

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Перестройка топологии линий тока и перколяционные модели турбулентного переноса

О.Г. Бакунин

Детально рассмотрены перколяционные модели турбулентной диффузии, которые позволяют установить нетривиальные связи между различными теоретическими концепциями, использующимися в теории турбулентности, теории динамических систем, теории переноса и др. Особую важность этот подход приобретает в связи с необходимостью описания турбулентного переноса при наличии когерентных структур, эффектов пересоединения линий тока, дрейфовых и диссипативных эффектов. В таких режимах классическое квазилинейное описание противоречит экспериментальным результатам, поэтому требуется поиск принципиально новых моделей и подходов. Основное внимание сосредоточено на идеях скейлинга, которые являются важным инструментом, используемым как теоретиками, так и экспериментаторами.

PACS numbers: 05.40. - a, 47.27.T - , 47.53. + n

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201303b.0257

Содержание

1. Введение (257).
 2. Турбулентная диффузия и скейлинг (258).
 3. Диссипация и адвекция (259).
 4. Фрактальность и перколяционные линии тока (261).
 5. Перколяционная иерархия пространственных масштабов (262).
 6. Ренормализация и перколяция (263).
 7. Перколяционный перенос в стационарном течении (264).
 8. Турбулентная диффузия и перестройка топологии течения (265).
 9. Эффекты влияния малой дрейфовой скорости (267).
 10. Квазилинейное приближение и эффекты нестационарности (268).
 11. Низкочастотный предел и дрейф (269).
 12. Эволюция корреляционных масштабов и перколяционный перенос (270).
 13. Турбулентная диффузия в течениях с обратным каскадом энергии (270).
 14. Инкремент стохастической неустойчивости в перколяционном пределе (272).
 15. Стохастическая неустойчивость и обратный каскад (273).
 16. Заключение (274).
- Список литературы (275).

1. Введение

Турбулентный перенос — фундаментальное физическое явление, имеющее колоссальное практическое значение.

О.Г. Бакунин. Институт физики токамаков, Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", пл. Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 492-42-65
E-mail: oleg_bakunin@yahoo.com

Статья поступила 2 февраля 2012 г.,
после доработки 27 мая 2012 г.

Тем не менее многолетние интенсивные исследования в этой области пока не привели к созданию строгой физико-математической картины турбулентного переноса. С одной стороны, это открывает широкий простор для исследователей, а с другой — создаёт серьёзные трудности при решении конкретных задач. Действительно, явления переноса в турбулентных течениях крайне редко удаётся описать классическими диффузионными моделями. Главной причиной этого является чрезвычайная сложность неупорядоченных движений, возникающих в турбулентных потоках. Неупорядоченность поля течения, при которой скорости жидких частиц являются случайными (т.е. не определяются макроскопическими свойствами потока), приводит к необходимости широкого использования корреляционных моделей и концепции скейлинга [1–3]. Развитое турбулентное течение порождается иерархической совокупностью вихрей, в которой самые крупные из вихревых образований обладают размерами, сравнимыми с размером рассматриваемой области, а мелкие вихри имеют "вязкостные" масштабы. В таких условиях выбор характерной корреляционной длины и времени корреляции, определяющих перенос частиц турбулентным потоком, не является тривиальным. Здесь необходимо принять во внимание как корреляционные характеристики поля скорости течения, так и его "топологические" особенности, которые не всегда непосредственно связаны с мелкомасштабными движениями [3–5]. Кроме того, при описании процессов турбулентного переноса требуется учесть такие "конкурирующие" факторы, как затравочная (молекулярная) диффузия, пересоединение линий тока, стохастическая неустойчивость и др. [6–9].

Аналогичные проблемы возникают в физике плазмы при рассмотрении движения заряженных частиц в стохастическом магнитном поле, в физике твёрдого тела при описании переноса в аморфных полупроводниках и во

многих системах, где закон, описывающий диффузию, существенно отличается от классического [10–12]. Несмотря на значительный прогресс в объяснении аномального переноса, многие аспекты работ, ставших уже классическими в этой области, остаются актуальными. Так, уже на первой стадии исследования процессов турбулентной диффузии предлагалось использовать корреляционные функции, модификацию классического диффузионного уравнения, методы перенормировки и др. [13–15]. Представить развитие всех этих научных концепций в данном обзоре не представляется возможным. Автор сосредоточил внимание на идеях скейлинга, которые являются важным и достаточно универсальным инструментом, используемым как теоретиками, так и экспериментаторами [2–4]. Именно подход, в основе которого лежат скейлинговые представления, позволяет достаточно быстро разобраться в постановках задач и проблемах в различных современных областях физики, связанных с исследованием турбулентности. Прошло более 70 лет со времени опубликования основополагающих работ Колмогорова и Обухова, посвящённых скейлинговому описанию развитой турбулентности [16, 17]. Тем не менее фундаментальный вопрос о характере взаимодействия вихрей в турбулентном потоке остаётся открытым [3, 18]. Фактически скейлинг по-прежнему остаётся главным инструментом анализа. Естественно, при описании турбулентного переноса в условиях сильной турбулентности мы сталкиваемся с теми же проблемами. Возникающие при больших числах Рейнольдса когерентные структуры значительно осложняют описание эффективного переноса. Методы, развитые для слабой турбулентности, приводят к результатам, противоречащим данным как эксперимента, так и численного моделирования [19–21].

В отсутствие универсального метода анализа эффектов переноса в структурной турбулентности естественно сосредоточить внимание на отдельных, но в то же время достаточно общих подходах, выбирая в качестве основы конкретный вид вихревых структур, формирующих рассматриваемый класс турбулентных течений. В данном обзоре мы сосредоточили внимание на перколяционных моделях случайных двумерных течений. Идею применения теории перколяции для описания аномального переноса в двумерных турбулентных течениях предложили Кадомцев и Погуце [22] в 1978 г. Такой подход, с одной стороны, позволял применить теорию фазовых переходов для описания явлений самоорганизации в турбулентных средах. С другой стороны, это позволило использовать фрактальные представления (скейлинг) для описания геометрических особенностей изучаемых объектов. Необычная идея, предложенная Кадомцевым и Погуце, привлекла внимание Зельдовича, который отметил, что "перколяционная постановка вопроса дополняет развитую Моффатом и другими постановку вопроса о зацеплении силовых линий" [23]. Позднее перколяционный метод неоднократно использовался для анализа явлений переноса как в гидродинамической, так и в плазменной турбулентности [24–27].

2. Турбулентная диффузия и скейлинг

В этом разделе мы кратко приведём ставшие классическими результаты, связанные с турбулентным переносом, история исследования которого насчитывает уже

более 100 лет. Подробное рассмотрение читатель может найти в многочисленной монографической и обзорной литературе [1, 3, 4, 8, 9, 12]. Первым осознал необходимость применения статистического подхода для анализа переноса частиц турбулентным течением Тейлор [28]. Предложенная им формула для коэффициента турбулентной диффузии

$$D_T = \int_0^t C(t) dt \quad (1)$$

(где $C(t) = \langle V(0) V(t) \rangle$ — автокорреляционная функция скорости) основывалась на лагранжевом представлении уравнения движения частицы в поле стационарной однородной и изотропной турбулентности

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{V}(t) dt. \quad (2)$$

Используя экспоненциальное представление для автокорреляционной функции, Тейлор описал среднеквадратичное смещение частицы скаляра на больших временах традиционным диффузионным скейлингом $R^2(t) \propto D_T t$. Позднее подход к описанию процессов переноса в терминах корреляционных функций получил развитие как в рамках квазилинейной теории слабой турбулентности [29], так и при рассмотрении общих принципов статистической физики в работах Кубо и Грина [1, 13, 21]. Уже в такой упрощённой модели турбулентного переноса содержалась не только важная информация о зависимости коэффициента турбулентной диффузии от амплитуды турбулентных пульсаций V_0 , $D_T \propto V_0^2 \tau_L$, где τ_L — лагранжево корреляционное время, но и возможность исследования недиффузионных режимов (аномальная диффузия) благодаря использованию модельных степенных корреляционных функций.

Другим важным результатом стало открытие Ричардсоном в 1926 г. аномального характера разбегания двух частиц в турбулентном потоке (относительная диффузия) [30]. Предложенный Ричардсоном скейлинг, описывающий аномально быстрое возрастание среднего расстояния между двумя частицами со временем,

$$l_R^2(t) \propto t^3, \quad (3)$$

до сих пор является объектом научных дискуссий [1, 3]. Несложно заметить, что при рассмотрении диффузии от неподвижного источника дисперсия не может возрастать быстрее, чем при баллистическом движении, $R^2(t) \propto t^2$. Первое теоретическое объяснение этого аномального режима удалось дать Обухову на основе развитого им и Колмогоровым представления о сохранении потока энергии ε_K по спектру в развитом изотропном турбулентном течении [16, 17]. В рамках феноменологического однопараметрического подхода ε_K [м² с⁻³] является коэффициентом пропорциональности, связывающим относительное расстояние и время,

$$l_R^2(t) \propto C_R \varepsilon_K t^3. \quad (4)$$

Здесь $C_R \approx 0,2$ — эмпирическая константа Ричардсона. Дальнейшие исследования Бэтчелора показали, что существуют четыре различных временных стадии относительной диффузии [1, 31]. На первом этапе главную роль играет стохастическая неустойчивость, приводящая к экспоненциальной зависимости $l_R^2(t) \propto \exp t$. Затем

наступает очередь переходного баллистического режима, $I_R^2(t) \propto \varepsilon_K^{2/3} t^2$. Следующий этап эволюции, который связан с каскадными процессами внутри инерционного интервала масштабов, описывается скейлингом Ричардсона. При достижении расстояния между частицами, сравнимого по порядку величины с характерным пространственным масштабом энергонесущих вихрей, возникает квазидиффузионный режим, $I_R^2(t) \propto 2D_T t$. Подробное рассмотрение вопросов относительной диффузии читатель может найти в обширной литературе [1, 3, 9, 13].

Подчеркнём, что важно чётко различать диффузию частиц от неподвижного источника (например, модель Тэйлора) и относительную диффузию двух помеченных частиц в движущемся в пространстве облаке (скейлинг Ричардсона). В настоящем обзоре рассматривается только квазиклассическая диффузия частиц от неподвижного источника. Однако для целей обзора важно подчеркнуть, что концепция скейлинга широко использовалась начиная с первых работ по турбулентной диффузии, в которых многообразие режимов переноса является неизбежным следствием иерархической структуры развитой (сильной) турбулентности. Кроме того, уже Ричардсон чётко осознавал нетривиальное влияние турбулентного перемешивания на интенсификацию процессов переноса.

3. Диссипация и адвекция

Характер зависимости коэффициента турбулентной диффузии от амплитуды турбулентных пульсаций является важным инструментом исследования, поскольку в режимах с сильной структурной турбулентностью эта зависимость оказывается гораздо более плавной, чем тэйлоровская, $D_T \propto V_0^2$. Здесь мы рассмотрим предложенный Зельдовичем [32] метод анализа уравнения переноса пассивного скаляра, пригодный для описания как неподвижной, так и движущейся сред. Под пассивным скаляром могут пониматься помещённые в поток частицы примеси, не оказывающие влияния на течение. Например, в условиях, когда температура каждой частицы жидкости сохраняется (температура "вморожена" в среду), в качестве скаляра может выступать и температура. Похожая ситуация возникает и в моделях переноса магнитного поля [8, 11], когда вследствие "вмороженности" магнитное поле переносится плазмой, образуя замысловатые конфигурации. В простейшем случае, когда течение жидкости является несжимаемым, $\text{div } \mathbf{V} = 0$, мы можем переписать классическое уравнение диффузии, заменив частную производную $\partial n / \partial t$ от плотности скаляра n лагранжевой производной. Тогда уравнение переноса скаляра примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla n = D_0 \nabla^2 n. \quad (5)$$

Заметим, что в отсутствие диффузии (коэффициент диффузии $D_0 = 0$) мы получаем условие "вмороженности" $n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}_0, t)$, где $\mathbf{r}_0$ — координата частицы в начальный момент, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t = 0)$. С формальной точки зрения, лагранжево поведение скаляра может привести к сколь угодно большим градиентам плотности, однако при наличии диффузии (или теплопроводности, если рассматривать задачу переноса в терминах температуры) неоднородности плотности должны сглаживаться. Для количественной оценки конкуренции этих

двух факторов рассмотрим ограниченную среду с изолированными стенками, в которой среднее значение плотности частиц сохраняется,

$$\langle n \rangle = \frac{1}{W} \int n(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}, \quad (6)$$

где W — объём исследуемой области. Кроме того, выполняются условия для возмущения плотности $n_1 = n - \langle n \rangle$, $\langle n \rangle = 0$ и

$$\int n_1 d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (7)$$

Сглаживание неоднородностей скаляра (плотность, температура и др.) во времени является фундаментальным эффектом, который может быть исследован на основе вариационных представлений в достаточно общей форме, безотносительно к конкретному профилю поля скорости. В качестве варьируемой величины удобно выбрать интеграл

$$I_Z(t) = \int n^2(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}. \quad (8)$$

Действительно, рассмотрим тождество

$$I_Z = \int n^2 d^3 \mathbf{r} = \int (n - \langle n \rangle)^2 d^3 \mathbf{r} + \langle n \rangle^2 W. \quad (9)$$

Значение I_Z будет минимальным в случае, когда плотность скаляра n примет значение, совпадающее со средним: $n(\mathbf{r}, t) = \langle n \rangle$. Характер эволюции величины I_Z можно рассмотреть, умножая обе части уравнения переноса на n . Тогда, используя теорему Остроградского — Гаусса, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int n^2 d^3 \mathbf{r} = \int n D_0 (\nabla n)_N dS - \int D_0 (\nabla n)^2 d^3 \mathbf{r}. \quad (10)$$

В условиях равенства нулю потока на границах (градиент плотности на границе $(\nabla n)_N = 0$) или в случае бесконечной среды получаем диссипативную теорему Зельдовича

$$\frac{\partial I_Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int n^2 d^3 \mathbf{r} = -2D_0 \int (\nabla n)^2 d^3 \mathbf{r} < 0. \quad (11)$$

Важным является факт отсутствия прямого влияния на диссипацию движения среды. Действительно, скорость среды не входит в рассматриваемое выражение. Однако движение жидкости оказывает косвенное влияние на эволюцию I_Z , поскольку поле скоростей формирует пространственное распределение плотности скаляра.

