappa x_*$ ,  $p_x = p_{x*}$ . Предполагается, что начальная точка не принадлежит исключительному множеству малой меры, для которого фазовая точка проходит на малом расстоянии ( $\ll \kappa$ ) от седла  $C$ , и поэтому она движется в его окрестности нетипично долго. Отсюда  $\kappa t_*^\pm = \tau_* + O(\kappa \ln \kappa)$ .

Цель дальнейших выкладок — выразить в главном приближении  $J^+$  через  $J^-, \xi_i$ .

**А.5.1. Приближение к сепаратрисе.** При  $0 \leq t \leq t_*^-$  проекция фазовой точки на плоскость  $p_z, z$  описывает витки, близкие к невозмущённым траекториям. Можно проверить, что при движении в области  $E > h > \kappa$  величина  $J$  изменяется на  $O(\kappa^2/h)$ . В частности, в области  $E > \sqrt{\kappa}/|\ln \kappa|$  величина  $J$  изменяется на  $O(\kappa^{3/2} \ln \kappa)$ . После попадания в область  $0 < E < \sqrt{\kappa}/|\ln \kappa|$  определены моменты последовательных пересечений движущейся точкой луча  $S\eta$  вблизи точки  $C$ . Эти моменты нумеруются начиная с последнего:  $t_*^- = t_0 > t_1 > \dots > t_N > 0$ . Значения  $E, \tau, I, J, p_x, \kappa x$  при  $t = t_n$  обозначим как  $h_n, \tau_n, I_n, J_n, p_{xn}, \kappa x_n$ . Введём произвольную положительную постоянную малую величину  $k < 1$ , не зависящую от  $\kappa$ . Если  $\xi > k\sqrt{\kappa}$ , то справедливы формулы

$$h_{n+1} = h_n + \kappa [\Theta_3 + O(\sqrt{h_{n+1}})], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} = \tau_n + \kappa \frac{1}{2} a \ln h_n + \kappa a \ln (h_n + \Theta_1 \kappa) + \\ + \kappa \frac{1}{2} a \ln h_{n+1} - \kappa b_3 + \kappa O(\sqrt{h_{n+1}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(p_{xn}, \kappa x_n) = S_3(p_{x0}, \kappa x_0) + \Theta_3(\tau_n - \tau_0) + \\ + O(h_{n+1}^2 \ln^2 h_{n+1}) + O(\kappa \sqrt{h_{n+1}}). \end{aligned} \quad (35)$$

В формуле для  $\tau_{n+1}$  учтено, что точка трижды проходит вблизи седла  $C$ , имея значения  $E$ , близкие соответственно к  $h_n, h_n + \Theta_1 \kappa, h_{n+1}$ .

При вычислении асимптотики изменения  $J$  будем использовать только главные (не содержащие символа  $O$ ) члены разложений (34), (35) и поэтому для простоты опустим вывод оценок остаточных членов.

Изменение улучшенного квазиadiaбатического инварианта представляется в виде

$$J_*^- - J^- = (J_*^- - J_N) + (J_N - J^-).$$

Второе слагаемое в правой части имеет порядок  $O(\kappa^{3/2} \ln \kappa)$ . При вычислении первого слагаемого для  $J_N$ ,  $J_*^-$  воспользуемся главными членами разложений (30), (32), (33). Входящие в разложение для  $J_N$  величины  $h_N$ ,  $S_3(p_{xN}, \kappa x_N)$  определим с помощью главных членов разложений (34), (35).

Можно показать, что использование главных членов разложений позволяет получить асимптотику  $J_* - J^-$  с погрешностью  $O(\kappa^{3/2} \ln \kappa)$ .

Проведём необходимые расчёты. Пусть  $h'_n$ ,  $\tau'_n$  — значения  $h_n$ ,  $\tau_n$ , вычисленные с использованием главных членов в (34). Обозначим  $\vartheta_{ij} = \Theta_i/\Theta_j$ . Получим

$$\begin{aligned} h'_n - h_*^- &= n\Theta_3\kappa, \\ \tau'_N - \tau_0 &= \sum_{n=0}^{N-1} (\tau'_{n+1} - \tau'_n) = \\ &= \kappa \left[ -Nb_3 + a \sum_{n=0}^{N-1} \ln(h_*^- + n\Theta_3\kappa) \right] = \\ &= -\kappa Nb_3 + a\kappa \sum_{n=0}^{N-1} \ln(h_*^- + n\Theta_3\kappa) + \\ &+ a\kappa \sum_{n=0}^{N-1} \ln(h_*^- + n\Theta_3\kappa + \Theta_1\kappa) + \\ &+ \frac{a}{2} \kappa \ln(h_*^- + N\Theta_3\kappa) - \kappa \frac{a}{2} \ln h_*^- = \\ &= -\kappa Nb_3 + \kappa a \left[ 2N \ln(\Theta_3\kappa) + \ln \frac{\Gamma(\xi + N)}{\Gamma(\xi)} + \right. \\ &+ \ln \frac{\Gamma(\xi + N + \vartheta_{13})}{\Gamma(\xi + \vartheta_{13})} + \frac{1}{2} \ln(\xi + N) - \frac{1}{2} \ln \xi \left. \right] = \\ &= N\kappa(-b_3 + 2a \ln(\Theta_3\kappa)) + \kappa a \left[ \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\xi)} + \right. \\ &+ \left( \xi + N - \frac{1}{2} \right) \ln(\xi + N) - (\xi + N) + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\xi + \vartheta_{13})} + \\ &+ \left( \xi + N + \vartheta_{13} - \frac{1}{2} \right) \ln(\xi + N + \vartheta_{13}) - (\xi + N + \vartheta_{13}) + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(\xi + N) - \frac{1}{2} \ln \xi \left. \right] + O\left(\frac{\kappa}{N}\right) = \\ &= N\kappa(-b_3 - 2a + 2a \ln(\Theta_3\kappa)) + \\ &+ \kappa a \left[ \ln \frac{2\pi}{\Gamma(\xi)\Gamma(\xi + \vartheta_{13})} + \right. \\ &+ 2\left( \xi + N + \vartheta_{13} - \frac{1}{4} \right) \ln(\xi + N) - 2\xi - \frac{1}{2} \ln \xi \left. \right] + \\ &+ O(\kappa^{3/2} \ln \kappa). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера и использована асимптотика Стирлинга для  $\Gamma$ .

Подставляя полученные выражения в разложения для  $I$ ,  $u$  (30), (33), окончательно получим

$$\begin{aligned} 2\pi(J_*^- - J^-) &= 2\kappa a \Theta_3 \left[ -\frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{\Gamma(\xi)\Gamma(\xi + \vartheta_{13})} + \xi + \right. \\ &+ \left. \left( -\xi + \frac{1}{2} \vartheta_{23} \right) \ln \xi \right] + O(\kappa^{3/2} \ln \kappa), \quad \vartheta_{ij} = \Theta_i/\Theta_j. \end{aligned} \quad (37)$$

*Замечание.* Оценка остаточного члена в (37) оказывается гораздо лучшей, чем в промежуточных формулах при  $E = h_N$ . Это обусловлено тем, что остаточные члены в асимптотических разложениях связаны соотношениями, обеспечивающими квазиadiaбатическую инвариантность при больших  $h$ .

Формула (37) позволяет получить в главном приближении необходимую для дальнейшего связь между  $S_i(p_{x*}^-, \kappa x_*^-)$ ,  $J^-$ ,  $\xi$  ( $i = 1, 2$ ). Действительно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} S_j(p_{x*}^-, \kappa x_*^-) - S_j(p_{x*}, \kappa x_*) &= \frac{\partial S_j}{\partial p_x} (p_{x*}^- - p_{x*}) + \\ &+ \frac{\partial S_j}{\partial \kappa x} (\kappa x_*^- - \kappa x_*) + O(\kappa^2 \ln^2 \kappa), \end{aligned} \quad (38)$$

$$h_*^- = -\frac{\partial h_c}{\partial p_x} (p_{x*}^- - p_{x*}) - \frac{\partial h_c}{\partial \kappa x} (\kappa x_*^- - \kappa x_*) + O(\kappa^2 \ln^2 \kappa).$$

Последнее соотношение вытекает из определения  $p_{x*}$ ,  $x_*$  и интеграла энергии:  $H = h_c(p_{x*}, \kappa x_*)$ . Рассматривая в (38) первое соотношение для  $j = 3$  и второе соотношение как линейную систему относительно  $p_{x*}^- - p_{x*}$ ,  $\kappa x_*^- - \kappa x_*$ , решая её и подставляя результат в первое соотношение для  $j = 1, 2$ , получим

$$\begin{aligned} S_i(p_{x*}^-, \kappa x_*^-) - S_i(p_{x*}, \kappa x_*) &= \{S_i, S_3\} \frac{h_*^-}{\Theta_3} + \\ &+ \vartheta_{13} (S_3(p_{x*}^-, \kappa x_*^-) - S_3(p_{x*}, \kappa x_*)) + \\ &+ O(\kappa^2 \ln^2 \kappa), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (39)$$

Разложения, приведённые в А.4, позволяют выразить  $S_3(p_{x*}^-, \kappa x_*^-)$  через  $J_*^-$ ,  $\xi$ ; формула (37) выражает  $J_*^-$  через  $J^-$ ,  $\xi$ . Поэтому (39) позволяет выразить  $S_i(p_{x*}^-, \kappa x_*^-)$  через  $J^-$ ,  $\xi$ .

**А.5.2. Переход через сепаратрису.** За один оборот вблизи сепаратрисы  $l_i$ , на расстоянии порядка  $\kappa$  от неё, значение функции  $E$  изменяется на величину  $-\kappa\Theta_i + O(\kappa^{3/2})$ . Поэтому  $\xi \in (0, 1 + k\sqrt{\kappa})$ ,  $k = \text{const} > 0$ . Если  $\xi \in (k\sqrt{\kappa}, \vartheta_{23} - k\sqrt{\kappa})$ , то после перехода через сепаратрису точка захватывается в  $G_2$ , а если  $\xi \in (\vartheta_{23} + k\sqrt{\kappa}, 1 - k\sqrt{\kappa})$  — то в  $G_1$ . Ниже для определённости рассматривается первый случай. При  $t_*^- \leq t \leq t_*^+$  проекция фазовой точки на плоскость  $p_z, z$  описывает кривую, близкую к сепаратрисе  $l_2$ . Выполнены соотношения

$$h_*^+ = h_*^- - \Theta_2\kappa + O(\kappa^{3/2}),$$

$$t_*^+ = t_*^- - \frac{1}{2} a \ln h_*^- - \frac{1}{2} a \ln |h_*^+| + b_2 + O(\kappa \ln^2 \kappa),$$

$$S_2(p_{x*}^+, \kappa x_*^+) = S_2(p_{x*}^-, \kappa x_*^-) + \Theta_2\kappa(t_*^+ - t_*^-) + O(\kappa^{3/2}).$$

Эти соотношения вместе с разложениями раздела А.5.1 позволяют выразить  $J_*^-, \xi$  через  $S_2(p_{x*}, \kappa x_*^-), \xi_2$ .

**А.5.3. Удаление от сепаратрисы.** Рассуждения, аналогичные проведённым в разделе А.5.2, применительно к движению в области  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , приводят к соотношению

$$2\pi(J^+ - J_*^+) = \kappa a \Theta_i \left[ -\ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\xi_i)} + \xi_i + \left( \frac{1}{2} - \xi_i \right) \ln \xi_i \right] + O(\kappa^{3/2} \ln \kappa). \quad (40)$$

Отметим, что формулы (37), (40) справедливы при любом числе степеней свободы медленного движения.

**А.5.4. Окончательная формула.** В разделе А.5.3 величина  $J^+$  выражена через  $J_*^+, \xi_i$ . Формулы раздела А.5.2 позволяют выразить  $J_*^+, \xi$  через  $S_i(p_{x*}, \kappa x_*^-), \xi_i$ . В свою очередь, формулы раздела А.5.1 дают возможность выразить  $S_i(p_{x*}, \kappa x_*^-)$  через  $J^-, \xi$ . В итоге можно выразить  $J^+$  через  $J^-, \xi_i$ : в случае попадания в область  $G_i$ , если  $k\sqrt{\kappa} < \xi_i < 1 - k\sqrt{\kappa}$ , то

$$\begin{aligned} 2\pi J^+ &= S_i(p_{x*}, \kappa x_*) + \vartheta_{i3}(2\pi J^- - S_3(p_{x*}, \kappa x_*)) + \\ &+ \kappa a \Theta_i \left( \xi_i - \frac{1}{2} \right) \left[ \ln(\kappa \Theta_i) - 2\vartheta_{i3} \ln(\kappa \Theta_3) \right] - \\ &- \kappa a \Theta_i \ln \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(\xi_i) \Gamma(\vartheta_{i3}(1 - \xi_i)) \Gamma(1 - \vartheta_{i3}\xi_i)} + \\ &+ \kappa \Theta_i \left( \frac{1}{2} - \xi_i \right) (b_i - \vartheta_{i3} b_3) + \kappa (g_i - \vartheta_{i3} g_3) + \\ &+ \kappa \vartheta_{i3} \left( \frac{1}{2} - \xi_i \right) \{S_i, S_3\} + \\ &+ O(\kappa^{3/2} (|\ln \kappa| + (1 - \xi_i)^{-1})). \end{aligned} \quad (41)$$

Величина  $\xi_i \in (0, 1)$  — функция начальных условий, значение которой можно изменить на величину порядка единицы малым, порядка  $\kappa$ , изменением аргументов. Поэтому при рассмотрении отдельного скачка целесообразно трактовать  $\xi_i$  как случайную величину. Для заданной начальной точки  $M_0(p_{z0}, z_0, p_{x0}, \kappa x_0)$  вероятность события  $\xi_i \in (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ , по определению, есть

$$Q_{i,(\alpha,\beta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\text{mes } U_{i,(\alpha,\beta)}^{(\delta)}}{\text{mes } U_i^{(\delta)}}.$$

где  $U_i^{(\delta)}$  — множество точек из  $\delta$ -окрестности  $M_0$ , захватывающих область  $G_i$ ,  $U_{i,(\alpha,\beta)}^{(\delta)}$  — множество точек из  $U_i^{(\delta)}$ , для которых  $\xi_i \in (\alpha, \beta)$ ,  $\text{mes}(\dots)$  — фазовый объём. Можно показать (см. вывод аналогичного соотношения в [192]), что  $Q_{i,(\alpha,\beta)} = \beta - \alpha$ .

Таким образом, распределение  $\xi_i$  является равномерным на  $(0, 1)$ . Величина  $J^+$  также трактуется как случайная, а формула (41) определяет её условное распределение при условии, что точки захватываются областью  $G_i$ .

Если начальную и конечную точки траектории выбрать так, что в них  $u = 0$ , то в (41) можно  $J^\pm$  заменить величиной  $I^\pm$ ; при этом второй член в правой части (41) обращается в нуль.

**А.5.5. Формулы для изменения квазиadiaбатического инварианта при других переходах.** Выше предполагалось, что  $\Theta_1 > 0$ ,  $\Theta_2 > 0$ . При других знаках  $\Theta_i$  происходят другие переходы между областями. В частности, пусть  $\Theta_1 > 0$ ,  $\Theta_2 < 0$ ,  $\Theta_3 > 0$ . Тогда точки из областей  $G_2$  и  $G_3$  с вероятностью единица попадают в область  $G_1$ . Изменение  $J$  при переходе из  $G_3$  в  $G_1$  даётся формулой (41), причём  $k\sqrt{\kappa} < \xi_i < 1 - \vartheta_{31} - k\sqrt{\kappa}$ . Изменение  $J$  при переходе из  $G_2$  в  $G_1$  для  $k\sqrt{\kappa} < \xi_2 < 1 - k\sqrt{\kappa}$ , описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} 2\pi J^+ &= S_1(p_{x*}, \kappa x_*) + \vartheta_{12}(2\pi J^- - S_2(p_{x*}, \kappa x_*)) + \\ &+ \kappa a(1 - \xi_2)(\Theta_2 \ln(\kappa \Theta_1) - \Theta_1 \ln|\kappa \Theta_2|) - \\ &- \kappa a \Theta_1 \ln \frac{2\pi(1 - \xi_2) \sqrt{-\vartheta_{21}}}{\Gamma(\xi_2) \Gamma(\vartheta_{31} - \vartheta_{21}\xi_2)} + \\ &+ \kappa(1 - \xi_2)(\Theta_1 b_2 - \Theta_2 b_1) + \kappa(g_1 - \vartheta_{12} g_2) - \\ &- \kappa(1 - \xi_2) \{S_1, S_2\} + O(\kappa^{3/2} (|\ln \kappa| + (1 - \xi_2)^{-1})), \\ \xi_2 &= \frac{h_*^-}{\kappa \Theta_2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь  $h_*^-$  — значение функции  $E$  при последнем попадании на ось  $S\sigma$  в области  $G_2$  вблизи седла  $C$ .

Формулы для остальных вариантов переходов получаются из (41), (42) переменными направления времени и номеров областей. Используемый метод получения формулы (41) является общим и позволяет вычислить изменение квазиadiaбатического инварианта для других типов фазового портрета, разделённого на области сепаратрисами. Существенные предположения, лежащие в основе этого общего вывода, — невырожденность седловых особых точек и ненулевые скорости изменения площадей областей в квазиadiaбатическом приближении. Далее мы всюду будем использовать обозначение  $\xi$  для величины  $1 - \xi_i$ .

#### А.6. Скачок квазиadiaбатического инварианта в задаче о движении заряженной частицы

##### в параболической модели хвоста магнитосферы Земли

Движение заряженной частицы в параболической модели хвоста магнитосферы Земли описывается гамильтонианом (4). Быстрыми переменными являются  $z, p_z$ , медленными —  $\kappa x, p_x$ . Фазовые портреты быстрого движения для  $\kappa x > 0$  и  $\kappa x < 0$  показаны на рис. 4а и б соответственно. При  $\kappa x > 0$  на фазовом портрете быстрого движения есть сепаратрисы. Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе через сепаратрису из области  $G_3$  в область  $G_1$  или  $G_2$  даётся формулой (41). Ввиду симметрии задачи относительно замены  $z \rightarrow -z$  в (41) можно положить  $S_1 = S_2 = S_3/2$ ,  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ ,  $b_1 = b_2$ ,  $g_1 = g_2$ ,  $\vartheta_{i3} = 1/2$ . Тогда (41) даёт

$$\begin{aligned} J^+ &= \frac{1}{2} J^- - \frac{\kappa a \Theta}{2\pi} \ln(2 \sin \pi \xi) + \\ &+ O(\kappa^{3/2} (|\ln \kappa| + (1 - \xi)^{-1})). \end{aligned} \quad (43)$$

При переходе от (41) к (43) использованы формулы дополнения и удвоения для гамма-функции. Коэффициент  $a$  в (43) равен  $1/\sqrt{\kappa x}$ . Для площадей областей  $G_i$  имеем

$$S_{1,2} = \frac{8}{3} (\kappa x)^{3/2}.$$

Следовательно,  $\Theta = (\partial S_{1,2}/\partial \kappa x) p_x = 4p_x \sqrt{\kappa x}$ . В результате в главном приближении получаем

$$J^+ = \frac{1}{2} J^- - \frac{2\kappa p_x}{\pi} \ln(2 \sin \pi \xi). \quad (44)$$

Для перехода из  $G_{1,2}$  в  $G_3$  аналогично находим

$$J^+ = 2J^- - \frac{4\kappa p_x}{\pi} \ln(2 \sin \pi \xi). \quad (45)$$

Используя формулу для улучшенного квазиadiaбатического инварианта (27), нетрудно проверить, что как при  $z = 0$ , так и при  $p_z = 0$  имеем  $u = 0$ , и, следовательно,  $J = I$ .