Так, в рамках квазистационарной турбулентности естественно пренебречь членом с временной производной в левой части уравнения (10). Выражение $D_0 (\nabla n)_N$ характеризует вклад внешних источников, в то время как член $D_0 (\nabla n)^2$ связан с перераспределением скаляра внутри рассматриваемого объёма δW . Здесь удобно ввести эффективный коэффициент диффузии в виде

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{n^2 L_0} \int_W D_0 (\nabla n)^2 dW, \quad (12)$$

где L_0 — характерный размер системы. Тогда условие минимальности D_{eff} (условие минимума функционала) сводится к чисто диффузионному уравнению $\nabla(D_0 \nabla n) = 0$, где $\min D_{\text{eff}} = D_0$. Теорема Зельдовича демонстрирует возможность возрастания эффективно-го потока вследствие конвективного перемешивания в условиях, когда поле течения несжимаемо и существует затравочная (молекулярная) диффузия.

С другой стороны, несложно получить верхнюю оценку эффективного коэффициента диффузии в квазистационарном турбулентном течении, рассматривая для простоты одномерное уравнение переноса

$$D_0 \Delta n - V \nabla n = 0 \quad (13)$$

с помощью метода теории возмущений:

$$n = \langle n \rangle + n_1 = n_0 + n_1, \quad V = \langle V \rangle + v_1 = v_1, \quad (14)$$

где $\langle V \rangle = 0$, $n_1 \ll n_0$, и $D_0 \Delta n_0 = 0$. Тогда вычисления приводят к уравнению

$$D_0 \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} = v_1 \frac{\partial n_0}{\partial x}. \quad (15)$$

Ограничиваясь размерностной оценкой, получаем $n_1 \approx v_1 L_0 n_0 / D_0$. Последний результат удобно представить в терминах числа Пекле $\text{Pe} = \lambda V / D_0$, которое позволяет сравнить конвективные эффекты с действием молекулярной диффузии. Тогда имеем $n_1 \approx n_0 \text{Pe}$. Здесь $\text{Pe} \ll 1$ характеризует слаботурбулентные течения. Необходимо отметить, что при получении оценки мы использовали условие малости члена $v_1 \nabla n_1$ по сравнению с $v_1 \nabla n_0$. Основываясь на определении эффективного коэффициента диффузии в терминах $(\nabla n)^2$, получаем

$$D_{\text{eff}} \approx \frac{1}{n_0^2 L_0} \int_W D_0 (\nabla n_0)^2 (1 + A \text{Pe}^2) dW \approx D_0 (1 + A \text{Pe}^2), \quad (16)$$

где A — безразмерная постоянная. Заметим, что член $\nabla n_0 \nabla n_1$ исключается ввиду наложенных на n_1 и n_0 условий. Простые оценки показывают, что часто диффузия, вызванная турбулентностью, значительно превышает молекулярную диффузию. Так, в приземном слое воздуха для молекулярных движений $V_0 \approx 10^4$ см с^{-1} , $l \approx 10^{-5}$ см, $D_0 \approx 0,1$ см 2 с^{-1} . Турбулентные движения имеют значительно больший порядок величин: $V_0 \approx 10$ см с^{-1} , $l \approx (10^{-2} - 10^{-3})$ см, $D_0 \approx (10^3 - 10^4)$ см 2 с^{-1} . Именно поэтому конкретный вид поправки, описывающей вклад турбулентных движений, оказывается чрезвычайно важным.

Применяя вариационные идеи Зельдовича к исследованию турбулентного перемешивания скаляра, можно получить флуктуационно-диссипативное соотношение (ФДС), позволяющее оценить масштаб флуктуаций плотности скаляра $\langle (\nabla n)^2 \rangle$ в развитых турбулентных течениях [8]. Действительно, рассматривая квазистационарную турбулентность, соотношение Зельдовича можно записать в виде

$$0 = Q(n_1 - n_2) - D \int_W (\nabla n)^2 dW, \quad (17)$$

где вклад потока через границу Q оценим в терминах длины перемешивания L_0 и масштаба флуктуаций скорости V_0 ,

$$Q \approx S \langle V_0 L_0 \rangle \nabla n \approx S D_T \left(\frac{\Delta n}{L_0} \right)_{\text{macro}}. \quad (18)$$

Тогда после подстановки (18) в соотношение (17) несложные вычисления позволяют получить скейлинг (ФДС) Зельдовича

$$\langle (\nabla n)^2 \rangle = \left(\frac{V_0 L_0}{D_0} \right) \frac{(\Delta n)^2}{L_0^2}, \quad \text{Pe} = \frac{V_0 L_0}{D_0} \gg 1, \quad (19)$$

или в терминах числа Пекле

$$\nabla n|_{\text{local}} \approx \left(\frac{D_T}{D_0} \right)^{1/2} \frac{(\Delta n)^2}{L_0^2} \approx \text{Pe}^{1/2} \nabla n|_{\text{macro}}. \quad (20)$$

Последнее соотношение означает, что при $\text{Pe} \gg 1$ характер турбулентного движения приводит к тому, что два элемента жидкости с сильно различающимися плотностями скаляра (или температурами) оказываются рядом. Эксперименты и численное моделирование подтверждают этот вывод. Картины распределений плотности, возникающие в результате турбулентного перемешивания скаляра, часто не уступают по красоте полотнам абстракционистов.

Несложно найти и скейлинг для возмущений плотности $\delta n|_{\text{turb}}$, подобный полученному при оценках D_{eff} для $\text{Pe} \ll 1$. Введём локальное число Пекле $\text{Pe} = \lambda V_0 / D_0$, соответствующее масштабу λ . Тогда можно предположить, что

$$\delta n|_{\text{turb}} \propto \nabla n|_{\text{local}} \lambda \approx \text{Pe}^{1/2} \nabla n|_{\text{macro}} \lambda. \quad (21)$$

Считая числа Пекле и Рейнольдса прямо пропорциональными друг другу, оценим масштаб λ как

$$\lambda \approx l_v \propto \frac{L_0}{\text{Re}_\lambda^{3/4}} \propto \frac{L_0}{\text{Pe}_\lambda^{3/4}}, \quad \text{где } \text{Pe} \propto \text{Re} \gg 1. \quad (22)$$

Тогда выражение для амплитуды возмущения плотности скаляра на масштабах l_v примет вид скейлингового соотношения

$$\delta n|_{\text{turb}} \approx \text{Pe}^{-1/4} \delta n|_{\text{macro}} \approx \text{Re}^{-1/4} \delta n|_{\text{macro}}. \quad (23)$$

Следовательно, искомый скейлинг для n_λ в случае $\text{Pe} \gg 1$ заметно отличается от такового при $\text{Pe} \ll 1$, $\delta n(\text{Pe}) \propto n_0 \text{Pe}$.

Используем этот результат Зельдовича для предварительной оценки переноса в развитом турбулентном течении. В условиях сильной турбулентности значительный вклад в турбулентный перенос связан с конвективными движениями, что позволяет нам оценить поток частиц как

$$q \propto \delta n V_0, \quad \text{Pe} \propto \text{Re} \gg 1. \quad (24)$$

Используя полученное выражение для возмущения плотности, получим скейлинговое соотношение для коэффициента турбулентной диффузии

$$D_{\text{eff}}(\text{Pe}) \propto \frac{q(\text{Pe})}{n_0} L_0 \propto D_0 \text{Pe}^{3/4}. \quad (25)$$

Выражение (25) заметно отличается от скейлинга Зельдовича $D_{\text{eff}}(\text{Pe}) \propto D_0 \text{Pe}^2$, и, как будет видно из дальнейшего обсуждения, именно "плавный" (flat) скейлинг возникает при тщательном теоретическом анализе турбулентного переноса в режимах сильной (структурной) турбулентности.

4. Фрактальность и перколяционные линии тока

Переход от рассмотрения трёхмерных турбулентных течений общего вида к рассмотрению двумерных несжимаемых турбулентных течений позволяет не только воспользоваться преимуществами гамильтонова представления уравнений, описывающих движение жидкого элемента, но и провести более чёткую классификацию режимов переноса. Учитывая условие несжимаемости $\text{div } \mathbf{V} = 0$, уравнения движения можно представить в виде

$$\dot{x} = V_x = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\dot{y} = V_y = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}. \quad (27)$$

Здесь $\Psi(x, y, t)$ — функция тока, которая при моделировании двумерных турбулентных течений является случайной [13, 33]. Движение частиц скаляра происходит вдоль линий тока, однако благодаря наличию молекулярной диффузии или пересоединения линий тока частицы могут менять первоначально выбранную изолинию. Именно рассмотрение различных декорреляционных механизмов, ответственных за формирование разных режимов турбулентной диффузии, и является одной из целей настоящего обзора.

Хорошо известно, что в двумерной турбулентности важную роль играют процессы самоорганизации, приводящие к формированию крупномасштабных вихревых структур [1, 3]. В рамках гидродинамики этот процесс часто связывается с обратным каскадом энергии по спектру [16, 17], а в физике сильно замагниченной плазмы — с развитием дрейфово-конвективных неустойчивостей [21, 22, 25]. Использование для двумерных случайных течений формализма функций тока позволяет рассматривать вихревые образования разных масштабов в рамках статистической топографии. Более того, возникающие в результате самоорганизации турбулентного течения когерентные структуры могут значительно отличаться от регулярных или мелкомасштабных вихревых образований и охватывать значительные области течения, создавая тем самым условия для возникновения аномальных режимов переноса.

В данном обзоре мы сосредоточим внимание на перколяционной модели самоорганизации двумерных случайных течений [22, 25]. Линии тока $\Psi = \Psi(x, y)$ в перколяционном подходе рассматриваются как береговые линии, возникшие в результате затопления водой холмистого ландшафта (рис. 1). Ожидается, что имеется резкий переход от области с отдельными озёрами на бескрайней суше к области с отдельными островами в безграничном океане. Теория перколяции требует существования хотя бы одной береговой линии с бесконечной протяжённостью. Соответствующие функции тока можно моделировать посредством "возмущения" рельефа,

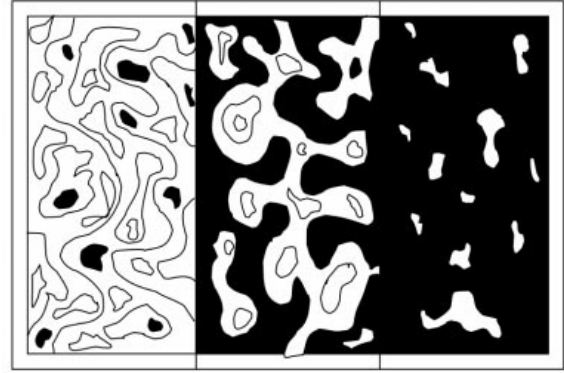


Рис. 1. Перколяционный переход в двумерном случае. Тёмные области — "вода", светлые — "суша".

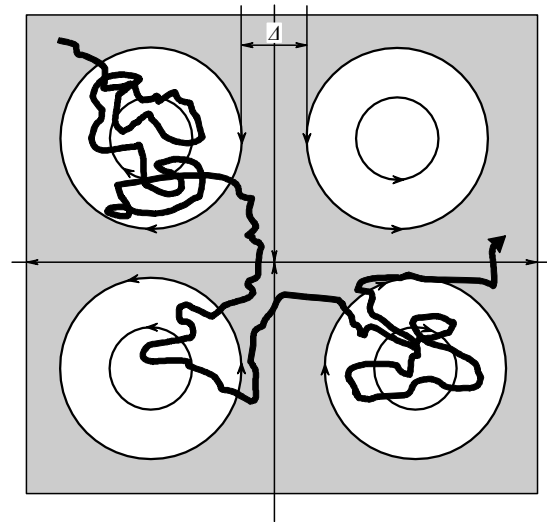


Рис. 2. Конвективные ячейки. Δ — ширина стохастического (диффузионного) слоя. Жирной кривой показан пример траектории движения частицы в системе конвективных ячеек.

соответствующего системе конвективных ячеек (рис. 2):

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y). \quad (28)$$

Незначительное возмущение $\delta\Psi$ сместит "точки перевала" с нулевого уровня $\Psi = 0$. Фактически речь идёт о случайном расщеплении сёдел и формировании длинных извилистых линий тока.

Кадомцев и Погуце [22] связали аномальный характер диффузии в режимах с сильной турбулентностью с фрактальным характером поведения линий тока двумерного течения вблизи порога протекания (рис. 3). Было предложено использовать найденный в численных экспериментах по статистической топографии скейлинг для длины перколяционной линии тока в виде [22, 34]

$$L(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^{2.4}}. \quad (29)$$

Здесь ε — малая безразмерная величина, характеризующая степень отклонения состояния системы от критического состояния (порог перколяции), $\varepsilon \approx \delta\Psi/(\lambda V_0)$, где $\delta\Psi$ — величина функции тока в окрестности перколяционного перехода, λ — характерный размер, V_0 — характерная скорость течения. Выражение (29) для $L(\varepsilon)$

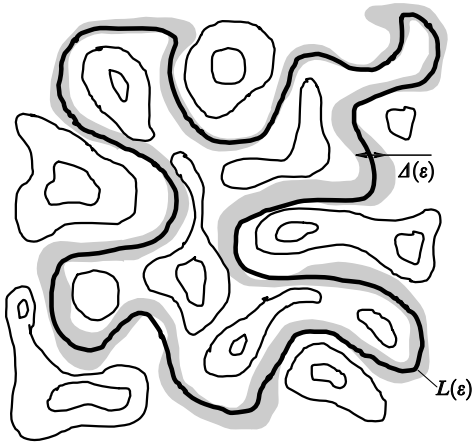


Рис. 3. Перколяционная линия тока (жирная кривая) в двумерном случайном течении. Серым цветом показан стохастический слой. $A(\varepsilon)$ — ширина стохастического (диффузионного) слоя, $L(\varepsilon)$ — длина перколяционной линии тока.

соответствует фрактальному представлению длины кривой [35]. Перколяционные (фрактальные) линии тока охватывают фактически всю область течения в окрестности порога протекания, обеспечивая необходимые условия для возникновения аномального переноса.

Однако только фрактального представления линии тока недостаточно для описания эффектов, связанных со значительным увеличением коэффициентов переноса. Более того, фрактальный характер кривой иногда приводит к более медленной диффузии (субдиффузии). Главными характеристиками турбулентной диффузии в перколяционном пределе являются характерные пространственный и временной корреляционные масштабы. В разделе 5 мы приведём основные скейлинговые соотношения, позволяющие охарактеризовать иерархию пространственных масштабов в простейшей перколяционной модели.

5. Перколяционная иерархия пространственных масштабов

Перколяционный подход выглядит очень привлекательным, поскольку он даёт простую и в то же время универсальную модель поведения, основанную на эффектах сильных корреляций, которые в случае турбулентной диффузии связаны с конвективным переносом вдоль разветвлённой сети стохастических слоёв, возникающих в результате расщепления сепаратрис. С другой стороны, численный эксперимент для двумерных перколяционных решёток можно использовать для проверки теоретических результатов.

Для того чтобы проиллюстрировать основные понятия теории перколяции, рассмотрим простейшую модель на квадратной решётке. Пусть ячейки этой решётки заполнены с вероятностью p или соответственно пусты с вероятностью $1 - p$. Соседние заполненные ячейки, имеющие общие стороны, образуют связанный кластер. Если $p \ll 1$, то кластеры малы и изолированы. Когда p увеличивается от 0 до 1, возрастает число самых больших кластеров. Существует критическое значение $0 < p_c < 1$, при котором возникает единственный кластер, связывающий противоположные стороны рассматриваемой решётки. Когда размер решётки стремится к бесконечно-

сти, $L_0 \rightarrow \infty$, размер этого перколяционного кластера становится бесконечным. Значение p_c , при котором появляется бесконечный кластер, называют порогом протекания или критической вероятностью. Численные расчёты для конечных решёток показывают, что $p_c \approx 0,59275$ для кластеров, образованных соседними узлами. Эти вычисления также доказывают, что кластеры представляют собой фрактальные распределения занятых ячеек.

По мере приближения p к p_c конечные кластеры увеличиваются; длина корреляции a , представляющая собой радиус тех кластеров, которые вносят наибольший вклад в это увеличение, обращается в бесконечность в точке p_c . Когда $a(p)$ стремится к бесконечности, исчезает характерная длина, которая могла бы определить масштабные зависимости физических свойств системы. Подобно фрактальным структурам, система выглядит одинаковой при разном увеличении. Свойства системы становятся нечувствительными ко многим локальным деталям и даже к структуре решётки, что обуславливает универсальность критических индексов, описывающих расходимость параметров при значениях p , близких к p_c . Эти универсальные индексы зависят от рассматриваемой модели и размерности системы, но не зависят от деталей локальной структуры. Важно, что вблизи точки $p = p_c$ геометрическое протекание можно описать тем же языком, что и фазовый переход второго рода, скажем, из парамагнитного высокотемпературного состояния в ферромагнитное низкотемпературное. Например, аналогом температуры T является вероятность p занятости узла.

Длина корреляции a также стремится к бесконечности, когда p приближается к p_c (сверху и снизу) с некоторым новым критическим индексом ν :

$$a \propto |p - p_c|^{-\nu} = |\varepsilon|^{-\nu}, \quad (30)$$

где ε — малый перколяционный параметр, характеризующий близость состояния системы к перколяционному переходу. Такое поведение напоминает расходимость корреляционной длины вблизи критических точек температурных фазовых переходов. Перколяционные критические индексы универсальны, так как они зависят только от размерности системы d , т.е. $\nu = \nu(d)$. Цель теории перколяции — вычислить критические индексы и установить связь между ними. Методы вычисления самих критических индексов читатель может найти во многих работах (см., например, [9, 25, 27, 35]). Для двумерных решёток индекс $\nu = 4/3$ вычислен точно. В трёхмерном случае дело обстоит сложнее и перколяционные индексы получены пока только на основе численного моделирования [25].

В теории двумерной континуальной перколяции строго доказано, что корреляционный масштаб описывается таким же скейлингом, как и в решёточной модели [9, 25, 27, 35]. Это позволяет нам рассматривать корреляционный масштаб $a(\varepsilon)$ как характеристику поперечного размера перколяционной линии тока. В теории континуальной перколяции корреляционная длина $a(\varepsilon)$ является также параметром, характеризующим длину перколяционных линий тока вблизи перколяционного перехода, $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$L(\varepsilon) \propto \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon} \propto a(\varepsilon)^{D_H}, \quad D_H = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{4}{3}. \quad (31)$$

Здесь D_H — показатель Хёрста [9, 25, 27, 35]. Так в рамках перколяционного подхода удаётся реализовать идею "длинных корреляций".

Однако здесь возникла серьёзная проблема, поскольку коэффициент диффузии непосредственно связан с выражением для корреляционной длины Δ_{cor} : $D \approx \Delta_{\text{cor}}^2/\tau$, где τ — корреляционное время. В рассматриваемом нами случае разумно предположить, что частицы скаляра движутся вдоль линий тока, следовательно, в перколяционном пределе

$$\Delta_{\text{cor}} \approx a(\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Преодолеть эту трудность можно на основе перенормировки малого перколяционного параметра ε . Именно методом перенормировки параметра ε в задачах турбулентного переноса и посвящён настоящий обзор.

Хаотическое поведение линий тока создаёт сложную топологическую картину. В этой нетривиальной ситуации оказывается важным использование идей фрактальности и перколяции, поскольку понятие корреляционного масштаба и характерного пространственного масштаба исследуемых структур удаётся связать с фрактальными топологическими характеристиками течений. С другой стороны, в отличие от обычных диффузионных моделей, теория континуальной перколяции, наряду с иерархией пространственных масштабов, включает в себя иерархию временных масштабов, что позволяет рассматривать нестационарные модели, в которых важную роль играют процессы перестройки топологии течений и эффекты, связанные со стохастической неустойчивостью.

6. Ренормализация и перколяция

Для реальных практически важных задач классическое перколяционное представление $\Delta_{\text{cor}} \approx a(\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ является слишком абстрактным. Рассмотрим простой приём, который позволяет получать скейлинговую зависимость для характерного корреляционного масштаба, используя конечное значение перколяционного параметра. Так, для систем с конечным размером L_0 должно выполняться условие $a(\varepsilon) \leq L_0$. Поэтому разумно ввести новый "перенормированный" малый параметр ε_* [36], такой, что

$$a(\varepsilon_*) \approx \lambda \frac{1}{|\varepsilon_*|^v} \leq L_0. \quad (33)$$

Элементарные вычисления дают

$$\varepsilon_* \approx \left(\frac{\lambda}{L_0} \right)^{1/v}. \quad (34)$$

Результат (34) можно интерпретировать с точки зрения перколяционных "экспериментов с образцами" конечного размера. В таких "образцах" перколяционный переход наступает при лежащей в некотором диапазоне $\Delta \varepsilon$ величине ε_* , незначительно отличающейся от нуля. Полученную оценку для ε_* можно рассматривать как характерную величину этого диапазона (рис. 4), $\Delta \varepsilon \approx \varepsilon_*$. Заметим, что фактически мы имеем дело с физически мотивированным малым параметром

$$\varepsilon_0 \approx \frac{\lambda}{L_0} \ll 1, \quad (35)$$

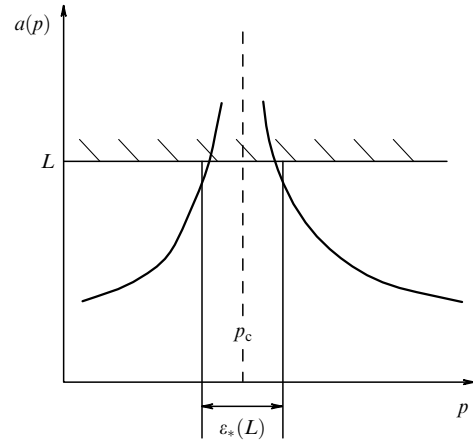


Рис. 4. Перенормировка малого перколяционного параметра.

описывающим систему с характерными масштабами L_0 и λ . В результате "перенормировки" мы получим новый (малый, но конечный!) перколяционный параметр

$$\varepsilon_*(\varepsilon_0) \approx \Delta \varepsilon \approx \varepsilon_0^{1/v}. \quad (36)$$

Как и следовало ожидать, ε_* уменьшается с увеличением размера системы L_0 . Фактически мы "спрятали" сингулярность в феноменологический параметр модели, характеризующий конечность размера "образца".

В задаче о построении перколяционной линии тока в двумерном случайном течении аналогом величины $\Delta \varepsilon \approx \varepsilon_*$ является ширина стохастического слоя. Так, в модели конвективных ячеек ширина стохастического (диффузионного) слоя исследована в пределе больших чисел Пекле, $Pe = \lambda V_0/D_0 \gg 1$, в работе [37]. Мы предполагаем, что частицы скаляра движутся вдоль линий тока, покидая их вследствие наличия в системе затравочной (молекулярной) диффузии D_0 . Из стохастического слоя частицы уходят диффузионным образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \propto D_0 \frac{n}{A^2}. \quad (37)$$

Конвекция вдоль пограничного слоя даёт

$$\frac{\partial n}{\partial t} \propto V_0 \frac{n}{\lambda}. \quad (38)$$

Сравнивая оценки (37) и (38), для ширины стохастического слоя получим

$$\Delta(V_0) = \sqrt{\frac{D_0 \lambda}{V_0}} \propto \frac{1}{\sqrt{V_0}}. \quad (39)$$

Это важный результат — в условиях сильной турбулентности ($Re \gg 1$) стохастический слой оказывается очень узким. Рассмотрим эффективный перенос частиц скаляра в системе конвективных ячеек на основе редуцированной конвективной оценки в пределе $Pe = \lambda V_0/D_0 \gg 1$:

$$D_{\text{eff}} \approx \lambda V_0 P_\infty \approx \lambda V_0 \frac{\Delta}{\lambda} = V_0 \Delta(V_0), \quad P_\infty \approx \frac{\lambda \Delta}{\lambda^2} = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (40)$$

Здесь P_∞ — доля пространства, отвечающая за конвекцию. Окончательно имеем следующую оценку для коэф-

фициента турбулентной диффузии:

$$D_{\text{eff}} = \text{const} \sqrt{D_0 V_0 \lambda} \approx D_0 \text{Pe}^{1/2} \propto V_0^{1/2}. \quad (41)$$

Полученный в [37] скейлинг позволил дать теоретическую интерпретацию вызвавшему большой резонанс результатам численных экспериментов по переносу в системе дрейфовых конвективных ячеек [38]. Заметим, что результат (41) в терминах числа Пекле ($\text{Pe} \gg 1$) значительно отличается от квазилинейной оценки $D_{\text{eff}} \propto \text{Pe}^2 \propto V_0^2$.

В перколяционных моделях турбулентной диффузии главным звеном являются определение малого параметра рассматриваемой задачи ε_0 и нахождение адекватного условия "перенормировки" ε_* , которое позволит получить физически значимые результаты в терминах таких параметров, как скорость, характерный масштаб, затравочная диффузия и др. Система конвективных ячеек не является перколяционной, однако несложно заметить, что малое возмущение функции тока приведёт к появлению перколяционной структуры, но не изменит существенно характера движения частиц скаляра. Мы можем ожидать, что малым параметром в стационарных перколяционных течениях с затравочной диффузией станет число Пекле, а условие перенормировки должно включать в себя ширину диффузионного (стохастического) слоя.

7. Перколяционный перенос в стационарном течении

Рассмотрим двумерное стационарное течение с нулевой средней скоростью, которое задано ограниченной функцией тока $\Psi(x, y)$ "общего положения". Имеется в виду в среднем изотропная осциллирующая функция, квазислучайная в отношении расположения седловых точек по высоте. Соображения симметрии приводят к выводу, что для любой функции $\Psi(x, y)$ "общего положения" существует единственная нулевая замкнутая линия тока бесконечной длины. Так, в работе [33] исследовано одномасштабное случайное течение,

$$\Psi_0 \approx \lambda V_0, \quad \lambda \approx \left| \frac{\Psi}{\nabla \Psi} \right|. \quad (42)$$

В общем случае одномасштабное течение формируется как суперпозиция большого числа гармоник, имеющих одинаковую длину волны λ , но различные амплитуды, фазы и направления волнового вектора $\mathbf{k}$:

$$\Psi(x, y) = \sum_j^N \psi_j \cos(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \varphi_j), \quad N \gg 1. \quad (43)$$

Вычисление коэффициента турбулентной диффузии основывается на представлении о балансе между баллистическим движением частиц скаляра вдоль перколяционных линий тока и диффузионным уходом частиц из стохастического слоя. Влияние эффектов "длинных корреляций" учитывается в выражении для коэффициента диффузии через корреляционный масштаб $a(\varepsilon)$. Формальное выражение для коэффициента диффузии в перколяционном пределе записывается как

$$D_{\text{eff}} = \int_0^\infty \frac{d\Psi_1}{\Psi_1} P_\infty(\Psi_1) \frac{a^2(\Psi_1)}{\tau(\Psi_1)}, \quad (44)$$

где в рамках теории среднего поля возмущение гамильтониана даётся выражением $\Psi_1 \approx \varepsilon_* \lambda V_0$. Вычисления приводят к скейлингу

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx \frac{a^2}{\tau} P_\infty \approx \frac{a^2}{\tau} \frac{L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)}{a^2} \approx V_0 \Delta(\varepsilon). \quad (45)$$

Здесь время корреляции τ оценивается баллистически, $\tau \approx \tau_b \approx L(\varepsilon)/V_0$, $P_\infty = L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)/a^2(\varepsilon)$ — доля объёма, занятого перколяционными линиями тока, Δ — ширина перколяционного слоя. Фактически задача получения коэффициента турбулентной диффузии в рассматриваемом приближении свелась к вычислению ширины стохастического (перколяционного) слоя.

Оценка $D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx V_0 \Delta(\varepsilon)$ эквивалентна выражению, используемому в моделях конвективных ячеек. Поэтому естественно использовать баланс характерных времён (диффузионного τ_D и баллистического τ_b) как основу для вычисления ширины перколяционного слоя Δ :

$$\tau_b \approx \frac{L(\varepsilon)}{V_0} = \frac{\Delta^2(\varepsilon)}{D_0} \approx \tau_D, \quad \Delta \approx \sqrt{\frac{D_0 L(\varepsilon_*)}{V_0}}. \quad (46)$$

Действительно, время движения частицы вдоль перколяционной линии тока $\tau_b \approx L/V_0$ должно иметь тот же порядок, что и характерное диффузионное время $\tau_D \approx \Delta^2/D_0$ ухода частицы из перколяционного стохастического слоя шириной Δ .