Поэтому если в момент времени  $t_{\pm}$  фазовая точка имеет  $z = 0$  или  $p_z = 0$ , то в формулах (44), (45) можно  $J^{\pm}$  заменить величиной  $I^{\pm}$ .

#### А.7. Скачок квазиadiaбатического инварианта как функция быстрой фазы

Скачок квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  в задаче о динамике заряженной частицы с гамильтонианом (4) описывается выражением, следующим из формул (44), (45):

$$\Delta I_z = -\frac{2}{\pi} \kappa p_x^* \ln(2 \sin \pi \xi).$$

Введём безразмерный квазиadiaбатический инвариант  $\tilde{I} = 3\pi I_z / 8(2H)^{3/4}$ , воспользуемся формулой, связывающей площадь под петлёй сепаратрисы и значение  $\kappa x^*$ , и учтём, что  $p_x^* = \pm[2H - (\kappa x^*)^2]^{1/2}$ . Тогда для  $\Delta \tilde{I}$  можно записать следующее выражение:

$$\Delta \tilde{I} = -\frac{3}{2} \frac{\kappa \operatorname{sign} p_x^*}{(2H)^{1/4}} \sqrt{1 - \tilde{I}^{4/3}} \ln(2 \sin \pi \xi). \quad (46)$$

Из формулы (46) видно, что скачок инварианта имеет логарифмическую расходимость в окрестности  $\xi = 0$  и  $\xi = 1,0$  (рис. 46).

Соотношение (46) для скачка квазиadiaбатического инварианта как функции  $\xi$  неоднократно проверялось прямым численным интегрированием исходной гамильтоновой системы для конкретных задач. Для задачи о динамике математического маятника с медленно меняю-

щимися параметрами (система с 1,5 степенями свободы) формула (46) проверена численным расчётом в [193], а для задачи о динамике заряженной частицы в магнитном поле токового слоя — в [194, 195].

#### Б. Скачки квазиadiaбатического инварианта при его малых начальных значениях

Следует отметить, что при выводе формул для скачка квазиadiaбатического инварианта (44), (45) предполагалось существование в системе только одного малого параметра  $\kappa$ . Таким образом, данные соотношения неприменимы для малых значений квазиadiaбатического инварианта (при  $\tilde{I} \leq \kappa$ ). В этом случае для получения формулы скачка квазиadiaбатического инварианта требуется отдельное рассмотрение.

Получим выражение для скачка квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  при малых (т.е. менее или порядка  $\kappa$ ) значениях самого инварианта  $I_z$  [196]. Запишем гамильтоновы уравнения для гамильтониана (4):

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= \ddot{z} = -z \left( \frac{1}{2} z^2 - \kappa x \right), \\ \dot{p}_x &= \ddot{x} = \kappa \left( \frac{1}{2} z^2 - \kappa x \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Частицы с малым значением  $I_z$  пересекают кривую неопределённости почти при  $\kappa x = 0$ . Вблизи пересечения кривой неопределённости (и, следовательно, сепаратрисы) для таких частиц можно записать  $\kappa x \approx \kappa \dot{x}^* t$ , где  $\dot{x}^* = p_x^*$  — значение импульса при пересечении сепаратрисы. Таким образом, первое уравнение системы (47) принимает вид  $\ddot{z} = -(1/2) z^3 + z \kappa \dot{x}^* t$ , где  $\kappa \dot{x}^* t$  — медленное время. Гамильтониан данной системы имеет вид  $H = (1/2)(\dot{z})^2 + (1/2)(z^4 - \kappa \dot{x}^* t z^2)$ . Фазовый портрет этого гамильтониана при замороженном  $\kappa \dot{x}^* t$  приведён на рис. 47 для  $\kappa \dot{x}^* t > 0$  и  $\kappa \dot{x}^* t < 0$ . При  $\kappa \dot{x}^* t > 0$  фазовый портрет содержит две петли сепаратрисы и внешнюю область, аналогично фазовому портрету на рис. 56.

Проведём замену переменных:  $w = z(1/2)(\kappa \dot{x}^*)^{-1/3}$ ,  $r = t(\kappa \dot{x}^*)^{1/2}$ . Тогда первое уравнение системы (47) примет вид

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = rw - 2w^3. \quad (48)$$

Уравнение (48) является вторым уравнением Пенлеве и уже не содержит малого параметра. Асимптотики реше-

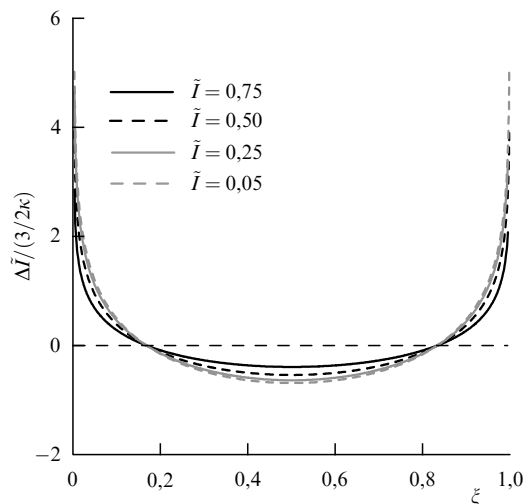


Рис. 46. Зависимость  $\Delta \tilde{I}$  от  $\xi$  для нескольких значений  $\tilde{I}$ .

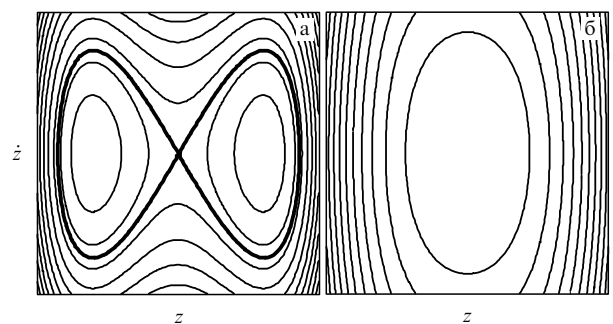


Рис. 47. Фазовый портрет системы с гамильтонианом  $H = (1/2)(\dot{z})^2 + (1/2)(z^4 - \kappa \dot{x}^* t z^2)$  для  $\kappa \dot{x}^* t > 0$  (а) и  $\kappa \dot{x}^* t < 0$  (б).

ния уравнений (48) найдены в [197]. При  $r \rightarrow -\infty$

$$w(r) = \alpha_- (-r)^{-1/4} \sin \left[ \frac{2}{3} (-r)^{3/4} + \frac{3}{4} \alpha_-^2 \ln(-r) + \varphi_- \right] \quad (49)$$

и при  $r \rightarrow +\infty$

$$w(r) = \pm \sqrt{\frac{r}{2}} \pm \alpha_+ (2r)^{-1/4} \times \cos \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} r^{3/4} - \frac{3}{2} \alpha_+^2 \ln r + \varphi_+ \right). \quad (50)$$

Здесь  $(\alpha_-, \varphi_-)$  и  $(\alpha_+, \varphi_+)$  связаны с переменными действие – угол для решений в пределе  $r \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{aligned} \alpha_+^2 &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + |p|^2}{2|\operatorname{Im}(p)|}, \\ \varphi_+ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{7}{2} \alpha_+^2 \ln 2 - \arg \Gamma(i\alpha_+^2) - \arg(1 + p^2), \\ p &= \sqrt{\exp(\pi\alpha_-^2) - 1} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \frac{3\alpha_-^2}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma\left(\frac{i\alpha_-^2}{2}\right) - \varphi_- \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция,  $\arg(\dots)$  — аргумент комплексного числа.

Так же как и в разделе 3.1, можно ввести квазиadiaбатический инвариант  $I_w$  как нормированную на  $2\pi$  площадь, ограниченную траекторией частицы. Тогда на асимптотиках  $r \rightarrow \pm\infty$  получим значения квазиadiaбатического инварианта

$$I_w^\pm = \frac{1}{2} \alpha_\pm^2.$$

Величины  $I_w^-$  и  $I_w^+$  совпадают в главном приближении со значением квазиadiaбатического инварианта  $I_w$  до и после пересечения сепаратрисы. Соответственно для инварианта  $I_z$  получаем

$$I_z = 4(\kappa\dot{x}^*) \frac{1}{2\pi} \oint \dot{w} dw = 4(\kappa\dot{x}^*) I_w.$$

### Б.1. Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе из внешней области в одну из петель сепаратрисы

Исходя из полученных выше соотношений, если значения  $I_w^-$  и  $\varphi_-$  известны, можно определить значение  $I_w^+$  как

$$\begin{aligned} I_w^+ &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + |p|^2}{2|\operatorname{Im}(p)|}, \\ p &= \sqrt{\exp(2\pi I_w^-) - 1} \times \\ &\times \exp \left( i 3 I_w^- \ln 2 - \frac{i\pi}{4} - i \arg \Gamma(i I_w^-) - i \varphi_- \right). \end{aligned}$$

Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе через сепаратрису определяется выражением  $\Delta I_w = 2I_w^+ - I_w^-$ .