Следуя духу работ теории фазовых переходов, авторы [33] предложили "перенормировку", т.е. способ вычисления универсального (для данного класса течений) малого параметра ε , отождествив малую "ширину" перколяционной линии тока и малый параметр теории перколяции:

$$\Delta(\varepsilon) = \lambda \varepsilon. \quad (47)$$

Эта перенормировка фактически стала главным результатом работы [33] и началом активного использования подобного метода для других задач турбулентного переноса. Для получения конкретного значения малого перколяционного параметра ε_* в модели стационарного случайного течения с затравочной диффузией D_0 используется алгебраическое уравнение

$$\sqrt{\frac{D_0 L(\varepsilon_*)}{V_0}} = \lambda \varepsilon_*. \quad (48)$$

Вычисления удаётся провести полностью, если использовать полученные в теории перколяции строгие скейлинговые результаты [39] для корреляционного масштаба a и длины фрактальной линии тока L как функции ε :

$$a(\varepsilon) = \lambda \varepsilon^{-\nu}, \quad L(\varepsilon) = \lambda \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{D_H}, \quad D_H = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{4}{3}. \quad (49)$$

Перенормированный перколяционный параметр и эффективный коэффициент диффузии выражаются через число Пекле $\text{Pe} = \lambda V_0/D_0 \gg 1$ (рис. 5):

$$D_{\text{eff}} \approx V_0 \Delta(\varepsilon_*) \approx V_0 \lambda \left(\frac{1}{\text{Pe}} \right)^{1/(3+\nu)} = D_0 \text{Pe}^{10/13},$$

$$\varepsilon_* \approx \left(\frac{1}{\text{Pe}} \right)^{1/(3+\nu)}. \quad (50)$$

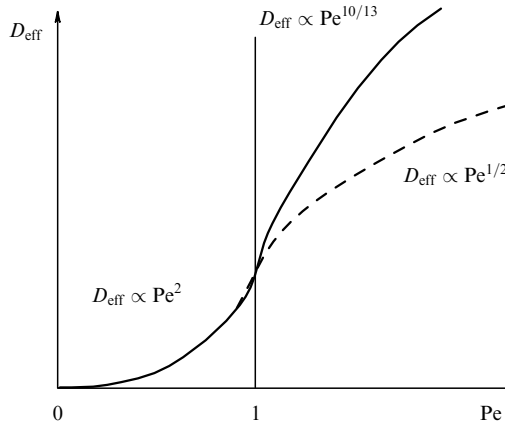


Рис. 5. Коэффициент турбулентной диффузии в стационарном случайном течении в перколяционном пределе.

Результат (50) неоднократно подвергался проверке как в численных экспериментах, так и посредством теоретико-вероятностного анализа [40, 41]. Есть все основания считать формулы (48)–(50) строго доказанными. С точки зрения перенормировки первоначального параметра малости $\varepsilon_0 \approx 1/\text{Pe}$, мы получаем выражение

$$\varepsilon_* = (\varepsilon_0)^{1/(3+v)} \gg \varepsilon_0. \quad (51)$$

Некоторая "произвольность" выбора значения $\lambda\varepsilon$ (а не $\lambda\varepsilon^2$ или $\lambda\varepsilon^3$) может быть истолкована как желание иметь универсальный малый параметр, подобный единственному характерному размеру в теории фазовых переходов. Длина перколяционной линии тока и корреляционный масштаб,

$$L(\varepsilon_*) \approx \lambda \frac{1}{\varepsilon_*^{v+1}} \approx \lambda \text{Pe}^{(1+v)/(3+v)} \propto V_0^{7/13}, \quad (52)$$

$$a(\varepsilon_*) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_*^v} \approx \lambda \text{Pe}^{v/(3+v)} \propto V_0^{4/13}, \quad (53)$$

не являются в этом подходе бесконечно большими, так как малый параметр ε_* не стремится к нулю, а имеет конкретное значение ε_* для всех типов течения с характерными D_0 , V_0 , λ . Именно в этом заключается универсальность скейлинга $D_{\text{eff}} \propto D_0 \text{Pe}^{10/13}$. Поскольку должно выполняться условие $a(\varepsilon_*) \leq L_0$, несложно получить условие для числа Pe (амплитуды турбулентных пульсаций):

$$1 \ll \text{Pe} \leq \left(\frac{L_0}{\lambda} \right)^{(3+v)/v}, \quad \frac{D_0}{\lambda} \ll V_0 \leq \frac{D_0}{\lambda} \left(\frac{L_0}{\lambda} \right)^{13/4}. \quad (54)$$

В завершение анализа результатов отметим, что мы стремились к простоте изложения, но простота полученных в [33] результатов кажущаяся! Достаточно вспомнить в связи с этим всю "иерархию" масштабов, использованную при анализе:

$$L(\varepsilon) \approx \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon} \gg a(\varepsilon) \gg \lambda \gg \Delta(\varepsilon) \approx \lambda\varepsilon. \quad (55)$$

Именно в контексте развития пространственной и временной иерархии масштабов получила дальнейшее развитие перколяционная теория турбулентной диффузии [42–45].

8. Турбулентная диффузия и перестройка топологии течения

Важнейшим фактором, влияющим на процессы переноса, является нестационарность течения. Так, изменение топологии линий тока представляет собой один из главных декорреляционных механизмов. Для описания этой ситуации нам необходим новый безразмерный параметр, который, в отличие от чисел Рейнольдса или Пекле, включает в себя характерное время изменения топологии течения $T_0 \approx 1/\omega$, где ω — характерная частота внешних возмущений. Таким параметром является число Кубо $\text{Ku} = V_0/(\lambda\omega)$, которое легко интерпретировать, используя представление о характере движения частиц скаляра вдоль линий тока. Так, в случае высоких частот ω путь, проходимый пробной частицей, может быть оценён баллистически, $l_\omega(\omega) \approx V_0/\omega$, и, следовательно, $\text{Ku} = l_\omega/\lambda$. С другой стороны, в высокочастотном пределе l_ω используется в качестве корреляционной длины:

$$D_{\text{eff}}(V_0, \omega) \approx \frac{l_\omega^2}{\tau} \approx V_0^2 \omega, \quad (56)$$

где $\tau \propto 1/\omega$ — корреляционное время. Подстановка в качестве корреляционного времени $1/\omega$ привела к квазилинейному скейлингу для коэффициента диффузии,

$$D_{\text{eff}} = \lambda^2 \omega \text{Ku}^2 \propto V_0^2. \quad (57)$$

Однако в низкочастотном случае, $\omega \ll V_0/\lambda$, реальный корреляционный масштаб a оказывается много меньше l_ω , поскольку здесь происходит перестройка топологии линий тока (например, уменьшение длины линий тока вследствие их перезамыкания) (рис. 6). Используя представления о перколяционной иерархии пространственных масштабов, можно рассмотреть перколяционный предел турбулентной диффузии скалярной примеси в нестационарном несжимаемом плоском течении $\text{Ku} \geq 1$. Оценив время, за которое картина течения меняется полностью, как $T_0 \approx 1/\omega$, авторы [42] предположили, что главным параметром в случае низкочастотных возмущений является время жизни одной перколяционной линии тока τ . Естественно предположить, что именно τ является корреляционным временем и его можно оценить как

$$\tau \approx \varepsilon \frac{1}{\omega} \approx \varepsilon T_0. \quad (58)$$

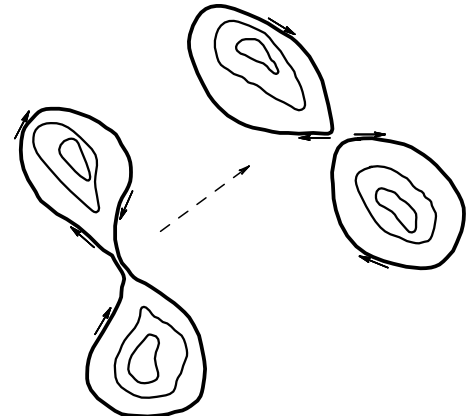


Рис. 6. Перезамыкание линий тока.

Здесь ε — малый перколяционный параметр задачи. В рассматриваемом нестационарном случае полезного результата можно было бы ожидать, если бы удалось вычислить конкретное "универсальное" значение ε_* , используя для этой цели простое выражение, учитывающее конвективный характер движения частиц скаляра вдоль перколяционной линии тока в течение времени жизни этой линии тока,

$$\tau \approx \tau_b \approx \varepsilon_* \frac{1}{\omega} \approx \varepsilon_* T_0. \quad (59)$$

Уравнение для малого перколяционного параметра $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\omega, V_0, \lambda)$ получается простой подстановкой:

$$\frac{\varepsilon_*}{\omega} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}. \quad (60)$$

Использував скейлинг из теории перколяции, $L(\varepsilon) = \lambda(a/\lambda)^{D_H}$, легко получим ε_* как функцию параметров течения ω, V_0, λ :

$$\varepsilon_* = \left(\frac{\lambda \omega}{V_0} \right)^{1/(2+v)} = \left(\frac{1}{\text{Ku}} \right)^{3/10} \propto \omega^{3/10}. \quad (61)$$

С точки зрения перенормировки первоначального малого параметра $\varepsilon_0 \approx 1/\text{Ku}$, мы получаем выражение

$$1 > \varepsilon_* = (\varepsilon_0)^{1/(2+v)} > \varepsilon_0. \quad (62)$$

Выражение для коэффициента диффузии в перколяционном пределе записывается в виде

$$D_{\text{eff}} = \int_0^\infty \frac{d\Psi_1}{\Psi_1} P_\infty(\Psi_1) \frac{a^2(\Psi_1)}{\tau(\Psi_1)}, \quad (63)$$

где $\Psi_1 \approx \varepsilon_* \lambda V_0$. Теперь вычисления приводят к окончательному выражению для D_{eff} (рис. 7):

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon_*) \approx \frac{a^2(\varepsilon_*)}{\tau(\varepsilon_*)} P_\infty(\varepsilon_*) \approx \lambda^2 \omega \text{Ku}^{7/10} \propto V_0^{7/10} \omega^{3/10}. \quad (64)$$

Эта зависимость $D_{\text{eff}}(\omega)$ принципиально отличается от квазилинейной зависимости

$$D_{\text{eff}}(\omega) \propto \frac{V_0^2}{\omega}. \quad (65)$$

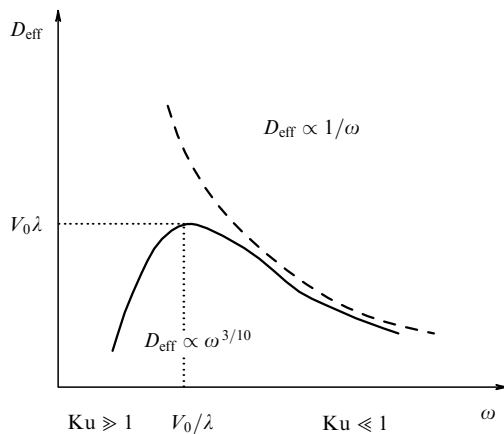


Рис. 7. Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от частоты в перколяционном пределе.

Действительно, нет оснований считать, что уменьшение частоты возмущений приводит к бесконечному увеличению переноса. Мы видим, что перколяционный подход даёт реалистичную зависимость $D_{\text{eff}} \propto \omega^{3/10}$. Значения ε_* и D_{eff} зависят только от параметров течения ω, V_0, λ . Многочисленные эксперименты подтверждают перколяционный скейлинг [46, 47].

Заметим, что корреляционный масштаб $a(\varepsilon_*)$ в рассматриваемой модели действительно много меньше l_ω :

$$a(\varepsilon_*) \approx L(\varepsilon_*) \varepsilon_* \approx V_0 \tau \varepsilon_* \approx \varepsilon_*^2 \frac{V_0}{\omega} \approx \varepsilon_*^2 l_\omega \ll l_\omega. \quad (66)$$

С другой стороны, с учётом конечного размера системы L_0 должно выполняться условие

$$a(\varepsilon_*) = \frac{\lambda}{\varepsilon_*^v} \approx \lambda \text{Ku}^{v/(2+v)} \leq L, \quad (67)$$

что приводит к ограничениям на число Кубо (рис. 8):

$$l \ll \text{Ku} \leq \left(\frac{L_0}{\lambda} \right)^{(2+v)/v}. \quad (68)$$

Необходимо провести дополнительные оценки влияния диффузионного ухода частиц с линий тока в терминах характерного времени τ_D . Для оценок используем коэффициент "затравочной" (молекулярной) диффузии D_0 :

$$\tau \approx \frac{\varepsilon_*}{\omega} < \tau_D, \quad \tau_D \approx \frac{D^2(\varepsilon_*)}{D_0} \approx \frac{\lambda^2 \varepsilon_*^2}{D_0}. \quad (69)$$

Фактически это ограничение на величину "затравочной" диффузии D_0 в рассматриваемом классе течений:

$$D_0 < \lambda^2 \omega \varepsilon_* (\text{Ku}) \propto \frac{\omega^{13/10}}{V_0^{3/10}}. \quad (70)$$

С другой стороны, мы имеем иерархию характерных времён в задаче о перколяции в нестационарном течении:

$$\left(\tau \approx \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \ll \left(\frac{\lambda^2 \varepsilon^2}{D_0} \approx \tau_D \right) \ll \left(\frac{1}{\omega} \approx T_0 \right). \quad (71)$$

Заметим, что выражение (64) для коэффициента турбулентной диффузии скалярной примеси в течениях с перестраивающейся топологией (в низкочастотном пределе) справедливо только в приближении $\tau < \tau_D$.

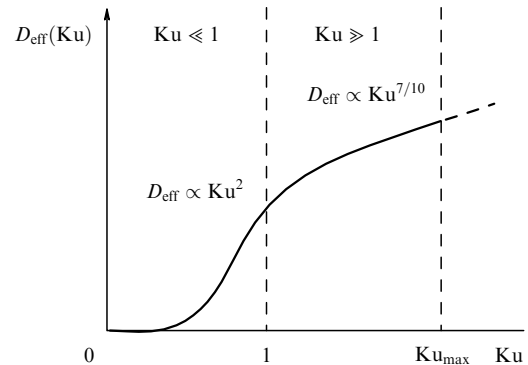


Рис. 8. Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от числа Кубо в перколяционном пределе.

9. Эффекты влияния малой дрейфовой скорости

Рассмотренные в разделах 7, 8 перколяционные модели основываются на предположении о существовании стохастического (перколяционного) слоя и наличии в системе "затравочной" классической диффузии D_0 или низкочастотных флуктуаций с характерной частотой ω . Другие физические ситуации, в которых перколяционные эффекты существенно влияют на характер переноса, можно исследовать путём более детального рассмотрения механизмов, ответственных за процессы в стохастическом слое. Фактически необходимо рассмотреть изменение характера перколяционного транспорта под влиянием внешних воздействий. Важным примером является рассмотрение эффектов, связанных с наложением дрейфовых или зональных течений (рис. 9). Впервые идею такого подхода предложил Зельдович [23], который предсказал появление "перколяции по тонким жгутам" при наложении слабого постоянного поля на двумерное случайное течение (магнитное поле). Одновременно была предложена перколяционная модель Тругмана [48], которая использовалась для анализа эффектов влияния внешнего электрического поля.