Сопоставляя рис. 48, на котором приведена зависимость  $\Delta I_w(\varphi_-)$ , с рис. 46, можно отметить, что при малых начальных значениях инварианта  $I_w^-$  поведение скачков  $\Delta I_w(\varphi_-)$  на рис. 48 существенно отличается от поведения

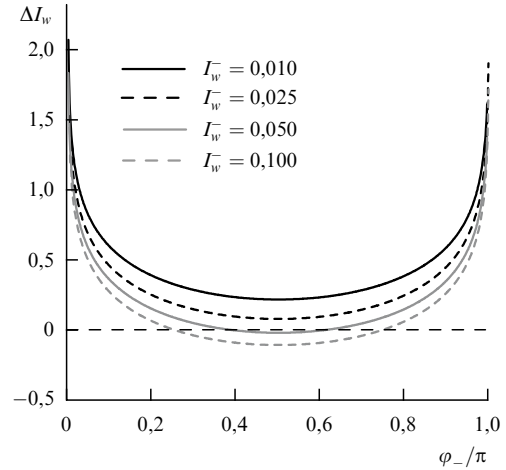


Рис. 48. Зависимость  $\Delta I_w(\varphi_-)$  для различных значений  $I_w^-$ .

скачков в случае умеренных начальных значений  $I_z$ , представленного на рис. 46. Основное отличие заключается в отсутствии области отрицательных значений скачка инварианта при малых  $I_w$ . Эта особенность обусловлена тем фактом, что квазиadiaбатический инвариант является положительной величиной. Как следствие, при малых начальных значениях инварианта скачок не может быть отрицательным (суммарное значение инварианта и скачка не может быть меньше нуля). По этой причине при малых начальных значениях  $I_w$  доминируют положительные скачки.

Прямая проверка формулы для  $\Delta I_w(\varphi_-)$  с помощью численного интегрирования исходной гамильтоновой системы уравнений (47) подтвердила верность полученных выражений [196].

Следует отметить, что полученное выражение для скачка квазиadiaбатического инварианта должно переходить в формулу (7) при умеренных начальных значениях инварианта  $I_w^-$  (т.е. когда  $I_w^- \sim 1$  или  $I_z \sim \kappa$ ). Для того чтобы убедиться в этом, подставим выражение для  $p$  в выражение для  $I_w^+$ :

$$\begin{aligned} I_w^+ &= I_w^- - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\exp(2\pi I_w^-) - 1} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln \left[ 2 \sin \left( 3 I_w^- \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma(i I_w^-) - \varphi_- \right) \right]. \end{aligned}$$

Введём новое обозначение:

$$\varphi' = 3 I_w^- \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma(i I_w^-) - \varphi_-.$$

Если  $I_w^- \sim 1$ , то можно воспользоваться асимптотикой

$$\ln [\exp(2\pi I_w^-) - 1] \approx 2\pi I_w^-.$$

Подставляя данную асимптотику и выражение для  $\varphi'$  в формулу для  $I_w^+$ , находим

$$\Delta I_w = -\frac{1}{\pi} \ln(2 \sin \varphi').$$

Воспользуемся соотношением  $I_z = 4\kappa p_x I_w$ . Получаем

$$\Delta I_z = -\frac{4}{\pi} \kappa p_x \ln(2 \sin \varphi').$$

Последнее выражение в точности совпадает с выражением  $\Delta J = 2J^+ - J^-$  (см. формулу (44)).

### Б.2. Скачок квазиadiaбатического инварианта при переходе из одной из петель сепаратрисы во внешнюю область

Рассмотрим скачок квазиadiaбатического инварианта при выходе из петли сепаратрисы во внешнюю область. Будем предполагать, что величины  $I_w^+$ ,  $\varphi_+$  известны. Тогда необходимо получить выражение для  $I_w^-$ . Запишем уравнение для  $p$ :

$$\frac{1 + |p|^2}{2|\operatorname{Im} p|} = g_1(I_w^+), \quad \arg(1 + p^2) = g_2(I_w^+, \varphi_+).$$

Здесь функции  $g_1$  и  $g_2$  определены следующим образом:

$$g_1 = \exp(2\pi I_w^+),$$

$$g_2 = -\varphi_+ - \frac{\pi}{4} + 7I_w^+ \ln 2 - \arg \Gamma(2iI_w^+).$$

Запишем  $|p|^2$  через  $g_1, g_2$ :

$$|p|^2 = \sin^2 g_2 (g_1^2 - 1) + \left( g_1 - \cos g_2 \sqrt{g_1^2 - 1} \right)^2.$$

Величина  $I_w^-$  выражается через  $|p|^2$ :

$$I_w^- = \frac{1}{2\pi} \ln(1 + |p|^2).$$

Таким образом, мы получили  $I_w^-$  как функцию  $I_w^+$  и  $\varphi_+$ . Соответствующее выражение для скачка квазиadiaбатического инварианта:  $\Delta I_w = I_w^+ - 2I_w^-$ .

Отметим, что при нулевом начальном значении квазиadiaбатического инварианта ( $I_w^+ = 0$ ) получим  $p = \pm i x_-^2 = \ln 2/\pi$ . Тогда после перехода через сепаратрису

$$I_z = \frac{2}{\pi} \kappa |p_x^*| \ln 2.$$

Таким образом, частицы с нулевым начальным значением квазиadiaбатического инварианта после перехода через сепаратрису будут иметь значение инварианта, не зависящее от  $\xi$ . Прямое численное интегрирование показало верность данного соотношения [196].

### В. Скачки квазиadiaбатического инварианта в системе с вырожденной седловой точкой

Покажем, что для системы с вырожденной особой точкой соответствующий скачок квазиadiaбатического инварианта  $\Delta I_z$  порядка  $\kappa_{\text{bif}}^{3/4}$  (динамика частиц в такой системе рассмотрена в разделе 4.3). Для того чтобы вывести формулу для скачка  $\Delta I_z$ , мы используем тот же подход, который изложен в приложении А для системы с невырожденной особой точкой. Поскольку величина скачка порядка  $\kappa_{\text{bif}}^{3/4}$  и изменение инварианта вдали от сепаратрисы  $\sim \kappa_{\text{bif}}$ , мы полагаем, что основная часть изменения квазиadiaбатического инварианта связана именно с движением вблизи от сепаратрисы. Мы рассматриваем движение частицы на плоскости быстрых переменных  $(z, p_z)$  для системы, описываемой гамильтонианом (15). Медленное изменение  $\kappa_{\text{bif}} x$  приводит к изменению энергии быстрого движения  $h_z$  и в результате к пересечению сепаратрисы.

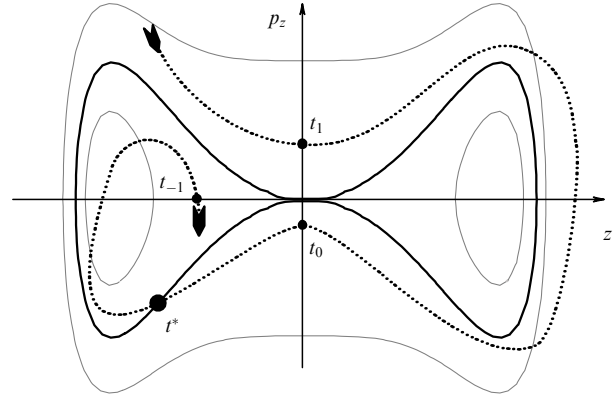


Рис. 49. Схематическое изображение траектории на плоскости  $(z, p_z)$ .

Пусть изначально частица находится вне области, ограниченной сепаратрисой (внешняя область) (рис. 49). Вследствие уменьшения энергии  $h_z$  частица приближается к сепаратрисе и в момент времени  $t^*$  пересекает её. Затем частица уходит от сепаратрисы в одну из двух петель (внутренняя область). Это движение может быть представлено как последовательность оборотов частицы на плоскости  $(z, p_z)$ . Во внешней области частица проходит расстояние между последовательными пересечениями оси  $z = 0$  за половину периода. В качестве начальной точки для отсчёта этих полуоборотов выберем точку на оси  $z = 0$ . Для частицы, движущейся во внутренней области, за точку начала отсчёта оборотов примем точку на оси  $p_z = 0$  вблизи седловой точки и будем считать номера полных периодов. Значения медленных переменных принимаются равными их значениям в начальных точках оборота (полуоборота) и отмечаются соответствующим номером периода (полупериода)  $n$ . Первый оборот во внутренней области соответствует номеру  $n = -1$ , и все обороты в этой области имеют отрицательные номера ( $n < 0$ ). Первый полуоборот во внешней области соответствует номеру  $n = N$ . Таким образом, во внешней области номера полуоборотов изменяются от  $n = N$  до  $n = 0$ , а во внутренней области — от  $n = -1$  до  $n = -N$ .

Введём переменную

$$h = h_z - \frac{(\kappa_{\text{bif}} x)^2}{2} = H - \frac{p_x^2 + (\kappa_{\text{bif}} x)^2}{2},$$

на сепаратрисе  $h = 0$ . Величина  $h^*$  соответствует значению  $h$  в начальной точке полупериода, на котором частица пересекает сепаратрису (номер этого полупериода  $n = 0$ ). Обозначим  $h_n = h^* + n\kappa_{\text{bif}} \Theta$ , где  $\Theta = \{S, h_c\}$  и  $h_c = p_x^2/2 + (\kappa_{\text{bif}} x)^2/2$  — значение  $H$  в седловой точке ( $\Theta = \{S, h_c\}$  — скорость изменения площади под сепаратрисой,  $\{\dots, \dots\}$  — скобки Пуассона,  $\kappa_{\text{bif}} \Theta$  — изменение  $h$  вдоль траектории на одном обороте (полуобороте) возле сепаратрисы). Мы вычисляем  $\Theta$  для значений переменных  $\kappa_{\text{bif}} x$  и  $p_x$ , соответствующих пересечению сепаратрисы. При движении частицы во внешней области  $h$  уменьшается и оборот с номером  $n + 1$  предшествует обороту с номером  $n$  (во внутренней области  $h < 0$  и  $|h|$  возрастает). Мы рассматриваем  $h^*/(\kappa_{\text{bif}} \Theta) \in [k, 1 - k]$ , где  $k > 0$  — малая произвольная положительная постоянная (т.е.  $k$  не зависит от  $\kappa_{\text{bif}}$ ).

Для того чтобы найти изменение квазиadiaбатического инварианта на одном полуобороте (обороте), используем соотношение  $2\pi\partial I_z/\partial h_z = T$ , где  $T$  — период невозмущённого движения на плоскости быстрых переменных (при котором  $\kappa_{\text{bif}} x = \text{const}$ ) во внутренней области (или половина периода при движении во внешней области). Здесь мы воспользуемся асимптотическим разложением  $T$  и  $I_z$ . Изменение инварианта  $I_z$  на одном полуобороте (обороте) с номером  $n$  связано с изменением периода  $T$  и площади  $S$ , ограниченной сепаратрисой:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &\approx \Theta(\tau_{n+1} - \tau_n), \\ \tau_{n+1} &\approx \tau_n - \frac{1}{2} \kappa_{\text{bif}} (T_{n+1} + T_n). \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь  $T_n = T_n(h_n, \kappa_{\text{bif}} x)$ , значение  $\kappa_{\text{bif}} x$  взято в момент пересечения сепаратрисы. Далее в выражениях для периода мы будем опускать второй аргумент  $\kappa_{\text{bif}} x$  ради упрощения записи формул. Для медленного времени используем обозначение  $\tau = \kappa_{\text{bif}} t$ . Уравнение  $2\pi\partial I_z/\partial h_z = T$  приводит к соотношению  $2\pi I_z = S + \int_0^h T(h') dh'$ . Отсюда

$$2\pi(I_{z,n+1} - I_{z,n}) = (S_{n+1} - S_n) + \int_{h_n}^{h_{n+1}} T(h') dh'. \quad (52)$$

Подставляя (51) в уравнение (52), получаем

$$2\pi(I_{z,n+1} - I_{z,n}) \approx \int_{h_n}^{h_{n+1}} T(h') dh' - \Theta \kappa_{\text{bif}} \frac{1}{2} (T_{n+1} + T_n). \quad (53)$$

Изменение  $I_z$  на одном полуобороте (обороте) определяется разностью интеграла  $\int_{h_n}^{h_{n+1}} T(h') dh'$  и его аппроксимации  $(1/2) \Theta \kappa_{\text{bif}} (T_{n+1} + T_n)$ . Таким образом, вычисление скачка  $\Delta I_z$  свелось к проблеме асимптотического вычисления разницы между площадью под кривой  $T$  и аппроксимацией этой площади трапецией с шагом  $\Theta \kappa_{\text{bif}}$ .

Для того чтобы вычислить  $\Delta I_z$ , необходимо просуммировать изменения  $I_z$  за все полуобороты во внешней области и все обороты во внутренней области. Мы используем разложение гамильтониана вблизи седловой точки, чтобы получить приближённое выражение для периода  $T$ .

В окрестности седловой точки движение частицы замедляется и период осцилляций частицы на плоскости быстрых переменных приблизительно соответствует времени, необходимому для преодоления небольшого расстояния непосредственно возле седловой точки. Чтобы вычислить это время, рассматриваем движение вблизи  $z = 0$  и пренебрегаем слагаемым  $\sim z^8$  в разложении  $h$ :  $4h \approx 2p_z^2 - \kappa_{\text{bif}} x z^4$ . Половина периода вращения во внешней области  $T_{\text{out}} = \int dz/p_z$  может быть вычислена как

$$\begin{aligned} T_{\text{out}}(h, \kappa_{\text{bif}} x) &\approx \sqrt{2} \int_{-d_z}^{d_z} \frac{dz}{\sqrt{4h + \kappa_{\text{bif}} x z^4}} \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4h(\kappa_{\text{bif}} x/4h)^{1/4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^4}} = \\ &= (2h\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} 2^{-3/4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь  $d_z$  — некоторое положительное число,  $d_z/h^{1/4} \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ . Введём обозначение  $c_{\text{out}} = 2^{-3/4} B(1/4, 1/4)$ .

Период вращения во внутренней области  $T_{\text{in}} = \int dp_z/\dot{p}_z$  можно найти по формуле

$$\begin{aligned} T_{\text{in}}(h, \kappa x) &\approx \frac{1}{(\kappa_{\text{bif}} x)^{1/4}} \int_{-d_p}^{+d_p} \frac{dp_z}{(2p_z^2 + 4|h|)^{3/4}} \approx \\ &\approx \frac{1}{2(|h|\kappa_{\text{bif}} x)^{1/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha^2 + 1)^{3/4}} = \\ &= (2|h|\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} 2^{-5/4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь  $d_p$  — некоторое положительное число;  $d_p/h^{1/2} \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом,  $T_{\text{in}} = c_{\text{in}} (2|h|\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4}$ , где  $c_{\text{in}} = c_{\text{out}}/\sqrt{2}$ .

Теперь рассмотрим три последовательные стадии движения частицы: приближение к сепаратрисе, пересечение сепаратрисы и удаление от неё. Обозначим как  $I_*$  и  $I_{*-1}$  значения инварианта  $I_z$  на оси  $z = 0$  на последнем полуобороте перед пересечением сепаратрисы и на оси  $p_z = 0$  на первом обороте после пересечения сепаратрисы соответственно,  $I_* = I_{z,0}$ ,  $I_{*-1} = I_{z,-1}$ .

Сначала рассмотрим приближение частицы к сепаратрисе (энергия  $h$  уменьшается). Подставив (54) в уравнение (53), получим

$$\begin{aligned} 2\pi(I_{z,n+1} - I_{z,n}) &\approx \frac{c_{\text{out}}}{(2\kappa_{\text{bif}} x)^{1/4}} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{dh}{h^{1/4}} - \\ &- \Theta \kappa_{\text{bif}} \frac{1}{2} (T_{n+1} + T_n). \end{aligned} \quad (56)$$

Учтём, что  $2\pi(I_{z,N} - I_*) = \sum_{n=0}^{N-1} 2\pi(I_{z,n+1} - I_{z,n})$ , и используем (51):

$$\begin{aligned} 2\pi(I_{z,N} - I_{*,*}) &\approx -\frac{1}{2} \kappa_{\text{bif}} \Theta \sum_{n=0}^{N-1} (T_{n+1} + T_n) + \\ &+ (2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} c_{\text{out}} \frac{4}{3} (h_N^{3/4} - h_*^{3/4}). \end{aligned} \quad (57)$$

Для того чтобы найти суммарное изменение  $I_z$  перед пересечением сепаратрисы, введём переменную  $\xi = h^*/(\kappa_{\text{bif}} \Theta)$ . В соответствии с определением  $\xi \in [k, 1 - k]$ . Учитывая (51), перепишем уравнение (57):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(I_{z,N} - I_*)}{(2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} c_{\text{out}} (\kappa_{\text{bif}} \Theta)^{3/4}} &\approx -\sum_{n=0}^N (\xi + n)^{-1/4} + \\ &+ \frac{4}{3} [(\xi + N)^{3/4} - \xi^{3/4}] + \frac{1}{2} [(\xi + N)^{-1/4} + \xi^{-1/4}]. \end{aligned} \quad (58)$$

Теперь рассмотрим полуоборот с пересечением сепаратрисы. В начале этого полуоборота энергия частицы  $h^* = \xi \kappa_{\text{bif}} \Theta$  и в конце его  $h_{-1} = h^* - \kappa_{\text{bif}} \Theta = (\xi - 1) \kappa_{\text{bif}} \Theta$ . Изменение инварианта  $I_z$  на этом полуобороте может быть найдено как

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(I_* - I_{*-1})}{(2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} (\kappa_{\text{bif}} \Theta)^{3/4}} &\approx -\frac{1}{2} (c_{\text{out}} |\xi|^{-1/4} + c_{\text{in}} |\xi - 1|^{-1/4}) + \\ &+ \frac{4}{3} (c_{\text{in}} |\xi - 1|^{3/4} + c_{\text{out}} |\xi|^{3/4}). \end{aligned} \quad (59)$$

Изменение адиабатического инварианта на третьей стадии можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(I_{*-1} - I_{z,-N})}{(2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} c_{\text{in}}(\kappa_{\text{bif}} \Theta)^{3/4}} &\approx - \sum_{n=-1}^{-N} |\xi + n|^{-1/4} + \\ &+ \frac{4}{3} (|\xi - N|^{3/4} - |\xi - 1|^{3/4}) + \\ &+ \frac{1}{2} (|\xi - N|^{-1/4} + |\xi - 1|^{-1/4}). \end{aligned} \quad (60)$$

В уравнении (60) мы использовали тот факт, что частица начинает движение во внутренней области, имея энергию  $h_{-1} = (\xi - 1) \kappa_{\text{bif}} \Theta$ .