Действительно, идея "градиентной перколяции" имеет широкую область применения [39]. Так, Исиченко и Калда [43, 44], а также Юшманов [49] рассмотрели задачу о влиянии малой дрейфовой скорости U_d на фрактальную топологию перколяционных линий тока,

$$V = V_0 + U_d, \quad (72)$$

где выполняется условие $U_d \ll V_0$. Простейшим вариантом выбора малого параметра здесь является величина $\varepsilon_0 = U_d/V_0$. Несмотря на то что условие перенормировки для случая градиентной перколяции $\varepsilon_* = (\varepsilon_0)^{1/(1+\nu)}$ получено на основе общих соображений [48], оказывается полезным дать его интерпретацию в терминах дрейфовых течений.

Рассмотрим естественную для перколяционного случая параметрическую оценку дрейфовой скорости. Исходя из постановки задачи о влиянии дрейфовой скорости на поведение линий тока случайного двумерного течения получаем

$$V_0 \Delta(\varepsilon) = U_d a(\varepsilon). \quad (73)$$

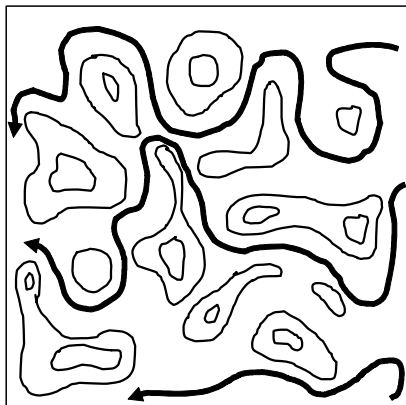


Рис. 9. Разомкнутые перколяционные линии тока.

Здесь $a(\varepsilon)$ — характерный корреляционный масштаб. Фактически условие (73) означает, что средний поток скаляра будет переноситься со скоростью V_0 в узких каналах шириной $\Delta(\varepsilon)$, в среднем ориентированных вдоль направления дрейфовой скорости. При этом мы предполагаем, что наложение малой дрейфовой скорости приводит к появлению лишь небольшого числа разомкнутых линий тока, создающих узкие конвективные каналы. Амплитуда блужданий и среднее расстояние между каналами могут быть оценены с помощью самосогласованного корреляционного размера $a(\varepsilon)$. Условие узости перколяционного слоя $\Delta(\varepsilon) \approx \lambda \varepsilon$ неоднократно использовалось. Несложно проверить, что после подстановки стандартного выражения для корреляционного масштаба $a \approx \lambda |\varepsilon|^{-\nu}$ получается параметрическая зависимость для малого параметра ε_* в терминах дрейфовой скорости U_d и амплитуды турбулентных пульсаций V_0 :

$$\varepsilon_* = (\varepsilon_0)^{1/(1+\nu)} = \left(\frac{U_d}{V_0} \right)^{1/(1+\nu)} = \left(\frac{U_d}{V_0} \right)^{3/7}, \quad (74)$$

где $\nu = 4/3$. Во-первых, легко заметить, что выражение (74) полностью совпадает с результатом Тругмана [48], во-вторых, это выражение может быть интерпретировано в терминах функции тока (рис. 10):

$$U_d \approx \frac{\Psi_1}{a(\varepsilon)} \approx \frac{\varepsilon \Psi_0}{a(\varepsilon)} \approx V_0 \varepsilon^{\nu+1}. \quad (75)$$

Здесь величина

$$\Psi_1 \equiv \Delta \Psi \approx \varepsilon \lambda V_0 \approx U_d a(\varepsilon) \quad (76)$$

характеризует возмущения функции тока в окрестности перколяционного перехода. Более того, видно, что пространственная иерархия масштабов включается в описание возмущений [50]:

$$U_d \approx \varepsilon \frac{\lambda}{a(\varepsilon)} V_0 \approx \frac{\lambda}{L(\varepsilon)} V_0 \approx \frac{\Delta}{a(\varepsilon)} V_0. \quad (77)$$

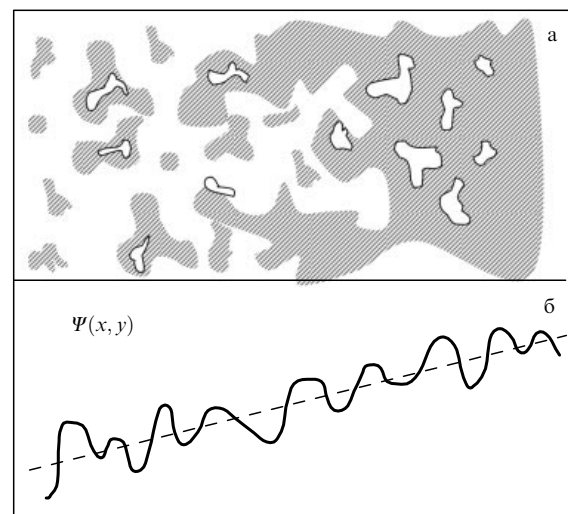


Рис. 10. (а) Характерный вид линий уровня в дрейфовом приближении. Заштрихованные области — "вода". (б) Перколяционный рельеф в дрейфовом приближении.

Причём параметр λ не войдёт в выражение для перенормированной величины ε_* . Заметим, что иерархия скоростей, использованных в такой подстановке, не является полной. Действительно, в иерархии перколяционных масштабов мы имели "масштаб решётки" λ , находящийся между $a(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Поэтому естественно ввести соответствующий λ масштаб скорости w_d :

$$V_0 \Delta(\varepsilon) \approx w_d \lambda \approx U_d a(\varepsilon). \quad (78)$$

С одной стороны, w_d выражается в терминах $P_\infty(\varepsilon)$:

$$w_d(\varepsilon) P_\infty(\varepsilon) \approx U_d, \quad (79)$$

где для P_∞ используется выражение, предложенное в стационарном случае: $P_\infty(\varepsilon) \approx \lambda/a(\varepsilon)$. С другой стороны, несложные вычисления показывают, что w_d является удобным параметром для оценки эффектов переноса скаляра:

$$w_d \approx V_0 \frac{\Delta(\varepsilon)}{\lambda} \approx V_0 \varepsilon \approx \frac{a(\varepsilon)}{\tau_b}, \quad \tau_b(\varepsilon) \approx \frac{L(\varepsilon)}{V_0}. \quad (80)$$

В рассматриваемой здесь постановке перенос скаляра вдоль перколяционных каналов является конвективным, $\langle V \rangle \neq 0$,

$$q \approx V_0 \Delta(\varepsilon_*) \delta n \approx \lambda V_0 \delta n(\varepsilon_0)^{1/(1+\nu)} \propto V_0 \left(\frac{U_d}{V_0} \right)^{3/7}, \quad (81)$$

где δn — возмущение плотности скаляра.

В поперечном направлении мы имеем диффузионный перенос. В случае слабого среднего потока поперечный перенос определяется конкуренцией между затравочной (молекулярной) диффузией и "баллистическим" движением частиц скаляра вдоль замкнутых линий тока с характерным масштабом порядка корреляционного. Это в точности соответствует обсуждённому в разделе 7 режиму $D_{\text{eff}} \approx D_0 \text{Re}^{10/13}$.

Заметим, что для появления разомкнутых линий тока наложенный дрейфовый поток не должен быть слишком слабым. Действительно, требование ограниченности корреляционного масштаба $a(\varepsilon) \leq L_0$ приводит к условию для дрейфовой скорости

$$U_d \leq V_0 \left(\frac{\lambda}{L_0} \right)^{(1+\nu)/\nu} = V_0 \left(\frac{\lambda}{L_0} \right)^{7/4}. \quad (82)$$

Следующим логическим шагом в изучении дрейфовых течений является включение в рассмотрение эффектов нестационарности, которые играют значительную роль в анализе процессов переноса.

10. Квазилинейное приближение и эффекты нестационарности

Предположение о нестационарности дрейфового течения позволяет поставить вопрос об эффективном коэффициенте турбулентной диффузии, связанном с перестройкой топологии линий тока. Начнём рассмотрение эффектов нестационарности течения с квазилинейного подхода. Это позволяет сохранить выражение для малого перколяционного параметра в виде, соответствующем градиентной модели, $\varepsilon_* = (U_d/V_0)^{1/(1+\nu)}$. Тогда несложно

привести выражение для D_{eff} к перенормированному квазилинейному виду:

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx P_\infty \frac{a^2}{\tau} \approx w_d^2(\varepsilon) \tau(\varepsilon) P_\infty(\varepsilon). \quad (83)$$

Здесь использованы оценка дрейфовой скорости $U_d \approx w_d P_\infty$ и оценка доли пространства, занятой перколяционными линиями тока, $P_\infty \approx \lambda/a(\varepsilon_*)$. Сделав подстановку $\tau \approx 1/\omega$, получим скейлинг Юшманова, учитывающий эффекты нестационарности в квазилинейном приближении [49]:

$$D_{\text{eff}} \approx \frac{U_d^2}{\omega} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \right)^{\nu/(1+\nu)} \approx \frac{U_d^2}{\omega} \left(\frac{V_0}{U_d} \right)^{4/7} \propto U_d^{10/7} V_0^{4/7} \frac{1}{\omega}. \quad (84)$$

С точки зрения зависимости D_{eff} от амплитуды возмущений V_0 , выражение (84) соответствует переходу от квазилинейного режима с $D_{\text{eff}} \propto V_0^2$ к перколяционному с $D_{\text{eff}} \propto V_0^{4/7}$. Скейлинг (84) использовался для интерпретации данных численного моделирования неоклассического переноса в токамаках [49]. Зависимость $D_{\text{eff}} \propto V_0^{4/7}$ подтверждается результатами численного эксперимента (рис. 11).

Сложность одновременного учёта нескольких факторов приводит к тому, что часто нестационарные течения рассматриваются только на основе квазилинейного подхода. Так, для течений с характерной частотой изменения параметров $\omega \approx 1/T_0$ можно использовать квазилинейную оценку [51]

$$D_{\text{eff}} = \int_0^\infty C(t) dt \approx \frac{V_0^2}{\omega}. \quad (85)$$

Здесь $C(t)$ — автокорреляционная функция скорости. Однако такой подход, который хорошо работает в случае очень больших частот, не отражает физической сущности процессов в случае малых частот (низкочас-

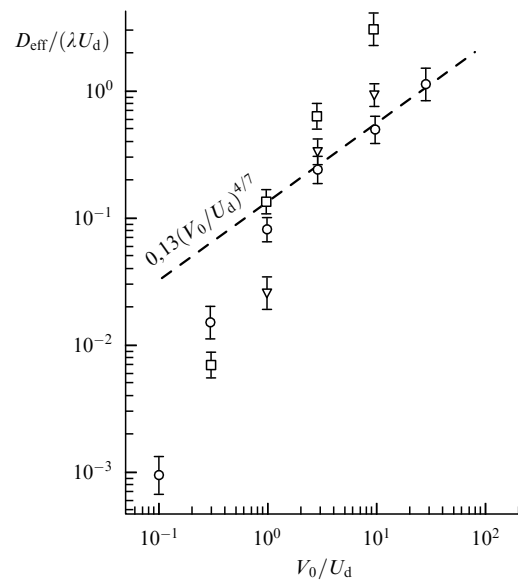


Рис. 11. Данные численного эксперимента по определению зависимости эффективного коэффициента диффузии D от амплитуды турбулентных флуктуаций.

тотный предел),

$$D_{\text{eff}} \approx \frac{V_0^2}{\omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad (86)$$

когда пробег частицы $l \approx V_0/\omega$ за время $T_0 \approx 1/\omega$ может существенно превысить реальный корреляционный масштаб. Действительно, в низкочастотном пределе процессы пересоединения происходят за времена, много меньшие, чем $1/\omega$, что не позволяет частицам скаляра проделать весь путь вдоль первоначально "оседланной" линии тока. Поэтому здесь необходимо учитывать перестройку топологии течения, которая радикально меняет декорреляционные механизмы.

11. Низкочастотный предел и дрейф

Очевидно, что замена $\tau \approx 1/\omega$ и использование малого параметра, соответствующего стационарной модели, являются достаточно грубой аппроксимацией, особенно если учесть, что характерные частоты, для которых предлагалось использовать эту модель (турбулентный перенос в токамаках), лежат в очень широком диапазоне, $10 < \omega_{ci} < 150$ кГц [52, 53]. Согласно перколяционному подходу, нам следует найти уравнение для малого параметра ε_* , которое будет "органично" включать в себя как частоту возмущений ω , так и масштаб дрейфовой скорости U_d .

Рассматриваемая в этом разделе модельная функция тока имеет вид

$$\Psi = \Psi_0(x, y, \omega t) + U_d(x \cos \omega t - y \sin \omega t). \quad (87)$$

Здесь Ψ_0 — главная часть функции тока, $V_0 \propto \Psi_0/\lambda$. В результате процессов пересоединения линий тока возникнет случайная система дрейфовых течений. В рассматриваемом случае ключевой величиной является параметр D_Ψ , описывающий процессы пересоединения в терминах функции тока,

$$D_\Psi(\varepsilon) \propto \frac{(\Delta\Psi(\varepsilon))^2}{\tau_{\text{cor}}(\varepsilon)}, \quad (88)$$

где τ_{cor} — характерное корреляционное время. Заметим, что существует два способа оценить D_Ψ . Первый способ основывается на формальном представлении о топологии возмущённой дрейфом функции тока:

$$D_\Psi(\varepsilon) \propto \frac{(\varepsilon\Psi_0)^2}{\tau_b} \approx \frac{(\varepsilon\Psi_0)^2}{L(\varepsilon)} V_0. \quad (89)$$

В качестве корреляционного времени использовано баллистическое время движения частиц скаляра вдоль перколяционной линии тока $\tau_b \approx L/V_0$. Второй способ связан с использованием внешних факторов (U_d , ω), определяющих реконструкцию поля течения,

$$D_\Psi(\varepsilon) \propto (U_d a(\varepsilon))^2 \omega. \quad (90)$$

Напомним, что в отсутствие перестройки топологии условие $\Delta\Psi \approx V_0 \Delta(\varepsilon) \approx U_d a(\varepsilon)$ являлось уравнением перенормировки для определения малого перколяционного параметра в работе [49], где в качестве условия перенормировки предлагалось использовать уравне-

ние [54, 55]

$$\frac{(\varepsilon\Psi_0)^2}{\tau_b(\varepsilon)} = (U_d a(\varepsilon))^2 \omega, \quad (91)$$

которое основано на эквивалентности определений (89) и (90) коэффициента диффузии линий тока. В левой части уравнения (91) стоят величины, связанные с геометрическими особенностями случайного течения. В правой части (91) содержатся величины, учитывающие внешнее воздействие. В терминах характерных времён условие перенормировки (91) может быть представлено в виде

$$\tau_b(\varepsilon) = \tau_\Psi(\varepsilon), \quad \text{или} \quad \frac{L(\varepsilon)}{V_0} = \frac{\Delta\Psi(\varepsilon)^2}{D_\Psi(\varepsilon)}. \quad (92)$$

Уравнение (92) может быть легко решено. Полученное в результате этого решения новое выражение для малого параметра

$$\varepsilon_* \approx \left(\frac{U_d}{V_0} \right)^{2/[3(1+v)]} \left(\frac{1}{\text{Ku}} \right)^{1/[3(v+1)]} \propto U_d^{2/7} V_0^{-3/7} \omega^{1/7} \quad (93)$$

опирается на одновременное использование двух безразмерных величин: U_d/V_0 и числа Кубо. Соответствующее выражение для эффективного коэффициента диффузии принимает вид

$$D_{\text{eff}} = \int_0^\infty \frac{d\Psi_1}{\Psi_1} P_\infty(\Psi_1) \frac{a^2(\Psi_1)}{\tau(\Psi_1)} \approx \approx \lambda V_0 \left(\frac{U_d}{V_0} \right)^{2/[3(1+v)]} \left(\frac{\lambda\omega}{V_0} \right)^{1/[3(v+1)]} \propto U_d^{2/7} V_0^{4/7} \omega^{1/7}. \quad (94)$$

Последний результат соответствует низкочастотному пределу, который, в отличие от квазилинейной зависимости $D_{\text{eff}} \propto 1/\omega$, характеризуется увеличением эффективного переноса при возрастании частоты, $D_{\text{eff}} \propto \omega^{1/7}$. Такая форма зависимости позволяет адекватно описывать эффекты длинных корреляций и хорошо согласуется с данными численного моделирования (рис. 12), приведёнными в работе [49]. Рассмотрение зависимости D_{eff} от амплитуды скорости дрейфового потока также указывает на корректный характер смены режимов. Так,

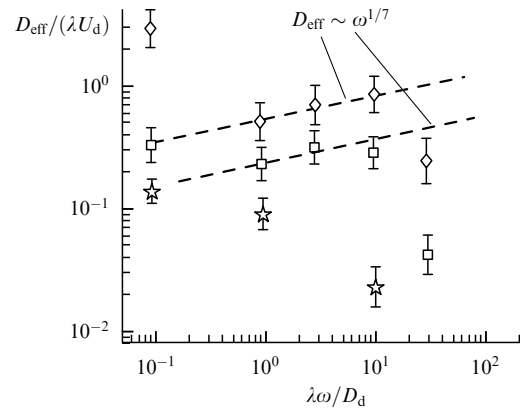


Рис. 12. Данные численного эксперимента по определению зависимости эффективного коэффициента диффузии D от частоты ω . Ромбы соответствуют значениям числа Кубо $\text{Ku} = 5$, квадраты — $\text{Ku} = 3$, звёзды — $\text{Ku} = 0,5$.

квазилинейный режим описывается более резкой зависимостью $D_{\text{eff}} \propto U_d^{10/7}$, чем зависимость $D_{\text{eff}} \propto U_d^{2/7}$ в рассмотренном нами низкочастотном режиме. Для коэффициента гамильтоновой диффузии получим

$$D_{\Psi} \propto V^{24/21} \omega^{13/21} U_d^{26/21}. \quad (95)$$

Оценим влияние диффузионного ухода частиц с линий тока, используя коэффициент "затравочной" (молекулярной) диффузии D_0 :

$$\tau_b(\varepsilon_*) = \tau_{\Psi}(\varepsilon_*) \ll \tau_D, \quad \tau_D \approx \frac{\Delta^2(\varepsilon_*)}{D_0} \approx \frac{\lambda^2 \varepsilon_*^2}{D_0}. \quad (96)$$

Это позволит получить ограничение на величину "затравочной" диффузии D_0 и сформировать иерархию временных масштабов:

$$\frac{\lambda}{V_0} \ll \tau_b(\varepsilon_*) = \tau_{\Psi}(\varepsilon_*) \ll \tau_D(\varepsilon_*) \ll \frac{1}{\omega}, \quad (97)$$

соответствующую низкочастотным дрейфовым режимам.

12. Эволюция корреляционных масштабов и перколяционный перенос

Первоначально в качестве условия перенормировки малого параметра перколяционной модели использовались балансы характерных времён или потоков [24, 51]. Здесь мы рассмотрим эволюционный подход к формулированию условия перенормировки [56]. Этот подход основан на сопоставлении двух независимых выражений, используемых в теории перколяции для описания корреляционного масштаба:

$$L(\varepsilon) \approx \lambda \left(\frac{a(\varepsilon)}{\lambda} \right)^{D_H}, \quad a(\varepsilon) \approx \frac{\lambda}{|\varepsilon|^v}. \quad (98)$$

Так, на начальном этапе формирования структуры естественно ожидать возрастания ширины стохастического слоя $\Delta = \Delta(t)$, связанной с величиной малого параметра $\varepsilon_* \approx \Delta/\lambda$. Формально это ведёт к уменьшению корреляционного масштаба,

$$a_D(t) \approx \frac{\lambda}{|\varepsilon|^v} \propto \lambda \left(\frac{\lambda}{\Delta(t)} \right)^v. \quad (99)$$

С другой стороны, одновременно с увеличением длины перколяционной линии тока (или увеличением пути, проходимого частицей скаляра вдоль линии тока), $L(t) \propto V_0 t$, возрастает корреляционный масштаб:

$$a_l(t) \approx \left(\frac{L(t)}{\lambda} \right)^{1/D_H} \approx \left(\frac{V_0 t}{\lambda} \right)^{1/D_H}. \quad (100)$$

В рамках теории среднего поля рассмотрение баланса между $a_D(t)$ и $a_l(t)$ позволяет получить оценку характерного времени t_0 , которое должно использоваться как корреляционный масштаб для определения эффективного коэффициента турбулентной диффузии D_{eff} .

Рассмотрим физически мотивированные аппроксимации для описания возрастания ширины стохастического слоя. Так, в случае диффузионного характера возрастания ширины стохастического слоя, $\Delta^2(t) \approx D_0 t$,

находим

$$\lambda \left(\frac{V_0 t_0}{\lambda} \right)^{1/D_H} = \frac{\lambda}{(\sqrt{D_0 t_0}/\lambda)^v}. \quad (101)$$

В результате вычислений получаем оценку

$$t_0 \approx \frac{\lambda^2}{D_0} \left(\frac{1}{\text{Pe}} \right)^{1/(v+3)} = \frac{\lambda^2}{D_0} \left(\frac{D_0}{\lambda V_0} \right)^{1/(v+3)}, \quad (102)$$

которая после подстановки в формулу для ширины стохастического слоя даёт

$$\Delta \approx (D_0 t_0)^{1/2} \approx \lambda \left(\frac{1}{\text{Pe}} \right)^{1/(v+3)}. \quad (103)$$

Несложно заметить, что выражение (103) в точности совпадает с соответствующим выражением в случае стационарной перколяционной модели и соответствующая оценка эффективного коэффициента диффузии даётся ставшей классической формулой $D_{\text{eff}} \approx V_0 \Delta \approx \lambda V_0 [D_0/(\lambda V_0)]^{3/13}$ [33].

Естественно, можно использовать и другие выражения для описания возрастания ширины стохастического слоя. Так, в теории динамических систем широко используется линейная оценка, $\Delta(t) \propto t$. В контексте описания эффектов нестационарности несложно представить последнее выражение как $\Delta(t) = (\lambda \omega) t$, где ω — характерная частота внешних возмущений. Тогда рассмотренные балансы корреляционных масштабов в виде

$$\lambda \left(\frac{V_0 t_0}{\lambda} \right)^{1/D_H} = \frac{\lambda}{(\omega t_0)^v} \quad (104)$$

позволяет получить ещё одну оценку характерного времени t_0 :

$$t_0 \approx \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda \omega}{V_0} \right)^{1/(v+2)} \approx \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\text{Ku}} \right)^{1/(v+2)}. \quad (105)$$

Теперь выражение для ширины стохастического слоя принимает вид, соответствующий нестационарной перколяционной модели:

$$\Delta = \lambda \varepsilon_* = \lambda \left(\frac{1}{\text{Ku}} \right)^{1/(v+2)}, \quad (106)$$

где оценка коэффициента турбулентной диффузии даётся выражением, полученным ранее для случая нестационарной перколяционной модели, $D_{\text{eff}} \approx V_0 \Delta \approx \lambda V_0 [(\lambda \omega)/V_0]^{3/10}$ [42].

Приведённые вычисления доказывают эффективность представленного здесь альтернативного метода перенормировки, который позволяет применять баланс корреляционных масштабов как основу построения новых моделей перколяционного транспорта, используя различные аппроксимации для эволюции ширины стохастического слоя $\Delta(t)$ [57, 58]. Естественно, эти аппроксимации должны удовлетворять физическим свойствам исследуемого течения.

13. Турбулентная диффузия в течениях с обратным каскадом энергии

Подчёркнём важную особенность перколяционного подхода к описанию турбулентного переноса. Используемый для этой цели метод перенормировки построен на

выделении главного процесса, ответственного за формирование стохастического слоя. Анализ физической модели должен обеспечить выявление малого параметра, непосредственно связанного с "ключевой" физической величиной. Одна из важнейших величин в теории турбулентности — это введенная Колмогоровым скорость диссипации энергии ε_K . С одной стороны, это фундаментальная характеристика развитого турбулентного течения, а с другой, именно ε_K в двумерных течениях является ключевой величиной, позволяющей анализировать обратный каскад энергии. Обратный каскад служит "пусковым" механизмом для формирования крупномасштабных структур. Именно в таких ситуациях могут образовываться перколяционные линии тока, которые охватывают почти всю область течения и тем самым значительно меняют характер переноса скаляра.

Начальную стадию формирования стохастического слоя будем описывать линейной зависимостью

$$\Delta(t) \propto V_R t \propto \left(\frac{\lambda}{\tau_R} \right) t. \quad (107)$$

Заметим, что линейная оценка скорости возрастания ширины стохастического слоя на начальном этапе эволюции является вполне естественной и широко используется в теории динамических систем [59]. Характерный временной масштаб τ_R в нашей постановке задачи может зависеть только от двух параметров, ε_K и Δ . Формируя комбинацию этих двух ключевых величин, $\varepsilon_K [M^2 c^{-3}]$ и $\Delta [M]$, получаем оценку

$$\tau_R(\Delta, \varepsilon_K) \propto \left(\frac{\Delta^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3}. \quad (108)$$

Использование формы скейлинга для характерного времени неоднократно практиковалось при анализе как гидродинамической, так и конвективной турбулентности [60, 61]. Например, Монин для описания относительной диффузии применял аналогичную оценку:

$$\frac{1}{\tau(k, \varepsilon_K)} \approx (k^2 \varepsilon_K)^{1/3}. \quad (109)$$

Здесь k — волновое число, используемое для фурье-представления уравнения диффузии. Аналогичные аргументы использовал и Бэтчелор при рассмотрении переходного (баллистического) режима относительной диффузии [32].

Для характерной скорости получим скейлинг

$$V_R(\Delta, \varepsilon_K) \propto \lambda \left(\frac{\varepsilon_K^2}{\Delta} \right)^{1/3}. \quad (110)$$

Аналогичная оценка использовалась в моделях Паркера для скорости пересоединения силовых линий магнитного поля [62], $V_P \propto D_m / \Delta_e$. Здесь V_P — скорость пересоединения силовых линий, D_m — коэффициент магнитной диффузии, Δ_e — толщина слоя пересоединения. Видно, что наша оценка скорости пересоединения линий тока качественно согласуется с формулой Паркера. Скорость прямо пропорциональна параметру, описывающему диссипацию, и обратно пропорциональна ширине слоя. Заметим, что в рамках перколяционного подхода мы хотим сохранить доказавшую свою эффективность иерархию пространственных масштабов $\Delta \approx \lambda \varepsilon \ll \lambda \ll$

$\ll a \ll L$. Другим важным аргументом является то, что такой выбор характерного масштаба позволяет рассматривать τ_R ,

$$\tau_R \propto \left(\frac{\Delta^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \ll \left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3}, \quad (111)$$

как оценку времени пересоединения линий тока, происходящих внутри стохастического слоя [63]. Пересоединение линий тока в условиях непрерывной генерации обратным каскадом новых структур является важнейшим механизмом, формирующим перенос скаляра в рамках этой модели.