Скачок  $\Delta I_z = I_{z,-N} - I_{z,N}$  может быть представлен как сумма выражений (58)–(60):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\Delta I_z}{(2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} (\kappa_{\text{bif}} \Theta)^{3/4}} &\approx c_{\text{out}} \sum_{n=0}^N |\xi + n|^{-1/4} + \\ &+ c_{\text{in}} \sum_{n=-1}^{-N} |\xi + n|^{-1/4} - \\ &- \frac{4}{3} (c_{\text{out}} |\xi + N|^{3/4} + c_{\text{in}} |\xi - N|^{3/4}) - \\ &- \frac{1}{2} (c_{\text{out}} |\xi + N|^{-1/4} + c_{\text{in}} |\xi - N|^{-1/4}). \end{aligned} \quad (61)$$

Таким образом, скачок квазиадиабатического инварианта принимает вид

$$2\pi\Delta I_z \approx -(2\kappa_{\text{bif}} x)^{-1/4} c_{\text{out}} (\kappa_{\text{bif}} \Theta)^{3/4} g(\xi), \quad (62)$$

где функция  $g(\xi)$  определяется как

$$\begin{aligned} g(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} &\left[ - \sum_{n=0}^N |\xi + n|^{-1/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-1}^{-N} |\xi + n|^{-1/4} + \right. \\ &+ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\xi - N|^{3/4} + |\xi + N|^{3/4} \right) + \\ &\left. + \frac{1}{2} \left( |\xi + N|^{-1/4} + \frac{1}{\sqrt{2}} |\xi - N|^{-1/4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Выражение (63) может быть представлено в интегральном виде (см. [84]):

$$\begin{aligned} g(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} \int_0^\infty &\left\{ \frac{1 + 1/\sqrt{2}}{t} - \right. \\ &\left. - \frac{\exp(-\xi t) + (1/\sqrt{2}) \exp[-(1-\xi)t]}{1 - \exp(-t)} \right\} \frac{dt}{t^{3/4}}. \end{aligned} \quad (64)$$

Чтобы вычислить  $\Theta = \{S, h_c\} = (\partial S / \partial \kappa_{\text{bif}} x) (\partial h_c / \partial p_x)$ , используем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \kappa_{\text{bif}} x} &= - \oint \frac{\partial(H - h_c)}{\partial \kappa x} dt = \\ &= - \frac{1}{2} \oint \frac{\partial}{\partial \kappa_{\text{bif}} x} \left[ p_z^2 + \left( \kappa_{\text{bif}} x - \frac{1}{4} z^4 \right)^2 - (\kappa_{\text{bif}} x)^2 \right] dt = \\ &= \frac{1}{4} \oint z^4 dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Заменяя интегрирование по времени интегрированием по координате, получаем  $\partial S / \partial \kappa_{\text{bif}} x = (\kappa_{\text{bif}} x)^{1/4} c_2$ , где

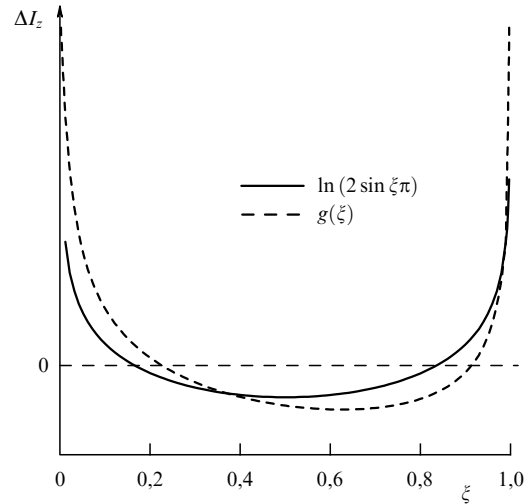


Рис. 50. Зависимость скачка квазиадиабатического инварианта от  $\xi$  для системы с невырожденной особой точкой (сплошная кривая) и системы с вырожденной особой точкой (штриховая кривая).

$c_2 = 2^{-1/4} B(1/2, 3/4)$ . Окончательное выражение  $\Theta = (\kappa_{\text{bif}} x)^{1/4} p_x c_2$ , и из уравнения (62) находим

$$2\pi\Delta I_z \approx -\kappa_{\text{bif}}^{3/4} \frac{p_x^{3/4}}{(\kappa_{\text{bif}} x)^{1/16}} \tilde{c} g(\xi), \quad (66)$$

где  $\tilde{c} = c_{\text{out}} c_2^{3/4} / 2^{1/4} = \pi^{5/8} 2^{11/16} \sqrt{\Gamma(1/4)} \approx 6,27144 \approx 1,996\pi$ , значения  $\kappa_{\text{bif}} x$  и  $p_x$  определены в момент пересечения сепаратрисы.

Сопоставление функции  $g(\xi)$  и функции  $\ln(2 \sin \pi \xi)$ , соответствующей зависимости скачка квазиадиабатического инварианта от  $\xi$  в системе с невырожденной особой точкой, представлено на рис. 50. Как видно из рисунка, функция  $g(\xi)$  несимметрична относительно  $\xi = 1/2$ . Однако можно отметить, что, как и для случая с невырожденной особой точкой, среднее значение скачка квазиадиабатического инварианта (66) в точности равно нулю,  $\langle \Delta I_z \rangle_\xi = 0$  (см. [84]).

## Список литературы

1. Ehrenfest P *Collected Scientific Papers* (Amsterdam: Interscience Publ., 1959)
2. Эренфест П *Относительность. Кванты. Статистика* (М.: Наука, 1972)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
4. Størmer C *The Polar Aurora* (Oxford: Clarendon Press, 1955)
5. Alfvén H *Kungl. Svenska Vetenskapskad. Handlingar Ser. 3* **18** (3) (1939)
6. Alfvén H, Fälthammar C-G *Cosmical Electrodynamics. Fundamental Principles* (Oxford: Clarendon Press, 1963)
7. Fälthammar C-G *Phys. Chem. Earth* **22** 599 (1997)
8. Боголюбов Н Н, Зубарев Д Н *Укр. мат. журн.* **7** 5 (1955)
9. Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: Гостехиздат, 1955) [Bogoliubov N N, Mitropolsky Y A *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1961)]
10. Van Allen J A, Frank L A *Nature* **183** 430 (1959)
11. Вернов С Н и др. *ДАН СССР* **124** 1022 (1959) [Vernov S N et al. *Sov. Phys. Dokl.* **4** 154 (1959)]

12. Сивухин Д В, в сб. *Вопросы теории плазмы* Т. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 7 [Sivukhin D V, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 1 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1965) p. 1]
13. Northrop T G *The Adiabatic Motion of Charged Particles* (New York: Interscience Publ., 1963)
14. Чириков Б В *Физика плазмы* **4** 521 (1978) [Chirikov B V *Sov. J. Plasma Phys.* **4** 289 (1978)]
15. Заславский Г М, Чириков Б В *УФН* **105** 3 (1971) [Zaslavskii G M, Chirikov B V *Sov. Phys. Usp.* **14** 549 (1972)]
16. Cary J R, Brizard A J *Rev. Mod. Phys.* **81** 693 (2009)
17. Ness N F *J. Geophys. Res.* **70** 2989 (1965)
18. Франк А Г *Труды ФИАН* **74** 108 (1974) [Frank A G *Proc. (Trudy) Lebedev Phys. Inst.* **74** 107 (1976)]
19. Франк А Г *УФН* **180** 982 (2010) [Frank A G *Phys. Usp.* **53** 941 (2010)]
20. Frank A G, Bugrov S G, Markov V S *Phys. Plasmas* **15** 092102 (2008)
21. Yamada M, Kulsrud R, Ji H *Rev. Mod. Phys.* **82** 603 (2010)
22. Зелёный Л М и др. *Физика плазмы* **37** 137 (2011) [Zelenyi L M et al. *Plasma Phys. Rep.* **37** 118 (2011)]
23. Зелёный Л М, Веселовский И С (Ред.) *Плазменная гелиогеофизика* (М.: Физматлит, 2008)
24. Кирий Н П и др. *Труды ФИАН* **110** 121 (1979)
25. Зелёный Л М, в сб. *Динамика плазмы и магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли* (Итоги науки и техники, Сер. Исследования космического пространства, Т. 24) (М.: ВИНТИ, 1986)
26. Artemyev A V et al. *Ann. Geophys.* **26** 2749 (2008)
27. Artemyev A V et al. *J. Geophys. Res.* **116** A09233 (2011)
28. Petrukovich A A et al. *J. Geophys. Res.* **112** A10213 (2007)
29. Petrukovich A A *J. Geophys. Res.* **116** A07217 (2011)
30. Artemyev A V et al. *J. Geophys. Res.* **115** A12255 (2010)
31. Petrukovich A A et al. *J. Geophys. Res.* **116** A00125 (2011)
32. Büchner J *Geophys. Res. Lett.* **18** 1595 (1991)
33. Speiser T W *J. Geophys. Res.* **70** 4219 (1965)
34. Speiser T W *J. Geophys. Res.* **72** 3919 (1967)
35. Оразбердыев Х, Трахтенгерц В Ю *Изв. вузов Радиофизика* **16** 30 (1973) [Orazberdiyev Kh, Trakhtengerts V Yu *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 21 (1973)]
36. Gray P C, Lee L C *J. Geophys. Res.* **87** 7445 (1982)
37. Алексеев И И, Кропоткин А П *Геомагнетизм и аэрономия* **10** 777 (1970) [Alekseyev I I, Kropotkin A P *Geomagn. Aeronom.* **10** 615 (1971)]
38. Harris E G *Nuovo Cimento* **23** 115 (1962)
39. Chen J, Palmadesso P J *J. Geophys. Res.* **91** 1499 (1986)
40. Sonnerup B U Ö *J. Geophys. Res.* **76** 8211 (1971)
41. Schindler K J. *Math. Phys.* **6** 313 (1965)
42. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И *Математические аспекты классической и небесной механики* (М.: УРСС, 2002) [Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* (Berlin: Springer, 2006)]
43. Büchner J, Zelenyi L M *Phys. Lett. A* **118** 395 (1986)
44. Нейштадт А И *Физика плазмы* **12** 992 (1986) [Neishtadt A I *Sov. J. Plasma Phys.* **12** 568 (1986)]
45. Büchner J, Zelenyi L M *J. Geophys. Res.* **94** 11821 (1989)
46. Зелёный Л М, Малова Х В, Попов В Ю *Письма в ЖЭТФ* **78** 742 (2003) [Zelenyi L M, Malova H V, Popov V Yu *JETP Lett.* **78** 296 (2003)]
47. Zelenyi L M et al. *Adv. Space Res.* **30** 1629 (2002)
48. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды* Т. 1 *Элементарные функции* (М.: Наука, 1981) [Prudnikov A P, Brychkov Yu A, Marichev O I *Integrals and Series* Vol. 1 *Elementary Functions* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1986)]
49. Быков А А, Зелёный Л М, Малова Х В *Физика плазмы* **34** 148 (2008) [Bykov A A, Zelenyi L M, Malova H V *Plasma Phys. Rep.* **34** 128 (2008)]
50. Zelenyi L M et al. *Geophys. Res. Lett.* **29** 1608 (2002)
51. Chen J, Burkhardt G R, Huang C Y *Geophys. Res. Lett.* **17** 2237 (1990)
52. Зелёный Л М и др. *Письма в ЖЭТФ* **85** 187 (2007) [Zelenyi L M et al. *JETP Lett.* **85** 225 (2007)]
53. Birn J *J. Geophys. Res.* **84** 5143 (1979)
54. Burkhardt G R, Chen J *J. Geophys. Res.* **96** 14033 (1991)
55. Neishtadt A, Vasiliev A *Nonlinearity* **18** 1393 (2005)
56. Neishtadt A et al. *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **10** 621 (2008)
57. Mihalov J D, Sonett C P *J. Geophys. Res.* **73** 6837 (1968)
58. Зелёный Л М и др. *УФН* **180** 973 (2010) [Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **53** 933 (2010)]
59. Галеев А А, Зелёный Л М *Письма в ЖЭТФ* **22** 360 (1975) [Galeev A A, Zelenyi L M *JETP Lett.* **22** 170 (1975)]
60. Coppi B, Laval G, Pellat R *Phys. Rev. Lett.* **16** 1207 (1966)
61. Schindler K J. *Geophys. Res.* **79** 2803 (1974)
62. Zelenyi L M et al. *J. Atm. Solar-Terr. Phys.* **70** 325 (2008)
63. Hoshino M et al. *J. Geophys. Res.* **101** (A11) 24775 (1996)
64. Runov A et al. *Geophys. Res. Lett.* **30** 1036 (2003)
65. Israelevich P L, Ershkovich A I, Oran R *Planet. Space Sci.* **55** 2261 (2007)
66. Gosling J T, Szabo A J. *Geophys. Res.* **113** A10103 (2008)
67. Мингалева О В и др. *Физика плазмы* **38** 329 (2012) [Mingaleva O V et al. *Plasma Phys. Res.* **38** 300 (2012)]
68. Artemyev A V *Phys. Plasmas* **18** 022104 (2011)
69. Berchem J, Russell C T *J. Geophys. Res.* **87** 8139 (1982)
70. Panov E V et al. *J. Geophys. Res.* **113** A01220 (2008)
71. Panov E V et al. *J. Geophys. Res.* **116** A12204 (2011)
72. Artemyev A V, Neishtadt A I, Zelenyi L M *Nonlin. Process. Geophys.* **20** 163 (2013)
73. Zwingmann W J. *Geophys. Res.* **88** 9101 (1983)
74. Lembege B, Pellat R *Phys. Fluids* **25** 1995 (1982)
75. Burkhardt G R, Chen J *J. Geophys. Res.* **98** (A1) 89 (1993)
76. Karimabadi H, Pritchett P L, Coroniti F V *J. Geophys. Res.* **95** 17153 (1990)
77. Вайнштейн Д Л, Зелёный Л М, Нейштадт А И *Физика плазмы* **21** 484 (1995) [Vainshtein D L, Zelenyi L M, Neishtadt A I *Plasma Phys. Rep.* **21** 457 (1995)]
78. Vainchtein D L et al. *Nonlin. Process. Geophys.* **12** 101 (2005)
79. Birn J, Sommer R R, Schindler K J. *Geophys. Res.* **82** 147 (1977)
80. Cowley S W H *Planet. Space Sci.* **26** 1037 (1978)
81. Lemaire J, Burlaga L F *Astrophys. Space Sci.* **45** 303 (1976)
82. Вайнштейн Д Л, Зелёный Л М, Нейштадт А И *Физика плазмы* **22** 1039 (1996) [Vainshtein D L, Zelenyi L M, Neishtadt A I *Plasma Phys. Rep.* **22** 943 (1996)]
83. Burkhardt G R et al. *Geophys. Res. Lett.* **18** 1591 (1991)
84. Artemyev A V, Neishtadt A I, Zelenyi L M *Chaos* **21** 043120 (2011)
85. Vasiliev A et al. *Physica D* **241** 566 (2012)
86. Delcourt D C, Malova H V, Zelenyi L M *J. Geophys. Res.* **109** A01222 (2004)
87. Delcourt D C, Malova H V, Zelenyi L M *Geophys. Res. Lett.* **33** L06106 (2006)
88. Neishtadt A, Treschev D *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **31** 259 (2011)
89. Kaufmann R L, Lu C, Larson D J *J. Geophys. Res.* **99** 11277 (1994)
90. Neishtadt A, Vasiliev A *Chaos* **17** 043104 (2007)
91. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
92. Зелёный Л М, Зогин Д В, Бюхнер Й *Космич. исслед.* **28** 430 (1990)
93. Зелёный Л М, Зогин Д В, в сб. *Физика космической плазмы. Международ. семинар, Киев, 6–10 июня 1993* (Киев, 1993) с. 1
94. Angelopoulos V et al. *Geophys. Res. Lett.* **20** 1711 (1993)
95. Tverskoy B A *Rev. Geophys. Space Phys.* **7** 219 (1969)
96. Cowley S W H, Shull P (Jr.) *Planet. Space Sci.* **31** 235 (1983)
97. Lyons L R, Speiser T W *J. Geophys. Res.* **87** 2276 (1982)
98. Шабанский В П *Явления в околоземном пространстве* (М.: Наука, 1972)
99. Ashour-Abdalla M et al. *J. Geophys. Res.* **98** (A4) 5651 (1993)
100. Ashour-Abdalla M et al. *J. Geophys. Res.* **100** (A10) 19191 (1995)