Временная эволюция стохастического слоя в рассматриваемой модели описывается формулой

$$\Delta \approx \left(\frac{\lambda}{\tau_R(\Delta)} \right) t \approx \lambda \left(\frac{\varepsilon_K}{\Delta^2} \right)^{1/3} t. \quad (112)$$

После вычислений получаем скейлинг

$$\Delta(t) \approx \lambda \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^{1/5} t^{3/5}. \quad (113)$$

Предполагая равенство корреляционных масштабов, $a_D(t_0) \approx a_l(t_0)$, которое в данном случае является условием перенормировки [56, 63],

$$\lambda \left(\frac{V_0 t_0}{\lambda} \right)^{1/D_H} = \frac{\lambda}{(\Delta(t_0)/\lambda)^v}, \quad (114)$$

получим оценку характерного времени

$$t_0 = \left(\frac{\lambda}{V_0} \right)^{5/12} \left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_K} \right)^{7/36}. \quad (115)$$

Здесь и далее $D_H = 1 + 1/\nu$, $\nu = 4/3$. Прделав несложные вычисления, находим малый перколяционный параметр

$$\varepsilon_* \approx \frac{\Delta(t_0)}{\lambda} \approx \left[\frac{(\varepsilon_K \lambda)^{1/3}}{V_0} \right]^{1/4}, \quad (116)$$

а также ширину стохастического слоя

$$\Delta(t) \approx \lambda \left(\frac{U_K}{V_0} \right)^{1/4}, \quad (117)$$

в котором появляется характерная скорость $U_K \approx (\varepsilon_K \lambda)^{1/3}$. Эффективное время пересоединения линий тока τ_R здесь имеет традиционную для сильнотурбулентных режимов обратно пропорциональную зависимость от скорости, $\tau_R \propto 1/V_0^{1/6}$. Выражение для эффективного коэффициента диффузии приобретает следующий вид [63]:

$$D_{\text{eff}}(V_0) \approx V_0 \Delta(\varepsilon_*) \approx V_0 \lambda \left[\frac{(\varepsilon_K \lambda)^{1/3}}{V_0} \right]^{1/4} \propto V_0^{3/4} \varepsilon_K^{1/12}. \quad (118)$$

Как и следовало ожидать, зависимость эффективного коэффициента диффузии от ε_K , в отличие от зависимости величин, характеризующих процессы пересоединения линий тока, является довольно слабой. Зависимость эффективного коэффициента диффузии от амплитуды

турбулентных пульсаций скорости вполне согласуется с современными представлениями о переносе в режимах с сильной турбулентностью. Используя критерий ограниченности системы размером L_0 , $a(\varepsilon) \leq L_0$, получим

$$(\varepsilon_K \lambda)^{1/3} \leq V_0 \leq (\varepsilon_K \lambda)^{1/3} \left(\frac{L_0}{\lambda} \right)^3. \quad (119)$$

Условие (119) ограничивает масштаб турбулентных пульсаций в рассматриваемых течениях. С другой стороны, оценим влияние диффузионного ухода частиц с линий тока, используя коэффициент молекулярной диффузии D_0 :

$$\tau_R(\varepsilon_*) \leq \tau_D(\varepsilon_*), \quad \tau_D \approx \frac{\Delta^2(\varepsilon_*)}{D_0} \approx \frac{\lambda^2 \varepsilon_*^2}{D_0}. \quad (120)$$

Это позволит получить ограничение на величину D_0 .

Вычисленный коэффициент турбулентной диффузии позволяет оценить величины эффектов переноса в двумерных и квазилинейных турбулентных течениях в области обратного каскада. Например, используя данные измерений крупномасштабного переноса радиоактивных примесей в атмосфере [64], мы получим величины порядка: $\varepsilon_K \approx 1 \text{ см}^2 \text{ с}^{-3}$, $\lambda_0 \approx 10^4 \text{ см} \approx 100 \text{ м}$, $V_0 \approx 10^3 \text{ см с}^{-1} \approx 10 \text{ м с}^{-1}$, $D \approx 5 \times 10^6 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1} \approx 500 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Результат для коэффициента турбулентной диффузии хорошо согласуется с экспериментально определённым значением [63] $D_{\text{expt}} \approx (10^2 - 10^3) \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$.

14. Инкремент стохастической неустойчивости в перколяционном пределе

Рассмотрение нестационарных двумерных случайных течений представляет особый интерес, поскольку хорошо известно [65, 66], что в стационарном случае в ограниченной двумерной области не происходит экспоненциального растяжения "жидкого элемента" и, следовательно, отсутствует экспоненциальное разбегание первоначально близких линий тока. Фактически в стационарном случае мы имеем дело с интегрируемой одномерной гамильтоновой задачей, и только в случае перестройки топологии течения имеется возможность исследовать стохастическое поведение, поскольку нестационарность эквивалентна появлению дополнительной степени свободы.

Использованная нами перколяционная "иерархия" масштабов начинается с ширины стохастического слоя

$$L \approx \frac{a}{\varepsilon} \gg a \gg \lambda \gg \frac{h}{V_0} \approx \Delta \approx \lambda \varepsilon. \quad (121)$$

Заметим, что площадь, соответствующая стохастическому слою Δ , оценивается как

$$L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon) \approx \frac{a(\varepsilon) \lambda \varepsilon}{\varepsilon} \approx a \lambda \gg \lambda^2, \quad (122)$$

что является естественным, поскольку в стохастическом слое находится далеко не одна линия тока (рис. 13). Однако в то же время это означает, что должен существовать пространственный масштаб l_s , характеризующий размер областей, в которых нарушается адиабатический инвариант (экспоненциально малый слой вблизи сепаратрис). Действительно, адекватной оценкой l_s

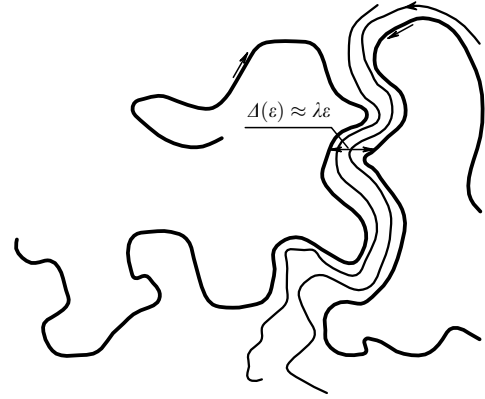


Рис. 13. Стохастический слой в двумерном случайном течении. Жирные кривые ограничивают стохастический слой, тонкими кривыми показаны отдельные линии тока внутри стохастического слоя.

является выражение [67]

$$L(\varepsilon) l_s(\varepsilon) \approx \lambda^2, \quad \text{или} \quad l_s \approx \frac{\lambda^2}{L(\varepsilon)} \approx \lambda \varepsilon^{v+1} \ll \Delta \approx \lambda \varepsilon. \quad (123)$$

Расширенная иерархия пространственных масштабов имеет вид

$$\lambda \varepsilon^v \approx l_s \ll \Delta \approx \lambda \varepsilon \ll \lambda \ll a \approx \frac{\lambda}{\varepsilon^v} \ll L \approx \frac{a}{\varepsilon} \approx \frac{\lambda}{\varepsilon^{v+1}}, \quad (124)$$

Введение нового масштаба, $l_s \approx \lambda \varepsilon^{v+1}$, позволяет получить оценку инкремента стохастической неустойчивости в низкочастотном пределе. В рамках одномасштабного подхода соответствующий скейлинг получен в работе Грузинова, Исиченко и Калды [42]. Характерное время перезамыкания двух ближайших сепаратрис можно оценить как

$$\gamma_s \approx \frac{1}{\tau_s} \approx \frac{V_s}{l_s} \approx \frac{\lambda \omega}{l_s} \approx \frac{L(\varepsilon) \omega}{\lambda}, \quad (125)$$

где $V_s = \lambda \omega$ — оценка скорости движения сепаратрис. Заметим, что неявно величина V_s уже использовалась ранее в балансе характерных времён, соответствующем нестационарному перколяционному течению,

$$\frac{L}{V_0} = \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad (126)$$

где $\varepsilon/\omega = \Delta/(\lambda \omega) = \Delta/V_s$. Кроме того, условие $Ku = V_0/(\lambda \omega) > 1$ эквивалентно условиям

$$\frac{L}{\Delta} = \frac{V_0}{V_s} > 1. \quad (127)$$

Приведём полную иерархию временных масштабов рассматриваемой перколяционной модели [42, 67]:

$$\tau_s \approx \frac{l_s}{V_s} \approx \frac{\lambda}{L \omega} \approx \frac{\lambda}{a} \frac{\varepsilon}{\omega} \ll \frac{\varepsilon}{\omega} \ll T_0 \approx \frac{1}{\omega}. \quad (128)$$

С другой стороны, соотношение характерных времён $\tau_s \approx \tau_b$, которое может быть представлено в виде

$$\frac{\lambda}{L(\varepsilon_*) \omega} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}, \quad (129)$$

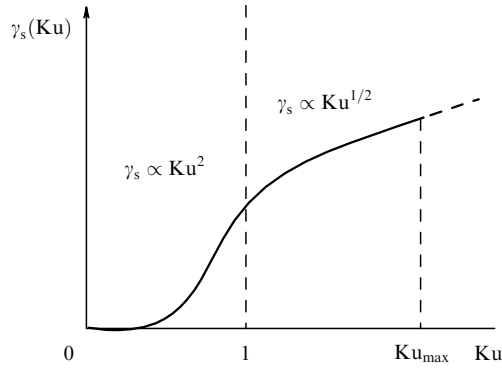


Рис. 14. Зависимость инкремента стохастической неустойчивости от числа Ку в перколяционном пределе.

позволяет определить малый перколяционный параметр ε_* :

$$\varepsilon_* \approx \left(\frac{\lambda \omega}{V_0} \right)^{1/[2(v+1)]} \approx \left(\frac{1}{Ku} \right)^{3/14} \quad \text{для } v = \frac{4}{3}. \quad (130)$$

Тогда окончательное выражение для инкремента стохастической неустойчивости γ_s принимает вид (рис. 14)

$$\gamma_s \approx \frac{1}{\tau_s} \approx \omega \frac{L(\varepsilon_*)}{\lambda} \approx \omega \sqrt{Ku}. \quad (131)$$

Выражение (131) заметно отличается от квазилинейного результата, полученного Кадомцевым и Погуде ($\gamma_s \approx \omega Ku^2$ [22]), и хорошо согласуется с результатами численных экспериментов [68].

15. Стохастическая неустойчивость и обратный каскад

Метод, использованный для получения скейлинга $\gamma_s \approx \omega Ku^{1/2}$, тесно связан с представлениями Бэтчелора о характере эволюции облака скаляра (рис. 15) в области диссипативных масштабов под действием стохастической неустойчивости [31]. Здесь всё ещё имеет место каскадный характер эволюции скаляра, несмотря на отсутствие каскада энергии,

$$k < k_v \approx \left(\frac{\varepsilon_K}{v_f^3} \right)^{1/4}, \quad (132)$$

где v_f — коэффициент вязкости. Нижней границей каскада скаляра является масштаб $k_b \equiv 1/l_b$, который определяется балансом диффузионного τ_D и диссипативного τ_v характерных времён:

$$\tau_D \approx \frac{l_b^2}{D_0} = (v_f \varepsilon_K)^{1/2} \approx \tau_v. \quad (133)$$

Здесь τ_v одновременно играет роль характерного времени, связанного со стохастической неустойчивостью, $\tau_s \approx \tau_v$, поскольку в вязкостном интервале $V_l \propto l$ и, следовательно, первоначально близкие жидкие элементы разбегаются экспоненциально [31, 69]. Авторы работы [42] использовали потенциал перколяционного метода, который позволил связать характерное время, ответственное за эффекты стохастической неустойчиво-

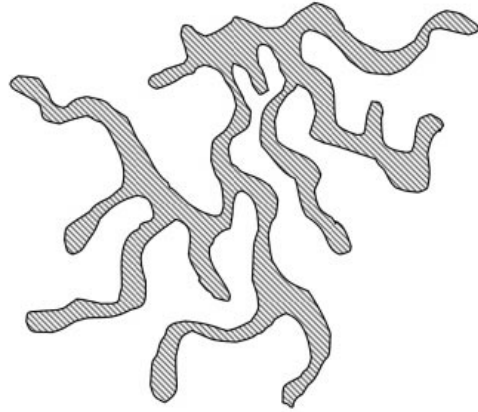


Рис. 15. Распыление облака скаляра вследствие стохастической неустойчивости.

сти, с особенностями топологии двумерных случайных течений. С другой стороны, в перколяционном балансе [42]

$$\tau_b \approx \frac{L}{V_0} = \frac{\lambda \omega}{l_s} \approx \tau_s \quad (134)$$

вместо диффузионного времени τ_D использовано τ_b , которое в данной постановке отвечает за "перемешивание" скаляра. Однако связь с каскадным характером процессов при этом была утрачена, поскольку в качестве параметра модели использовалась только частота ω .

Заметим, что в теории колмогоровской турбулентности вопрос о влиянии стохастической неустойчивости возникает в связи с рассмотрением как декорреляционных механизмов (масштаб Бэтчелора l_b), так и переходных квазибаллистических режимов относительной диффузии,

$$l_R^2 \propto V_R(\varepsilon_K) t^2 \quad (135)$$

(скейлинг Бэтчелора). Указанные эффекты также анализируются на основе баланса характерных времён с использованием колмогоровского потока энергии по спектру ε_K как параметра [1, 31, 69]. В рамках перколяционного подхода мы имеем аналогичную возможность. Так, модифицируя оценку характерного времени пересоединения линий тока

$$\tau_R(\Delta, \varepsilon_K) \propto \left(\frac{\Delta^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \quad (136)$$

в стохастическом слое посредством замены ширины стохастического слоя $\Delta \approx \varepsilon \lambda$ пространственным масштабом $l_s \approx \lambda^2/L$, получим

$$\tau_s(\varepsilon_K, l_s) \approx \left(\frac{l_s^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \approx \left[\left(\frac{\lambda^2}{L(\varepsilon_*)} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_K} \right]^{1/3}. \quad (137)$$

Этот скейлинг позволяет оценить характерное время эволюции, связанное с отдельной линией тока. В рассматриваемом случае мы имеем несколько временных масштабов:

$$\tau_s \approx \left(\frac{l_s^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \ll \tau_R \approx \left(\frac{\Delta^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3} \ll \left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_K} \right)^{1/3}. \quad (138)$$

Хорошо известно, что вследствие стохастической неустойчивости облако частиц скаляра в турбулентном течении эволюционирует весьма причудливым образом. В нашей постановке главный декорреляционный механизм характеризуется временным масштабом τ_s . Для определения перколяционного параметра ε используем баланс характерных времён, $\tau_s(\varepsilon) \approx \tau_b(\varepsilon)$. Соответствующее уравнение,

$$\left[\left(\frac{\lambda^2}{L(\varepsilon_*)} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_K} \right]^{1/3} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}, \quad (139)$$

легко решается, если использовать традиционную зависимость для перколяционного описания линий тока:

$$L(\varepsilon) \approx \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon} \approx \lambda \frac{1}{\varepsilon^{v+1}}. \quad (140)$$

Малый перколяционный параметр модели даётся выражением

$$\varepsilon_*^{v+1} \approx \left(\frac{\lambda}{V_0} \right)^{3/5} \left(\frac{\varepsilon_K}{\lambda^2} \right)^{1/5}. \quad (141)$$

Соответственно инкремент стохастической неустойчивости имеет вид

$$\gamma_s \approx \frac{1}{\tau_s} \approx \frac{V_0}{L(\varepsilon_*)} \approx \left(\frac{V_0}{\lambda} \right)^{2/5} \left(\frac{\varepsilon_K}{\lambda^2} \right)^{1/5} \propto V_0^{2/5} \varepsilon_K^{1/5}. \quad (142)$$

Зависимость инкремента от амплитуды турбулентных пульсаций V_0 в перколяционном пределе оказалась традиционно медленной, $\gamma_s \propto V_0^{2/5}$, а зависимость от потока энергии по спектру ε_K — гораздо более выраженной, чем в формуле для коэффициента турбулентной диффузии. Это естественно, поскольку интенсивность процессов пересоединения и эволюция стохастических слоёв, в отличие от таковых в случае процессов переноса, непосредственно зависят от вкладываемой в систему мощности. Фактически нам удалось частично реализовать тезис Зельдовича о взаимном дополнении теории перколяции и каскадной феноменологии в данной модели. Здесь поток энергии по спектру ε_K является ключевым параметром, позволяющим оценить характерное время пересоединения, связанное с отдельной перколяционной линией тока.

16. Заключение

В обзоре рассмотрены перколяционные модели турбулентной диффузии, имеющие большое значение для описания аномального переноса в условиях сильной турбулентности. Главное внимание уделено скейлинговому анализу различных режимов. Рассмотрены квазилинейное приближение, одномасштабные перколяционные модели переноса, стохастическая неустойчивость. Детально исследован выбор условий перенормировки малого параметра перколяционных моделей. Показано, как эффекты "длинных корреляций" входят в перколяционное описание переноса.

Рассмотрены новые подходы к описанию турбулентного переноса с учётом эффектов пересоединения токовых линий. В частности, показано, что использование в качестве базового параметра колмогоровского потока энергии по спектру ε_K позволяет описать перенос в условиях формирования крупномасштабных структур.

В настоящем обзоре детально исследовано влияние дрейфового потока и эффектов нестационарности на поведение пассивного скаляра в рамках перколяционного подхода. Показано, что полученные ранее оценки являются квазилинейными и основываются на немотивированном использовании результатов для стационарного случая. Новый подход позволяет включить в рассмотрение характерную скорость дрейфового потока U_d и характерную частоту возмущений ω . Полученная аппроксимация согласуется как с квазилинейной зависимостью, так и с перколяционной одномасштабной моделью.

Перколяционный метод позволяет анализировать эффекты, связанные с эволюцией стохастических слоёв в двумерных случайных течениях. С его помощью удаётся получить важную информацию об инкрементах стохастической неустойчивости. Это стало возможным благодаря перколяционной иерархии пространственных и временных масштабов. Заметим, что в большинстве случаев эффекты стохастической неустойчивости всё ещё оцениваются только по порядку величины, $\gamma_s \propto 1/\tau_s \propto V_0/\lambda$. Развитые в перколяционном подходе модели позволяют исследовать более сложные эффекты, опираясь на представление о существовании характерных масштабов, связанных с отдельными линиями тока, $l_s(\Delta) \propto \lambda^2/L(\Delta)$.

Анализ многочисленных моделей турбулентного переноса показывает, что сочетание баланса корреляционных масштабов с перенормировкой эффективного корреляционного времени позволяет описать разнообразные режимы в течениях как с регулярными, так и с перколяционными структурами. Действительно, переход в режим с большими амплитудами флуктуаций в системе конвективных ячеек, стационарных перколяционных течениях, эволюционных течениях с эффектами пересоединения неизменно сопровождается сменой характера зависимости временного корреляционного масштаба при увеличении амплитуды флуктуаций.

С другой стороны, незначительная модификация позволяет применять рассмотренные в обзоре подходы к исследованию задач, связанных с неоклассическим переносом [70] и диффузией магнитных силовых линий в плазме [71]. В последнем случае вычисления сводятся к замене числа Кубо $Ku = V_0/(\lambda\omega)$ магнитным числом Кубо $R_m = b_0 L_z / \Delta_\perp$. Здесь b_0 — амплитуда возмущений стохастического магнитного поля, L_z , $\Delta_\perp$ — продольный и поперечный корреляционные размеры соответственно.

Перколяционный подход к описанию турбулентной диффузии далеко не исчерпал своих возможностей. Так, мы не затронули здесь такого важного аспекта проблемы, как многомасштабные перколяционные модели, в которых функция тока, характеризующая поле течения, даётся скейлингом:

$$\Psi(\lambda) \propto \Psi_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^M,$$

где λ_0 , Ψ_0 , M — параметры модели. В такой постановке удаётся получить новые результаты как для коэффициентов аномальной диффузии в двумерных случайных течениях, так и для инкрементов стохастической неустойчивости [25, 51, 56]. Здесь появляется возможность установить связь между многомасштабным подходом и уравнениями в дробных производных, описывающими

аномальный перенос в задачах со случайными широкими течениями [72–75].

В заключение необходимо отметить, что, несмотря на ограниченность области применимости скейлингового метода, рассмотренные в обзоре подходы оказываются достаточно эффективным средством анализа эффектов турбулентного транспорта и дают возможность лучше понять корреляционные аспекты процессов переноса. Как мы видели, перколяционный подход, предложенный Кадомцевым и Погуде более 30 лет назад, позволяет анализировать всё более сложные задачи. Поэтому можно с уверенностью сказать, что работа в этом направлении исследований ещё далека от завершения.

Автор выражает благодарность за ценные замечания и обсуждения Г.С. Голицыну, Н.С. Ерохину, Г.М. Заславскому, В.И. Когану, С.В. Коновалову, Е.А. Кузнецову, А.Б. Михайловскому, В.Д. Пустовитову, А.В. Тимофееву, В.Д. Шаfranову и Э.И. Юрченко.

Список литературы

- Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967) [Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics* Vols 1, 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971, 1975)]
- Баренблатт Г.И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Л.: Гидрометеиздат, 1982) [Barenblatt G.I. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)]
- Frisch U. *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Фриш У. *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: ФАЗИС, 1998)]
- Кляцкин В.И. *УФН* **178** 419 (2008) [Klyatskin V.I. *Phys. Usp.* **51** 395 (2008)]
- Голицын Г.С. *Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями* (Л.: Гидрометеиздат, 1980)
- Лебедев В.В. *Флуктуационные эффекты в макрофизике* (М.: МЦНМО, 2004)
- Childress S., Gilbert A.D. *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
- Zel'dovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983) [Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. *Магнитные поля в астрофизике* (Москва–Ижевск: РХД, Инст. компьютер. исслед., 2006)]
- Bakunin O.G. *Turbulence and Diffusion. Scaling Versus Equations* (New York: Springer, 2008)
- Sornette D. *Critical Phenomena in Natural Sciences* (Berlin: Springer, 2006)
- Зелёный Л.М., Веселовский И.С. (Ред.) *Плазменная гелиофизика* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
- Bakunin O.G. *Chaotic Flows. Correlation Effects, Transport, and Structures* (Berlin: Springer-Verlag, 2011)
- Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения глазами физика* (М.: Физматлит, 2001)
- Учайкин В.В. *УФН* **173** 847 (2003) [Uchaikin V.V. *Phys. Usp.* **46** 821 (2003)]
- Wiggins S. *Chaotic Transport in Dynamical Systems* (New York: Springer-Verlag, 1991)
- Колмогоров А.Н. *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Kolmogoroff A.N. *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **30** 301 (1941)]
- Обухов А.М. *ДАН СССР* **32** 19 (1941) [Obukhov A.M. *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **32** 22 (1941)]
- Кузнецов Е.А., Рубан В.П. *ЖЭТФ* **118** 893 (2000) [Kuznetsov E.A., Ruban V.P. *JETP* **91** 775 (2000)]
- Будаев В.П., Савин С.П., Зелёный Л.М. *УФН* **181** 905 (2011) [Budaev V.P., Savin S.P., Zelenyi L.M. *Phys. Usp.* **54** 875 (2011)]
- Бакунин О.Г. *УФН* **173** 317 (2003) [Bakunin O.G. *Phys. Usp.* **46** 309 (2003)]
- Balescu R. *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Bristol: IOP Publ., 2005)
- Kadomtsev V.B., Pogutse O.P., in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Proc. of the 7th Intern. Conf., IAEA, Innsbruck, Austria, August 23–30, 1978* Vol. 1 (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1978) p. 649
- Зельдович Я.Б. *Письма в ЖЭТФ* **38** 51 (1983) [Zel'dovich Ya.B. *JETP Lett.* **38** 57 (1983)]
- Galeev A.A., Kuznetsova M.M., Zeleny L.M. *Space Sci. Rev.* **44** 1 (1986)
- Isichenko M.B. *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
- Бакунин О.Г. *УФН* **173** 757 (2003) [Bakunin O.G. *Phys. Usp.* **46** 733 (2003)]
- Зелёный Л.М., Милованов А.В. *УФН* **174** 809 (2004) [Zelenyi L.M., Milovanov A.V. *Phys. Usp.* **47** 749 (2004)]
- Taylor G.I. *Proc. London Math. Soc.* **2** **20** 196 (1921)
- Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. *Nucl. Fusion* **1** 82 (1961)
- Richardson L.F. *Proc. R. Soc. Lond. A* **110** 709 (1926)
- Batchelor G.K. *Quart. J. R. Meteorolog. Soc.* **76** 133 (1950)
- Зельдович Я.Б. *ЖЭТФ* **7** 1466 (1937)
- Исиченко М.Б. и др. *ЖЭТФ* **96** 913 (1989) [Isichenko M.B. et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 517 (1989)]
- Saleur H., Duplantier B. *Phys. Rev. Lett.* **58** 2325 (1987)
- Соколов И.М. *УФН* **150** 221 (1986) [Sokolov I.M. *Sov. Phys. Usp.* **29** 924 (1986)]
- Левинштейн М.Е., Щур М.С., Эфрос А.Л. *ЖЭТФ* **69** 2203 (1975) [Levinstein M.E., Shur M.S., Efros A.L. *Sov. Phys. JETP* **42** 1120 (1976)]
- Осипенко М.В., Погуде О.П., Чудин Н.В. *Физика плазмы* **13** 953 (1987) [Osipenko M.V., Pogutse O.P., Chudin N.V. *Sov. J. Plasma Phys.* **13** 550 (1987)]
- Kleva R.G., Drake J.F. *Phys. Fluids* **27** 1686 (1984)
- Stauffer D. *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor and Francis, 1985)
- Fannjiang A., Papanicolaou G.J. *Stat. Phys.* **88** 1033 (1997)
- Avellaneda M., Elliott F. (Jr.), Apelian C.J. *Stat. Phys.* **72** 1227 (1993)
- Грузинов А.В., Исиченко М.Б., Калда Я.Л. *ЖЭТФ* **97** 476 (1990) [Gruzinov A.V., Isichenko M.B., Kalda Ya.L. *Sov. Phys. JETP* **70** 263 (1990)]
- Isichenko M.B., Kalda J.J. *Nonlin. Sci.* **1** 255 (1991)
- Isichenko M.B., Kalda J.J. *Nonlin. Sci.* **1** 375 (1991)
- Bakunin O.G. *Chaos Solitons Fractals* **23** 1703 (2005)
- Misguich J.H. et al. *Physica Mag.* **20** 103 (1998)
- Zimbardo G., Veltri P., Pommois P. *Phys. Rev. E* **61** 1940 (2000)
- Trugman S.A. *Phys. Rev. B* **27** 7539 (1983)
- Yushmanov P.N., Oliakov A.N. *Comm. Plasma Phys. Control. Fusion* **14** 313 (1992)
- Bakunin O.G. *Plasma Phys. Control. Fusion* **45** 1909 (2003)
- Bakunin O.G. *Rep. Prog. Phys.* **67** 965 (2004)
- Horton W. *Rev. Mod. Phys.* **71** 735 (1999)
- Terry P.W. *Rev. Mod. Phys.* **72** 109 (2000)
- Bakunin O.G. *J. Plasma Phys.* **71** 435 (2005)
- Bakunin O.G. *Physica A* **347** 289 (2005)
- Bakunin O.G., in *Review of Plasma Physics* Vol. 24 (Ed. V.D. Shafranov) (Berlin: Springer-Verlag, 2008) p. 53
- Zaslavsky G.M. *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (River Edge, N.J.: Imperial College Press, 1998) [Заславский Г.М. *Физика хаоса в гамильтоновых системах* (Москва–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004)]
- Bohr T. et al. *Dynamical Systems Approach to Turbulence* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
- Zaslavsky G.M. *Phys. Rep.* **371** 461 (2002)
- Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
- Pope S.B. *Turbulent Flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
- Biskamp D. *Magnetohydrodynamic Turbulence* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
- Bakunin O.G. *Physica A* **345** 1 (2005)
- Nieuwstadt F.T.M., van Dop H. (Eds) *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling* (Dordrecht: D. Reidel, 1982)
- Arnold V.I., Khesin B.A. *Topological Methods in Hydrodynamics* (New York: Springer, 1998) [Арнольд В.И., Хесин Б.А. *Топологические методы в гидродинамике* (М.: Изд-во МЦНМО, 2007)]
- Moffatt H.K. et al. (Ed.) *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas* (NATO ASI Series, E, Vol. 218) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992)

67. Bakunin O G *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** 1857 (2005)
68. Zimbardo G et al. *Phys. Plasmas* **2** 2653 (1995)
69. Batchelor G K *Phys. Fluids* **12** II-233 (1969)
70. Wesson J *Tokamaks* (Oxford: Clarendon Press, 1987)
71. Вайнштейн С И *Магнитные поля в космосе* (М.: Наука, 1983)
72. Bakunin O G *J. Plasma Phys.* **72** 647 (2006)
73. Bakunin O G, Schep T J *Phys. Lett. A* **322** 105 (2004)
74. West B J, Bologna M, Grigolini P *Physics of Fractal Operators* (New York: Springer, 2003)
75. Bakunin O G *Physica A* **351** 241 (2005)

Reconstruction of streamline topology, and percolation models of turbulent transport

O.G. Bakunin

Institute of Tokamak Physics, National Research Center "Kurchatov Institute",

pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation

Tel. +7 (499) 492 42 65

E-mail: oleg_bakunin@yahoo.com

This paper discusses in detail the percolation models of turbulent diffusion that help to establish nontrivial relationships between theoretical concepts used in turbulence, dynamical systems, transport, etc. theories. This approach is particularly important due to the need to describe turbulence in the presence of coherent structures, streamline reconstructions, and drift and dissipation effects. In such regimes the conventional quasilinear description is inconsistent with experimental results, necessitating the search for fundamentally new models and approaches. Most attention is given to the scaling concept, an important and widely used tool among theoreticians and experimentalists.

PACS numbers: **05.40. – a**, **47.27.T –**, **47.53. + n**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201303b.0257

Bibliography — 75 references

Received 2 February 2012, revised 27 May 2012

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (3) 257–276 (2013)

Physics – Uspekhi **56** (3) (2013)