101. Долгонос М С и др. *Космич. исслед.* **45** 564 (2007) [Dolgonosov M S et al. *Cosmic Res.* **45** 535 (2007)]
102. Eastman T E et al. *J. Geophys. Res.* **89** 1553 (1984)
103. Grigorenko E E, Sauvaud J-A, Zelenyi L M *J. Geophys. Res.* **112** A05218 (2007)
104. Grigorenko E E et al. *Space Sci. Rev.* **164** 133 (2011)
105. Keiling A et al. *Geophys. Res. Lett.* **31** L12804 (2004)
106. Ashour-Abdalla M et al. *J. Geophys. Res.* **110** A12221 (2005)
107. Ashour-Abdalla M et al. *Geophys. Res. Lett.* **19** 617 (1992)
108. Zelenyi L M et al. *Geophys. Res. Lett.* **33** L18103 (2006)
109. Dolgonosov M S, Zimbardo G, Greco A *J. Geophys. Res.* **115** A02209 (2010)
110. Буланов С В, Сасоров П В *Астрономический журн.* **52** 763 (1975) [Bulanov S V, Sasorov P V *Sov. Astron.* **19** 464 (1976)]
111. Birn J et al. *Space Sci. Rev.* **173** 49 (2012)
112. Galeev A A *Space Sci. Rev.* **23** 411 (1979)
113. Litvinenko Y E *Astron. Astrophys.* **452** 1069 (2006)
114. Vekstein G E, Priest E R *Phys. Plasmas* **2** 3169 (1995)
115. Буланов С В *Письма в Астрон. журн.* **6** 372 (1980) [Bulanov S V *Sov. Astron. Lett.* **6** 206 (1980)]
116. Browning P K, Vekstein G E *J. Geophys. Res.* **106** (A9) 18677 (2001)
117. Browning P K et al. *Astron. Astrophys.* **520** A105 (2010)
118. Burkhart G R, Drake J F, Chen J J *Geophys. Res.* **95** 18833 (1990)
119. Divin A et al. *Phys. Plasmas* **17** 122102 (2010)
120. Zelenyi L M et al. *Planet. Space Sci.* **32** 313 (1984)
121. Zelenyi L M, Lominadze J G, Taktakishvili A L *J. Geophys. Res.* **95** 3883 (1990)
122. Ashour-Abdalla M, Büchner J, Zelenyi L M *J. Geophys. Res.* **96** 1601 (1991)
123. Burkhart G R et al. *J. Geophys. Res.* **97** (A9) 13799 (1992)
124. Hamilton J E M, Eastwood J W *Planet. Space Sci.* **30** 293 (1982)
125. Sitnov M I et al. *J. Geophys. Res.* **105** (A6) 13029 (2000)
126. Zelenyi L M et al. *Nonlin. Process. Geophys.* **7** 127 (2000)
127. Kropotkin A P, Malova H V, Sitnov M I *J. Geophys. Res.* **102** (A10) 22099 (1997)
128. Ball B M et al. *J. Geophys. Res.* **110** A04208 (2005)
129. Zhou X-Z et al. *J. Geophys. Res.* **114** A03223 (2009)
130. Ashour-Abdalla M et al. *J. Geophys. Res.* **101** (A2) 2587 (1996)
131. Dubinin E et al., in *Proc. of the 3rd Intern. Conf. on Substorms, ICS-3, Versailles, France, 12–17 May 1996* (ESA Special Publ., Vol. 389, Eds E J Rolfe, B Kaldeich) (Paris: European Space Agency Publ. Division, 1996) p. 533
132. Grigorenko E E et al. *Planet. Space Sci.* **53** 245 (2005)
133. Zelenyi L M et al., in *Magnetospheric Research with Advanced Techniques. Proc. of the 9th COSPAR Colloquium, Beijing, China, 15–19 April, 1996* (COSPAR Colloquia Ser., Vol. 9, Eds R L Xu, A T Y Lui) (Amsterdam: Elsevier, 1998) p. 125
134. Lyons L R *J. Geophys. Res.* **89** 5479 (1984)
135. Ashour-Abdalla M et al. *J. Geophys. Res.* **99** (A8) 14891 (1994)
136. Fadeev V M, Kvabtskhava I F, Komarov N N *Nucl. Fusion* **5** 202 (1965)
137. Морозов А И, Соловьев Л С *ЖЭТФ* **40** 1316 (1961) [Morozov A I, Solov'ev L S *Sov. Phys. JETP* **13** 927 (1961)]
138. Kan J R *J. Geophys. Res.* **78** 3773 (1973)
139. Schindler K, Birn J *J. Geophys. Res.* **107** (A8) 1193 (2002)
140. Yeh T J *Plasma Phys.* **10** 237 (1973)
141. Balikhin M, Gedalin M *J. Plasma Phys.* **74** 749 (2008)
142. Montagna C, Pegoraro F *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simulat.* **13** 147 (2008)
143. Roth M, de Keyser J, Kuznetsova M M *Space Sci. Rev.* **76** 251 (1996)
144. Schindler K *Physics of Space Plasma Activity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007)
145. Yoon P H, Lui A T Y *J. Geophys. Res.* **110** A01202 (2005)
146. Kropotkin A P, Domrin V I *J. Geophys. Res.* **101** (A9) 19893 (1996)
147. Sitnov M I et al. *J. Geophys. Res.* **111** A08204 (2006)
148. Zelenyi L M et al. *Nonlin. Process. Geophys.* **11** 579 (2004)
149. Galeev A A, Coroniti F V, Ashour-Abdalla M *Geophys. Res. Lett.* **5** 707 (1978)
150. Angelopoulos V et al. *Science* **321** 931 (2008)
151. Baker D N et al. *J. Geophys. Res.* **101** (A6) 12975 (1996)
152. Artemyev A V et al. *Ann. Geophys.* **27** 4075 (2009)
153. Runov A et al. *Ann. Geophys.* **24** 247 (2006)
154. De Hoffmann F, Teller E *Phys. Rev.* **80** 692 (1950)
155. Зеленый Л М и др. *Космич. исслед.* **40** 385 (2002) [Zelenyi L M et al. *Cosmic Res.* **40** 357 (2002)]
156. Франк-Каменецкий Д А *Лекции по физике плазмы* (М.: Атомиздат, 1968)
157. Zelenyi L et al. *Space Sci. Rev.* **132** 593 (2007)
158. Мингалев О В и др. *Физика плазмы* **35** 85 (2009) [Mingalev O V et al. *Plasma Phys. Rep.* **35** 76 (2009)]
159. Malova H V et al. *Geophys. Res. Lett.* **34** L16108 (2007)
160. Malova H et al., in *8th Intern. Conf. Problems of Geocosmos, St. Petersburg, September 20–24, 2010* (Ed. V Semenov) (St. Petersburg, 2010) p. 151
161. Mingalev I et al., in *7th Intern. Conf. Problems of Geocosmos, St. Petersburg, May 26–30, 2008* (Eds V N Troyan, M Hayakawa, V S Semenov) (St. Petersburg, 2008) p. 172
162. Chen J J *Geophys. Res.* **97** (A10) 15011 (1992)
163. Zelenyi L M et al. *Geophys. Res. Lett.* **33** L05105 (2006)
164. Nakamura R et al. *Space Sci. Rev.* **122** 29 (2006)
165. Asano Y et al. *Geophys. Res. Lett.* **32** L03108 (2005)
166. Малова Х В и др. *Физика плазмы* **36** 897 (2010) [Malova H V et al. *Plasma Phys. Rep.* **36** 841 (2010)]
167. Sitnov M I, Guzdar P N, Swisdak M *Geophys. Res. Lett.* **30** 1712 (2003)
168. Sergeev V et al. *Geophys. Res. Lett.* **31** L05807 (2004)
169. Petrukovich A A et al. *Ann. Geophys.* **26** 3669 (2008)
170. Rong Z J et al. *Planet. Space Sci.* **58** 1215 (2010)
171. Артемьев А В и др. *Физика плазмы* **34** 834 (2008) [Artemyev A V et al. *Plasma Phys. Rep.* **34** 771 (2008)]
172. Erkaev N V et al. *J. Geophys. Res.* **114** A03206 (2009)
173. Golovchanskaya I V, Maltsev Y P *Geophys. Res. Lett.* **32** L02102 (2005)
174. Zelenyi L M et al. *Ann. Geophys.* **27** 861 (2009)
175. Artemyev A V et al. *Geophys. Res. Lett.* **38** L14102 (2011)
176. Artemyev A V et al. *J. Geophys. Res.* **117** A06219 (2012)
177. Birn J, Sommer R, Schindler K *Astrophys. Space Sci.* **35** 389 (1975)
178. Nakamura R et al. *Ann. Geophys.* **27** 1743 (2009)
179. Saito M H et al. *Geophys. Res. Lett.* **37** L08106 (2010)
180. Panov E V et al. *J. Geophys. Res.* **117** A06228 (2012)
181. Panov E V et al. *Geophys. Res. Lett.* **39** L08110 (2012)
182. Peromian V, Zelenyi L M *Space Sci. Rev.* **95** 257 (2001)
183. Peromian V, Ashour-Abdalla M, Zelenyi L M *J. Geophys. Res.* **105** (A8) 18807 (2000)
184. Peromian V, Zelenyi L V, Schriver D *Adv. Space Res.* **30** 2657 (2002)
185. Нейштадт А И *Приклад. матем. мех.* **51** 750 (1987) [Neishtadt A I *J. Appl. Math. Mech.* **51** 586 (1987)]
186. Cary J R, Escande D F, Tennyson J L *Phys. Rev. A* **34** 4256 (1986)
187. Tennyson J L, Cary J R, Escande D F *Phys. Rev. Lett.* **56** 2117 (1986)
188. Тимофеев А В *ЖЭТФ* **75** 1303 (1978) [Timofeev A V *Sov. Phys. JETP* **48** 656 (1978)]
189. Wisdom J *Icarus* **63** 272 (1985)
190. Арнольд В И *Усп. матем. наук* **18** (6) 91 (1963) [Arnol'd V I *Russ. Math. Surv.* **18** (6) 85 (1963)]
191. Лифшиц И М, Слупкин А А, Набутовский В М *ЖЭТФ* **41** 939 (1961) [Lifshits I M, Slutskin A A, Nabutovskii V M *Sov. Phys. JETP* **14** 669 (1962)]
192. Нейштадт А И *Приклад. матем. мех.* **39** 621 (1975) [Neishtadt A I *J. Appl. Math. Mech.* **39** 594 (1975)]
193. Нейштадт А И, Пивоваров М Л, Препринт Пр-1128 (М.: ИКИ, 1986)
194. Савенков Б В, Зеленый Л М, Зогин Д В *Физика плазмы* **23** 436 (1997) [Savenkov B V, Zelenyi L M, Zogin D V *Plasma Phys. Rep.* **23** 404 (1997)]

195. Зеленый Л М, Савенков Б В *Физика плазмы* **19** 1355 (1993) [Zelenyi L M, Savenkov B V *Plasma Phys. Rep.* **19** 712 (1993)]  
 196. Вайнштейн Д Л и др. *Физика плазмы* **25** 333 (1999) [Vainshtein D L et al. *Plasma Phys. Res.* **25** 299 (1999)]  
 197. Итс А Р, Капаев А А *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **51** 878 (1987) [Its A R, Kapaev A A *Math. USSR Izv.* **31** 193 (1988)]

### Quasiadiabatic dynamics of charged particles in a space plasma

**L.M. Zelenyi**

*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 83/32, 117997 Moscow, Russian Federation  
E-mail: lzelenyi@iki.rssi.ru  
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)  
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

**A.I. Neishtadt**

*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 83/32, 117997 Moscow, Russian Federation  
E-mail: aneishita@iki.rssi.ru  
Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, Leicestershire, LE11 3TU, UK*

**A.V. Artemyev**

*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 83/32, 117997 Moscow, Russian Federation  
E-mail: ante0226@gmail.com*

**D.L. Vainchtein**

*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 83/32, 117997 Moscow, Russian Federation;  
Department of Mechanical Engineering, Temple University,  
1947 N. 12th St, Philadelphia, PA 19122, USA  
E-mail: dmitri@temple.edu*

**H.V. Malova**

*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Profsoyuznaya 83/32, 117997 Moscow, Russian Federation;  
D.V. Skobel'tsyn Institute of Nuclear Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation*

In many space plasma systems, especially when the magnetic field is weak, characteristic scales of the inhomogeneities of the magnetic field are much smaller than the Larmor radius of the ions. Over the last two decades there has been active development of quasiadiabatic models of the dynamics of charged particle in such systems. In this paper, we systematically review the quasiadiabatic approximation and illustrate how it can be used to describe various phenomena in the Earth magnetosphere and to explain many effects observed by satellites.

PACS numbers: 52.20.Dq, 52.40.Kh, **94.05. – a**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201304b.0365

Bibliography — 197 references

*Received 5 May 2012*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (4) 365–415 (2013)

*Physics – Uspekhi* **56** (4) (2013)